arXiv:2301.00577v1 [hep-th] 2 Jan 2023

2023年1月

Weyl 不变性、非紧对偶与共形高阶导数σ模型

Darren T. Grasso、Sergei M. Kuzenko 和 Joshua R. Pinelli

西澳大利亚大学 M013物理系

澳大利亚西澳大利亚州克劳利市 Stirling Highway 35号，邮编6009

电子邮箱：darren.grasso@uwa.edu.au, sergei.kuzenko@uwa.edu.au,

joshua.pinelli@research.uwa.edu.au

摘要

我们研究由 n 个阿贝尔矢量场与 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个复标量耦合而成的系统，这些复标量以厄米对称空间 Sp($2n,\mathbb{R}$)/U(n) 为取值空间。该模型具有 Weyl 不变性，并拥有最大非紧对偶群 Sp($2n,\mathbb{R}$)。尽管这两种对称性在量子理论中都存在反常，但由积分掉矢量场而得到的有效作用量中的对数发散项（即“诱导作用量”）应当保有这两种对称性。我们计算了这一诱导作用量，并证明它具有 Weyl 不变性和 Sp($2n,\mathbb{R}$) 不变性。由此得到的、定义在 Sp($2n,\mathbb{R}$)/U(n) 上的共形高阶导数 σ-模型，可推广到场取值于以下空间的情形：(i) 任意 K¨ahler 空间；以及 (ii) 任意黎曼流形。在这两种情况下， σ-模型的拉格朗日量都会产生满足 Wess-Zumino一致性条件的 Weyl 反常。

目录

1 引言
1 2 计算诱导作用量 6

2.1 量子化.6 2.2 热核计算.8 2.3 诱导作用量的几何表达式.10

3 推广与未决问题 12

A 厄米对称空间 Sp($2n, \mathbb{R}$)/U(n) 15 B 替代场重定义 19 C 曲空间基底结构 20

---

1 引言

Weyl多重态 $\mathcal{N} = 4$ 共形超引力 [1] 的一个独特特征是包含一个无量纲复标量场 ϕ，它参数化了厄米对称空间 SL(2, $\mathbb{R}$)/SO(2)。[1] Butter、Ciceri、de Wit 和 Sahoo 仅在几年前才推导出 $\mathcal{N} = 4$共形超引力最一般的不变作用量族 [2, 3]。这类作用量由一个全纯函数 $\mathcal{H}(\phi)$唯一确定，该函数与拉格朗日量中 Weyl 张量的二次项相伴。

对于特殊选择 $\mathcal{H} = \text{const}$，此时 $\mathcal{N} = 4$ 共形超引力作用量在刚性 SL(2, $\mathbb{R}$) 变换下保持不变；相应的作用量由 Ciceri 和 Sahoo 于 2015 年构造，保留到费米子二阶。

[1]这个陪集空间也可以等价地表示为 SU(1, 1)/U(1)，因为群 SL(2, $\mathbb{R}$) 与 SU(1, 1) 同构。参考文献 [2, 3] 采用了后者。

后者作用量的玻色扇区已由 Buchbinder、Pletnev 和 Tseytlin 在 2012年计算得到 [5]，作为一种“诱导作用量”，通过积掉与外部 $\mathcal{N}=4$ 共形超引力耦合的阿贝尔 $\mathcal{N}=4$ 矢量多重态而获得。[2] 拉格朗日量中纯粹依赖于 ϕ 的部分是一个高导数 σ模型，其形式为 [6]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi,\bar\phi) = \frac{1}{(\mathrm{Im}\,\phi)^2}\Big[\mathcal{D}^2\phi\mathcal{D}^2\bar\phi - 2(R^{mn}-\frac{1}{3}g^{mn}R)\nabla_m\phi\nabla_n\bar\phi\Big] \\ +\frac{1}{12(\mathrm{Im}\,\phi)^4}\Big[\alpha\nabla^m\phi\nabla_m\phi\nabla^n\bar\phi\nabla_n\bar\phi+\beta\nabla^m\phi\nabla_m\bar\phi\nabla^n\phi\nabla_n\bar\phi\Big]\,,\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中

$$\mathcal{D}^2\phi := \nabla^m\nabla_m\phi + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{Im}\,\phi}\nabla^m\phi\nabla_m\phi\,, \tag{1.2}$$

而 α 和 β 是数值参数。在 $\mathcal{N}=4$ 共形超引力的情形下，这些系数为 [5]: $\alpha=\frac{1}{2}\beta=1$。拉格朗日量 (1.1) 在 SL(2,$\mathbb{R}$) 变换下保持不变

$$\phi\to\phi'=\frac{a\phi+b}{c\phi+d}\,,\qquad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathsf{SL}(2,\mathbb{R}) \tag{1.3}$$

该变换作用于带有度量的上半平面 $\mathrm{Im}\,\phi>0$

$$\mathrm{d}\mathfrak{s}^2=\frac{\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\bar\phi}{(\mathrm{Im}\,\phi)^2}\quad\Longrightarrow\quad \Gamma^{\phi}_{\phi\phi}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{Im}\,\phi}\,,\quad \Gamma^{\bar\phi}_{\bar\phi\bar\phi}=-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{Im}\,\phi}\,. \tag{1.4}$$

泛函 $\int\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{L}$ 在 Weyl 变换下保持不变

$$g_{mn}(x)\to \mathrm{e}^{2\sigma(x)}g_{mn}(x)\,, \tag{1.5}$$

因为标量场 ϕ在此类变换下保持不变。高阶导数 σ模型 (1.1) 具有 $\mathcal{N}=1$ 超对称扩展 [7]，它将参数 α和 β联系起来。如果要求 $\mathcal{N}=2$ 超对称性成立，则这两个参数都完全确定 [7–9]。

共形高导数 σ 模型 (1.1) 可作非平凡推广：将厄米对称空间 SL(2,$\mathbb{R}$)/SO(2) 替换为任意 n 维 K¨ahler 流形 $\mathfrak{M}^n$，其中 n 为复维数。我们假设 $\mathfrak{M}^n$ 由 n 局部复坐标 ϕ^I 及其共轭 $\bar\phi^{\bar I}$ 参数化。令 $\mathfrak{K}(\phi,\bar\phi)$

[2] [5]中遗漏了一些相关项。

¨为相应的 K¨ahler 势，使得 K¨ahler 度量 $\mathfrak{g}_{I\bar{J}}(\phi,\phi)$ 由 $\mathfrak{g}_{I\bar{J}}=\partial_I\partial_{\bar{J}}\mathfrak{K}$ 给出。与 $\mathfrak{M}^n$ 相关联的是如下形式的高导数 σ 模型

$$\begin{aligned}S=\int\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\Big\{&\mathfrak{g}_{I\bar{J}}(\phi,\bar{\phi})\Big[\mathcal{D}^2\phi^I\mathcal{D}^2\bar{\phi}^{\bar{J}}-2\Big(R^{mn}-\frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\nabla_m\phi^I\nabla_n\bar{\phi}^{\bar{J}}\Big]\\&+\mathfrak{F}_{IJ\bar{K}\bar{L}}(\phi,\bar{\phi})\nabla^m\phi^I\nabla_m\phi^J\nabla^n\bar{\phi}^{\bar{K}}\nabla_n\bar{\phi}^{\bar{L}}\\&+\Big[\mathfrak{G}_{IJ\bar{K}\bar{L}}(\phi,\bar{\phi})\nabla^m\phi^I\nabla^n\phi^J\nabla_m\bar{\phi}^{\bar{K}}\nabla_n\bar{\phi}^{\bar{L}}+\mathrm{c.c.}\Big]\Big\}\,,\end{aligned}\tag{1.6}$$

其中，R_{mn} 是时空Ricci张量，

$$\mathcal{D}^2\phi^I:=\nabla^m\nabla_m\phi^I+\Gamma^I{}_{JK}(\phi,\bar{\phi})\nabla^m\phi^J\nabla_m\phi^K\,,\tag{1.7}$$

其中，$\Gamma^I{}_{JK}$是K¨ahler度量 $\mathfrak{g}_{I\bar{J}}$的Christoffel符号。最后，$\mathfrak{F}_{IJ\bar{K}\bar{L}}$和$\mathfrak{G}_{IJ\bar{K}\bar{L}}$ 是目标空间上的张量场，它们由K¨ahler度量$\mathfrak{g}_{I\bar{J}}$、Riemann张量 $\mathfrak{R}_{I\bar{J}K\bar{L}}$ 以及一般情况下的其协变导数构造而成。我们回顾一下，Christoffel符号 $\Gamma^I{}_{JK}$ 和曲率张量 $\mathfrak{R}_{I\bar{J}K\bar{L}}$ 由以下表达式[3]给出

$$\Gamma^I{}_{JK}=\mathfrak{g}^{I\bar{L}}\partial_J\partial_K\partial_{\bar{L}}\mathfrak{K}\,,\qquad\mathfrak{R}_{I\bar{J}K\bar{L}}=\partial_I\partial_K\partial_{\bar{J}}\partial_{\bar{L}}\mathfrak{K}-\mathfrak{g}^{M\bar{N}}\partial_I\partial_K\partial_{\bar{N}}\mathfrak{K}\partial_{\bar{J}}\partial_{\bar{L}}\partial_M\mathfrak{K}\,.\tag{1.8}$$

$\mathfrak{F}_{IJ\bar{K}\bar{L}}$ 的一个典型表达式是

$$\mathfrak{F}_{IJ\bar{K}\bar{L}}=\alpha_1\mathfrak{R}_{(I\bar{K}J)\bar{L}}+\alpha_2\mathfrak{g}_{(I\bar{K}}\mathfrak{g}_{J)\bar{L}}+\ldots\tag{1.9}$$

$\mathfrak{G}_{IJ\bar{K}\bar{L}}$ 的可能结构是类似的。需要指出的是，形式为（1.6）的作用量自然地出现在 $\mathcal{N}=2$ 超共形高阶导数 σ-模型 [8] 的分量层面（另见 [9]）以及 $\mathcal{N}=1$ 模型 [7]中。

按照构造，作用量 (1.6) 在 $\mathfrak{M}^n$ 的任意全纯等距变换下保持不变。一个非平凡的观察是，只要标量 ϕ^I 在这些变换下保持不变，(1.6) 在时空的任意 Weyl 变换下也保持不变。¨在 (1.6) 中取 $\mathfrak{M}^n=\mathbb{C}^n$ 和 $\mathfrak{g}_{I\bar{J}}(\phi,\phi)=\delta_{I\bar{J}}$，并分部积分，可得 Fradkin-Tseytlin（FT）算符 [13]

$$\Delta_0=(\nabla^m\nabla_m)^2+2\nabla^m\big(R_{mn}\,\nabla^n-\frac{1}{3}R\,\nabla_m\big)\,,\tag{1.10}$$

[3]关于非线性σ模型框架下 K¨ahler 几何的教学性综述，读者可参阅例如 [10–12] 。

当作用于无量纲标量场时，该算符是共形的。[4] 给定 Weyl 惰性标量场 φ，Weyl 变换 (1.5) 对 $\Delta_0\varphi$ 的作用为

$$\Delta_0\varphi \;\to\; \Delta_0\varphi = \mathrm{e}^{-4\sigma}\Delta_0\varphi \,. \tag{1.11}$$

形式为 $\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{L}(\phi,\bar\phi)$ 的作用量（其中 $\mathcal{L}$ 由式 (1.1) 给出）自然地作为麦克斯韦电动力学中耦合膨胀子 φ 和轴子 $\mathfrak{a}$的诱导作用量出现，其拉格朗日量为

$$\begin{aligned} L(F;\phi,\bar\phi) &= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\varphi}F^{mn}F_{mn} - \frac{1}{4}\mathfrak{a}\tilde F^{mn}F_{mn} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\phi F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \text{c.c.}\,, \qquad \phi = \mathfrak{a} + \mathrm{i}e^{-\varphi}\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

这里，$\tilde F^{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{mnrs}F_{rs}$是电磁场强 $F_{mn} = 2\nabla_{[m}A_{n]} = 2\partial_{[m}A_{n]}$的霍奇对偶，其中 ε^{mnrs} 为列维-奇维塔张量。拉格朗日量 (1.12) 的第二种形式采用二分量旋量记号书写，其中场强 $F_{mn} = -F_{nm}$ 由对称二阶旋量 $F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}$ 及其共轭 $F_{\dot\alpha\dot\beta}$取代。更确切地说，若考虑通过对模型 (1.12) 中的量子规范场积分而得到的有效作用量 $\Gamma[\phi,\phi]$，则其对数发散部分 $\Gamma[\phi,\bar\phi]$ 由 $\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{L}(\phi,\bar\phi)$ 给出，正如 Osborn [6]所示。由此产生一个重要问题：为何诱导作用量具有 Weyl 和 SL(2,$\mathbb{R}$) 不变性?

我们回顾一下，自由麦克斯韦方程的电磁对偶旋转群为 U(1)。四十多年前，Gaillard 和 Zumino [16,17]证明，在存在一组复标量 $\phi^{ij} = \phi^{ji}$ （它们参数化齐性空间 Sp($2n,\mathbb{R}$)/U(n)，其中$i,j = 1,\dots,n$）的情况下，非紧群 Sp($2n,\mathbb{R}$) 是 n 个阿贝尔矢量场强 $F_{mn} = (F_{mn,\,i})$ 的最大对偶群，其中 $i = 1,\dots,n$。若不存在此类标量，则最大的对偶群为 U(n)，即 Sp($2n,\mathbb{R}$) 的极大紧子群。这些结果可以自然地推广到纯矢量场部分 $L(F)$ 的拉格朗日量 $L(F;\,\phi,\phi)$ 属于非线性 U(1) 对偶不变理论 [18–22]（综述见 [23–25] ）的情形，例如 Born-Infeld 理论。然而，当 $L(F)$ 为二次型时， $L(F;\,\phi,\phi)$ 中依赖于 F 的部分在弯曲时空中也在 Weyl 变换下保持不变。于是，计算

[4]这个算子由 Paneitz 在 1983 [14] 、Riegert 在 1984 [15] 重新发现。

¯对规范场进行路径积分会得到有效作用量 $\Gamma[\phi,\phi]$，其对数发散部分在 Weyl 变换和刚性 Sp$(2n,\mathbb{R})$ 变换下保持不变；关于形式化论证，参见例如 [26, 27] 。这两种对称性在量子层次均存在反常，但单圈有效作用量的对数发散部分在这些变换下保持不变。

本文证明，形如 (1.6) 的作用量可作为下述模型中的诱导作用量出现：该模型包含 n 阿贝尔规范场 $A_m = (A_{m,\,i})$，$i = 1,\ldots,n$，它们与复场 $\phi = (\phi^{ij})$ 及其共轭场 $\bar\phi = (\bar\phi^{\bar i\bar j})$ 耦合，而这两个场以齐性空间 Sp$(2n,\mathbb{R})$/U(n) 为参数化对象，

$$\phi = \phi^{\mathrm{T}} \in \mathsf{Mat}(n,\mathbb{C})\ , \qquad \mathrm{i}(\bar\phi - \phi) > 0\ . \tag{1.13}$$

相应的拉格朗日量为

$$\begin{aligned} L^{(n)}(F;\phi,\bar\phi) &= -\frac{1}{4}\Big\{\,(F^{mn})^{\mathrm{T}}\,\Xi F_{mn} + (F^{mn})^{\mathrm{T}}\,\Upsilon\tilde F_{mn}\Big\} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(F^{\alpha\beta}\right)^{\mathrm{T}}\phi F_{\alpha\beta} + \mathrm{c.c.}\ , \end{aligned} \tag{1.14}$$

其中我们还引入了实矩阵 Ξ 和 Υ，其定义如下

$$\phi = \Upsilon + \mathrm{i}\,\Xi\ , \tag{1.15}$$

其中 Ξ 为正定矩阵。式 (1.14) 所描述的模型具有两个基本性质：(i) 其对偶群为 Sp$(2n,\mathbb{R})$（技术细节参见 [23] ）；(ii) 它具有 Weyl 不变性。诱导作用量必须保持这些性质。

本文安排如下。第2节计算通过对模型 (1.14) 中的矢量场进行积分得到的有效作用量的对数发散部分。第3节简要讨论对我们分析的推广以及尚待解决的问题。正文附有三个技术性附录。附录 A 汇总了关于厄米对称空间 Sp$(2n,\mathbb{R})$/U(n) 的必要事实。附录 B 给出了诱导作用量的另一种计算方法，与第2.2节中给出的方法不同。附录 C 列出了 (2.22) 中引入的所有结构。

2 计算诱导作用量

本节计算有效作用量的对数发散部分，$\varGamma[\phi,\phi]$，其定义为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma[\phi,\bar{\phi}]}=\int[\mathfrak{D}A]\,\delta\Big(\eta-\chi(A)\Big)\,\mathrm{Det}\,(\Delta_{\mathrm{gh}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[A;\phi,\bar{\phi}]}\ . \tag{2.1}$$

这里 $S[A;\ \phi,\ \bar{\phi}]$ 是与 (1.14) 对应的经典作用量，

$$S[A;\phi,\bar{\phi}]=\int\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,L^{(n)}(F;\phi,\bar{\phi})\ , \tag{2.2}$$

$\chi(A)$ 表示规范固定条件，Δ_{gh} 相应的费耶-波波夫算符[28], 以及 η 任意背景场。由于有效作用量与 η无关，因此可以按我们选定的某种权重对该场积分消去，该权重为

$$\exp\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\eta^{\mathrm{T}}\Xi\eta\Big)\ . \tag{2.3}$$

一般情况下，有效作用量的对数发散部分具有如下形式

$$\Gamma_\infty=-\frac{\ln\Lambda}{(4\pi)^2}\int\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,(a_2)_{\mathrm{total}}\ , \tag{2.4}$$

其中 $(a_2)_{\mathrm{total}}$ 表示适当的对角德威特系数之和。我们将诱导作用量定义为 $\int\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,(a_2)_{\mathrm{total}}$，相差一个整体数值系数。

2.1 量子化

我们选择最简单的规范固定条件

$$\chi(A)=\nabla^mA_m\ , \tag{2.5}$$

由此得到鬼算子

$$\Delta_{\mathrm{gh}}:=\Box\mathbb{1}\ , \tag{2.6}$$

其中 $\mathbb{1}$ 是 $n\times n$ 单位矩阵。用权重泛函 (2.3) 对 (2.1) 的右侧积分，得到规范固定项

$$S_{\mathrm{G.F.}}[A;\phi,\bar{\phi}]=-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,(\nabla^mA_m)^{\mathrm{T}}\Xi(\nabla^nA_n)\ . \tag{2.7}$$

因此，规范固定作用量变为

$$S_{\text{quadratic}}[A;\phi,\bar{\phi}]=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,A_{\hat{m}}\Delta^{\hat{m}\hat{n}}A_{\hat{n}}\ , \tag{2.8}$$

这里我们引入带帽指标，它对应一对时空指标和内部指标 $A^{\hat{}m}:=(A_{mi})$，$\Delta^{\hat{}m\hat{}n}:=(\Delta^{mi,nj})$。带帽指标的缩并表示对这两类指标求和；不过，带帽指标的位置（上标或下标）仅表示时空指标的位置，而内部指标始终视为矩阵乘法。非极小算符 $\Delta^{\hat{m}\hat{n}}$ 定义如下：

$$\Delta^{mi,nj}:=\Xi^{ij}g^{mn}\Box+V^{mi,p,nj}\nabla_p-R^{mn}\Xi^{ij}\ ,\qquad \Box:=\nabla^m\nabla_m\ , \tag{2.9a}$$

$$V^{mi,p,nj}:=(\nabla^p\Xi^{ij})g^{mn}-(\nabla^n\Xi^{ij})g^{mp}+(\nabla^m\Xi^{ij})g^{pn}-(\nabla_q\Upsilon^{ij})\varepsilon^{mpnq}\ . \tag{2.9b}$$

从这里开始，除非可能产生歧义或混淆，否则省略矩阵指标。单圈有效作用量由下式给出：

$$\Gamma^{(1)}[\phi,\bar{\phi}]=\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}\ln\Delta-\mathrm{i}\mathrm{Tr}\ln\Delta_{\text{gh}}\ . \tag{2.10}$$

由于依据式 (1.13)，Ξ 是对称正定的，因此其逆矩阵 Ξ^{-1}、平方根 $\Xi^{1/2}$和逆平方根 $\Xi^{-1/2}$ 均有定义。我们在路径积分中进行局域场重定义：

$$A_m\to\Xi^{-1/2}A_m\ , \tag{2.11}$$

这样，式 (2.8) 中出现的算子就变为 [5]

$$\tilde{\Delta}^{\hat{m}\hat{n}}=\Xi^{-1/2}\Delta^{mn}\Xi^{-1/2}\ . \tag{2.12}$$

代入式 (2.9a) 和 (2.9b) 中 $\Delta^{\hat{}m\hat{}n}$的显式形式后，$\tilde{\Delta}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}}$算子现在是极小算子：

$$\tilde{\Delta}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}}=\mathbb{1}\,\delta^m{}_n\Box+Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{n}}\nabla^p+T^{\hat{m}}{}_{\hat{n}}\ , \tag{2.13a}$$

$$Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{n}}:=-2\left(\nabla_p\Xi^{1/2}\right)\Xi^{-1/2}\delta^m{}_n+\Xi^{-1/2}\,V^m{}_{pn}\,\Xi^{-1/2}\ , \tag{2.13b}$$

$$\begin{aligned}T^{\hat{m}}{}_{\hat{n}}:=&-\left(\Box\Xi^{1/2}\right)\delta^m{}_n+2\left(\nabla^p\Xi^{1/2}\right)\Xi^{-1/2}\left(\nabla_p\Xi^{1/2}\right)\Xi^{-1/2}\delta^m{}_n\\&-\Xi^{-1/2}\,V^m{}_{pn}\Xi^{-1/2}\left(\nabla^p\Xi^{1/2}\right)\Xi^{-1/2}-R^m{}_n\mathbb{1}\ .\end{aligned} \tag{2.13c}$$

经过场重定义后，单圈有效作用量为

$$\Gamma^{(1)}[\phi,\bar{\phi}]=\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}\ln\tilde{\Delta}-\mathrm{i}\mathrm{Tr}\ln\Delta_{\text{gh}}\ . \tag{2.14}$$

[5]在附录 B 中，我们给出了另一种场重定义的结果，该重定义所得的对数发散与原结果相同，至多相差一个全导数。

2.2 热核计算

由于由 (2.13a) 定义的算子 $\tilde{\Delta}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}}$ 是极小算子，我们可以采用弯曲时空中的标准热核技术，将其化为以下形式：

$$\tilde{\Delta}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} = \big(\hat{\nabla}^p\hat{\nabla}_p\big)^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} + \hat{P}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} \ , \tag{2.15a}$$

$$\hat{P}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} := -\frac{1}{2}\nabla^p Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{n}} - \frac{1}{4}\, Q^{\hat{m}}{}_{q\hat{p}} Q^{\hat{p}q}{}_{\hat{n}} + T^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} \ . \tag{2.15b}$$

上文引入的广义协变导数 ∇_m 定义为作用于列矩阵 $A^{\hat{m}} = (A^m{}_i)$ 时，形式如下：

$$\big(\hat{\nabla}_p A\big)^{\hat{m}} := \nabla_p A^{\hat{m}} + \frac{1}{2}\, Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{n}} A^{\hat{n}} \ . \tag{2.16}$$

广义协变导数没有挠率，这意味着

$$\big[\hat{\nabla}_p, \hat{\nabla}_q\big] A^{\hat{m}} = \hat{R}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}pq} A^{\hat{n}} \ , \tag{2.17}$$

其中 $R^m{}_{\hat{n}pq}$ 是某种广义曲率，它关于 p、q 反对称。具体形式为

$$\hat{R}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}pq} = R^m{}_{npq}\mathbb{1} + \frac{1}{2}\nabla_p Q^{\hat{m}}{}_{q\hat{n}} - \frac{1}{2}\nabla_q Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{n}} + \frac{1}{4}\, Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{r}} Q^{\hat{r}}{}_{q\hat{n}} - \frac{1}{4}\, Q^{\hat{m}}{}_{q\hat{r}} Q^{\hat{r}}{}_{p\hat{n}} \ . \tag{2.18}$$

在弯曲时空中，对形式为 (2.15a) 的算子使用标准的 Schwinger-DeWitt形式体系 [29–33]，在重合极限下，对矩阵指标取迹后的 DeWitt 系数 $(a_2)^{\tilde{\Delta}}(x,x)$ 为

$$\begin{aligned}(a_2)^{\tilde{\Delta}}(x,x) =& \left(\frac{1}{45}R^{mnpq}R_{mnpq} - \frac{1}{45}R^{mn}R_{mn} + \frac{1}{18}R^2 + \frac{2}{15}\Box R\right)\mathrm{Tr}\mathbb{1} \\ &+ \frac{1}{12}\hat{R}^{\hat{m}\hat{n}pq}\hat{R}_{\hat{n}\hat{m}pq} + \frac{1}{6}\big(\hat{\nabla}^p\hat{\nabla}_p\hat{P}\big)^{\hat{m}}{}_{\hat{m}} + \frac{1}{2}\big(\hat{P}^2\big)^{\hat{m}}{}_{\hat{m}} + \frac{1}{6}R\hat{P}^{\hat{m}}{}_{\hat{m}} \ ,\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中，“Tr”表示矩阵迹。类似地，对于鬼算子 (2.6)，相应的 DeWitt 系数取迹后为 $(a_2)^{\Delta_{gh}}(x,x)$（注意广义曲率为零）：

$$(a_2)^{\Delta_{gh}}(x,x) = \left(\frac{1}{180}R^{mnpq}R_{mnpq} - \frac{1}{180}R^{mn}R_{mn} + \frac{1}{72}R^2 + \frac{1}{30}\Box R\right)\mathrm{Tr}\mathbb{1} \ , \tag{2.20}$$

其中只包含引力分量。利用方程组（2.15a – 2.18），我们将（a_2）（x，x）（2.19）显式展开为 $Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{n}}$（2.13b）和 $T^{\hat{m}}{}_{\hat{n}}$

(2.13c)

$$\begin{aligned}(a_2)^{\tilde{\Delta}}(x,x) =& \left(-\frac{11}{180}R^{mnpq}R_{mnpq} - \frac{1}{45}R^{mn}R_{mn} + \frac{1}{18}R^2 + \frac{2}{15}\Box R\right)\mathrm{Tr}\mathbb{1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{6}R^{p}{}_{m}{}^{qr}\left(\nabla_{q}Q^{mi}{}_{r,pi}\right)+\frac{1}{12}R^{p}{}_{m}{}^{qr}Q^{mi}{}_{q\hat{s}}Q^{\hat{s}}{}_{r,pi}-\frac{1}{12}R\left(\nabla^{p}Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{m}}\right)\\
&-\frac{1}{24}R\,Q^{\hat{m}}{}_{q\hat{p}}Q^{\hat{p}q}{}_{\hat{m}}+\frac{1}{6}R\,T^{\hat{m}}{}_{\hat{m}}-\frac{1}{12}\Box\nabla^{p}Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{m}}-\frac{1}{12}\left(\Box Q^{\hat{m}}{}_{q\hat{p}}\right)Q^{\hat{p}q}{}_{\hat{m}}\\
&-\frac{1}{24}\left(\nabla_{q}Q^{\hat{m}}{}_{r\hat{p}}\right)\left(\nabla^{q}Q^{\hat{p}r}{}_{\hat{m}}\right)-\frac{1}{24}\left(\nabla^{q}Q^{\hat{m}}{}_{r\hat{p}}\right)\left(\nabla^{r}Q^{\hat{p}}{}_{q\hat{m}}\right)+\frac{1}{8}\left(\nabla^{r}Q^{\hat{m}}{}_{r\hat{p}}\right)\left(\nabla^{s}Q^{\hat{p}}{}_{s\hat{m}}\right)\\
&+\frac{1}{24}\left(\nabla^{q}Q^{\hat{m}}{}_{r\hat{p}}\right)Q^{\hat{p}}{}_{q\hat{s}}Q^{\hat{s}r}{}_{\hat{m}}-\frac{1}{24}\left(\nabla^{q}Q^{\hat{m}}{}_{r\hat{p}}\right)Q^{\hat{p}r}{}_{\hat{s}}Q^{\hat{s}}{}_{q\hat{m}}\\
&+\frac{1}{8}\left(\nabla^{r}Q^{\hat{m}}{}_{r\hat{p}}\right)Q^{\hat{p}}{}_{t\hat{s}}Q^{\hat{s}t}{}_{\hat{m}}+\frac{1}{96}Q^{\hat{m}}{}_{q\hat{s}}Q^{\hat{s}}{}_{r\hat{p}}Q^{\hat{p}q}{}_{\hat{t}}Q^{\hat{t}r}{}_{\hat{m}}+\frac{1}{48}Q^{\hat{m}}{}_{q\hat{p}}Q^{\hat{p}q}{}_{\hat{r}}Q^{\hat{r}}{}_{s\hat{t}}Q^{\hat{t}s}{}_{\hat{m}}\\
&-\frac{1}{2}\left(\nabla^{p}Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{q}}\right)T^{\hat{q}}{}_{\hat{m}}-\frac{1}{4}T^{\hat{m}}{}_{\hat{r}}Q^{\hat{r}}{}_{p\hat{q}}Q^{\hat{q}p}{}_{\hat{m}}+\frac{1}{6}\Box T^{\hat{m}}{}_{\hat{m}}+\frac{1}{2}(T^{2})^{\hat{m}}{}_{\hat{m}}\ . \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

利用 $Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{n}}$ （2.13b）和 $T^{\hat{}}{}_{m\hat{n}}$ （2.13c）的定义，我们完成了繁琐的任务˜，将（a_2）$^{\Delta}$（x， x）用矩阵 Ξ 和 Υ展开。这可化为以下形式:

$$
\begin{aligned}
(a_2)^{\tilde{\Delta}}(x,x)=\mathrm{Tr}\Big[&\frac{7}{24}T_1+\frac{1}{48}T_2-\frac{5}{12}T_3+\frac{1}{12}T_4+\frac{7}{12}T_5+\frac{5}{24}T_6-\frac{1}{24}T_7+\frac{5}{24}T_8+\frac{7}{24}T_9\\
&+\frac{1}{48}T_{10}+\frac{1}{4}T_{11}+\frac{1}{4}T_{12}-\frac{1}{2}T_{13}+\frac{1}{2}T_{14}-\frac{1}{2}T_{15}-\frac{1}{2}T_{16}-\frac{1}{2}T_{17}-\frac{1}{2}T_{18}\\
&+\frac{1}{6}T_{19}+\frac{1}{6}T_{20}+\mathcal{X}\mathbb{1}+\nabla_m\mathcal{Y}^m+\Box\mathcal{Z}\Big]\ , \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

其中各项贡献 T_1、.....、T_{20} 列于附录 C。我们还引入了:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}:=&-\frac{11}{180}R^{mnpq}R_{mnpq}+\frac{43}{90}R^{mn}R_{mn}-\frac{1}{9}R^2-\frac{1}{30}\Box R\ , \qquad (2.23a)\\
\mathcal{Y}^m:=&-\frac{1}{4}\Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_n\Xi)+\frac{1}{4}\Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\\
&+\frac{1}{12}\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)+\frac{1}{12}\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\\
&+\frac{1}{6}\Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\Box\Xi)-\frac{1}{6}\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\Box\Upsilon)\\
&-\frac{1}{3}\Big(R^{mn}-\frac{1}{2}Rg^{mn}\Big)\Xi^{-1}(\nabla_n\Xi)\ , \qquad (2.23b)\\
\mathcal{Z}:=&-\frac{1}{6}\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)-\frac{1}{3}\Xi^{-1}(\Box\Xi)+\frac{4}{3}\Xi^{-1/2}(\Box\Xi^{1/2})\\
&+\frac{4}{3}\Xi^{-1}(\nabla_n\Xi)\Xi^{-1/2}(\nabla^n\Xi^{1/2})\ . \qquad (2.23c)
\end{aligned}
$$

对应于有效作用量（2.14）中对数发散的总德维特系数为

$$
(a_2)_{\mathrm{total}}=(a_2)^{\tilde{\Delta}}(x,x)-2(a_2)^{\Delta_{gh}}(x,x)\ , \qquad (2.24)
$$

其中（a_2）$^{\Delta_{gh}}$（x, x）已在（2.20）中给出。回顾用原始场 ϕ 及其共轭 $\bar{\phi}$（1.15）表示的 Ξ 和 Υ 的表达式，并定义

$$\mathcal{D}^2\phi := \Box\phi + \mathrm{i}(\nabla^m\phi)\Xi^{-1}(\nabla_m\phi) \ , \qquad \mathcal{D}^2\bar{\phi} := \Box\bar{\phi} - \mathrm{i}(\nabla^m\bar{\phi})\Xi^{-1}(\nabla_m\bar{\phi}) \ , \tag{2.25}$$

总德维特系数为

$$\begin{aligned}(a_2)_{\rm total} = n\Big(\frac{1}{10}F - \frac{31}{180}G - \frac{1}{10}\Box R\Big) \\ + \frac{1}{4}{\rm Tr}\Big[\Xi^{-1}(\mathcal{D}^2\phi)\Xi^{-1}(\mathcal{D}^2\bar{\phi}) - 2\Big(R^{mn} - \frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\Xi^{-1}(\nabla_m\phi)\Xi^{-1}(\nabla_n\bar{\phi})\Big] \\ + \frac{1}{24}{\rm Tr}\Big[\Xi^{-1}(\nabla^m\phi)\Xi^{-1}(\nabla_m\bar{\phi})\Xi^{-1}(\nabla^n\phi)\Xi^{-1}(\nabla_n\bar{\phi})\Big] \\ + \frac{1}{48}{\rm Tr}\Big[\Xi^{-1}(\nabla^m\phi)\Xi^{-1}(\nabla^n\bar{\phi})\Xi^{-1}(\nabla_m\phi)\Xi^{-1}(\nabla_n\bar{\phi})\Big] \ ,\end{aligned} \tag{2.26}$$

其中， F 是 Weyl 张量的平方， G是欧拉密度，

$$F = R^{mnpq}R_{mnpq} - 2R^{mn}R_{mn} + \frac{1}{3}R^2 \ , \quad G = R^{mnpq}R_{mnpq} - 4R^{mn}R_{mn} + R^2 \ , \tag{2.27}$$

并且我们去掉了全导数项 ${\rm Tr}\big[\nabla_m\mathcal{Y}^m\big]$ 和 ${\rm Tr}\big[\Box\mathcal{Z}\big]$ ，因为它们对诱导作用量 $\int{\rm d}^4x\sqrt{-g}$ $(a_2)_{\rm total}$没有贡献。(2.26) 中的 $\Box R$ 也是全导数，可以省略。

在 (2.26) 中令 $n=1$ ，即可得到 $[5,6]$ 中推导出的预期结果

$$\begin{aligned}(a_2)_{\rm total} = \frac{1}{10}F - \frac{31}{180}G - \frac{1}{10}\Box R \\ + \frac{1}{4({\rm Im}\phi)^2}\Big[\mathcal{D}^2\phi\mathcal{D}^2\bar{\phi} - 2\Big(R^{mn} - \frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\nabla_m\phi\nabla_n\bar{\phi}\Big] \\ + \frac{1}{48({\rm Im}\phi)^4}\Big[\nabla^m\phi\nabla_m\phi\nabla^n\bar{\phi}\nabla_n\bar{\phi} + 2\nabla^m\phi\nabla_m\bar{\phi}\nabla^n\phi\nabla_n\bar{\phi}\Big] \ .\end{aligned} \tag{2.28}$$

2.3 诱导作用量的几何表达式

为了将 (2.26) 改写为定义在厄米对称空间 ${\rm Sp}(2n,\mathbb{R})/{\rm U}(n)$ 上的几何对象，我们在此分析 (2.26) 对对称矩阵$\phi = (\phi^{ij}) = (\phi^{ji}) \equiv (\phi^I)$ 及其共轭 $\bar{\phi} = \big(\bar{\phi}^{\bar{i}\bar{j}}\big) = \big(\bar{\phi}^{\bar{j}\bar{i}}\big) \equiv (\bar{\phi}^{\bar{I}})$ 的依赖关系。

我们可作为 ${\rm Sp}(2n,\mathbb{R})/{\rm U}(n)$ 上 K¨ahler 势 $\mathfrak{K}(\phi^{ij},\bar{\phi}^{\bar{i}\bar{j}})$ 的标准选择

$$\mathfrak{K}(\phi,\bar{\phi}) := -4{\rm Tr}\ln\Xi \ , \tag{2.29}$$

这是有良好定义的，因为 Ξ 是一个正定矩阵。群 Sp$(2n,\mathbb{R})$ 通过分式线性变换 (A.18) 作用于 Sp$(2n,\mathbb{R})$/U(n)。在这种变换下，K¨ahler 势变为

$$\mathfrak{K}(\phi,\bar{\phi}) \to \mathfrak{K}(\phi,\bar{\phi}) + \Lambda(\phi) + \bar{\Lambda}(\bar{\phi}) \ , \tag{2.30}$$

根据 (A.20)，因此，K¨ahler度量在任意 Sp$(2n,\mathbb{R})$ 变换下保持不变。

K¨ahler度量为[6]

$$\mathfrak{g}_{ij,\bar{k}\bar{l}} = \mathfrak{g}_{(ij),(\bar{k}\bar{l})} = \frac{\partial^2 \mathfrak{K}}{\partial\phi^{ij}\partial\bar{\phi}^{\bar{k}\bar{l}}} = (\Xi^{-1})_{i(\bar{k}}(\Xi^{-1})_{\bar{l})j} \ , \tag{2.31}$$

其中，$(i_1\cdots i_n)$ 表示对指标 i_1、……、i_n 进行对称化。注意，由于 ϕ 是对称的 (1.13)，成对的指标也要进行对称化。这里以及下文中，我们使用以下记号

$$\mathfrak{K}_{i_1 i_2,\ldots,i_{2p-1}i_{2p},\bar{i}_1\bar{i}_2,\ldots,\bar{i}_{2q-1}\bar{i}_{2q}} = \frac{\partial^{p+q}\mathfrak{K}}{\partial\phi^{i_1 i_2}\cdots\partial\phi^{i_{2p-1}i_{2p}}\partial\bar{\phi}^{\bar{i}_1\bar{i}_2}\cdots\partial\bar{\phi}^{\bar{i}_{2q-1}\bar{i}_{2q}}} \ . \tag{2.32}$$

根据 (1.8)，Christoffel符号为

$$\Gamma^{i_1 i_2}{}_{i_3 i_4, i_5 i_6} = \mathfrak{g}^{i_1 i_2,\bar{i}_7\bar{i}_8}\mathfrak{K}_{i_3 i_4, i_5 i_6,\bar{i}_7\bar{i}_8} \ , \qquad \Gamma^{\bar{i}_1\bar{i}_2}{}_{\bar{i}_3\bar{i}_4,\bar{i}_5\bar{i}_6} = (\Gamma^{i_1 i_2}{}_{i_3 i_4, i_5 i_6})^* \ , \tag{2.33}$$

而黎曼曲率张量为

$$\mathfrak{R}_{i_1 i_2,\bar{i}_3\bar{i}_4,i_5 i_6,\bar{i}_7\bar{i}_8} = \mathfrak{K}_{i_1 i_2, i_5 i_6,\bar{i}_3\bar{i}_4,\bar{i}_7\bar{i}_8} - \mathfrak{g}^{i_9 i_{10},\bar{i}_{11}\bar{i}_{12}}\mathfrak{K}_{i_1 i_2, i_5 i_6,\bar{i}_{11}\bar{i}_{12}}\mathfrak{K}_{i_9 i_{10},\bar{i}_3\bar{i}_4,\bar{i}_7\bar{i}_8} \ . \tag{2.34}$$

注意到 (2.31) 中 K¨ahler度量的逆为

$$\mathfrak{g}^{ij,\bar{k}\bar{l}} = \Xi^{i(\bar{k}}\,\Xi^{\bar{l})j} \ , \tag{2.35}$$

可以计算式 (2.31) 中所考虑度规的 Christoffel符号、黎曼曲率张量和里奇张量，结果为:

$$\Gamma^{i_1 i_2}{}_{i_3 i_4, i_5 i_6} = \mathrm{i}\delta^{(i_1}{}_{(i_3}(\Xi^{-1})_{i_4)(i_5}\delta^{i_2)}{}_{i_6)} \ , \tag{2.36a}$$

[6]关于对称矩阵 $\phi=(\phi^{ij})$ 和 $\bar{\phi}=(\bar{\phi}^{\bar{i}\bar{j}})$ 的偏导数定义为 $\mathrm{d}\mathfrak{K}(\phi,\bar{\phi}) = \mathrm{d}\phi^{ij}\frac{\partial\mathfrak{K}}{\partial\phi^{ij}}_{(\phi,\bar{\phi})} + \mathrm{d}\bar{\phi}^{\bar{i}\bar{j}}\frac{\partial\mathfrak{K}}{\partial\bar{\phi}^{\bar{i}\bar{j}}}_{(\phi,\bar{\phi})}$，因此有 $\frac{\partial\phi^{kl}}{\partial\phi^{ij}} = \delta^k_{(i}\delta^l_{j)}$。对 n 个指标进行对称化时包含一个 $1/n!$ 因子。竖线表示将其中包含的指标排除在单独的对称化之外，例如 $(i_1|(i_2 i_3)|i_4)$。

$$\Gamma^{\bar{i}_1\bar{i}_2}{}_{\bar{i}_3\bar{i}_4,\bar{i}_5\bar{i}_6} = -\mathrm{i}\delta^{(\bar{i}_1}{}_{(\bar{i}_3}(\Xi^{-1})_{\bar{i}_4)(\bar{i}_5}\delta^{\bar{i}_2)}{}_{\bar{i}_6)} \ , \tag{2.36b}$$

$$\mathfrak{R}_{i_1i_2,\bar{i}_3\bar{i}_4,i_5i_6,\bar{i}_7\bar{i}_8} = \frac{1}{2}(\Xi^{-1})_{(\bar{i}_8|(i_1}(\Xi^{-1})_{i_2)(\bar{i}_3}(\Xi^{-1})_{\bar{i}_4)(i_5}(\Xi^{-1})_{i_6)|\bar{i}_7)} \ , \tag{2.36c}$$

$$\mathfrak{R}_{i_1i_2,\bar{i}_3\bar{i}_4} = -\frac{n}{2}(\Xi^{-1})_{i_1(\bar{i}_3}(\Xi^{-1})_{\bar{i}_4)i_2} = -\frac{n}{2}\mathfrak{g}_{i_1i_2,\bar{i}_3\bar{i}_4} \ . \tag{2.36d}$$

后一关系意味着 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ 是一个爱因斯坦空间。

正如本小节开头所指出的，复变量 ϕ 及其共轭 $\bar{\phi}$既可以视为对称矩阵 $\phi = (\phi^{ij})$ 和 $\bar{\phi} = (\bar{\phi}^{\bar{i}\bar{j}})$，也可以视为向量列 $\phi = (\phi^I)$ 和 $\bar{\phi} = (\bar{\phi}^{\bar{I}})$，其中 $I, \bar{I} = 1, \dots, \frac{1}{2}n(n+1)$。采用后一种记法，几何结构 (2.31) 和 (2.36a – 2.36c) 可用于将 (2.26) 改写为以下形式：

$$\begin{aligned}(a_2)_{\text{total}} = {}& n\left(\frac{1}{10}F - \frac{31}{180}G - \frac{1}{10}\Box R\right) \\ & + \frac{1}{4}\mathfrak{g}_{I\bar{J}}(\phi,\bar{\phi})\Big[\mathcal{D}^2\phi^I\mathcal{D}^2\bar{\phi}^{\bar{J}} - 2\Big(R^{mn} - \frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\nabla_m\phi^I\nabla_n\bar{\phi}^{\bar{J}}\Big] \\ & + \frac{1}{24}\mathfrak{R}_{I\bar{J}K\bar{L}}(\phi,\bar{\phi})\Big[2\nabla^m\phi^I\nabla_m\bar{\phi}^{\bar{J}}\nabla^n\phi^K\nabla_n\bar{\phi}^{\bar{L}} + \nabla^m\phi^I\nabla^n\bar{\phi}^{\bar{J}}\nabla_m\phi^K\nabla_n\bar{\phi}^{\bar{L}}\Big] \ ,\end{aligned} \tag{2.37a}$$

其中

$$\mathcal{D}^2\phi^I = \Box\phi^I + \Gamma^I{}_{JK}\nabla^m\phi^J\nabla_m\phi^K \ , \qquad \mathcal{D}^2\bar{\phi}^{\bar{I}} = \Box\bar{\phi}^{\bar{I}} + \Gamma^{\bar{I}}{}_{\bar{J}\bar{K}}\nabla^m\bar{\phi}^{\bar{J}}\nabla_m\bar{\phi}^{\bar{K}} \ . \tag{2.37b}$$

每个等距变换 (A.18) 对 $\nabla\phi$ 和 $\mathcal{D}^2\phi$ 的作用如下：

$$\nabla^m\phi' = \big((C\phi+D)^{-1}\big)^{\mathrm{T}}(\nabla^m\phi)(C\phi+D)^{-1} \ , \tag{2.38a}$$

$$\mathcal{D}^2\phi' = \big((C\phi+D)^{-1}\big)^{\mathrm{T}}(\mathcal{D}^2\phi)(C\phi+D)^{-1} \ . \tag{2.38b}$$

由此可见，由 (2.37) 定义的诱导作用量在 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ 上的等距变换下保持不变。

3 推广与开放问题

构成诱导作用量的关系式 (2.37) 是我们的主要结果。同样的结构也决定了有效作用量的 Weyl 反常

$$\delta_\sigma\Gamma \propto \frac{1}{(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\sigma\,(a_2)_{\text{total}} \ . \tag{3.1}$$

众所周知，这一变分中纯引力部分满足 Wess-Zumino 一致性条件 [34]

$$[\delta_{\sigma_2}, \delta_{\sigma_1}]\Gamma = 0 \ , \tag{3.2}$$

例如，参见 [35–37] 以了解综述。[7] Weyl 反常中依赖于 ϕ 的部分将在下文讨论。

作为式 (1.6) 的推广，我们可以引入一个与黎曼流形 $(\mathcal{W}^d, \mathfrak{g})$ 相关联的共形高阶导数 σ 模型，该流形以局部坐标 φ^μ 参数化。其作用量为

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} \Big\{ \mathfrak{g}_{\mu\nu}(\varphi) \Big[\mathcal{D}^2\varphi^\mu \mathcal{D}^2\varphi^\nu - 2\Big(R^{mn} - \frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\nabla_m\varphi^\mu\nabla_n\varphi^\nu \Big] \\ + \mathfrak{F}_{\mu\nu\sigma\rho}(\varphi)\nabla^m\varphi^\mu\nabla_m\varphi^\nu\nabla^n\varphi^\sigma\nabla_n\varphi^\rho \Big\} \ , \end{aligned} \tag{3.3a}$$

其中

$$\mathcal{D}^2\varphi^\mu := \Box\varphi^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\nabla^m\varphi^\nu\nabla_m\varphi^\sigma \ , \qquad \Box = \nabla^m\nabla_m \ , \tag{3.3b}$$

且 $\mathfrak{F}_{\mu\nu\sigma\rho}(\varphi)$ 是定义在 $\mathcal{W}^d$ 上的一个 (0,4) 秩张量场。上述作用量的 Weyl 不变性由下式可知

$$\begin{aligned} \delta_\sigma \Big\{ \sqrt{-g}\, \mathfrak{g}_{\mu\nu}(\varphi) \Big[\mathcal{D}^2\varphi^\mu \mathcal{D}^2\varphi^\nu - 2\Big(R^{mn} - \frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\nabla_m\varphi^\mu\nabla_n\varphi^\nu \Big] \Big\} \\ = 4\sqrt{-g}\nabla_m \Big\{ \mathfrak{g}_{\mu\nu}(\varphi) \Big[\nabla_n\sigma\nabla^m\varphi^\mu\nabla^n\varphi^\nu - \frac{1}{2}\nabla^m\sigma\nabla^n\varphi^\mu\nabla_n\varphi^\nu \Big] \Big\} \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

在以下情形中 当目标空间为 K¨ahler 时，式 (1.6) 中的关系 (3.4) 具有如下形式 m

$$\begin{aligned} \delta_\sigma \Big\{ \sqrt{-g}\, \mathfrak{g}_{I\bar{J}}(\phi, \bar{\phi}) \Big[\mathcal{D}^2\phi^I \mathcal{D}^2\bar{\phi}^{\bar{J}} - 2\Big(R^{mn} - \frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\nabla_m\phi^I\nabla_n\bar{\phi}^{\bar{J}} \Big] \Big\} \\ = 2\sqrt{-g}\, \nabla_m \Big\{ \mathfrak{g}_{I\bar{J}}(\phi, \bar{\phi}) \Big[\nabla_n\sigma\Big(\nabla^m\phi^I\nabla^n\bar{\phi}^{\bar{J}} + \nabla^n\phi^I\nabla^m\bar{\phi}^{\bar{J}}\Big) - \nabla^m\sigma\nabla^n\phi^I\nabla_n\bar{\phi}^{\bar{J}} \Big] \Big\} \ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

取 $\mathcal{W}^d$ 为 $\mathbb{R}$，分别令 $\mathfrak{g}_{\mu\nu}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{F}_{\mu\nu\sigma\rho}(\varphi)$ 为常数，并将背景时空限制为平直时空，作用量 (3.3) 便变为

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, L \ , \qquad L = (\partial^2\varphi)^2 + f(\partial^m\varphi\partial_m\varphi)^2 \ , \tag{3.6}$$

[7] 该 $\Box R$ 项对 (3.1) 中的 $(a_2)_{\rm total}$ 有贡献，但可以将其移除，因为它由局部反项 $\int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\, R^2$ 生成。

其中 f 为耦合常数，这正是 Tseytlin [38] 最近研究的模型。

假设模型 (3.3) 源自某个理论的诱导作用量，则 Weyl 反常中依赖于 φ 的部分应具有如下形式

$$\delta_\sigma\Gamma \propto \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\sigma\Big\{\mathfrak{g}_{\mu\nu}(\varphi)\Big[\mathcal{D}^2\varphi^\mu\mathcal{D}^2\varphi^\nu - 2\Big(R^{mn}-\frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\nabla_m\varphi^\mu\nabla_n\varphi^\nu\Big] + \mathfrak{F}_{\mu\nu\sigma\rho}(\varphi)\nabla^m\varphi^\mu\nabla_m\varphi^\nu\nabla^n\varphi^\sigma\nabla_n\varphi^\rho\Big\}\,. \tag{3.7}$$

由于关系式 (3.4)，该反常满足 Wess-Zumino一致性条件 (3.2)。

研究闵可夫斯基空间中具有如下形式拉格朗日量的高导数理论的重整化性质，将会很有趣

$$\mathcal{L}(F,\phi,\bar\phi) = L^{(n)}(F;\phi,\bar\phi) + f_1\mathfrak{g}_{I\bar J}(\phi,\bar\phi)\mathcal{D}^2\phi^I\mathcal{D}^2\bar\phi^{\bar J} + \mathfrak{R}_{I\bar JK\bar L}(\phi,\bar\phi)\Big[f_2\partial^m\phi^I\partial_m\bar\phi^{\bar J}\partial^n\phi^K\partial_n\bar\phi^{\bar L} + f_3\partial^m\phi^I\partial^n\bar\phi^{\bar J}\partial_m\phi^K\partial_n\bar\phi^{\bar L}\Big] + \dots\,, \tag{3.8}$$

其中，$L^{(n)}(F;\phi,\bar\phi)$ 由 (1.14) 给出，复标量场 ϕ^I 及其共轭 $\bar\phi^{\bar I}$ 参数化 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$，而 f_1、f_2 和 f_3 是无量纲耦合常数。(3.8) 中与 F 无关部分的所有结构都出现在诱导作用量 (2.37) 中。¯(3.8) 中的省略号表示其他关于 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 的项，这些项关于 $\partial\phi$ 和 $\partial\phi$ 为四次，例如 (1.9) 中的 K¨ahler 度量平方结构。对于 $n>1$，这类项是可能存在的。文献 [39, 40] 研究了四维中具有无量纲耦合常数的最一般四阶σ模型的重整化。(3.8) 中的所有耦合常数都是无量纲的，而选择这些常数的自由度由 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 决定。这意味着，具有经典拉格朗日量 (3.8) 的理论在量子层次上是可重整化的。

两年前，人们发现麦克斯韦理论存在一种具有单参数、共形且 U(1) 对偶不变的变形 [41, 42]； [41]将其称为 ModMax理论。利用 [19–21], 中发展的方法，可以将其与膨胀子-轴子场 (1.12) 耦合，从而得到一个具有共形和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 对偶不变性的模型，其拉格朗日量为 [43]

$$L_\gamma(F;\phi,\bar\phi) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\varphi}\big(\omega+\bar\omega\big)(\cosh\gamma-1) + \mathrm{e}^{-\varphi}\sqrt{\omega\bar\omega}\sinh\gamma + \frac{\mathrm{i}}{2}\big(\phi\,\omega-\bar\phi\,\bar\omega\big)\,, \tag{3.9a}$$

其中

$$\omega = \alpha+\mathrm{i}\beta = F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,,\qquad \alpha=\frac{1}{4}F^{ab}F_{ab}\,,\qquad \beta=\frac{1}{4}F^{ab}\tilde F_{ab}\,, \tag{3.9b}$$

且 γ 是一个非负耦合常数 [41]。当 $\gamma = 0$ 时，模型（3.9）简化为（1.12）。一个具有挑战性的问题是计算由（3.9）生成的诱导作用量。

致谢：
SK 的工作部分得到澳大利亚研究理事会项目（编号：DP200101944）的资助。JP 的工作得到澳大利亚政府研究培训计划奖学金的资助。

厄米对称空间 $\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathsf{U}(n)$

本附录汇集了关于厄米对称空间 $\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathsf{U}(n)$ 的必要事实。这里的辛群定义为

$$\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathsf{GL}(2n,\mathbb{R}), \quad g^{\mathrm{T}} J g = J \ , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}^n \\ -\mathbb{I}^n & 0 \end{pmatrix} \right\} \ . \tag{A.1}$$

其极大紧子群 $H = \mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathsf{SO}(2n)$ 可证明与 $\mathsf{U}(n)$ 同构。证明这一点的一种方法是利用同构

$$\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cong \mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \cap \mathsf{SU}(n,n) \equiv \underline{G} \ , \tag{A.2}$$

它是通过考察双射

$$\varphi : g \ \rightarrow \ \underline{g} = \mathbb{A}^{-1} g \mathbb{A} \ , \qquad \mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}^n & \mathbb{I}^n \\ -\mathrm{i}\mathbb{I}^n & \mathrm{i}\mathbb{I}^n \end{pmatrix} \ , \tag{A.3}$$

对于任意 $g \in \mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R})$。每个复矩阵 $\underline{g} = \varphi(g)$ 的特征性质如下

$$\underline{g}^{\mathrm{T}} J \underline{g} = J \ , \qquad \underline{g}^{\dagger} I_{n,n} \underline{g} = I_{n,n} \ , \qquad I_{n,n} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}^n & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}^n \end{pmatrix} \ , \tag{A.4}$$

因此 $\underline{g} \in \mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \cap \mathsf{SU}(n,n)$。逆映射 φ^{-1} 将每个群元素 $\underline{g} \in \mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \cap \mathsf{SU}(n,n)$ 映射到某个 $g \in \mathsf{GL}(2n,\mathbb{R})$。对于极大紧子群中的每个元素 h $h \in H = \mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathsf{SO}(2n)$，其像 $\underline{h} = \varphi(h)$ 是酉的，$\underline{h}^{\dagger} \underline{h} = \mathbb{I}^{2n}$。简单计算表明，每个 $h \in H = \mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathsf{SO}(2n)$ 都具有如下形式

$$h = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \ , \qquad A A^{\mathrm{T}} + B B^{\mathrm{T}} = \mathbb{I}^n \ , \qquad A B^{\mathrm{T}} = B A^{\mathrm{T}} \ , \tag{A.5}$$

对于其像 $\underline{h} = \varphi(h)$，我们得到

$$\varphi(h) = \begin{pmatrix} A - \mathrm{i}B & 0 \\ 0 & A + \mathrm{i}B \end{pmatrix} , \qquad (A + \mathrm{i}B)(A + \mathrm{i}B)^\dagger = \mathbb{I}^n . \tag{A.6}$$

群 $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 自然地作用于 $\mathbb{C}^{2n}$。这一作用可扩展为对复格拉斯曼流形 $\mathsf{Gr}_{m,\ 2n}(\mathbb{C})$ 的作用，其中 $0 < m < 2n$ 是 $\mathbb{C}^{2n}$ 中经过原点的 m-维平面的空间。特别值得关注的是格拉斯曼流形 $\mathsf{Gr}_{n,\ 2n}(\mathbb{C})$。给定一个 n-维平面 $\mathcal{P} \in \mathsf{Gr}_{n,\ 2n}(\mathbb{C})$，它可以由一个秩为 n 的 $2n \times n$ 矩阵来表示

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} , \tag{A.7a}$$

定义在等价变换下

$$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} MR \\ NR \end{pmatrix} , \qquad R \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) . \tag{A.7b}$$

我们记作 $\mathfrak{b}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{x} \subset \mathsf{Gr}_{n,\ 2n}(\mathbb{C})$ 为所有满足这两个条件的 n-维平面的集合 s:

$$\mathcal{P}^{\mathrm{T}} J \mathcal{P} = 0 ; \tag{A.8a}$$

$$\mathcal{P}^\dagger (\mathrm{i}J) \mathcal{P} > 0 . \tag{A.8b}$$

条件 (A.8b) 意味着厄米矩阵 $\mathcal{P}^\dagger(\mathrm{i}J)\mathcal{P}$ 是正定的。条件 (A.8a) 意味着 $\mathcal{P}$ 关于辛结构 J 是 $\mathbb{C}^{2n}$ 的一个拉格朗日子空间。

根据构造，群 $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 自然地作用于 $\mathfrak{x}$。事实证明，这一作用是传递的，并且 $\mathfrak{x}$ 可以与 $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R})/\mathsf{U}(n)$ 等同。理解这一点最简单的方法是利用 $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 的实现 $\underline{G}$，见式 (A.2)。图像变换 (A.3) 伴随着

$$\mathcal{P} \ \to \ \underline{\mathcal{P}} = \mathbb{A}^{-1} \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \underline{M} \\ \underline{N} \end{pmatrix} . \tag{A.9}$$

对于变换后的 n-平面 $\underline{\mathcal{P}}$，条件 (A.8) 可写为

$$\underline{\mathcal{P}}^{\mathrm{T}} J \underline{\mathcal{P}} = 0 ; \tag{A.10a}$$

$$\underline{\mathcal{P}}^\dagger I_{n,n} \underline{\mathcal{P}} > 0 . \tag{A.10b}$$

后一个条件表明，(A.9) 中的矩阵 $\underline{M}$ 是非奇异的，因此

$$\begin{pmatrix} \underline{M} \\ \underline{N} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I}^n \\ \underline{N}\underline{M}^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{I}^n \\ \psi \end{pmatrix} . \tag{A.11}$$

用 $n \times n$ 矩阵 ψ表示时，条件 (A.10) 等价于

$$\psi^{\mathrm{T}} = \psi , \qquad \mathbb{I}^n > \psi^\dagger \psi . \tag{A.12}$$

由 (A.12) 及其共轭约束的复 $n \times n$ 矩阵 ψ 为 $\mathfrak{X}$提供了一个全局坐标系。与 ψ 和 ψ 相应的群元素为

$$\mathfrak{S}(\psi, \bar{\psi}) = \begin{pmatrix} s & \bar{\psi}\bar{s} \\ \psi s & \bar{s} \end{pmatrix} \in \mathsf{Sp}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathsf{SU}(n, n) , \quad s = \big(\mathbb{I}^n - \bar{\psi}\psi\big)^{-\frac{1}{2}} . \tag{A.13}$$

其重要性质是

$$\mathfrak{S}(\psi, \bar{\psi})\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} s \\ \psi s \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I}^n \\ \psi \end{pmatrix} , \qquad \mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} \mathbb{I}^n \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{A.14}$$

因此， $\mathfrak{S}(\psi, \psi)$ 将“原点” $\mathcal{P}_0$ 映射到 $\mathfrak{X}$中的点 (A.11)，从而群 $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathsf{SU}(n, n)$ 在 $\mathfrak{X}$ 上传递作用。可以看出， $\mathcal{P}_0$ 的各向同性子群由形如 (A.6) 的群元素构成，这些元素张成 $\mathsf{U}(n)$。我们得到

$$\mathfrak{X} = \frac{\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathsf{SU}(n, n)}{\mathsf{U}(n)} = \frac{\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R})}{\mathsf{U}(n)} . \tag{A.15}$$

利用 (A.9)–(A.11)，我们可以在原始实 $\mathfrak{X}$ 实 $\mathfrak{X}$ 现 (A.1) 中重构 $\mathfrak{X}$ 的一个一般群元素。

$$\mathcal{P} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} \mathbb{I}^n \\ \psi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I}^n + \psi \\ -\mathrm{i}(\mathbb{I}^n - \psi) \end{pmatrix} . \tag{A.16}$$

由于矩阵 $\mathbb{I}^n \pm \psi$ 是非奇异的， $\mathcal{P}$ 等价于

$$\mathcal{P} \sim \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbb{I}^n \end{pmatrix} , \qquad \phi = \mathrm{i}\frac{\mathbb{I}^n + \psi}{\mathbb{I}^n - \psi} . \tag{A.17a}$$

ϕ 的性质由 (A.8) 得出：

$$\phi^{\mathrm{T}} = \phi , \qquad \mathrm{i}\big(\bar{\phi} - \phi\big) > 0 . \tag{A.17b}$$

本文使用陪集空间 (A.15) 的 ϕ 参数化形式 (A.17)。

群 Sp(2n, $\mathbb{R}$) 通过分式线性变换作用于 Sp(2n, $\mathbb{R}$)/U(n)

$$\phi \;\to\; \phi' = (A\phi + B)(C\phi + D)^{-1} \;, \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R}) \;, \tag{A.18}$$

因此

$$\mathrm{d}\phi' = \big((C\phi + D)^{-1}\big)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\phi \, (C\phi + D)^{-1} \;. \tag{A.19}$$

利用辛矩阵的定义（式 (A.1)），可以证明由式 (1.15) 定义的正定矩阵 Ξ 按如下方式变换:

$$(\Xi')^{-1} = (C\phi + D)\Xi^{-1}(C\bar{\phi} + D)^{\mathrm{T}} = (C\bar{\phi} + D)\Xi^{-1}(C\phi + D)^{\mathrm{T}} \;. \tag{A.20}$$

设 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 是 Sp(2n, $\mathbb{R}$)/U(n) 中的两个点。我们将以下二点函数与它们相关联:

$$\mathfrak{s}^2(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = -4\mathrm{Tr}\Big[\big(\mathcal{P}_1^\dagger J\bar{\mathcal{P}}_2\big)\big(\mathcal{P}_2^{\mathrm{T}} J\bar{\mathcal{P}}_2\big)^{-1}\big(\mathcal{P}_2^{\mathrm{T}} J\bar{\mathcal{P}}_1\big)\big(\mathcal{P}_1^\dagger J\bar{\mathcal{P}}_1\big)^{-1}\Big] \;. \tag{A.21}$$

根据构造，它在任意 Sp(2n, $\mathbb{R}$) 变换下保持不变

$$\mathcal{P}_{1,2} \;\to\; g\mathcal{P}_{1,2} \;, \qquad g \in \mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R}) \;. \tag{A.22}$$

它在任意等价变换 (A.7) 下也保持不变,

$$\mathcal{P}_{1,2} \;\to\; \mathcal{P}_{1,2}R_{1,2} \;, \qquad R_{1,2} \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) \;. \tag{A.23}$$

因此， $\mathfrak{s}^2(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ 是 Sp(2n, $\mathbb{R}$)/U(n) 的二点函数，在等距群 Sp(2n, $\mathbb{R}$) 下保持不变。由于 $\mathfrak{s}^2(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ 在任意右移（A.23）下保持不变，因此可以将 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 都取为式（A.17）的形式。当 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 无穷小地分离时， $\mathfrak{s}^2(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ 变为

$$\mathrm{d}\mathfrak{s}^2 = \mathrm{Tr}\Big[\mathrm{d}\bar{\phi}\,\Xi^{-1}\mathrm{d}\phi\,\Xi^{-1}\Big] \;, \tag{A.24}$$

这是 Sp(2n, $\mathbb{R}$)/U(n) 上的 K¨ahler 度量，见式 (2.31)。

B 另一种场重定义

这里我们介绍一种不同于第2.2节所述的迹对数 Δ 计算方法。考虑对两个矢量场的路径积分

$$\mathrm{Det}\,\Delta^{-1} = N\int[\mathfrak{D}B][\mathfrak{D}A]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,B_{\hat{m}}\Delta^{\hat{m}\hat{n}}A_{\hat{n}}} \tag{B.1}$$

其中算子 $\Delta^{\hat{m}\hat{n}}$ 由式 (2.9a) 给出。我们在路径积分中进行另一种局域场定义

$$A^{\hat{m}} \to A^{\hat{m}}, \qquad B_{\hat{m}} \to \Xi^{-1}B_m\ , \tag{B.2}$$

这对于原始的二次作用量 (2.8) 是不可行的。现在，式 (B.1) 中出现的算子具有如下形式

$$\tilde{\Delta}^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} := \Xi^{-1}\Delta^m{}_n\ , \tag{B.3}$$

将式 (2.9a) 和 (2.9b) 显式展开后，它是最小的:

$$\tilde{\Delta}^{m\hat{m}} = \mathbb{1}\,\delta^m{}_n\Box + Q^m{}_{pn}\nabla^p + T^m{}_n\ , \tag{B.4a}$$

$$Q^{\hat{m}}{}_{p\hat{n}} := \Xi^{-1}\left(\nabla_p\Xi\right)\,\delta^m{}_n - \Xi^{-1}\left(\nabla_n\Xi\right)\,\delta^m{}_p + \Xi^{-1}\left(\nabla^m\Xi\right)\,g_{pn} - \Xi^{-1}\left(\nabla^q\Upsilon\right)\epsilon^m{}_{pnq}\ , \tag{B.4b}$$

$$T^{\hat{m}}{}_{\hat{n}} := -R^m{}_n\mathbb{1}\ . \tag{B.4c}$$

尽管这两种获得极小算子的方法都会导出等价的对数发散项（相差一个全导数），但另一种场定义在计算上更易处理，因为它仅涉及 Ξ、Ξ^{-1} 和 Υ 的导数，而不涉及 $\Xi^{1/2}$ 和 $\Xi^{-1/2}$。按照第2.2节中的相同步骤，$(a_2)_{\mathrm{total}}$ 的最终结果（包括全导数项）为

$$\begin{aligned}(a_2)_{\mathrm{total}} = n\bigg(&\frac{1}{10}F - \frac{31}{180}G - \frac{1}{10}\Box R\bigg)\\ &+\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big[\Xi^{-1}(\mathcal{D}^2\phi)\Xi^{-1}(\mathcal{D}^2\bar{\phi}) - 2\Big(R^{mn} - \frac{1}{3}Rg^{mn}\Big)\Xi^{-1}(\nabla_m\phi)\Xi^{-1}(\nabla_n\bar{\phi})\Big]\\ &+\frac{1}{24}\mathrm{Tr}\Big[\Xi^{-1}(\nabla^m\phi)\Xi^{-1}(\nabla_m\bar{\phi})\Xi^{-1}(\nabla^n\phi)\Xi^{-1}(\nabla_n\bar{\phi})\Big]\\ &+\frac{1}{48}\mathrm{Tr}\Big[\Xi^{-1}(\nabla^m\phi)\Xi^{-1}(\nabla^n\bar{\phi})\Xi^{-1}(\nabla_m\phi)\Xi^{-1}(\nabla_n\bar{\phi})\Big]\\ &+\mathrm{Tr}\big[\nabla_m\mathcal{Y}^m\big] + \mathrm{Tr}\big[\Box\tilde{\mathcal{Z}}\big]\ .\end{aligned} \tag{B.5}$$

与原始场重定义相比，对于 $\mathcal{Y}^m$ (2.23b)，全导数项相同；而对于 $\mathcal{Z}$ (2.23c)，则有所不同

$$\tilde{\mathcal{Z}} := -\frac{1}{6}\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon) - \frac{1}{3}\Xi^{-1}(\Box\Xi) + \frac{1}{3}\Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Xi)\ . \tag{B.6a}$$

实际上，$(a_2)_{\text{total}}$ (2.26) 和 (B.5) 的两个结果仅相差一个全导数，而它不会对诱导作用量 $\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,(a_2)_{\text{total}}$ 产生贡献。

C 曲时空基底结构

下面列出了在 (2.22) 中引入的所有基结构。请注意，在对矩阵指标取迹时，其中一些结构彼此等价（相差一个转置）；不过，由于这些结构是在计算过程中直接生成的，为了便于计算复现，我们将它们分别列出。

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_n\Xi)\ ,\\
T_2 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_n\Xi)\ ,\\
T_3 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\ ,\\
T_4 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\ ,\\
T_5 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\ ,\\
T_6 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\ ,\\
T_7 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\ ,\\
T_8 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_n\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\ ,\\
T_9 &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla^n\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\ ,\\
T_{10} &:= \Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla^n\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_n\Upsilon)\ ,\\
T_{11} &:= \Xi^{-1}(\Box\Xi)\Xi^{-1}(\Box\Xi)\ ,\\
T_{12} &:= \Xi^{-1}(\Box\Upsilon)\Xi^{-1}(\Box\Upsilon)\ ,\\
T_{13} &:= \Xi^{-1}(\Box\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Xi)\ ,\\
T_{14} &:= \Xi^{-1}(\Box\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\ ,\\
T_{15} &:= \Xi^{-1}(\Box\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\ ,\\
T_{16} &:= \Xi^{-1}(\Box\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Xi)\ ,
\end{aligned}$$

$$T_{17} := R_{mn}\,\Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla^n\Xi)\ ,$$

$$T_{18} := R_{mn}\,\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla^n\Upsilon)\ ,$$

$$T_{19} := R\,\Xi^{-1}(\nabla^m\Xi)\Xi^{-1}(\nabla_m\Xi)\ ,$$

$$T_{20} := R\,\Xi^{-1}(\nabla^m\Upsilon)\Xi^{-1}(\nabla_m\Upsilon)\ .$$

参考文献

[1] E. Bergshoeff、M. de Roo 和 B. de Wit，“扩展共形超引力”，《核物理B》182，173（1981）。[2] D. Butter、F. Ciceri、B. de Wit 和 B. Sahoo，“构造所有 N=4 共形超引力”，《物理评论快报》118，第8期，081602（2017） [arXiv:1609.09083 [高能物理理论]]。[3] D. Butter、F. Ciceri 和 B. Sahoo，“$N = 4$ 共形超引力：完整作用量”，《高能物理学杂志》01，029（2020） [arXiv:1910.11874 [高能物理理论]]。[4] F. Ciceri 和 B. Sahoo，“迈向完整的 $N = 4$ 共形超引力作用量”，《高能物理学杂志》1601，059（2016） [arXiv:1510.04999 [高能物理理论]]。[5] I. L. Buchbinder、N. G. Pletnev 和 A. A. Tseytlin，“诱导的 N=4 共形超引力”，《物理快报B》717，274（2012） [arXiv:1209.0416 [高能物理理论]]。[6] H. Osborn，“单圈规范理论的局域耦合与 Sl(2,R) 不变性”，《物理快报B》561，174（2003） [arXiv:hep-th/0302119]。[7] S. M. Kuzenko，“非紧对偶、超-魏尔不变性与有效作用量”，《高能物理学杂志》07，222（2020） [arXiv:2006.00966 [高能物理理论]]。[8] B. de Wit、S. Katmadas 和 M. van Zalk，“新的超对称高阶导数耦合：完整的 N=2 超空间不计入其中！”，《高能物理学杂志》01，007（2011） [arXiv:1010.2150 [高能物理理论]]。[9] J. Gomis、P. Hsin、Z. Komargodski、A. Schwimmer、N. Seiberg 和 S. Theisen，“反常、共形流形与球面”，《高能物理学杂志》03，022（2016） [arXiv:1509.08511 [高能物理理论]]。[10] J. Wess 和 J. Bagger，《超对称与超引力》，普林斯顿大学出版社，1992年。[11] I. L. Buchbinder 和 S. M. Kuzenko，《超对称与超引力的思想与方法：超空间漫步》，IOP，布里斯托尔，1995年（1998年修订版）。[12] D. Z. Freedman 和 A. Van Proeyen，《超引力》，剑桥大学出版社，2012年。[13] E. S. Fradkin 和 A. A. Tseytlin，“扩展共形超引力中的渐近自由”，《物理快报B》110，117（1982）；“共形超引力中的单圈贝塔函数”，《核物理B》203，157（1982）。

[14]S. M. Paneitz, 《任意伪黎曼流形上的四阶共形协变微分算子》，麻省理工学院预印本，1983年3月；后于：SIGMA 4, 036 (2008) 追悼发表 [arXiv:0803.4331 [math.DG]].[15] R. J. Riegert, 《迹反常的非局域作用量》，《物理快报B》134, 56 (1984年)。[16] M. K. Gaillard 和 B. Zumino, 《相互作用场的对偶旋转》，《核物理B》193, 221 (1981)。[17] B. Zumino, 《对偶旋转》，载于《空间与时间的量子结构》，M. J. Duff 和 C. J. Isham（编），剑桥大学出版社，1982年，第363页。[18] G. W. Gibbons 和 D. A. Rasheed, 《非线性电动力学中的电磁对偶旋转》，《核物理B》454, 185 (1995) [arXiv:hep-th/9506035].[19] G. W. Gibbons 和 D. A. Rasheed, 《与轴子和膨胀子耦合的非线性电动力学的SL(2,R)不变性》，《物理快报B》365, 46 (1996) [hep-th/9509141].[20] M. K. Gaillard 和 B. Zumino, 《非线性电磁学中的自对偶性》，载于《超对称与量子场论》，J. Wess 和 V. P. Akulov（编），施普林格出版社，1998年，第121页[arXiv:hep-th/9705226].[21] M. K. Gaillard 和 B. Zumino, 《非线性电磁自对偶性与勒让德变换》，载于《对偶与超对称理论》，D. I. Olive 和 P. C. West（编），剑桥大学出版社，1999年，第 33 [页 hep-th/9712103].[22] M. Araki 和 Y. Tanii, 《非线性规范理论中的对偶对称性》，Int. J. Mod. Phys. A14, 1139 (1999) [hep-th/9808029].[23] S. M. Kuzenko 和 S. Theisen, 《非线性自对偶性与超对称性》，Fortsch. Phys. 49, 273 (2001) [arXiv:hep-th/0007231].[24] P. Aschieri、S. Ferrara 和 B. Zumino, 《非线性电动力学与扩展超引力中的对偶旋转》，Riv. Nuovo Cim. 31, 625 (2008) [arXiv:0807.4039 [hep-th]].[25] Y. Tanii, 《超引力导论》，施普林格，2014年。[26] E. Fradkin 和 A. A. Tseytlin, 《对偶场论的量子等价性》，Annals Phys. 162, 31 (1985)。[27] R. Roiban 和 A. Tseytlin, 《论微扰量子理论中的对偶对称性》，《高能物理学杂志》10, 099 (2012) [arXiv:1205.0176 [hep-th]].[28] L. D. Faddeev 和 V. N. Popov, 《杨-米尔斯场的费曼图》，《物理快报B》25, 29 (1967)。[29] B. S. DeWitt, 《群与场的动力学理论》，Gordon and Breach，纽约，1965年。

[30] A. O. Barvinsky 和 G. A. Vilkovisky, 《规范理论与量子引力中的广义 Schwinger-Dewitt 技术》, Physics Reports 119, 1 (1985)。[31] I. G. Avramidi, 《热核与量子引力》（物理学讲义专著第64卷）, 施普林格，2000年。[32] B. S. DeWitt, 《量子场论的整体方法》第1、2卷（国际物理学专著丛书第114卷），牛津大学出版社，2003年。[33]D. V. Vassilevich, 《热核展开：使用手册》, Physics Reports 388, 279 (2003)[arXiv:hep-th/0306138 [hep-th]].[34] J. Wess 和 B. Zumino, 《反常 Ward 恒等式的后果》, 《物理快报B》37, 95 (1971)。[35] E. S. Fradkin 和 A. A. Tseytlin, 《共形超引力》, Physics Reports 119, 233 (1985)。[36] S. Deser 和 A. Schwimmer, 《任意维数中共形反常的几何分类》, 《物理快报B》309, 279 (1993) [arXiv:hep-th/9302047 [hep-th]].[37]M. J. Duff, 《Weyl 反常的二十年》, Class. Quant. Grav. 11, 1387 (1994)[arXiv:hep-th/9308075 [hep-th]].[38]A. A. Tseytlin, 《关于四维四导数标量理论的评论》, [arXiv:2212.10599 [hep-th]].[39] I. L. Buchbinder 和 S. V. Ketov, 《含高阶导数的四维西格玛模型的单圈反项》, Theor. Math. Phys. 77, 1032 (1988)。[40] I. L. Buchbinder 和 S. V. Ketov, 《四阶非线性西格玛模型与四维渐近自由》, Fortsch. Phys. 39, 1 (1991)。[41] I. Bandos、K. Lechner、D. Sorokin 和 P. K. Townsend, 《麦克斯韦方程的非线性对偶不变共形扩展》, Phys. Rev. D 102, 121703 (2020) [arXiv:2007.09092 [hep-th]].[42] B. P. Kosyakov, 《具有最大允许对称性的非线性电动力学》, 《物理快报B》810, 135840 (2020) [arXiv:2007.13878 [hep-th]].[43] S. M. Kuzenko, 《超共形对偶不变模型与 $\mathcal{N}=4$ 杨-米尔斯有效作用量》, 《高能物理学杂志》09, 180 (2021) [arXiv:2106.07173 [hep-th]].