arXiv:2301.00572v1 [gr-qc] 2 Jan 2023

时空奇点与曲率发散

István Rácz *

Wigner RCP H-1121 布达佩斯，*Konkoly Thege Miklós út 29-33*，匈牙利

2023年1月3日

摘要

彭罗斯、霍金和 Geroch 的奇点定理预言，在广泛的、具有物理合理性的时空中——这些时空描述了恒星的引力坍缩和宇宙的膨胀——存在不完备且不可延拓的因果测地线。本文利用有关时空延拓的结果表明，如果强宇宙审查假设的某种适当的低正则性形式成立，那么在“ 一般的”类时测地线不完备的极大柯西发展中，潮汐力或曲率的参考系拖曳部分必然会发生平行传播发散。

1 引言

在爱因斯坦引力理论创立后的最初五十年间，许多具有物理意义的精确解中都出现了奇异行为。值得注意的是，在这些时空中，“奇点”总是表现为无界曲率。然而，该理论的广义协变性使得即便是确定时空奇点也成为广义相对论中最引人入胜且最具挑战性的问题之一 [23]。20 世纪 60 年代，这引发了一场激烈的争论，焦点是那些具有对称性的模型中所发现的时空奇点是否具有物理意义 [30, 14]。1965 年，罗杰·彭罗斯运用整体微分几何的方法证明，在描述引力坍缩的时空中，无论是否存在对称性，奇点都必然会出现 [33, 34]。更准确地说，彭罗斯在其开创性工作中证明，如果以下三个条件得到满足，则时空不可能是零测地线完备的：

(1) 零收敛条件成立，即对于所有零向量 k^a， $R_{ab}k^ak^b \geq 0$

*电子邮件地址：racz.istvan@wigner.hu

(2) 时空是整体双曲的，且具有非紧致柯西曲面 Σ；(3) 存在一个闭合陷获面 $\mathscr{T}$。

该定理的证明采用反证法（例如参见 [47, 48]）。首先假设时空是零测地线完备的。接着，条件（3）表明这些测地线开始汇聚，而条件（1）保证它们持续汇聚，因此必然会出现焦点。与此相反，若时空是零测地线完备的，则可利用条件（2）排除这类焦点的出现。只要放弃这一间接假设，矛盾便可消除，并由此验证时空不可能是零测地线完备的。

这阐述了这样一种预期：引力相互作用具有吸引性，因为曲率必然会使零测地线丛汇聚。条件（2）的前半部分也较为温和，因为众所周知，爱因斯坦引力理论具有适定的初值问题。

还要注意，条件（1）非常宽松。它阐述了这样一种预期：引力相互作用具有吸引性，也就是说，如果该条件成立，曲率就必然会使零测地线丛汇聚。条件（2）的前半部分也较为温和，因为众所周知，爱因斯坦引力理论具有适定的初值问题 [3, 4, 53]。后半部分仅假设时空描述的是一个孤立物体的历史。假设（3）的要求则更高。它假定，在一个由二维空间曲面 $\mathscr{T}$ 界定的区域内，引力场足够强，以致从 $\mathscr{T}$ 垂直发出的向外的零射线已经具有负膨胀。事实证明，只要有足够多的能量/物质集中在由 $\mathscr{T}$ [46, 11]界定的空间区域内，这一条件就成立。

该定理的优势在于，上述三个条件都具有纯粹的几何性质。同样的假设可以应用于范围广泛的度规引力理论。值得注意的是，霍金采用彭罗斯定理中使用的新技术手段，立即证明了宇宙学模型中存在不完备因果测地线 [20]。此后不久，彭罗斯、霍金和 Geroch 提出的一系列新颖奇点定理得出结论：在许多符合物理现实的情形下都会出现引力奇点 [20, 21, 18]。然而请注意，这些定理都有一个共同的缺陷：它们将不完备、不可延拓的因果测地线的存在视为时空奇点的同义表述 [23]。

在接下来的几十年里，人们付出了相当大的努力，试图弥合物理直觉与奇点定理结论之间的鸿沟。这些努力都旨在验证：正如奇点定理所预言的那样，某些物理相关量确实会沿着不完备且不可延拓的因果测地线趋于无穷大。然而，迄今仍未找到令人满意的论证。本文的主要目标，是拉近奇点的直观图像与奇点定理的预言之间的距离。

为了稍微拓宽讨论范围，我们先回顾一下：在引力的度量理论中，例如爱因斯坦理论，时空（M, g_{ab}）被设定为一个光滑、豪斯多夫、仿紧、连通、可定向的流形 M。此外，还假定在 M[18, 53]上给定了一个具有洛伦兹号差的光滑度量 g_{ab} 。同时，假定基流形 M 的选取足够大，能够表示与所研究物理系统的历史相容的所有事件。相较之下，不完备且不可延拓的因果测地线的存在——奇点定理预言了这类测地线——或许可以被视为一种警示信号，表明描述膨胀宇宙和恒星引力坍缩的那些时空中缺失了某些部分 [23]。

意识到时空可能并不完备后，自然会问它们能否延拓。回答这个问题时，首先要回想一下，上文对时空的定义仅涉及其基本数学结构。在许多情况下，主要出于数学上的便利，人们假设时空具有光滑的可微结构，其他场也都是光滑的。还要回想，在光滑情形下，Choquet-Bruhat 和 Geroch [2] 的一项开创性成果保证了极大柯西发展的存在性与唯一性（在微分同胚意义下）（另见 [44]）。还要注意，近期已在索伯列夫空间中证明，真空广义相对论初始数据组的极大全球双曲发展（h、K）在 $H^s \oplus H^{s-1}$ 中的存在性与唯一性 [6], 适用于 $s \in \mathbb{N}$ 且满足 $s > n/2 + 1$, 其中n （≥ 3）表示初始数据曲面的维数。鉴于这些结果，至少对于整体双曲时空而言，我们会认为采用极大柯西发展完全足够。

然而，情况要复杂得多。具体而言，存在这样的因果测地线不完备时空：它们包含了在某个本身也“极大”的初始数据超曲面上给定的适当光滑初始数据的“极大”柯西发展。这些柯西发展可以越过柯西视界继续延拓，且穿越该视界时不会发生曲率爆破。克尔时空和 Taub-NUT 时空的极大解析延拓就是直接的例子（参见例如 [18]）。在这两种情况下，穿越极大柯西发展的柯西视界时，广义相对论的预测能力都会丧失。还应指出，这种行为目前仅在具有对称性的时空中被发现。

彭罗斯的宇宙监督猜想的强版本正是在这些棘手情形下提出的 [37, 38]。彭罗斯的强宇宙审查猜想认为，“一般的”紧致或渐近平坦初始数据的极大柯西发展绝不会是更大时空的一部分 [38]。如果这一猜想成立，相应的柯西发展就不可能有柯西视界，尤其是，任何超出该视界的延拓都无从谈起。在探讨与强宇宙审查假设相关的问题以及时空奇点的主要难题时，出现了以下

问题：如何证明“那里”发生了剧烈事件？发生在哪里，又是什么样的事件？（关于许多基本问题的详细讨论，参见例如 [18, 35, 23, 53, 47, 48]。）为回答其中一些问题，不妨先看看我们已经掌握的主要基石：奇点定理、极大柯西发展的存在性，以及我们也可以采纳的强宇宙审查猜想。

仔细考察这些基本概念一段时间后，可以展开如下基于矛盾的论证：考虑一个因果测地线不完备的时空。假设它是某些“典型”的紧致或渐近平坦初始数据的极大柯西发展，并且强宇宙监督猜想适用于这类时空。这些假设保证，此类时空无法在所考虑的可微性类别内延拓。此外，假设沿着两条不完备且不可延拓的因果测地线，都没有发生剧烈变化。特别是假设，当趋近不完备且不可延拓的因果测地线的“理想端点”时，曲率张量的所有潮汐力部分和参考系拖曳部分都保持有界。曲率的这种正则性使得原本极大的柯西发展可以作整体延拓。如果强宇宙审查假设成立，那么这一矛盾使我们可以得出结论：极大柯西发展中的因果测地线不完备性，必定总是伴随着曲率张量某些潮汐力部分和参考系拖曳部分的奇异行为。

本文将仅讨论类时情形。换言之，我们将考察存在不完备且不可延拓的类时测地线的时空。本文的一项主要结果可概括如下：设 (M, g_{ab}) 是一个n维光滑的“一般的”整体双曲时空，并假设 γ 是一条不完备的类时测地线，且在 (M, g_{ab}) 中不可延拓。另假设存在一个由因果测地线构成的 $(n-1)$ 参数族测地线丛 $\mathcal{G}$，其覆盖了 γ 末段的某个开邻域；并且沿 $\mathcal{G}$ 中的各条测地线，相对于一个平行传播的同步基场测得的潮汐力和标架拖曳（或曲率张量的电、磁）[1] 部分，以及潮汐力（或电）部分的一阶横向协变导数的线积分，都有保证一致有界。则 (M, g_{ab}) 在 C^0 Geroch-Traschen 正则性类中可延拓。

本文安排如下：第2节考察定义在 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集上的实函数可延拓性相关的基本结果。第3节回顾时空延拓的基本概念及若干相关结果。本文选定了度量的可微性类别，并

[1]关于潮汐力和参考系拖曳（或曲率的电性和磁性部分）的定义，请参见下文第 5.1 小节中的方程（5.5）。

在第4节讨论强宇宙审查假设的低可微性版本。本文的主要结果在第 5 节中给出，结论和最后的评论则见第6节。

2 实函数的延拓

为了证明一个时空是某个更大时空的一部分，我们需要关于时空可延拓性的结果。不过，作为准备，了解这一概念的一些基本要素也很有裨益。

首先回顾一下，时空由 n 维光滑可微流形表示，其上还给定了适当正则的度规。注意，流形在局部上是 $\mathbb{R}^n$，而度规在相应局部坐标中的分量是实函数，因此，了解定义在 $\mathbb{R}^n$ 子集上的实函数能否延拓，是很有帮助的。惠特尼在 20 世纪 30 年代初研究的正是这一问题 [55, 56]（另见 [22]）。他考虑一个实值函数 $\mathcal{F}$，例如属于 C^m 类，定义在 $\mathscr{A}$（$\mathbb{R}^n$ 的子集）上，并提出了这样的问题：在什么条件下，存在一个 $\mathcal{F}$ 函数，属于 C^ℓ 类，满足 $\ell \leq m$，定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上，并且在 $\mathscr{A}$ 上有 $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$？

为了解决上述问题，惠特尼在 [55] 中引入了“性质 $\mathscr{P}$”这一术语，用来刻画 $\mathbb{R}^n$中的子集，定义如下。[2]

定义 1. 若存在一个正实数 ω，使得 $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ 中的任意两点 x 和 y 都可以通过 $\mathscr{A}$ 中的一条长度为 $L \leq \omega \cdot \rho(x,\ y)$ 的曲线连接，则称点集 $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ 具有性质 $\mathscr{P}$，其中 $\rho(x,\ y)$ 表示点 $x,\ y \in \mathbb{R}^n$之间的欧几里得距离。

惠特尼的主要结果可概括如下：

定理 1. 假设 $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ 具有性质 $\mathscr{P}$，且 $\mathcal{F}(x^1,\ .....,\ x^n)$ 在 $\mathscr{A}$中属于C^m类，其中 $m \in \mathbb{N}$为某个正整数。假设 $\ell \in \mathbb{N}$ 满足 $\ell \leq m$，并且 $\partial^{\ell_1}_{x^1} \cdots \partial^{\ell_n}_{x^n}\mathcal{F}$中的每个 ℓ^{th} 阶导数（其中 $\ell_1 + \cdots + \ell_n = \ell$）都可以定义在 $\mathscr{A}$的边界 $\partial\mathscr{A}$上，使其在 $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \cup \partial\mathscr{A}$中连续。那么存在 $\mathcal{F}$的一个延拓 $\widetilde{\mathcal{F}}$，使得 $\widetilde{\mathcal{F}}$在整个 $\mathbb{R}^n$上属于 C^ℓ 类。

注意，[55, 56] 中已证明，可以在 $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathscr{A}}$中选取光滑（或者在需要时选取解析）的 $\mathcal{F}$。

为了说明性质 $\mathscr{P}$ 在定理 1 中起着至关重要的作用，回顾 [40] 的例 4.1 很有启发性。该例构造了定义在有界子集 $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^2$ 上的光滑实函数 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{F}$ 及其任意固定阶数的偏导数

[2]在文献中，性质 $\mathscr{P}$ 也常被称为拟凸。

在 $\mathscr{A}$ 中都一致有界；然而， $\mathcal{F}$ 甚至无法连续延拓到 $\mathscr{A}$ 的闭包上。

最后请注意，作为一个概念，性质 $\mathscr{P}$ 与底层时空的因果结构毫无关系，即使它被用于刻画其中的坐标片。尽管如此，值得强调的是，对于整体双曲时空——本文的研究正是以这类时空为中心——我们在第 5 节的构造中所采用的坐标域，保证具有性质 $\mathscr{P}$ （见 [40]中的命题 4.1）。

3 时空延拓

首先请注意，在提出时空延拓的概念时，根据上下文的不同，采用了对度量的各种可微性假设。此外，由于我们尚未确定首选的可微性类别，目前最好尽可能灵活地选择所采用的可微性类别。因此，在下文的定义中， C^X 表示解析、 C^∞、C^k、 C^{k-}、 $C^{k,\,\alpha}$ 函数的类别。它也可以表示更复杂的类别，例如 [9]中采用的可微性类别 $\mathcal{C}^{0-,\,\alpha}$ 。采用这一记号，时空延拓可定义如下：

定义 2. 设 M 和 M 是 n维连通、仿紧、豪斯多夫、光滑可微流形，且 (M, g_{ab}) 和 $(M, \widehat{g}_{ab})$ 是带时间定向、度量至少属于 C^X类的时空。若存在一个嵌入 $\Phi\colon M \to M$，使得 $\Phi[M]$ 是 M 的真子集， Φ 是 M 与 $\Phi[M] \subset M$ 之间的微分同胚，并且 Φ 将度量 g_{ab} 映为 $\widehat{g}_{ab}|_{\Phi[M]}$，即 $\Phi^* g_{ab} = \widehat{g}_{ab}|_{\Phi[M]}$，则称 $(\widehat{M}, \widehat{g}_{ab})$ 是 (M, g_{ab}) 的 C^X 延拓。如果 (M, g_{ab}) 存在 C^X 延拓，则称其为 C^X 可延拓。若不存在这样的延拓，则称 (M, g_{ab}) 为 C^X不可延拓。

注意，相关流形的可微性不能低于 C^1 ，这样才能（至少）保证存在连续切空间，并且能够承载连续度量。尽管如此，正如 [19] 中的定理 2.9 所论证的，如果在 M上给定一个 C^r可微结构 $r \geq 1$ ，那么对于每个 $s, r < s \leq \infty$ ，都存在一个与之相容的 C^s可微结构，且该结构在相差 C^s微分同胚的意义下唯一，并且与原结构C^r微分同胚。因此，以上不失一般性地假设两个流形 M 和 M都具有光滑可微结构。还需注意， g_{ab} 的可微性类别不必恰好是 C^X，也就是说， g_{ab} 可能属于更高的可微性类别。

我们在本节结尾简要回顾其中一些关于时空延拓的最重要结果。在此过程中，请注意，对

时空延拓的首次系统性研究由 Clark [7, 8, 9, 10]开展。他的主要结果是，对于一个“ $\mathcal{C}^{0-}$ 因果测地线不完备的整体双曲 $\mathcal{C}^{0-,\alpha}$ 时空”，如果黎曼张量也是霍尔德连续的，则存在一种延拓。（一个时空在 [7][9], 中被认为是一般的，如果其 b-完备化在附加于其上的、用于表示奇点的任一 b-边界点处都不是 D-特殊化的。）除了这些开创性研究具有毋庸置疑的重要性之外，上述结果还存在一些缺陷。首先，Clark 的结果广泛使用了b-边界构造，而众所周知，即使对于最简单的弗里德曼-罗伯逊-沃克宇宙学模型，该构造也存在严重缺陷（详情参见[9]第 5.2 节）。其次，某个给定时空可能无法在$\mathcal{C}^{0-,\alpha}$ 类中延拓；尽管曲率处处有限，也可能如此，其原因仅仅是它在 b-边界上的点处不满足霍尔德连续性。

鉴于上述缺点，显然有必要仅利用待延拓时空自身的正则几何结构来构造时空延拓。尤其应避免采用边界构造。着眼于这些思路，本文作者还系统研究了因果测地线不完备时空的局部与整体延拓 [39, 40]。 [40] 中的主要结果可概述如下：考虑一个 n 维光滑“ 一般的”（即局部代数非特殊）整体双曲时空（M, g_{ab}），并假设 γ 是一条在（M, g_{ab}）中不可延拓的不完备因果测地线。还假设存在一个由因果测地线构成的（$n-1$）参数族测地线丛 $\mathcal{G}$，它张成了 γ 末段的一个开邻域；相对于平行传播的同步基场，曲率张量的分量及其至（$k-1$）阶的协变导数分量，以及（ k）阶协变导数分量的线积分，沿其中各条测地线均为有限值；并且这些量沿 $\mathcal{G}$ 中各条测地线均一致有界。则（ M, g_{ab} ）是可延拓的。将这些结果与本文讨论的结果相比较，可以清楚看出，要证明光滑整体双曲时空在连续 Geroch-Traschen度规类中可延拓，所需的可微性要求要低得多。还要注意，此处对曲率的限制更为精简，因为在证明主要结果的过程中（例如下文的定理2和定理3），我们仅涉及曲率的潮汐力部分和参考系拖曳部分。

4 可微性类别的选择

接下来，我们现在确定一个适用于以下大多数讨论的度量可微性类别。在此过程中，首先要回想，广义相对论是一种物理理论；因此，场方程及其可解性，或场方程可能发生的失效，对我们而言都具有根本意义。基于这些理由，最好

允许采用这样的时空模型：其中的度规和其他场的性质不如光滑情形良好。显然，所涉及度规和物质场的可微性类别越宽，便越能在所选框架内研究更广泛的引力-物质系统。

这些观察立即表明，应考虑最广泛的时空模型类，从而至少可以将爱因斯坦方程理解为分布。Geroch 和 Traschen 在 [24] 中研究了这一基本问题。他们证明，对于使黎曼张量、爱因斯坦张量和外尔张量能够作为分布来理解的最广泛度规类，它就是“正则度规”空间，或者如我们所称的“Geroch-Traschen 正则度规”。特别地，如果 g_{ab} 满足以下条件，则称其为 Geroch-Traschen 正则度规：

（1） g_{ab} 局部有界，且其逆 g^{ab} 局部有界；[3]（2） g_{ab} 的“弱导数”局部平方可积。

如果对于所有检验场 t^{ab} 和 u_{ab}，标量密度 $g_{ab}t^{ab}$ 和 $g^{ab}u_{ab}$ 都有界，则度量 g_{ab} 及其逆 g^{ab} 局部有界。检验场应当是具有紧支撑的光滑张量密度。张量分布是从检验场向量空间到实数的连续线性映射。局部有界度量 g_{ab} 的导数作为分布，是满足下式的分布 $\overline{\nabla}_e g_{ab}$：

$$\int_M (\overline{\nabla}_e g_{ab}) t^{eab} = -\int_M g_{ab} (\overline{\nabla}_e t^{eab}) \tag{4.1}$$

对任意检验场 t^{abc}，其中 $\overline{\nabla}_a$ 是定义在 M 上的光滑无挠协变导数算子。注意，由于假定检验场是权重为 -1 [24] 的张量密度，式 (4.1) 中的积分是有意义的。于是，若局部可积的 [4] 张量场 μ_{abc} 满足以下条件，则称其为 g_{ab} 的弱导数

$$\int_M g_{ab} (\overline{\nabla}_e t^{eab}) = -\int_M \mu_{eab}\, t^{eab} \tag{4.2}$$

对所有检验场 t^{abc}均成立。若对于所有检验场t^{abcdef}，标量密度 $\mu_{abc}\,\mu_{def}\,t^{abcdef}$ 均为局部可积，则称 g_{ab} 的弱导数 μ_{abc} 为局部平方可积。

[3]这里，与 [24]，存在良定义的逆元的情形一样，默认假设 g_{ab} 是非退化的。在当前语境下，只要在紧集上，行列式 [29] 存在一个正的一致下界，就能保证这一点。[4] 若张量场 $\nu_{a\ldots b}{}^{c\ldots d}$ 在 M 上几乎处处有定义，则称其为局部可积的，若对于每个检验场 $t^{a\ldots b}{}_{c\ldots d}$，标量密度 $\nu_{a\ldots b}{}^{c\ldots d}\,t^{a\ldots b}{}_{c\ldots d}$ 都是勒贝格可测的，且其勒贝格积分收敛。

文献 [24] 证明，如果度量 g_{ab} 是 Geroch-Traschen 正则的，那么黎曼张量、爱因斯坦张量和外尔张量都可以作为分布来定义。Geroch 和 Traschen 还表明，如果一个正则度规 g_{ab}不仅局部有界且其逆也局部有界，而且还是连续的，那么它可以由光滑度量序列 $\{^{(i)}g_{ab}\}$逼近，使得相应的曲率张量 $\{^{(i)}R_{abc}{}^{d}\}$在 L^2 中收敛于赋予该连续正则度规 g_{ab}的曲率分布。

回到我们的核心问题，鉴于 [24] 中的结果，选择C^0 Geroch-Traschen 正则性类似乎颇具吸引力。这一选择也有事实依据：该类被认为是能保证爱因斯坦方程存在弱解的最广泛度规类（例如，参见 [18, 24, 4, 13]）。人们也常常声称（例如，参见 [4, 13]），在度规属于 C^0 Geroch-Traschen 正则性类的框架下，真空爱因斯坦方程初值问题的弱解应当具有局部存在唯一性。还要注意，无论可微性类别如何，极大柯西发展也必须存在。如果能够延拓极大初始数据切片上所给数据的极大柯西发展，那么在柯西视界之外，这种延拓本质上是模糊的，因为即使那里满足真空爱因斯坦方程，初始数据曲面上的数据也无法再决定柯西视界之外的解。为了弥合现有技术与确凿结果之间的差距，我们将采用 Chrishtoduolus、Dafermos 和 Sbierski 提出的以下形式的强宇宙监督猜想 C^0 [4, 13, 45]:

条件 1。 一般的紧致或渐近平坦初始数据的极大全球双曲发展，在连续的 *Geroch-Traschen* 正则度规类中作为时空不可延拓。

虽然看起来条件 1 似乎可能成立，但仍有待验证。由于还有许多技术细节尚未解决，了解 $C^{0,\ 1}_{loc}$ 度规的正则性类仍然很有意义。首先要注意，Geroch-Traschen 正则度规属于交集 $H^1_{loc} \cap L^\infty_{loc}$，其中使用了关系 $H^1 = W^{1,\ 2}$，该关系对于基于 L^2的索伯列夫空间成立 [1]。再考虑到，对于任意区域 $C^{0,\ 1}_{loc} = W^{1,\ \infty}_{loc}$，局部索伯列夫空间是嵌套的，即对于任意 $m \geq n$，$W^{1,\ m}_{loc} \subset W^{1,\ n}_{loc}$均成立，由此可知，$C^{0,\ 1}_{loc}$度规属于 Geroch-Traschen 正则性类，因此具有分布型曲率和爱因斯坦张量。鉴于此，还值得一提的是，近期的一些研究结果适用于 $C^{0,\ 1}_{loc}$ 度规的正则性类。例如，文献[5] 证明，$C^{0,\ 1}_{loc}$ 度的度量可微性足以保证因果理论中的许多重要结果 C^∞ 。类似地，在 $C^{0,\ 1}_{loc}$ 正则性类中，全局双曲性也是有意义的，因此可以将柯西超曲面表示为 C^∞ 时间函数的等值集 [6, 41]。还值得注意的是，如果背景度规

属于 $C^0_{,\ loc}{}^1$ 正则性类 [6, 43]，那么线性波动方程解的全局存在性和唯一性也能够得到保证。在这方面，还值得一提的是，“$3+1$”真空爱因斯坦方程的极大柯西发展存在，需要度规具有临界索伯列夫指数 $s=2$ [26]。

最后还值得强调的是，许多在物理上合理的解都属于具有 C^0 Geroch-Traschen 正则度规的时空类。例如，这类解包括引力冲击波（其曲率在零类三维超曲面上呈 δ-函数行为） [36], 薄质量壳（其曲率在类时三维超曲面上呈aδ- 函数行为） [25]。类似地，这类解还包括含有无压物质的解，其中测地线流线形成二维或三维焦散以及壳层交叉奇点 [51]。这些例子表明，只要条件 1 成立，在具有 C^0 Geroch-Traschen 正则度规的时空类中出现不完备类时测地线，就不能简单地归因于某些非光滑波前或流线焦散的存在。相反，这些例子表明物理学发生了更严重的崩坏。事实上，本文的主要目标是证明：对于具有光滑度量的“ 一般的”（即局部代数非特殊）类时测地线不完备整体双曲时空，要么该时空可以在 C^0 Geroch-Traschen 正则度规类中延拓，要么曲率张量的某些潮汐力或参考系拖曳部分，或潮汐力的一阶横向协变导数——由一族以 $(n-1)$ 为参数的同步观测者[5] 测量——将变得无界。

5 主要结果

本节介绍我们的主要结果。第一个结果如下：

定理 2. *考虑一个 n 维、光滑、局部代数非特殊、极大、整体双曲且类时测地线不完备的时空。假设条件 1 得到满足，即强宇宙审查假设的 C^0 形式成立。记 γ 为其中一条不完备类时测地线，并考虑一个由类时测地线构成的同步$(n-1)$参数族 $\mathcal{G}$，它们张成了 γ 末段的一个邻域。则在 γ 的任意小邻域内，都存在 $\mathcal{G}$ 中的一个成员$\bar{\gamma}$，使得沿着 $\bar{\gamma}$，曲率的潮汐力分量或参考系拖曳分量之一，或者某个潮汐力分量的一阶横向协变导数，至少有一个发散。*

证明： 该定理的证明基于反证法。首先假设，沿着

[5]在下文第 5.1 小节中，这类观测者通过采用由同步类时测地线构成的（$n-1$）参数族，以及沿这些测地线平行传播的标架场来建模。

由同步类时测地线的 $(n-1)$ 参数族定义的同步基场测得的曲率中的潮汐力和参考系拖曳部分，以及潮汐力的一阶横向协变导数，——沿 $\mathcal{G}$的各个成员一致有界，其中 $\mathcal{G}$，——由此可以证明下文的定理 3，该定理声称时空可以在 C^0 Geroch-Traschen 正则性类内延拓。然而，这与我们的假设相矛盾。也就是说，如果同时假设强宇宙监督假设的 C^0 版本成立，那么“ 一般的”光滑、极大整体双曲且测地线不完备的时空无法延拓。

因此，根据上述推理，证明下文的定理 3 即完成定理 2 的证明。□

定理 3。 考虑一个 n维、局部代数非特殊、光滑、全局双曲且类时测地线不完备的时空$(M,\ g_{ab})$。设 γ 为其中一条不完备类时测地线，并考虑一个由类时测地线组成的同步$(n-1)$参数族，$\mathcal{G}$，它们张成 γ末段的一个邻域。假设沿 $\mathcal{G}$中的曲线，曲率的潮汐力部分和参考系拖曳部分，以及潮汐力的一阶横向协变导数的线积分，均一致有界。那么$(M,\ g_{ab})$ 可在 C^0 *Geroch-Traschen*正则性类内作全局延拓。

证明： 该定理的证明通过执行以下一系列步骤给出。

1. 假设 $\gamma:(t_1,t_2)\to M$ 是一条未来指向、未来不完备的类时测地线，且在 $(M,\ g_{ab})$ 中不可延拓。为明确起见，我们假设 γ 是未来不完备的；另一种情况可由时间反演得出。 2. 选取一个由 $(n-1)$ 参数化的同步未来指向类时测地线族 $\mathcal{G}$，使得 γ 属于 $\mathcal{G}$。 3. 选取 $\mathcal{U}\subset M$，使得 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{G}$中各成员像的并集，并且某个末段 $\gamma|_{[t_0,t_2)}$（对于某个 $t_0\in(t_1,t_2)$）包含于 $\mathcal{U}$。~4. 在我们的定理所述假设下，证明存在 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ 和一个~光滑嵌入 $\phi:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$，使得 $\phi\circ\gamma$ 可在 $\mathcal{U}$中连续延拓。~5. 在 $\mathcal{U}$ 上将度量 g_{ab} 延拓至 $\mathcal{U}$，且保持在 C^0 Geroch-Traschen 正则~性类中，并将所得中间延拓记为 $\widetilde{\phi}:(\mathcal{U},g_{ab}|_{\mathcal{U}})\to(\mathcal{U},\widetilde{g}_{ab})$。~6. 所需的 $\Phi:(M,g_{ab})\to(M,\widehat{g}_{ab})$ 整体延拓随后通过将~(M,g_{ab})与 $(\mathcal{U},\widetilde{g}_{ab})$在它们的“公共部分”粘合而定义，即应用由 ϕ诱导的商空间；而度量 $\widehat{g}_{ab}$ 则由 g_{ab} 和 $\widetilde{g}_{ab}$确定。

5.1 同步高斯坐标与参考系 s

本节将介绍同步高斯坐标和同步正交基场，它们在构造所需的中间延拓与整体延拓过程中起着核心作用。

考虑一条未来指向且未来不完备的类时测地线 $\gamma:(t_1,t_2)\to M$。设 t 是沿 γ 的固有时参数，且 v^a 是沿 γ 的对应单位切向量场 $v^a=(\partial/\partial t)^a$。于是，对于 γ 上任意一点 $p=\gamma(t_0)$，在足够小的邻域内，均可按如下方式定义同步高斯坐标 [39, 40]，其中$t_0\in(t_1,t_2)$。首先，在由与 v^a 正交的类空向量构成的 $(n-1)$ 维子空间张成的线性子空间 $T_p^{\perp}(M)$ 中，选取原点的一个足够小的开邻域 Q，使得指数映射[6] 保证是 Q 与 $\exp[Q]\subset M$ 之间的局部微分同胚。记 Σ 为 Q 在指数映射作用下的像，即 $\Sigma=\exp[Q]$。因此， Σ 由从 $p=\gamma(t_0)$ 出发、切向量与 v^a 正交的类空测地线生成。接着，将 v^a 从 $p=\gamma(t_0)$ 延拓为定义在 Σ 上的光滑、未来指向、归一化的 $g_{ab}v^av^b=-1$ 类时向量场，并使其处处与 Σ 正交。任取 $(x^1,\ldots,x^{n-1})$ 作为 Σ 上的局部坐标，并考虑一族以 $(n-1)$ 个参数标记的类时测地线 $\mathcal{G}$，它们从 Σ 上的各点出发，切向量为 v^a。由于 Σ 和 v^a 光滑，这些测地线在足够小的邻域 V（Σ）内不会相交。将函数 $x^1,\ldots,x^{n-1}$ 延拓到 V 上，使它们沿 $\mathcal{G}$ 中的测地线保持常值；并在 V 上取固有时 $t=x^n$ 作为 n^{th} 坐标，并将其同步设置为使得在 Σ 上 $x^n=t_0$。函数 $(x^1,\ldots,x^n)$ 构成 V 上的局部坐标。

在这些同步高斯坐标中，可以看出时空度量具有如下形式 [35, 53]

$$ds^2=-dt^2+g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta\,, \tag{5.3}$$

其中， $g_{\alpha\beta}$是一个$(n-1)\times(n-1)$正定矩阵，其分量是所有坐标$(x^1,\ldots,x^n)$的光滑函数，希腊指标取值为 1、2、...、 $n-1$。

还值得一提的是，根据高斯坐标的构造，坐标基场 $E^a_\alpha=(\partial/\partial x^\alpha)^a$（其中 $\alpha=1$、2、...、 $n-1$）是 $\mathcal{G}$中沿$(n-1)$参数族类时测地线丛的雅可比场。因此， E^a_α 坐标基场满足雅可比方程

$$v^e\nabla_e(v^f\nabla_f E^a_{(\alpha)})=R_{efg}{}^a v^e E^f_{(\alpha)}v^g\,, \tag{5.4}$$

其中， ∇_a 表示度量相容协变导数算子。

[6]指数映射 $\exp:T_p(M)\to M$将一个点 $q\in M$与一个向量 $X^a\in T_p(M)$对应起来，使得该点 q 与 p 沿着从 p 出发、切向量为 X^a 的测地线相距一个单位仿射参数距离。

沿着由 $n-1$ 参数族类时测地线 $\mathcal{G}$ 的各条曲线，可以如下选取同步基场 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\}$。从正交归一基 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\} \subset T_p(M)$ 开始，其名称指标 $\mathfrak{a}$取值为 1、2、...、n，使得 $e^a_{(\mathfrak{n})} = v^a$ 在 p处成立。然后从 p 出发，沿生成 Σ 的类空测地线平行传播 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\}$。如果 $e^a_{(\mathfrak{n})}$ 恰好不同于已在 Σ 上定义的 v^a 向量场，则逐点施加最简单的推动变换，使得所得的光滑[7] 基场 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\}$ 在 Σ 上满足 $e^a_{(\mathfrak{n})} = v^a$。最后，沿由 $n-1$ 参数化的类时测地线丛 $\mathcal{G}$ 的各条曲线，从 Σ出发平行传播 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\}$，以延拓这个光滑基场。还要注意，根据构造，关系 $e^a_{(\mathfrak{n})} = v^a$ 沿 $\mathcal{G}$ 的各条曲线成立。

利用上述定义的同步基场 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\}$，例如，相对于以速度 v^a沿着 $\mathcal{G}$ 中的成员运动的观测者，黎曼张量的潮汐力和参考系拖曳（或电部分和磁部分）可表示为，参见例如 [31, 32],

$$R_{\mathfrak{a}n\mathfrak{b}n} = R_{abcd}\, e^a_{(\mathfrak{a})} v^b e^c_{(\mathfrak{b})} v^d \quad \text{and} \quad R_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}n} = R_{abcd}\, e^a_{(\mathfrak{a})} e^b_{(\mathfrak{b})} e^c_{(\mathfrak{c})} v^d\,, \tag{5.5}$$

分别为，其中指标 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$、$\mathfrak{c}$取值为 1、2、.....、$n-1$。注意，如（5.5）所给出的曲率的潮汐力和参考系拖曳部分，与相对于单位类时向量场 v^a [31][32]定义的曲率的电部分和磁部分有关。在四维情形中，电部分和磁部分分别由对称张量 $\mathscr{E}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ 和 $\mathscr{B}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ 表示，定义为

$$\mathscr{E}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = R_{\mathfrak{a}n\mathfrak{b}n} = R_{abcd}\, e^a_{(\mathfrak{a})} v^b e^c_{(\mathfrak{b})} v^d \quad \text{and} \quad \mathscr{B}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{efa}R^{ef}{}_{\mathfrak{b}n} = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{efa}R^{ef}{}_{bc}\, e^a_{(\mathfrak{a})} e^b_{(\mathfrak{b})} v^c\,, \tag{5.6}$$

分别为，其中 ϵ_{abc} 表示对四维体积元 ϵ_{abce} 和单位类时向量场 v^a进行收缩所得的 $\epsilon_{abc} = \epsilon_{abce}v^e$。

5.2 对 $\mathcal{U}$ 的选择

由于我们的主要目标是基于对同步高斯坐标的适当选择来进行时空延拓，因此显然有必要了解这些坐标和同步基场能够应用到离 Σ 多远的范围。本小节旨在回答这个问题。

首先选择 $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$，它由满足以下条件的 n 元组组成：存在一条类时测地线 $\overline{\gamma}$: $(\overline{t}_1, \overline{t}_2) \to M$in $\mathcal{G}$，使得 $x^n \in (\overline{t}_1, \overline{t}_2)$ 和 $(x^1, \ldots, x^{n-1}, t_0)$ 是交点 $\overline{\gamma} \cap \Sigma$ 的坐标。定义映射 ψ:

[7] Σ上的基场 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\}$ 的光滑性，取决于 v^a 的光滑性、沿 Σ 的生成元进行平行传播的过程，以及逐点应用于 Σ 的推动变换的光滑性。

$\mathscr{U} \to M$，使得 $\psi(x^1,\ldots,x^n) = \overline{\gamma}(x^n)$，并假设 $(x^1,\ldots,x^{n-1},t_0)$ 是 $\overline{\gamma}\cap\Sigma$ 的坐标。不过，ψ 按构造是光滑的，但通常不一定是一一映射。如果它不是一一映射，V 就是 $\psi[\mathscr{U}]$ 的真子集。

还要回顾一下，我们对 Σ所作的选择保证了 Σ 的第二基本形式 χ_{ab} 在 $p=\gamma(t_0)$ 处消失。因此，选择 Σ 中包含 p 且闭包紧致的一个足够小的开邻域 σ_{t_0}，便可保证存在一个依赖于 χ_{ab} 和 σ_{t_0}的小正数 $\varkappa$，使得对于某个适当的范数——其定义见 [40]中的第3节—— $\|\chi_{ab}\| < \varkappa$ 在 σ_{t_0}上成立。

我们的目标是证明，在适当的条件下，存在 t_0、$\sigma_{t_0}\subset\Sigma$ 和$\varepsilon>0$，使得在 $\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^n$的子集 $\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}$ 上，按如下方式定义的

$$\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]} := \{(x^1,\ldots,x^n)\in\mathscr{U} \,|\, \psi(x^1,\ldots,x^{n-1},t_0)\in\sigma_{t_0} \text{ and } x^n\in[t_0,t_2+\varepsilon)\}\,, \quad (5.7)$$

映射 ψ：$\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}\to M$是一一映射。验证这一点时，首先参照 [40] 中命题3.2.5的证明：对于各个成员$\overline{\gamma}\in\mathcal{G}$，曲率张量的潮汐力（或电）部分有界，这意味着存在 $\epsilon>0$，使得沿$\overline{\gamma}$在参数区间 $[t_0,t_2+\varepsilon)$ 内，σ_{t_0}处不会出现共轭点。参照[40], 中命题3.1证明里的论断可知，对 $\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}$ 中的任意一点 q，都存在一个开邻域 $\mathcal{O}_q$，使得 ψ 是从 $\mathscr{O}_q$ 到其像 $\mathcal{O}_q=\psi[\mathscr{O}_q]$的局部微分同胚。换言之，这保证了高斯坐标在 $\mathcal{O}_q$ 上局部定义良好。

现在的目标是证明，在适当条件下，高斯坐标不仅在局部有定义，而且在整个 $\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}]$ 上都有全局定义。为了理解此处的困难，请回想一下，也存在具有“拟正则”奇点的时空（例如参见文献 [7, 15, 16]），这可能会妨碍在 $\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}]$ 上建立良好定义的高斯坐标。已知这些时空具有拓扑缺陷，因此无法存在这样的 $\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}\subset\mathbb{R}^n$，使得$\psi$ 可以是一一映射。为了在 [40] 中区分这些情形，引入了拓扑奇点的概念；在类时情形下，其定义如下：

定义 3. 若不存在对t_0、$\sigma_{t_0}\subset\Sigma$ 和 ε 的任何选择，使集合 $\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}]$ 成为单连通集，则称未来指向的不完备未来不可延拓类时测地线 $\gamma:(t_1,t_2)\to M$ 终止于一个拓扑奇点。

随后在 [40] 的第 5 节中证明，整体双曲时空中存在拓扑奇点，意味着这些时空在局部代数上是特殊的，也就是说，这些时空不可能是“一般的”。此外还证明了（见 [40] 中的定理3.1.），只要 $\gamma:(t_1,t_2)\to M$ 在对 $\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}$ 作适当选择后不会终止于拓扑奇点，那么 $\mathcal{G}$ 的各个成员在 $\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}]$ 中互不相交；也就是说，存在 t_0、$\sigma_{t_0}\subset\Sigma$ 和 $\varepsilon>0$，使得 ψ 在整个 $\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}$ 上是一一映射。

令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}$ 的像 $\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}]$ 的内部，即 $(\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}])^\circ$，并令 $\tilde{}$ $\mathcal{U}$ 为笛卡尔积 $\varsigma_{t_0}\times[t_0,t_2+\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n$，其中 $\varsigma_{t_0}=\psi^{-1}[\sigma_{t_0}]$。注意，$\tilde{}$ 根据构造，$(\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]})^\circ$ 是 $\mathcal{U}$ 的真子集；此外，ψ 在 $\mathcal{U}=(\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}])^\circ$ 上是一一映射。记 ϕ 为 ψ 的逆映射在 $\mathcal{U}=(\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}])^\circ$ 上的限制，$\tilde{}$ 即 $\phi=\psi^{-1}|_{(\psi[\mathscr{U}_{[\sigma_{t_0},\varepsilon]}])^\circ}$。映射 $\phi:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ 是一个嵌入，将用于 $\tilde{}$ 构造所需的中间延拓 $\phi:(\mathcal{U},g_{ab}|_{\mathcal{U}})\to(\mathcal{U},\tilde{g}_{ab})$。

$\tilde{}$注意，根据对 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}$所作的上述选择，$\mathcal{U}$ 中的 $\mathcal{G}$ 由 $\phi[\mathcal{U}]$中的直线坐标线表示；此外，对于 $\mathcal{G}$中的任意一条曲线 $\bar{\gamma}$，若其始于 σ_{t_0}，且在 (M,g_{ab}) 中是未来指向、不完备且未来不可延拓的$\tilde{}$，则曲线 $\phi\circ\bar{\gamma}$可在区域 $\mathcal{U}\setminus\phi[\mathcal{U}]$内沿直线继续延伸。[8]

$\tilde{}$5.3 将度量从 $\mathcal{U}$ 延拓到 $\mathcal{U}$

We s $\tilde{}$将度量从 $\mathcal{U}$ 延拓到 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$时，需要用到以下命题。

命题 1. 假设 $\phi[\mathcal{U}]$ 如上所定义，且具有性质$\mathscr{P}$。设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\phi[\mathcal{U}]$ 上的光滑函数，并假设其一阶偏导数 $\partial_t\mathcal{F}$和 $\partial_{x^\alpha}\mathcal{F}$（其中 $\alpha=1$、2、.....$(n-1)$）在$\sim\phi[\mathcal{U}]$上一致有界。则 $\mathcal{F}$ 在闭包 $\overline{\phi[\mathcal{U}]}$ 上的唯一连续延拓 $\mathcal{F}$ 是利普希茨函数，并且可以进一步延拓到 $\mathcal{U}\setminus\phi[\mathcal{U}]$ 上，使得 $\mathcal{F}$ 在整个 $\mathcal{U}$上也是利普希茨的。

证明： 首先，一阶偏导数 $\partial_t\mathcal{F}$ 和$\partial_{x^\alpha}\mathcal{F}$、 $\alpha=1$、2、.....（$n-1$）的一致有界性可用于证明 $\mathcal{F}$是 $\phi[\mathcal{U}]$上的 Lipschitz 函数，方法与在 [39]中证明命题 3.3.1 时相同。注意，此时 $\mathcal{F}$ 在该处也是一致连续的。

可利用 [40] 中命题 4.2 的证明来验证，$\mathcal{F}$ 在闭包 $\overline{\phi[\mathcal{U}]}$ 上的唯一$\tilde{}$连续延拓 $\mathcal{F}$ 也是 Lipschitz 函数，且具有相同的 Lipschitz 常数。

$\tilde{}$ $\tilde{}$最后，根据基尔兹布劳恩定理，[27] $\mathcal{F}$ 也可以延拓到 $\mathcal{U}\setminus\overline{\phi[\mathcal{U}]}$，成为具有相同 Lipschitz 常数的 Lipschitz 函数。□

$\tilde{}$注意，由于 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{U}$ 处处满足利普希茨条件，$\mathcal{F}$ 的弱导数存在且有界，因此它们在该处也局部平方可积。

[8]注意，在我们最终证明定理 3 时，假设（M，g_{ab}）是一个柯西发展。因此，若 M存在非空边界，该边界必属于（M，g_{ab}）的某个柯西视界 $\mathcal{H}$。特别地，$\mathcal{G}$ 中 $\mathcal{U}$内各成员$\tilde{}$的像的未来端点之并，记为 H^+，是（非空）未来柯西视界 $\mathcal{H}^+$的子集，其中（M，g_{ab}）.....接着回想，根据命题 6.3.1 以及 [18] 中第 6.5 节的论证，（$\phi[\mathcal{U}]$）是 $\mathcal{U}$ 中的一个闭、嵌入、类空的三维 C^{1-} 子流形。

接下来，先回顾一下，$(n-1)\times(n-1)$ 矩阵元 $g_{\alpha\beta}$ 中由以下缩并给出 (5.3)

$$g_{\alpha\beta} = g_{ab} E^a_{(\alpha)} E^b_{(\beta)} \,, \tag{5.8}$$

其中 $E^a_{(\alpha)}$ 表示坐标基元素 $(\partial/\partial x^\alpha)^{\,a}$，其中 $\alpha = 1, \ldots\ldots, n-1$。根据命题 1，$g_{\alpha\beta}$的分量是定义在 $\phi[\mathcal{U}]$上的光滑函数；如果时间导数和空间导数

$$\partial_t g_{\alpha\beta} = g_{ab}\left[\left(v^e \nabla_e E^a_{(\alpha)}\right) E^b_{(\beta)} + E^a_{(\alpha)}\left(v^e \nabla_e E^b_{(\beta)}\right)\right] \tag{5.9}$$

$$\partial_{x^\nu} g_{\alpha\beta} = g_{ab}\left[\left(E^e_{(\nu)} \nabla_e E^a_{(\alpha)}\right) E^b_{(\beta)} + E^a_{(\alpha)}\left(E^e_{(\nu)} \nabla_e E^b_{(\beta)}\right)\right] \,, \tag{5.10}$$

能够保证沿着 $\mathcal{G}$中的各个元素一致有界。

考察 (5.9) 和 (5.10) 右端的各项可知，只需证明向量场 $E^a_{(\alpha)}$、$v^e \nabla_e E^a_{(\alpha)}$ 和 $E^e_{(\nu)} \nabla_e E^a_{(\alpha)}$ 关于沿着 $\mathcal{G}$ 中各个元素定义于 $\mathcal{U}$ 上的同步正交基场 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\}$ 的范数 $\|E^a_{(\alpha)}\|$、$\|v^e \nabla_e E^a_{(\alpha)}\|$和 $\|E^e_{(\nu)} \nabla_e E^a_{(\alpha)}\|$ 一致有界即可。这里，向量场 X^a 关于 $\mathcal{U}$ 上的同步基场 $\{e^a_{(\mathfrak{a})}\}$ 和洛伦兹度量 g_{ab} 的范数 $\|X^a\|$ 定义为

$$\|X^a\| := \sqrt{\sum_{\mathfrak{b}=1}^{4} \left[g_{ab} X^a e^b_{(\mathfrak{b})}\right]^2} \,. \tag{5.11}$$

注意，通过直接推广 [39], 推论 3.3.5，可以保证 $\|E^a_{(\alpha)}\|$ 的范数在 $\mathcal{U}$ 上有界，前提是沿着 $\mathcal{G}$中的各个成员，曲率张量的潮汐力分量 $R_{abcd}\, e^a_{(\mathfrak{a})} v^b e^c_{(\mathfrak{b})} v^d$——相对于平行传播的同步正交标架场测量——在 $\mathcal{G}$中的各个成员上均一致有界。还要记住，在高斯坐标系中，坐标基场 $E^a_{(\alpha)} = (\partial/\partial x^\alpha)^a$按构造满足雅可比方程（5.4）。于是，将 [39], 引理 3.3.6 分别应用于 $\mathcal{G}$中的各个成员，可得

$$\|v^e \nabla_e E^a_{(\alpha)}\|_{\overline{\gamma}(t)} \leq \|v^e \nabla_e E^a_{(\alpha)}\|_{\overline{\gamma}(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \|R_{bcd}{}^a v^b E^c_{(\alpha)} v^d\|_{\overline{\gamma}(t')}\, dt' \,. \tag{5.12}$$

结合被积函数关于 $E^a_{(\alpha)}$ 的线性性质可知，只要黎曼张量的潮汐力分量——相对于同步正交基场定义——也能保证沿 $\mathcal{G}$ 的各成员一致有界，那么 $\|E^a_{(\alpha)}\|$ 和 $\|v^e \nabla_e E^a_{(\alpha)}\|$ 这两项沿 $\mathcal{G}$ 的各成员也都一致有界。

对向量场 $E^e_{(\nu)}\nabla_e E^a_{(\alpha)}$ 的范数 $\|E^e_{(\nu)}\nabla_e E^a_{(\alpha)}\|$ 进行刻画时，需要更加谨慎。

利用曲率项的线性性、莱布尼茨法则，以及坐标基场 $E^a_{(\alpha)}$ 和 v^a 的对易子为零，可得[9]

$$\begin{aligned} v^e\nabla_e(v^f\nabla_f[E^h_{(\nu)}\nabla_h E^a_{(\alpha)}]) = & -E^k_{(\nu)}\nabla_k[R_{efh}{}^a v^e E^f_{(\alpha)} v^h] + R_{efh}{}^a E^e_{(\nu)} v^f[v^k\nabla_k E^h_{(\alpha)}] \\ & + v^k\nabla_k[R_{efh}{}^a E^e_{(\nu)} v^f E^h_{(\alpha)}]\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

由此，结合

$$E^a_{(\alpha)} = \sum_{\mathfrak{i}=1}^{n-1}\left(g_{kl}E^k_{(\alpha)}\,e^l_{(\mathfrak{i})}\right)e^a_{(\mathfrak{i})}\,, \tag{5.14}$$

（这是由 $E^a_{(\alpha)}$ 和 v^a 的正交性得出的），可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(g_{kl}E^k_{(\alpha)}\,e^l_{(\mathfrak{i})}\right) = & -\sum_{\mathfrak{j}=1}^{n-1}\left[R_{abcd}\,v^a\,e^b_{(\mathfrak{j})}v^c\,e^d_{(\mathfrak{i})}\right]\left(g_{kl}E^k_{(\alpha)}\,e^l_{(\mathfrak{j})}\right) \\ & + \sum_{\mathfrak{j}=1}^{n-1}\mathscr{A}_{\mathfrak{j}}\left[R_{abcd}\,v^a\,e^b_{(\mathfrak{j})}v^c\,e^d_{(\mathfrak{i})}\right] + \sum_{\mathfrak{j},\mathfrak{h}=1}^{n-1}\Bigg\{\mathscr{B}_{\mathfrak{j}\mathfrak{h}}\left[R_{abcd}\,e^a_{(\mathfrak{i})}\,e^b_{(\mathfrak{h})}\,e^c_{(\mathfrak{j})}v^d\right] \\ & + \mathscr{C}_{\mathfrak{j}\mathfrak{h}}\frac{d}{dt}\left[R_{abcd}\,e^a_{(\mathfrak{i})}\,e^b_{(\mathfrak{h})}\,e^c_{(\mathfrak{j})}v^d\right] + \mathscr{D}_{\mathfrak{j}\mathfrak{h}}\,e^k_{(\mathfrak{h})}\nabla_k\left[R_{abcd}\,v^a\,e^b_{(\mathfrak{j})}v^c\,e^d_{(\mathfrak{i})}\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中，系数 $\mathscr{A}_{\mathfrak{i}}$、$\mathscr{B}_{\mathfrak{i}\mathfrak{j}}$、$\mathscr{C}_{\mathfrak{i}\mathfrak{j}}$ 和 $\mathscr{D}_{\mathfrak{i}\mathfrak{j}}$ 仅依赖于场 $E^a_{(\alpha)}$、$v^f\nabla_f E^a_{(\alpha)}$和 $E^f{}_{(\alpha)}\nabla_f\,e^a_{(\mathfrak{i})}$。注意，$\|E^a_{(\alpha)}\|$和 $\|v^f\nabla_f E^a_{(\alpha)}\|$ 的一致有界性已由潮汐力的一致有界性保证。然而，$\|E^f{}_{(\alpha)}\nabla_f\,e^a_{(\mathfrak{i})}\|$的一致有界性则要求曲率的参考系拖曳部分的线积分一致有界。为此，注意到由于坐标基场 $E^a_{(\alpha)}$ 和 v^a 对易，基矢场 $e^a_{(\mathfrak{i})}$、$\mathfrak{i}=1$、2、.....（$n-1$）相对于 v^a 也是平行传播的，

$$v^e\nabla_e(E^f_{(\alpha)}\nabla_f\,e^a_{(\mathfrak{i})}) = -R_{efh}{}^a v^e E^f_{(\alpha)}e^h_{(\mathfrak{i})} \tag{5.16}$$

成立，这意味着

$$\frac{d}{dt}\left[\,g_{kl}(E^f_{(\alpha)}\nabla_f\,e^k_{(\mathfrak{i})})\,e^l_{(\mathfrak{j})}\,\right] = \sum_{\mathfrak{h}=1}^{n-1}\left[\,g_{kl}E^k_{(\alpha)}\,e^l_{(\mathfrak{h})}\,\right]\left[\,R_{abcd}e^a_{(\mathfrak{i})}e^b_{(\mathfrak{j})}e^c_{(\mathfrak{h})}v^d\,\right]. \tag{5.17}$$

[9]方程（5.13）是广义雅可比方程的一种紧致形式，该方程在[39] 中引入（另见 [40]），用于刻画坐标基场的各阶协变导数沿因果测地线丛中各条测地线的传播。

因此，只要曲率的潮汐力部分和参考系拖曳部分[10]以及潮汐力的一阶横向协变导数的线积分满足相应条件，向量场 $E^{e}_{(\nu)}\nabla_e E^{a}_{(\alpha)}$ 的 $\|E^{e}_{(\nu)}\nabla_e E^{a}_{(\alpha)}\|$ 范数就会沿着 $\mathcal{U}$ 中的 $\mathcal{G}$ 一致有界

$$\int_{t_0}^{t}\left(e^{k}_{(\mathfrak{c})}\nabla_k[R_{abcd}\,e^{a}_{(\mathfrak{a})}v^b e^{c}_{(\mathfrak{b})}v^d]\right)|_{\overline{\gamma}(t')}\,\mathrm{d}t'\,, \tag{5.18}$$

沿着 $\mathcal{G}$ 中 $\mathcal{U}$ 的各个成员，均保证一致有界，其中指标 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$、$\mathfrak{c}$ 取值为 1、2、.....、$n-1$。

这里的关键在于，只需限制潮汐力的一阶横向协变导数的线积分；根据从 [40], 中（4.15）下方开始的讨论，包括（4.16）及其下方段落，这些线积分即可得出。[11] 另请注意，这些线积分有限并不要求被积函数有界。只要被积函数的发散速度不快于 $(t_p-t)^{-1+\epsilon}$，它们就能一致有界，其中某个 $\epsilon>0$；t_p 表示沿 $\overline{\gamma}\in\mathcal{G}$ 的仿射参数值的上确界。

利用上述所有观察结果，我们得到：只要曲率的潮汐力部分和参考系拖曳部分，以及潮汐力的一阶横向协变导数的线积分，沿着 $\mathcal{G}$ 的各个成员均保证一致有界，那么度量的时间偏导数和空间偏导数 $\partial_t g_{\alpha\beta}$ 和 $\partial_{x^\nu} g_{\alpha\beta}$ 沿着 $\mathcal{G}$ 的各个成员也将一致有界。

如果发生这种情况，结合上述所有观察结果，便可得出结论：在高斯坐标中，度量 g_{ab} 的$g_{\alpha\beta}$ 分量在整个 $\overline{\phi[\mathcal{U}]}$ 上都是利普希茨函数。命题 1 还意味着，~(5.3) 中的度量张量分量 $g_{\alpha\beta}$ 可从 $\overline{\phi[\mathcal{U}]}$ 延拓到整个 $\mathcal{U}=\varsigma_{t_0}\times[t_0,t_2+\varepsilon)$，且其延拓 $\sim\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ 在整个 $\mathcal{U}$ 上都能保证是利普希茨函数。

还需注意，延拓后的度量 $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ 是 C^0 Geroch–Traschen 正则度量 $\sim\mathcal{U}$。首先，由于各分量 $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ 被保证为 $\mathcal{U}$ 利普希茨函数，因此 $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ 的有界性（不仅是局部有界性）以及 $\widetilde{g}^{\alpha\beta}$ 的有界性立即成立。基于同样的原因，由于度量的各分量 $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ 在 $\mathcal{U}$ 上是利普希茨~函数，$\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ 的每个弱导数都有定义且有界，因此它们也是平方可积的。至此，以下命题得证：

[10]曲率的参考系拖曳部分通过对 (5.15) 右端各项进行线积分而受到影响。然而，第四项中涉及参考系拖曳部分的一阶 t 导数，这反过来又对曲率的这一部分施加了代数限制。[11]这里必须考虑 (5.15) 右端最后四项的线积分。不过，正如脚注 5.3 所述，第二、第三和第四项的线积分会对曲率的参考系拖曳部分施加代数限制。事实上，第五项对潮汐力的一阶横向协变导数的线积分施加了限制。

命题 2。考虑如上定义的嵌入 $\phi\colon\ \mathcal{U}\to\mathcal{U}$。假设沿着$\mathcal{G}$中的各成员，曲率张量的潮汐力部分和参考系拖曳部分（相对于平行传播的同步正交标架场测量），以及潮汐力的一阶横向协变导数的线积分，均一致有界。那么存在一个延拓 $\phi\colon$ $(\mathcal{U},\ g_{ab}|_{\mathcal{U}})\ \to(\mathcal{U},\ \widetilde{g}_{ab})$，使得 $\widetilde{g}_{ab}$属于 C^0*Geroch-Traschen*正则性类。

应用辅助延拓 $\phi\colon(\mathcal{U},g_{ab}|_{\mathcal{U}})\ \to(\mathcal{U},\widetilde{g}_{ab})$ 后，所需的整体延拓可按如下方式给出：选取 $\mathcal{U}'$ 作为 $\mathcal{U}$ 在M中的一个紧子集。$\mathcal{U}$的可微结构在 $\mathcal{U}'$上诱导出一个带边流形。令 ，此外， $\mathcal{O}\subset\mathcal{U}$ 由 $\phi[\mathcal{U}']$ 与 $\phi\circ\gamma$ 在 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$中的端点的一个充分小的 邻域的并组成。接着将 M 定义为商空间

$$\widehat{M}=(M\cup\widetilde{\mathcal{O}})/\phi\,, \tag{5.19}$$

也就是说，若 $\phi(x)=y$，则通过将 $x\in\mathcal{U}'$ 与 $y\in\mathcal{O}$ 等同来得到 M。于是 M 具有豪斯多夫无边流形的结构，而时空 $(M,\widehat{g}_{ab})$ 是 (M,g_{ab}) 的一个 C^0 延拓，其中度量 $\widehat{g}_{ab}$ 由 g_{ab} 和 $\widetilde{g}_{ab}$在 $\widehat{M}$ 上确定，因此它属于 C^0 Geroch-Traschen正则性类。

综合上述所有部分结果可知，对于一个光滑、测地线不完备的一般整体双曲时空，若曲率张量的潮汐力和参考系拖曳部分，以及相对于同步基场定义的潮汐力一阶横向协变导数的线积分，沿着 $\mathcal{G}$ 的成员均有一致上界，则该时空可在 C^0 Geroch-Traschen 正则度量类中延拓，由此完成定理 3 的证明。□

6 最后的评论

本文的两个主要结果密切相关。首先，我们考察了“局部代数非特殊”的光滑整体双曲类时测地线不完备时空（M,g_{ab}）。随后我们证明，若曲率张量的潮汐力和参考系拖曳部分，以及潮汐力的一阶横向协变导数的线积分，沿着一个由（$n-1$）参数化的同步观测者族的世界线一致有界，则该时空可在 C^0 Geroch-Traschen 正则性类中（整体）延拓。

第二个结果旨在弥合时空奇点的直观图景与奇点定理预测之间的鸿沟。为此，我们考虑一种“典型的”、光滑、整体双曲且类时测地线不完备的

时空，它是极大柯西发展，并假设强宇宙审查假设的C^0 形式成立。结合第一个结果的结论，便立即导出矛盾，由此可以得出结论：在由 γ 表示的观测者世界线周围任意小的邻域内，必定存在观测者世界线，使得沿相应的观测者世界线，曲率的某些潮汐力或参考系拖曳分量，或潮汐力分量的某些一阶横向协变导数发生爆破；前者至少达到阶数 $(t_p - t)^{-\epsilon}$（某个 $\epsilon > 0$），或后者达到阶数 $(t_p - t)^{-1}$。

值得强调的是，在刻画时空奇点时，曲率张量中的潮汐力部分和参考系拖曳部分是最具物理意义的量之一。要理解这一点，首先注意，所施加的 $(n-1)$ 参数族类时测地线确实代表了一个自由落体小物体的运动历史。只要这类测地线丛中的一条测地线上，曲率的潮汐力部分变得无界，小物体就可能在一个方向上被无限拉伸，同时在另一个方向上受到压缩。同样，可以预期，式（5.18）中涉及潮汐力的一阶横向协变导数的被积函数若发散，就意味着该小物体的内部结构将受到显著的剪切作用。曲率张量的参考系拖曳（或磁）部分也具有物理意义，因为它直接关联于事件$\bar{p} \in \overline{\gamma}$处相对于邻近、空间分离的事件$p \in \gamma$处惯性方向的参考系拖曳角速度。设想一个由密集排列的微小陀螺仪组成的小物体。那么，曲率的参考系拖曳部分衡量了邻近陀螺仪 [32]之间的相对进动。因此，参考系拖曳部分与施加于这类小物体邻近部分的相对扭转有关；如果参考系拖曳部分发散，小物体就必然会遭受无限的扭绞。

请注意，本文主要出于简化考虑，将讨论限定于类时测地线的情形。尽管如此，上文总结的结果也可以直接推广（详情见参考文献 [39, 40]），适用于涉及测地线不完备的类光测地线的情形。

值得一提的是，除了本文采用的基于测地线丛的方法外，也有人尝试为时空奇点提供其他刻画方式。例如，有一种方法旨在通过研究检验场演化的障碍来刻画时空奇点。提出这种方法的主要动机是，对于低正则度度规，测地线的确定可能会变得模糊 [12, 42, 54, 52]。然而请注意，即使在所采用的低正则度情形下，Clark 在 [12] 中提出的方法（另见 [54, 42]）仍要求构造类时测地线族，且其切向量具有有界弱导数。该向量场被用于定义适当的能量不等式，由此可以推导出检验场的唯一性和存在性。

最后这条评论立刻引出了以下问题：能否将定理3和定理2中对主度量光滑性的要求，替换为允许度量属于 C^0 Geroch-Traschen 正则度量这一类？回答这个问题时，首先请记住，如果一个 Geroch-Traschen 正则度量是连续的，[12]那么它可以由光滑度量序列 $\{^{(i)}g_{ab}\}$ 逼近，使得相应的曲率张量 $\{^{(i)}R_{abc}{}^{d}\}$ 在 L^2 中收敛于赋予该 C^0 Geroch-Traschen 正则度量的曲率分布 g_{ab}。要恢复定理3和定理2的主要结论，就必须找到一种方法，将相对于 C^0 Geroch-Traschen 正则度量的测地线表示为一列光滑<样式 id='9'>(</样式>$_i$<样式 id='12'>)</样式>g_{ab}-测地线的聚积；此外，还必须证明，沿类时测地线丛的雅可比方程弱解在几乎处处都有意义。[13] 值得注意的是，为完成上述基于检验场的时空奇点刻画，所需的许多技术早已得到发展并加以应用（详情参见 [9], ，尤其是 [42] 的附录）。

我们在证明定理 3 时所采用的估计是否最优，也是一个值得探讨的问题。例如，值得了解的是，构造中间延拓时，是否只要求积分有界即可：

$$I_{\overline{\gamma}}(t) = \int_{t_0}^{t} \|R_{bcd}{}^{a} v^b E^c_{(\alpha)} v^d\|_{\overline{\gamma}(t)}\, dt\,. \tag{6.20}$$

这样做的主要障碍之一是，使用属于 C^0Geroch-Traschen 正则性类的度量时，项 $R_{bcd}{}^{a} v^b E^c_{(\alpha)} v^d$ 只有作为分布才有意义。这种做法或许可行，但仍有待验证。

致谢

本项目部分得到了 NKFIH 资助项目 K-115434 和 K-142423 的支持。作者还要感谢匿名审稿人对本文前一版本提出的宝贵意见。

[12]值得指出的是，即使 Geroch-Traschen 正则度量并不连续，只要它满足特定的稳定性条件（参见 [50], 中的第4节），仍可用光滑度量序列对其进行逼近。[13]请注意，对仅连续或利普希茨度量的测地线进行逼近是更微妙的问题，因为在这些情形下，没有标准方法可以求解测地线方程。为克服这些困难，人们曾尝试在 [28][49]中针对 $C^{0,1}$ 正则度量使用菲利波夫解。 [17]中也证明了关于逼近整体双曲 C^1-度量的测地线的强有力结果。

数据可用性

数据共享不适用于本文，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

利益冲突声明

作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] R.A. Adams 和 J.F. Fournier：《索伯列夫空间》，学术出版社，阿姆斯特丹（2003）[2] Y. Choquet-Bruhat 和 R. Geroch：广义相对论中柯西问题的整体方面，《数学物理通讯》**14** 329-335（1969）[3] Y. Choquet-Bruhat：《广义相对论与爱因斯坦方程》，《牛津数学专著》，牛津大学出版社，牛津（2009）[4] D. Christodoulou：《广义相对论中的黑洞形成》，欧洲数学学会（2009）[5] P. Chruściel 和 J. Grant：连续度量下的洛伦兹因果性，《经典与量子引力》**29** （2012）[6] P. Chruściel：极大整体双曲真空时空，《不动点理论与应用杂志》**14**，325-353（2013）[7] C.J.S. Clarke：整体双曲时空中的奇点，《数学物理通讯》**41**，65-78（1975）[8] C.J.S. Clarke：奇异时空中的局部延拓 *II*，《数学物理通讯》**84**，329-331（1982）[9] C.J.S. Clarke：低可微性时空与奇点，《数学分析与应用杂志》**88**，270-305（1982）[10] C.J.S. Clarke：《时空奇点的分析》，（剑桥物理学讲义，**1**），剑桥，大学出版社（1993）[11] C.J.S. Clarke：形成俘获面的一项条件，《经典与量子引力》**5** 1029-1032（1988）[12] C.J.S. Clarke：奇异时空中的广义双曲性，《经典与量子引力》**15**，975-984（1998）[13] M. Dafermos 和 J. Luk：动力学真空黑洞的内部 I： C^0- 克尔柯西视界的稳定性。
https://doi.org/10.48550/arXiv.1710.01722（2017）

[14] A.G. Doroshkevich、Ya.B. Zel'dovich 和 I.D.Novikov：非对称旋转质量的引力坍缩，《苏联物理学报（实验与理论物理）》22，122-130（1966）[15] G.F.R. Ellis 和 B.G.Schmidt：奇异时空，《广义相对论与引力》8，915-953（1977）[16] G.F.R. Ellis 和 B.G.Schmidt：奇异时空的分类，《广义相对论与引力》 10，989-997 （ 1979 ） [17] M. Graf： C^1-洛伦兹度量的奇点定理，《数学物理通讯》378，1417-1450（2020）[18] S.W. Hawking 和 G.R.F. Ellis：《时空的大尺度结构》，剑桥大学出版社，剑桥，1973）[19] M.W. Hirsch：《微分拓扑》，施普林格（1997）[20] S.W. Hawking：《宇宙学中奇点的出现》III. 因果性与奇点，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》300，182-2001（1967）[21] S.W. Hawking 和 R. Penrose：引力坍缩与宇宙学中的奇点，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》314，529-548（1970）[22] C. Fefferman 惠特尼延拓问题与数据插值，《美国数学会通报》46，207-220（2009）[23] R. Geroch：广义相对论中的奇点是什么？，《数学年刊》48，526-540（1968）[24] R. Geroch 和 J. Traschen：广义相对论中的弦及其他分布型源，《物理评论 D》36，1017-1031（1987）[25] W. Israel：广义相对论中的奇异超曲面与薄壳，《新物理学杂志 B 辑》（1965-1970）44，1-14（1966）[26] S. Klainerman 和 I. Rodnianski：爱因斯坦真空方程的粗糙解，《数学年刊》161，1143-1193（2005）[27] M. Kirszbraun：关于压缩变换和利普希茨变换，Fundamenta Mathematicae 22 77-108（1934），（另见 https://www1.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/n11706.pdf）[28] C. Lange、A. Lytchak、C. Sämann：洛伦兹遇上利普希茨，《理论与数学物理进展》25，2141-2170，（2021）[29] P.G. LeFloch 和 C. Madare：具有分布型曲率的洛伦兹流形的定义与稳定性，《葡萄牙数学》（新系列）64，535-573（2007）[30] E.M. Lifschitz 和 J.M. Khalatnikov：相对论宇宙学研究，《物理学进展》（《哲学杂志》增刊）12，185-249（1963）[31] R. Maartens、G.F.R. Ellis 和 S.T.C. Siklos：引力场中的局域自由度，《经典与量子引力》14 1927（1997）[32] D.A. Nichols、R. Owen、F. Zhang、A. Zimmerman、J. Brink、Y. Chen、J.D. Kaplan、G. Lovelace、K.D. Matthews、M.A. Scheel、K.S. Thorne：通过参考系拖曳涡旋和潮汐张量线将时空曲率可视化：一般理论与弱引力应用，《物理评论 D》84 124014（2011）

[33] R. Penrose：引力坍缩与时空奇点，《物理评论快报》14 54-59 (1965)[34] R. Penrose：引力坍缩：广义相对论的作用，Riv. del Nuovo Cimento 1 (Numero Spec.) 256-275 (1969)[35] R. Penrose：相对论中的微分拓扑技术，SIAM，第 7 号，费城 (1972)[36] R. Penrose，《脉冲引力波的几何》，载于《广义相对论》，L. O' Raifeartaigh 编，克拉伦登出版社 (1972)，第 101–115 页[37] R. Penrose：奇点与时间非对称性，载于：Hawking, S.W., Israel, W. (编)《广义相对论：爱因斯坦百年纪念综述》，第 581–638 页。剑桥大学出版社，剑桥 (1979)[38] R. Penrose：宇宙审查假说问题，《天体物理学与天文学杂志》20, 233-248 (1999)[39] I. Rácz：时空延拓 I，《数学物理学杂志》34, 2448-2464 (1993)[40] I. Rácz：时空延拓 II，《经典与量子引力》27, 155007 (2010)[41] C. Sämann：时空的全局双曲性，《亨利·庞加莱年刊》17, 1429-1455 (2016)[42] Y. Sanchez Sanchez：曲线可积时空的正则性，《广义相对论与引力》47 80 (2015)[43] Y. Sanchez Sanchez and J. A. Vickers：具有利普希茨正则性的时空中的广义双曲性，《数学物理学杂志》58, 022502 (2017)[44] J. Sbierski：关于爱因斯坦方程极大柯西发展的存在性：去佐恩化，《亨利·庞加莱年刊》17, 301–329 (2016)[45] J. Sbierski：广义相对论中的整体性奇点与时空的 C^0,$^1_{loc}$ -不可延拓性，https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.12049[46] R. Schoen and S-T. Yau：物质凝聚导致黑洞的存在，《数学物理通讯》90 575-579 (1983)[47] J.M.M. Senovilla：奇点定理及其推论，《广义相对论与引力》30 701-848 (1998)[48] J.M.M. Senovilla：对奇点定理的批判性评估，《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑》380 20210174 (2022)[49] R. Steinbauer：每个利普希茨度量都有 C^1-测地线，《经典与量子引力》31 057001 (2014)[50] R. Steinbauer and J.A. Vickers：关于 Geroch-Traschen 度量类，《经典与量子引力》26 065001 (2009)[51] P. Szekeres and A. Lun：什么是壳层交叉奇点？《ANZIAM 杂志》41, 167-179 (1999)

[52] J.A. Vickers and J.P. Wilson：锥形时空中的广义双曲性，《经典与量子引力》**17** 1333-1360 (2000)[53] R.M. Wald：广义相对论，芝加哥大学出版社，芝加哥 (1984)[54] J.P. Wilson：具有锥形奇点的时空中的广义双曲性，《经典与量子引力》**17** 3199-3209 (2000)[55] H. Whitney：区域边界上的可微函数，《数学年刊》**35**, 482-485 (1934)[56] H.Whitney：定义在闭集上的可微函数的解析延拓，《美国数学会汇刊》**36**, 63-89 (1934)