arXiv:2301.00585v1 [math.AP] 2 Jan 2023

# 与雅可比算子相关的伪抛物型方程的逆源问题

BAYAN BEKBOLAT 和 NIYAZ TOKMAGAMBETOV

Abstract. 本文研究了与雅可比算子相关的时间分数阶伪抛物方程的正问题和反问题。证明了解的存在性和唯一性。此外，还建立了逆源问题（ISP）的稳定性结果。

## 1. Introduction

本文的主要研究对象是定义域 $D = \{(t, x)$ 上的下列非齐次时间分数阶伪抛物型方程： $0 < t < T < \infty, x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)\}$

$$\mathbb{D}^{\gamma}_{0^+,t}\left(u(t,x) - a\Delta_{\alpha,\beta}u(t,x)\right) - \Delta_{\alpha,\beta}u(t,x) + mu(t,x) = f(x),$$

其中 $0 < \gamma \leq 1$， $m$ 和 $a$ 为非负常数，且满足初始条件

$$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

其中 $\mathbb{D}^{\gamma}_{0+,\ t}$ 由下式给出

$$\mathbb{D}^{\gamma}_{0^+,t} = \begin{cases} \mathcal{D}^{\gamma}_{0^+,t}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{d}{dt}, & \gamma = 1, \end{cases}$$

$\mathcal{D}^{\gamma}_{0+,\ t}$ 是左侧Caputo分数阶导数，而 $\Delta_{\alpha,\ \beta}$ 是雅可比算子，其表达式为

$$\Delta_{\alpha,\beta} = A^{-1}_{\alpha,\beta}(x)\frac{d}{dx}\Big(A_{\alpha,\beta}(x)\frac{d}{dx}\Big), \quad x \in (0,\infty). \tag{1.1}$$

这里，我们用 $A_{\alpha,\ \beta}(x) = 2^{2\rho}(\sinh(x))^{2\alpha+1}(\cosh(x))^{2\beta+1}$ 表示，其中 $\rho = \alpha + \beta + 1$，且 $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$。

在我们的研究中，我们将探讨直接问题的适定性，以及附加信息——超定条件下逆源问题的稳定性。

$$u(T,x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

对于t 我们将在关于函数 $\psi$ 的某些条件下恢复这组逆源问题对应的数对（$u$， $f$） .

日期：2023年1月3日。2020年数学主题分类。主分类号：35R30；次分类号：35R11、35C15。关键词和短语：雅可比算子、雅可比变换、时间分数阶伪抛物方程、逆源问题。本研究由哈萨克斯坦共和国科学和高等教育部科学委员会资助（AP14972634号资助项目）。

最早研究逆源问题的数学家之一是 Rundell [Run80]于20世纪80年代。他考虑了演化型方程

$$\frac{du}{dt} + Au = f \tag{1.2}$$

在巴拿赫空间 $X$ 中，其中 $A$ 是 $X$ 中的线性算子， $f$ 是 $X$ 中的常向量，满足以下条件

$$u(0) = u_0, \quad \text{and} \quad u(T) = u_1.$$

利用算子半群，Rundell 证明了该问题存在唯一解对 $(u(t)\ f)$ 的一般定理，随后将其应用于抛物型和伪抛物型方程。当非齐次项表示为 $f(t) = \Phi(t)f$ 的形式时，其中 $\Phi(t)$ 是已知算子，元素 $f$ 未知，且 $A$ 是从 $L_p(\Omega)$ 到 $L_p(\Omega)$ 的闭线性算子，A.I. Prilepko 和 I.V. Tikhonov [PT92] 于 1992年 研究了方程 (1.2) 的若干逆问题。他们将所得结果应用于输运方程。在一般情形下，未知源项依赖于时间；在一个充分条件下，他们研究了方程 (1.2) 的逆问题，其中线性椭圆偏微分算子 $A$ 的阶为 $2m$，具有有界可测系数，且满足

$$(A\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2$$

对于所有 $\varphi \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$， $\mu = constant > 0$ I. Bushuyev 曾于[Bus95] 1995年进行了研究。

然而，对于 $F(x,\ t)$ 的抽象情形，尚无通用的封闭理论。现有结果针对可分离源项。2002年，I.V. Tikhonov 和 Yu.S. Eidelman[TE02] 研究了方程（1.2）推广形式的逆问题，其形式为

$$\frac{d^N u(t)}{dt^N} = Au(t) + p, \quad 0 < t < T,$$

对于某个正整数 $N \geq 1$ 和某个实数 $T > 0$ ，其中含有一个未知参数 $p$ 以及巴拿赫空间中的一个闭线性算子 $A$ ，满足柯西条件和“超定条件” $u(T) = u_N$ （同样在巴拿赫空间中）。

对于拉普拉斯算子（$-\Delta$），它是物理学中最有趣的例子之一，M. Choulli 和 M. Yamamoto 在 [CY04]中证明了，根据边界测量确定热源项时的唯一性和条件稳定性，其中 $f = \sigma(t)\varphi(x)$，其中 $\sigma(t)$ 是已知的。

伪抛物方程逆源问题解的渐近行为

$$(u(x,t) - \Delta u(x,t))_t - \Delta u(x,t) + \alpha u(x,t) = f(t)g(x,t), \quad Q_\infty = \Omega \times (0,\infty)$$

¨M. Yaman 和 O. F. G 使用积分超定条件研究了¨oz¨ukızılin [YG03] 于2004年。

分数阶导数和分数阶偏微分方程在分析学及应用领域都备受关注，它们被用于对生物学、物理学和化学等不同科学领域中的多种现象进行建模，因此，近几十年来，分数阶计算日益受到数学家的关注。时间分数阶抛物方程的逆源问题

$${}^cD_t^\alpha u(x,t) = r^\alpha (Lu)(x,t) + f(x)h(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T),\ 0 < \alpha < 1,$$

其中， ${}^cD_t^\alpha$是 Caputo导数，定义为

$$ {}^cD_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} g(\tau) d\tau $$

和 $L$ 是对称一致椭圆算子，该问题由 K. Sakamoto 和 M. Yamamoto 于[SY11]在2011年研究。作者证明，利用终端超定数据，除扩散常数的一个离散值集合外，逆问题在 Hadamard意义下是适定的。伪抛物型方程的爆破解及逆源问题的稳定性

$$ u_t - a\Delta u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} - |u|^p u = f(t)g(t), \quad x \in \Omega, t > 0 $$

带积分超定条件的情形由 Metin Yaman 于 [Yam12]在2012年研究。M.M. Slodi˘cka 于 [Slo13]在2013年研究了方程 (1.2) 的逆源问题，其中 $A$是一个二阶强椭圆线性微分算子，且假设右端项 $f$关于两个变量可分离 $x$且 $t$，即 $f(x, t) = g(x)h(t)$（此时 $h(t)$ 未知）。有界区域中二阶半线性时间分数阶扩散方程的逆源问题 $\mathbb{R}^d$

$$ (g_{1-\beta} * \partial_t u(x))(t) + L(x,t)u(x,t) = h(t)f(x) + \int_0^t F(x,s,u(x,s))ds $$

具有一个二阶线性微分算子 $L(x, t$其系数为时空变系数并采用散度形式˘，由 M. Slodi˘cka 和 M. Si˘skova 于 [SS16] 2016年进行了研究。作者证明了弱解（$u$, $h$）（[SS16，定理 2.1，第 1658]页）的存在性、唯一性和正则性。关于带分数阶导数的伪抛物方程逆源问题的最新论文之一是 [RSTT21]（2021年）。在 [RSTT21], 中，作者研究了带 Caputo 分数阶导数的伪抛物型方程的逆源问题的可解性，该导数的阶为 $\mathcal{D}_t^\alpha$ $0 < \alpha \leq 1$

$$ \mathcal{D}_t^\alpha (u(t) + \mathcal{L}u(t)) + \mathcal{M}u(t) = f(t) \quad \text{in} \quad \mathcal{H}, $$
$$ u(0) = \phi \in \mathcal{H}, \quad u(T) = \psi \in \mathcal{H}, $$

其中 $\mathcal{H}$ 为可分希尔伯特空间， $\mathcal{L}$、 $\mathcal{M}$ 为在 $\mathcal{H}$上具有相应离散谱的算子。作者获得了适定性结果。

许多文章研究了扩散方程和次扩散方程的反问题（[CNYY09、JR15、KS10、KST17、OS12a、OS12b、RTT19]）以及分数阶扩散方程的反问题（[SSB19、TT17、WYH13]）。

半群（$H_t^{(\alpha,\beta)}$）$_{t\geq 0}$（与雅可比-邓克尔算子相关的热方程的解 $\Lambda^2_{\alpha,\beta}$）生成了实直线上的一类新的马尔可夫过程。在某些黎曼对称空间上，对于特定取值的（$\alpha$, $\beta$）[CGM06]。

然而，由雅可比算子生成的伪抛物方程$\Delta_{\alpha,\beta}$ (1.1)的逆源问题尚未得到研究。因此，我们的目标是研究具有这一特殊算子的伪抛物型方程的逆源问题。M. Flensted-Jensen 和 T. H. Koornwinder 已研究与该算子$\Delta_{\alpha,\beta}$ 相关的调和分析 [FJ72, FJK73, FJK79, Koo75]。雅可比算子的谱分解

由 M. Flensted-Jensen 在 1972 [FJ72]中研究了雅可比算子。由此得到了经典 Paley-Wiener 定理的推广以及一种广义傅里叶变换$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$，称为雅可比-傅里叶变换。算子 $\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda}(x)$的特征函数称为 Jacobi 函数，它是一种超几何函数。N. Ben Salem 和 A. Dachraoui 研究了与雅可比算子相关的伪微分算子（见 [SD98]）和 Sobolev 型空间 $G^{s,p}_{\alpha,\beta}$（见 [SD00]）。在[SD98], 中，作者证明，与某个符号相关的伪微分算子 $S^m_0$是从 Schwartz 空间的某个子空间到其自身的连续线性映射。

我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 $0<\gamma\leq 1$。假设 $\psi,\phi\in\mathcal{H}$。那么，数对 $(u,f)$ 是逆源问题的唯一解，它们是函数 $u\in C^{\gamma}([0,T],L^2(\mu))\cap C([0,T],\mathcal{H})$ $f\in L^2(\mu)$，可由以下公式表示

$$u(t,x)=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\psi(y)\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(y)\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}$$
$$\times\phi(y)\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(y)\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

*and*

$$f(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty(\lambda^2+\rho^2+m)\frac{\psi(y)-\phi(y)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}$$
$$\times\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(y)\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda).$$

本文内容安排如下。第 2 节汇集了与雅可比算子相关的调和分析的一些结果，其中 $\mathbb{R}^+$ 并在此引入 Sobolev 型空间 $\mathcal{H}$，同时给出有关分数阶导数的一些必要信息。第 3 节证明正问题的定理 3.1。第 4 节证明关于雅可比算子相关逆源问题的主要定理 3.2 ，并展示逆源问题的稳定性分析和一个示例，其中 $\mathbb{R}^+$。

## 2. Preliminaries

2.1. Jacobi 分析。 奇异二阶微分方程（[FJ72 ]）

$$\Delta_{\alpha,\beta}\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(x)+(\lambda^2+\rho^2)\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(x)=0\quad\text{on}\quad(0,\infty)$$

具有初始条件

$$\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(0)=1,\quad\frac{d}{dt}\varphi^{\alpha,\beta}_\lambda(0)=0$$

具有唯一解，其表达式为

$$\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x) = {}_2F_1\Big(\frac{1}{2}(\rho+i\lambda), \frac{1}{2}(\rho-i\lambda); \alpha+1; -\sinh^2 x\Big), \tag{2.1}$$

其中 ${}_2F_1$ 是高斯超几何函数。函数 $\varphi^{\alpha,\ \beta}_{\lambda}$ （2.1）称为 Jacobi 函数，并且在 $x \in [0,\infty)$ 以及

$$\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x) = \varphi_{-\lambda}^{\alpha,\beta}(x) \quad \text{and} \quad \overline{\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)} = \varphi_{\overline{\lambda}}^{\alpha,\beta}(x).$$

特别地，我们有

$$\varphi_\lambda^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x) = \cos(\lambda x).$$

备注 2.1。（[FJ72，命题 1，第 144] 页）对于每个固定的 $x \in (0,\infty)$，作为 $\lambda$, $\varphi^{\alpha,\ \beta}_{\lambda}$ 的函数是整函数。

Jacobi 函数的性质：

1. 对于所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $x \in [0,\infty)$，我们有（[FJ72，引理 11，第 153] 页）i) $|\varphi^{\alpha,\ \beta}_{\lambda}(x)| \le \varphi^{\alpha,\ \beta}_{iIm\lambda}(x)$，ii) 若 $|Im\lambda| \ge \rho$，则 $|\varphi^{\alpha,\ \beta}_{\lambda}(x)| \le e^{(|Im\lambda|-\rho)x}$，iii) 若 $|Im\lambda| \le \rho$，则 $|\varphi^{\alpha,\ \beta}_{\lambda}(x)| \le 1$。2. 对于所有的 $n \in \mathbb{Z}^+$，存在 $K_n > 0$，使得（[FJ72，定理 2，第 145] 页）

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)\right| \le K_n(1+x)(1+|\lambda|)^n e^{(|Im\lambda|-\rho)x}$$

and

$$\left|\frac{d^n}{d\lambda^n}\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)\right| \le K_n(1+x)^{n+1} e^{(|Im\lambda|-\rho)x}$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{C}, x \in [0,\infty)$。

Let 引入以下函数空间（[FJ72，第 146-147], [SD98，第 368] ）.

设 $\mathcal{S}_e(\mathbb{R})$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶、快速递减且为 $C^\infty$-函数的空间，并赋予通常的施瓦茨拓扑； $\mathcal{S}_e^r(\mathbb{R}) = \{(\cosh x)^{\frac{-2\rho}{r}}\mathcal{S}_e(\mathbb{R})\}$, $0 < r \le 2$为赋予由以下半范数定义的拓扑的空间

$$N_{n,k}(f) = \sup_{x\ge 0}(\cosh x)^{\frac{2\rho}{r}}(1+x)^n \left|\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right|.$$

显然， $\mathcal{S}_e^r(\mathbb{R})$ 在 $\Delta_{\alpha,\beta}$ 下不变，且由下式定义的半范数

$$N_{n,k}(f) = \sup_{x\ge 0}(\cosh x)^{\frac{2\rho}{r}}(1+x)^n |\Delta_{\alpha,\beta}^k f(x)|$$

在 $\mathcal{S}_e^r(\mathbb{R})$ 上连续。

设 $L^p(\mathbb{R}^+,\mu_{\alpha,\beta})$ $1 \le p < \infty$ 为定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的可测函数 $f$ 所构成的空间，使得

$$\|f\|_{p,\mu}^p = \int_0^\infty |f(x)|^p d\mu_{\alpha,\beta}(x) < \infty,$$

其中 $d\mu_{\alpha,\ \beta}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}2^{2\rho}(\text{双曲正弦 } x)^{2\alpha+1}(\text{双曲余弦 } x)^{2\beta+1}dx$ 或 $d\mu_{\alpha,\ \beta}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}A_{\alpha,\ \beta}(x)dx$。

注 2.2. [FJ72，第 146] 页。注意，对于所有 $0 < r \le 2$， $\mathcal{S}_e^r(\mathbb{R}) \subset L^r(\mathbb{R}^+,\mu_{\alpha,\beta})$；若 $r \le s$，则 $\mathcal{S}_e^r(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_e^s(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}^+,\mu_{\alpha,\beta})$。

设 $L^p(\mathbb{R}^+,\nu_{\alpha,\beta})$ $1 \le p < \infty$ 表示定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的可测函数 $g$ 所构成的空间，使得

$$\|f\|_{p,\nu}^p = \int_0^\infty |g(\lambda)|^p d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda) < \infty,$$

其中 $d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2}d\lambda$. 这里，$c_{\alpha,\beta}(\lambda)$ 是 Harish–Chandra 函数，其定义为

$$c_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{2^{\rho-i\lambda}\Gamma(i\lambda)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\rho+i\lambda}{2})\Gamma(\frac{\alpha-\beta+1+i\lambda}{2})}.$$

简言之，我们分别用记号 $L^p(\mu)$ 和 $L^p(\nu)$ 代替 $L^p(\mathbb{R}^+,\mu_{\alpha,\beta})$ 和 $L^p(\mathbb{R}^+,\nu_{\alpha,\beta})$。

对于 $f \in L^1(\mu)$ 傅里叶-雅可比变换 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ 由 $f$ 定义为（[FJ72，命题 3，第 146], [SD98，定义 1.1，第 369]页）

$$\widehat{f}(\lambda) = (\mathcal{F}_{\alpha,\beta}f)(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(x) \tag{2.2}$$

对于 $g \in L^1(\nu)$，逆 Fourier-Jacobi 变换 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{-1}$ 给出为

$$\left(\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{-1}g\right)(x) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda), \tag{2.3}$$

其中 $\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}$ 是雅可比函数（2.1）。

命题 2.3。 ([FJ72，第 145-146] 页）在 $L^2(\mu)$ 中由 $\Delta_{\alpha,\beta}$ 定义的算子，其定义域为

$$D_{\alpha,\beta}^0 = \{u \in L^2(\mu): \quad u \text{ 和 } u' \text{ 均绝对连续，且 } \Delta_{\alpha,\beta}u \in L^2(\mu)\}$$

可将其限制在定义域 $D_{\alpha,\beta}$ 上，使得 $\Delta_{\alpha,\beta}$ 成为自伴算子。$\Delta_{\alpha,\beta}$ 至少包含在 $D_{\alpha,\beta}^0$ 上可微的函数。$\Delta_{\alpha,\beta}$ 在 $\infty$ 处为极限点型；在零点处，若 $2\alpha+1 \ge 3$，则为极限点型；若 $2\alpha+1 < 3$，则为极限圆型。在后一种情况下，$D_{\alpha,\beta} \ne D_{\alpha,\beta}^0$，并选择满足 $Im\lambda_1^2 > 0$ 的 $\lambda_1 \in \mathbb{C}$，我们可以定义

$$D_{\alpha,\beta} = \{u \in D_{\alpha,\beta}^0 \ : \ \lim_{x\to 0}(A_{\alpha,\beta}(x)\cdot(\varphi_{\lambda_1}^{\alpha,\beta}(x)\overline{u'(x)} - \left(\frac{d}{dx}\varphi_{\lambda_1}^{\alpha,\beta}(x)\right)\overline{u(x)})) = 0\}.$$

命题 2.4。 ([FJ72，命题 3，第 146]页）对于 $f \in L^2(\mu)$ 以及 $\lambda \in \mathbb{R}^+$，定义 $\widehat{f}$ 积分在 $L^2(\nu)$ 中收敛。 $f \to \widehat{f}$ 是从 $L^2(\mu)$到 $L^2(\nu)$的线性保范映射，其逆映射为

$$f(x) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

该积分在 $L^2(\mu)$ 中收敛。函数 $f \in L^2(\mu)$ 属于 $D_{\alpha,\beta}$ 当且仅当 $(\lambda^2+\rho^2)\,\widehat{f}(\lambda) \in L^2(\nu)$，在这种情况下

$$\widehat{\Delta_{\alpha,\beta}f}(\lambda) = -(\lambda^2+\rho^2)\widehat{f}(\lambda).$$

特别地，根据普朗歇尔恒等式，我们有

$$\|\widehat{f}\|_{2,\nu} = \|f\|_{2,\mu}. \tag{2.4}$$

注 2.5. 对于 $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$，我们有傅里叶余弦变换

$$\widehat{f}_c(\lambda)=(\mathcal{F}_c f)(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \cos(\lambda x)f(x)dx,$$

逆傅里叶余弦变换定义为

$$\left(\mathcal{F}_c^{-1}g\right)(x)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \cos(\lambda x)g(\lambda)d\lambda.$$

定义 2.6. 我们定义空间

$$\mathcal{H}:=\{u\in L^2(\mu)\ :\ (\cdot^2+\rho^2)\widehat{u}\in L^2(\nu)\}$$

其范数为

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2:=\int_0^\infty |(\lambda^2+\rho^2)\widehat{u}(\lambda)|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda).$$

2.2. 分数阶微分算子。本小节中，我们介绍分数阶微分算子及其他概念。

定义 2.7. [KST06，第 69] 设 $[a,b]$ $(-\infty<a<b<\infty)$ 是实轴 $\mathbb{R}$上的一个有限区间。阶数为 $I_{a+}^{\gamma}$ 和 $I_{b-}^{\gamma}$的左、右黎曼-刘维尔分数阶积分 $\gamma\in\mathbb{R}$ $(\gamma>0)$ 定义为

$$I_{a^+}^{\gamma}[f](t):=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t (t-s)^{\gamma-1}f(s)ds,\quad t\in(a,b],$$

and

$$I_{b^-}^{\gamma}[f](t):=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_t^b (t-s)^{\gamma-1}f(s)ds,\quad t\in[a,b),$$

分别。这里 $\Gamma$表示欧拉伽马函数。

定义 2.8。[KST06，第 70] 左侧和右侧黎曼-刘维尔分数阶导数$D_{a^+}^{\gamma}$ 和$D_{b^-}^{\gamma}$ 阶数为 $\gamma\in\mathbb{R}$ $(0<\gamma<1)$的定义如下

$$D_{a^+}^{\gamma}[f](t):=\frac{d}{dt}I_{a^+}^{1-\gamma}[f](t),\quad \forall t\in(a,b],$$

and

$$D_{b^-}^{\gamma}[f](t):=-\frac{d}{dt}I_{b^-}^{1-\gamma}[f](t),\quad \forall t\in[a,b),$$

分别。

定义 2.9。[KST06，第 91] 左侧和右侧 Caputo 分数阶导数 $D_{a^+}^{\gamma}$和 $D_{b^-}^{\gamma}$ 阶数为 $\gamma\in\mathbb{R}$ $(0<\gamma<1)$定义如下

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\gamma}[f](t):=D_{a^+}^{\gamma}[f(t)-f(a)],\quad t\in(a,b],$$

and

$$\mathcal{D}_{b^-}^{\gamma}[f](t):=D_{b^-}^{\gamma}[f(t)-f(b)],\quad t\in[a,b),$$

分别。

定义 2.10. [CF18，第 18 页，定义 3]设 $X$ 为巴拿赫空间。我们称$u\in C^{\gamma}([0,T],\ X)$ 当且仅当 $u\in C([0,T],\ X)$ 且 $\mathcal{D}_t^{\gamma}u\in C([0,T],\ X)$。

经典 Mittag-Leffler 函数 $\mathbb{E}_{\gamma,\ 1}(t)$ 和 Mittag-Leffler 型函数$\mathbb{E}_{\gamma,\ \gamma}(t)$ 的表达式为

$$\mathbb{E}_{\gamma,1}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\gamma k+1)} \quad \mathbb{E}_{\gamma,\gamma}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}.$$

在 $\gamma = 1$的情况下，我们得到 $\mathbb{E}_{1,\ 1}(t) = e^t$。有关经典 Mittag-Leffler 函数 $\mathbb{E}_{\gamma,\ 1}(t)$ 以及 Mittag-Leffler 型函数 $\mathbb{E}_{\gamma,\ \gamma}(t)$ 的更多信息，请参见例如 [KST06，第 40 页和第 42]页。

在 [Sim14，定理 4，第 21] 页中证明了 Mittag-Leffler 函数的以下估计，其中 $0 < \gamma < 1$ (对于 $\gamma \geq 1$) 不成立

$$\frac{1}{1+\Gamma(1-\gamma)t} \leq \mathbb{E}_{\gamma,1}(-t) \leq \frac{1}{1+\Gamma(1+\gamma)^{-1}t}, \quad t > 0.$$

于是可得

$$0 < \mathbb{E}_{\gamma,1}(-t) < 1, \quad t > 0. \tag{2.5}$$

命题 2.11。[Pod99] 若 $0 < \gamma < 2$， $\beta$ 是任意实数，且 $\mu$ 满足 $\pi\gamma/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\gamma\}$，则存在正常数 $C$，使得

$$|\mathbb{E}_{\gamma,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}$$

对于所有 $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$。

引理 2.12。假设 $0 < t < T$, $0 < \gamma \leq 1$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}^+$。那么

$$0 < \frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda t^\gamma)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma)} < 1 \tag{2.6}$$

*and*

$$-1 < \frac{\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma) - \mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda t^\gamma)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma)} < 0 \tag{2.7}$$

不等式成立。

证明。 利用性质（2.5），我们得到

$$0 < 1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma) < 1$$

or

$$1 < \frac{1}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma)}. \tag{2.8}$$

Th将不等式（2.8）两边乘以 $1-\mathbb{E}_{\gamma,\ 1}(-\lambda t^\gamma)$，我们得到 n

$$0 < 1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda t^\gamma) < \frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda t^\gamma)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma)} < \frac{1}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma)} < 1$$

而这些不等式推出（2.6）。重写该表达式

$$\frac{\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma) - \mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda t^\gamma)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma)} = \frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda t^\gamma)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}(-\lambda T^\gamma)} - 1$$

并利用第一个不等式（2.6）可得第二个不等式（2.7）。 □

## 3. Main Results

本节讨论与雅可比算子相关的时间分数阶伪抛物方程的正问题 $\Delta_{\alpha,\ \beta}$ （1.1）。此外，还将研究逆问题，并建立其存在性、唯一性和稳定性结果。

**3.1.** 雅可比算子的时间分数阶伪抛物方程的正问题。令 $0 < \gamma \leq 1$。我们考虑非齐次时间分数阶伪抛物型方程

$$\mathbb{D}^{\gamma}_{0+,t}\left(u(t,x) - a\Delta_{\alpha,\beta}u(t,x)\right) - \Delta_{\alpha,\beta}u(t,x) + mu(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{3.1}$$

带有初始条件

$$u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^{+}, \tag{3.2}$$

其中函数 $f$ 和 $\phi$ 是给定函数。我们的目标是求出问题 $u$ （3.1）-（3.2）的唯一解。

定理 3.1。设 $0 < \gamma \leq 1$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$。假设 $f \in C^{1}([0,T],\ L^{2}(\mu))$ 且 $\phi \in \mathcal{H}$。则问题（*3.1*）-（*3.2*）存在唯一解 $u \in C^{\gamma}([0,T],\ L^{2}(\mu)) \cap C([0,T],\ \mathcal{H})$ 并可表示为公式

$$u(t,x) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{t}(t-\tau)^{\gamma-1}\mathbb{E}_{\gamma,\gamma}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma}\right)\frac{f(\tau,y)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}$$
$$\times\,\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda}(y)\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda}(x)d\tau d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right)\phi(y)\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda}(y)\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda).$$

证明。我们假设 $0 < \gamma \leq 1$、$\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ 和 $u(t、\cdot) \in \mathcal{H}$。我们首先证明，问题（3.1）—（3.2）至多有一个解，若其存在。假设该命题不成立。设存在两个不同的解 $u_1(t、x)$ 和 $u_2(t、x)$。记 $u_0(t、x) = u_1(t、x) - u_2(t、x)$。则 $u_0(t、x)$ 满足以下方程

$$\mathbb{D}^{\gamma}_{0+,t}\left(u_0(t,x) - a\Delta_{\alpha,\beta}u_0(t,x)\right) - \Delta_{\alpha,\beta}u_0(t,x) + mu_0(t,x) = 0, \quad (t,x) \in D, \tag{3.3}$$

$$u_0(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{+}. \tag{3.4}$$

问题（3.3）—（3.4）只有平凡解。这意味着解的唯一性。

现在，我们将证明解的存在性。对（$\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$）2.2）的两边应用（3.1）—（3.2）中的傅里叶-雅可比变换，我们得到

$$\mathbb{D}^{\gamma}_{0+,t}\widehat{u}(t,\lambda) + \frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}\widehat{u}(t,\lambda) = \frac{\widehat{f}(t,\lambda)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}, \tag{3.5}$$

$$\widehat{u}(0,\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda), \tag{3.6}$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ 和 $0 < t < T$。问题（见 [KST06，第231页，例4。9]）的解（3.5）-（3.6）为

$$\widehat{u}(t,\lambda)=\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}\mathbb{E}_{\gamma,\gamma}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma}\right)\frac{\widehat{f}(\tau,\lambda)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}d\tau + \widehat{\phi}(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right), \tag{3.7}$$

其中 $\mathbb{E}_{\gamma,\ 1}(z)$ 是经典 Mittag-Leffler 函数，而 $\mathbb{E}_{\gamma,\ \gamma}(z)$ 是 Mittag-Leffler 型函数。现在利用逆 Fourier-Jacobi 变换 $\mathcal{F}_{\alpha}^{-1}{}_{,\ \beta}$ （2.3）得到（3.7），可得问题（3.1）-（3.2）的解，其形式为

$$\begin{aligned}u(t,x)=&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}\mathbb{E}_{\gamma,\gamma}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma}\right)\frac{f(\tau,y)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}\\&\times\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(y)\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(x)d\tau d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\&+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right)\phi(y)\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(y)\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda).\end{aligned}$$

利用其性质

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathbb{E}_{\gamma,1}(c\tau^{\gamma})\right)=c\tau^{\gamma-1}\mathbb{E}_{\gamma,\gamma}(c\tau^{\gamma}),\quad c=\text{constant},$$

通过 Mittag-Leffler 函数，我们得到

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma}\right)\right)=\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma-1}\mathbb{E}_{\gamma,\gamma}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma}\right)$$

并且我们可以将（3.7）写成以下形式

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t,\lambda)=&\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}\mathbb{E}_{\gamma,\gamma}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma}\right)\frac{\widehat{f}(\tau,\lambda)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}d\tau\\&+\widehat{\phi}(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right)\\=&\frac{1}{\lambda^2+\rho^2+m}\int_0^t\frac{d}{d\tau}\left(\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma}\right)\right)\widehat{f}(\tau,\lambda)d\tau\\&+\widehat{\phi}(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right)\\=&\frac{1}{\lambda^2+\rho^2+m}\widehat{f}(t,\lambda)-\frac{1}{\lambda^2+\rho^2+m}\widehat{f}(0,\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right)\\&-\frac{1}{\lambda^2+\rho^2+m}\int_0^t\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^{\gamma}\right)\frac{d}{d\tau}\widehat{f}(\tau,\lambda)d\tau\\&+\widehat{\phi}(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right)\end{aligned}$$

利用分部积分法以及 $\mathbb{E}_{\gamma,1}(0) = 1$。令 $0 < \gamma < 1$和 $f \in C^1([0,T], L^2(\mu))$, $\phi \in \mathcal{H}$, 则我们可以如下估计 $u$

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{u}(t,\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\frac{\widehat{f}(t,\lambda)}{\lambda^2+\rho^2+m}\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\
&+ \int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\frac{\widehat{f}(0,\lambda)}{\lambda^2+\rho^2+m}\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\
&+ \int_0^\infty \left|\frac{\lambda^2+\rho^2}{\lambda^2+\rho^2+m}\int_0^t \mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)^\gamma\right)\frac{d}{d\tau}\widehat{f}(\tau,\lambda)d\tau\right|^2\\
&\times d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda) + \int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{\phi}(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\
&\lesssim \int_0^\infty \left|\widehat{f}(t,\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda) + \int_0^\infty \left|\widehat{f}(0,\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\
&+ \int_0^\infty \left(\int_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\widehat{f}(\tau,\lambda)\right| d\tau\right)^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda) + \int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{\phi}(\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\
&\lesssim \|f(t,\cdot)\|_{2,\mu}^2 + \|f(0,\cdot)\|_{2,\mu}^2 + \int_0^T \|\frac{d}{dt}f(t,\cdot)\|_{2,\mu}^2 dt + \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

这里我们使用了柯西-施瓦茨不等式、Fubibi 定理，并且 $a \lesssim b$ 表示$a \le cb$，其中 $c$ 是一个与 $a$ 和 $b$无关的正常数。因此,

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 \lesssim \|f(t,\cdot)\|_{2,\mu}^2 + \|f(0,\cdot)\|_{2,\mu}^2 + \int_0^T \|\frac{d}{dt}f(t,\cdot)\|_{2,\mu}^2 dt + \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

于是，我们得到

$$\|u\|_{C([0,T],\mathcal{H})}^2 \lesssim \|f\|_{C^1([0,T],L^2(\mu))}^2 + \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty.$$

在情形 $\gamma = 1$ 下，我们有

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{u}(t,\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \Bigg|(\lambda^2+\rho^2)\int_0^t \frac{\widehat{f}(\tau,\lambda)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}e^{-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)}d\tau\\
&\qquad + (\lambda^2+\rho^2)\widehat{\phi}(\lambda)e^{-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t}\Bigg|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\
&\lesssim \int_0^\infty \left|\int_0^t \widehat{f}(\tau,\lambda)e^{-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}(t-\tau)}d\tau\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)
\end{aligned}$$

$$+\int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{\phi}(\lambda)e^{-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t}\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$\lesssim \int_0^\infty\int_0^T \left|\widehat{f}(t,\lambda)\right|^2 dt d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)+\int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{\phi}(\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$=\int_0^T \|f(t,\cdot)\|^2_{2,\mu}dt+\|\phi\|^2_{\mathcal{H}}$$

利用柯西-施瓦茨不等式和富比尼定理可得。因此，

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}}\lesssim \int_0^T \|f(t,\cdot)\|^2_{2,\mu}dt+\|\phi\|^2_{\mathcal{H}}.$$

于是，我们有

$$\|u\|^2_{C([0,T],\mathcal{H})}\lesssim \|f\|^2_{C([0,T],L^2(\mu))}+\|\phi\|^2_{\mathcal{H}}<\infty.$$

我们来估计函数 $\mathbb{D}^\gamma_{0+,t}u$

$$\|\mathbb{D}^\gamma_{0+,t}u(t,\cdot)\|^2_{2,\mu}=\|\mathbb{D}^\gamma_{0+,t}\widehat{u}(t,\cdot)\|^2_{2,\nu}=\int_0^\infty \left|\mathbb{D}^\gamma_{0+,t}\widehat{u}(t,\cdot)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$=\int_0^\infty \left|\frac{\widehat{f}(t,\lambda)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}\widehat{u}(t,\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$\lesssim \|\widehat{f}(t,\cdot)\|^2_{2,\nu}+\|\widehat{u}(t,\cdot)\|^2_{2,\nu}.$$

因此，我们有

$$\|\mathbb{D}^\gamma_{0+,t}u(t,\cdot)\|^2_{2,\mu}\lesssim \|f(t,\cdot)\|^2_{2,\mu}+\|u(t,\cdot)\|^2_{2,\mu}$$

and

$$\|\mathbb{D}^\gamma_{0+,t}u\|^2_{C([0,T],L^2(\mu))}\lesssim \|f\|^2_{C([0,T],L^2(\mu))}+\|u\|^2_{C([0,T],L^2(\mu))}<\infty.$$

因此，利用定义 2.10 可得 $u\in C^\gamma([0,T],L^2(\mu))$。证明完成。□

3.2. 时间分数阶伪抛物方程的逆源问题。 本小节讨论与雅可比算子相关的时间分数阶伪抛物方程的逆源问题$\Delta_{\alpha,\beta}$ (1.1).

**3.2.1.** 问题陈述。设 $0<\gamma\leq 1$。我们的目标是找到一对满足方程的函数 $(u, f)$

$$\mathbb{D}^\gamma_{0+,t}\left(u(t,x)-a\Delta_{\alpha,\beta}u(t,x)\right)-\Delta_{\alpha,\beta}u(t,x)+mu(t,x)=f(x),\quad (t,x)\in D, \tag{3.8}$$

在条件下

$$u(0,x)=\phi(x),\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{3.9}$$

and

$$u(T,x)=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{3.10}$$

定理 3.2。 设 $0 < \gamma \leq 1$。假设 $\psi$， $\phi \in \mathcal{H}$。则有序对 $(u,\ f)$ 是逆源问题（3.8）-（3.10）的唯一解，其中这些函数 $u \in C^{\gamma}([0,T],\ L^2(\mu)) \cap C([0,T],\ \mathcal{H})$ $f \in L^2(\mu)$ 可由以下公式表示

$$u(t,x) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^{\gamma}\right)}\psi(y)\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(y)\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$-\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^{\gamma}\right)-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^{\gamma}\right)}$$
$$\times\ \phi(y)\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(y)\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

*and*

$$f(x) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda^2+\rho^2+m)\frac{\psi(y)-\phi(y)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^{\gamma}\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^{\gamma}\right)}$$
$$\times\ \varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(y)\varphi_{\lambda}^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda).$$

证明。 假设 $0 < \gamma \leq 1$，且 $u(t,\cdot)$ $f \in \mathcal{H}$。我们首先证明存在性结果。在方程（$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ (2.2) 两边分别应用傅里叶-雅可比变换 3.8)-（3.10），可得

$$\mathbb{D}_{0+,t}^{\gamma}\widehat{u}(t,\lambda) + \frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}\widehat{u}(t,\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}, \quad (t,\lambda)\in D, \tag{3.11}$$

$$\widehat{u}(0,\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \tag{3.12}$$

$$\widehat{u}(T,\lambda) = \widehat{\psi}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+. \tag{3.13}$$

方程（3.11）的解为

$$\widehat{u}(t,\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda^2+\rho^2+m} + C(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^{\gamma}\right), \tag{3.14}$$

$\widehat{}$对所有 $0 < \gamma \leq 1$ 以及函数 $f(\lambda)$ 和 $C(\lambda)$ 都是未知函数。为确定这些函数，我们使用条件（3.12）和（3.13）。由此得到

$$\widehat{u}(0,\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda^2+\rho^2+m} + C(\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda)$$

and

$$\widehat{u}(T,\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda^2+\rho^2+m} + C(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^{\gamma}\right) = \widehat{\psi}(\lambda).$$

因此我们有

$$C(\lambda) = \frac{\widehat{\phi}(\lambda)-\widehat{\psi}(\lambda)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^{\gamma}\right)}$$

and

$$\widehat{f}(\lambda)=(\lambda^2+\rho^2+m)\frac{\widehat{\psi}(\lambda)-\widehat{\phi}(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}. \tag{3.15}$$

将求得的函数 $C(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 代入 (3.14)，得到

$$\widehat{u}(t,\lambda)=\frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\widehat{\psi}(\lambda)$$
$$-\frac{\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\widehat{\phi}(\lambda).$$

因此，问题 (3.11) - (3.13) 的解为一对 $(\widehat{u},f)$。通过对函数 $\widehat{u}$ 和 $f$ 应用逆 Fourier-Jacobi 变换 $\mathcal{F}_{\alpha}^{-1}{}_{,\beta}\,(2.3)\widehat{\ }$，我们得到问题 (3.8)-(3.10) 的解，即

(3.16)

$$u(t,x)=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\psi(y)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(y)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}$$
$$\times\phi(y)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(y)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

and

$$f(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty(\lambda^2+\rho^2+m)\frac{\psi(y)-\phi(y)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}$$
$$\times\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(y)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(y)d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda), \tag{3.17}$$

对所有 $0<\gamma\le 1$ 均成立。

Let $\psi$, $\phi\in\mathcal{H}$。然后利用引理 2.12 我们可以估计函数 $u$ 如下 g

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2=\int_0^\infty|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{u}(t,\lambda)|^2d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$\lesssim\int_0^\infty\left|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{\psi}(\lambda)\frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\right|^2d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$+\int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2)\widehat{\phi}(\lambda)\frac{\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$\lesssim \int_0^\infty |(\lambda^2+\rho^2)\widehat{\psi}(\lambda)|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)+\int_0^\infty |(\lambda^2+\rho^2)\widehat{\phi}(\lambda)|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda).$$

因此,

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 \lesssim \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2+\|\phi\|_{\mathcal{H}}^2<\infty.$$

于是我们得到

$$\|u\|_{C([0,T],\mathcal{H})} \lesssim \|\psi\|_{\mathcal{H}}+\|\phi\|_{\mathcal{H}}<\infty.$$

我们来估计函数 $f$

$$\|f\|_{2,\mu}^2=\|\widehat{f}\|_{2,\nu}^2=\int_0^\infty |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$=\int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2+m)\frac{\widehat{\psi}(\lambda)-\widehat{\phi}(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$\lesssim \int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2+m)\frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$+\int_0^\infty \left|(\lambda^2+\rho^2+m)\frac{\widehat{\phi}(\lambda)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$\lesssim \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2+\|\phi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

因此，我们得到

$$\|f\|_{2,\mu}^2 \lesssim \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2+\|\phi\|_{\mathcal{H}}^2<\infty.$$

接下来，我们估计函数 $\mathbb{D}_{0+,\ t}^{\gamma}u$

$$\|\mathbb{D}_{0+,t}^{\gamma}u(t,\cdot)\|_{2,\mu}^2=\|\mathbb{D}_{0+,t}^{\gamma}\widehat{u}(t,\cdot)\|_{2,\nu}^2=\int_0^\infty |\mathbb{D}_{0+,t}^{\gamma}\widehat{u}(t,\lambda)|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$=\int_0^\infty \left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}\widehat{u}(t,\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$
$$\lesssim \|f\|_{2,\nu}^2+\|u(t,\cdot)\|_{2,\nu}^2.$$

最后，我们得到

$$\|\mathbb{D}_{0+,t}^{\gamma}u\|_{C([0,T],L^2(\mu))}^2 \lesssim \|f\|_{2,\mu}^2+\|u\|_{C([0,T],L^2(\mu))}^2<\infty.$$

显然， $\|u\|_{C}^2$ $_{([0,T],\ L^2(\mu))}<\infty$。存在性得到了证明。

现在，我们来证明解的唯一性。考虑到傅里叶-雅可比变换的性质命题2.4，可以看出，一对函数$(u,\ f)$由公式(3.16)和(3.17唯一确定。唯一性得证。□

3.2.2. 稳定性定理。最后，我们研究由公式(3.16)和(3.17)给出的、问题(3.8)-(3.10)的解($u$， $f$)的稳定性。

定理 3.3。 设 $(u, f)$ 和 $(u_d, f_d)$ 分别是与数据 $(\phi, \psi)$ 及其小扰动 $(\phi_d, \psi_d)$相对应的问题（*3.8*）-（*3.10*）的解。则问题（*3.8*）-（*3.10*）的解关于这些数据连续依赖，即有

$$\|u-u_d\|^2_{C([0,T],\mathcal{H})} \lesssim \|\psi-\psi_d\|^2_{\mathcal{H}} + \|\phi-\phi_d\|^2_{\mathcal{H}}$$

*and*

$$\|f-f_d\|^2_{2,\mu} \lesssim \|\psi-\psi_d\|^2_{\mathcal{H}} + \|\phi-\phi_d\|^2_{\mathcal{H}}.$$

证明。 根据傅里叶-雅可比变换（2.2）的定义

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(u(t,\cdot))(\lambda) = \widehat{u}(t,\lambda) = \int_0^\infty u(t,x)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(x),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(u(t,\cdot)-u_d(t,\cdot))(\lambda) &= \int_0^\infty (u(t,x)-u_d(t,x))\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(x)\\ &= \int_0^\infty u(t,x)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(x)\\ &- \int_0^\infty u_d(t,x)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(x)d\mu_{\alpha,\beta}(x)\\ &= \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(u(t,\cdot))(\lambda) - \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(u_d(t,\cdot))(\lambda)\\ &= \widehat{u}(t,\lambda) - \widehat{u}_d(t,\lambda),\end{aligned}$$

这里使用了积分的性质。根据上述陈述并利用引理 2.12，可得

$$\|u(t,\cdot)-u_d(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2)^2|\widehat{u}(t,\lambda)-\widehat{u}_d(t,\lambda)|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2)^2 \left| \frac{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)} \left(\widehat{\psi}(\lambda)-\widehat{\psi}_d(\lambda)\right)\right.\\ &\left. - \frac{\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right) - \mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}t^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)} \left(\widehat{\phi}(\lambda)-\widehat{\phi}_d(\lambda)\right)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\ &\lesssim \int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2)^2 \left|\widehat{\psi}(\lambda)-\widehat{\psi}_d(\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda) + \int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2)^2 \left|\widehat{\phi}(\lambda)-\widehat{\phi}_d(\lambda)\right|^2 d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\ &= \|\psi-\psi_d\|^2_{\mathcal{H}} + \|\phi-\phi_d\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

因此，得到

$$\|u(t,\cdot)-u_d(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}} \lesssim \|\psi-\psi_d\|^2_{\mathcal{H}} + \|\phi-\phi_d\|^2_{\mathcal{H}},$$

and

$$\|u-u_d\|^2_{C([0,T],\mathcal{H})} \lesssim \|\psi-\psi_d\|^2_{\mathcal{H}} + \|\phi-\phi_d\|^2_{\mathcal{H}}.$$

将（3.15）写成如下形式

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\widehat{\psi}(\lambda)-\frac{(\lambda^2+\rho^2+m)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\widehat{\phi}(\lambda),$$

再次应用类似的估计，我们可以看到

$$\begin{aligned}\|f-f_d\|_{2,\mu}^2=\|\widehat{f}-\widehat{f}_d\|_{2,\nu}^2&=\int_0^\infty\left|\widehat{f}(\lambda)-\widehat{f}_d(\lambda)\right|^2d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\&=\int_0^\infty\left|\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\left(\widehat{\psi}(\lambda)-\widehat{\psi}_d(\lambda)\right)\right.\\&\quad\left.-\frac{(\lambda^2+\rho^2+m)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\left(\widehat{\phi}(\lambda)-\widehat{\phi}_d(\lambda)\right)\right|^2d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lesssim\int_0^\infty\left|\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\left(\widehat{\psi}(\lambda)-\widehat{\psi}_d(\lambda)\right)\right|^2d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\&+\int_0^\infty\left|\frac{(\lambda^2+\rho^2+m)\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}{1-\mathbb{E}_{\gamma,1}\left(-\frac{\lambda^2+\rho^2+m}{1+a(\lambda^2+\rho^2)}T^\gamma\right)}\left(\widehat{\phi}(\lambda)-\widehat{\phi}_d(\lambda)\right)\right|^2d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\&\lesssim\int_0^\infty(\lambda^2+\rho^2)^2\left|\widehat{\psi}(\lambda)-\widehat{\psi}_d(\lambda)\right|^2d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)+\int_0^\infty(\lambda^2+\rho^2)^2\left|\widehat{\phi}(\lambda)-\widehat{\phi}_d(\lambda)\right|^2d\nu_{\alpha,\beta}(\lambda)\\&=\|\psi-\psi_d\|_{\mathcal{H}}^2+\|\phi-\phi_d\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

容易得出

$$\|f-f_d\|_{2,\mu}^2\lesssim\|\psi-\psi_d\|_{\mathcal{H}}^2+\|\phi-\phi_d\|_{\mathcal{H}}^2,$$

证明至此结束。 □

3.2.3. 稳定性检验。 为检验定理 3.3 我们考虑一个具有一维斯图姆-刘维尔算子的热方程逆源问题

$$u_t(t,x)-u_{xx}(t,x)=f(x),\quad 0<t<1,\quad x>0, \tag{3.18}$$

满足以下条件

$$u(0,x)=u(1,x)=0, \tag{3.19}$$

其中，对于所有 $x>0$，我们令 $T=\gamma=1$、$\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$、$a=m=0$ 和 $\phi(x)=\psi(x)=0$。此外，考虑带有一些噪声的扰动问题

$$u_t^\epsilon(t,x)-u_{xx}^\epsilon(t,x)=f^\epsilon(x),\quad 0<t<1,\quad x>0,$$

满足条件

$$u^\epsilon(0,x)=0,\quad \text{and}\quad u^\epsilon(1,x)=\epsilon\cdot e^{-x^2},\quad x>0,$$

并附加信息 $\phi^\epsilon(x) = 0$ 以及 $\psi^\epsilon(x) = \epsilon \cdot e^{-x^2}$，其中 $\epsilon$ 是一个正数常量。于是，由定理 3.2，可得

$$u^\epsilon(t,x) = \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{1-e^{-\lambda^2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cos(\lambda x) d\lambda,$$

and

$$f^\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 e^{-\frac{\lambda^2}{4}}}{(1-e^{-\lambda^2})} \cos(\lambda x) d\lambda.$$

上述计算结果列于表1。

| $\epsilon$ | 1 | 0.2 | 0.02 |
|---|---|---|---|
| $\|\psi - \psi^\epsilon\|^2_{\mathcal{H}}$ | 1.5 | 0.06 | 0.0006 |
| $\|u - u^\epsilon\|^2_{C([0,1],\mathcal{H})}$ | 0.75 | 0.03 | 0.0003 |
| $\|f - f^\epsilon\|^2_{2\,\mu}$ | 1.0474 | 0.041897 | 0.0004 |

TABLE 1. 稳定性检验

结论。表1 证实，问题（3.8）-（3.10）的解连续依赖于给定数据。给定数据的微小变化会导致（$u, f$）的微小变化。

## 4. APPENDIX

表1 中的计算是使用 Maple 2021 程序并通过以下代码完成的：

$$psi := exp(-x^2),$$

$$hat(psi) := int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot psi \cdot cos(x \cdot \lambda), x = 0..\infty\right),$$

$$norm(psi) := 40 \cdot int\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lambda^4 \cdot |hat(psi)|^2, \lambda = 0..\infty\right),$$

$$hat(u) := \frac{1-exp(-\lambda^2 \cdot t)}{1-exp(-\lambda^2)} \cdot hat(psi),$$

$$norm(u) := int\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lambda^4 \cdot |hat(u)|^2, \lambda = 0..\infty\right),$$

$$\lim_{t\to 1}(norm(u)),$$

$$hat(f) := \frac{\lambda^2 \cdot hat(psi)}{1-exp(-\lambda^2)},$$

and

$$norm(f) := int\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot |hat(f)|^2, \lambda = 0..\infty\right).$$

## References

[Bus95] I. Bushuyev，具有终端观测的抛物型反问题的全局唯一性，《反问题》，11（1995年），L11-L16。[CF18] P.M. de Carvalho-Neto、R. Fehlberg Junior，分数阶微分方程解不存在爆破解的条件，《应用数学学报》，154（2018年），15-29。[CNYY09] J. Cheng、J. Nakagawa、M. Yamamoto、T. Yamazaki，一维分数阶扩散方程反问题的唯一性，《反问题》，25（2009年），115002。[CGM06] F. Chouchene、L. Gallardo、M. Mili，雅可比-邓克尔算子的热半群及相关马尔可夫过程，《势分析》，25:2（2006年），103–119。[CY04] M. Choulli、M. Yamamoto，确定热源时的条件稳定性，《反问题与病态问题杂志》，12:3（2004年），233–243。[FJ72] M. Flensted-Jensen，与对称空间相关的微分算子的 Paley–Wiener 型定理，《Ark. Mat》，10（1972），143-162。[FJK73] M. Flensted-Jensen、T.H. Koorwinder，雅可比函数展开的卷积结构，《Ark. Mat.》，11（1973），245-262。[FJK79] M. Flensted-Jensen、T.H. Koorwinder，雅可比函数：加法公式及对偶卷积结构的正性，《Ark. Mat.》，17（1979），139-151。[JR15] B. Jin、W. Rundell，反常扩散过程反问题教程，《反问题》，31（2015），035003。[Koo75] T.H. Koorwinder，雅可比变换 Paley–Wiener 型定理的新证明，《Ark. Mat.》，13（1975），145-159。[KS10] I.A. Kaliev、M.M. Sabitova，根据初始和终端温度确定温度和热源密度的问题，《应用与工业数学杂志》，4:3（2010年），332-339。[KST17] M. Kirane、B. Samet、B.T. Torebek，根据次扩散方程的初始和终端数据确定未知源项的温度分布，《微分方程电子杂志》2017:257（2017年），1–13。[KST06] A.A. Kilbas、H.M. Srivastava、J.J. Trujillo，《分数阶微分方程理论与应用》，爱思唯尔、北荷兰、数学研究丛书，2006年。[OS12a] I. Orazov、M.A. Sadybekov，一个确定温度和热源密度的非局部问题，《俄罗斯数学》，56:2（2012年），60-64。[OS12b] I. Orazov、M.A. Sadybekov，给定初始和终端温度时确定温度和热源密度的一类问题，《西伯利亚数学杂志》，53:1（2012年），146-151。[Pod99] I. Podlubny，《分数阶微分方程》，学术出版社，纽约，1999年。[PT92] A. I. Prilepko、I. V. Tikhonov，演化方程反问题解的唯一性及其在输运方程中的应用，《数学札记》，51（1992年），158–165。[Run80] W. Rundell，根据超定边界数据确定线性偏微分方程中的未知非齐次项。《应用分析》，10（1980年），231–242。[RSTT21] M. Ruzhansky、D. Serikbaev、B.T. Torebek、N. Tokmagambetov，时间分数阶伪抛物方程的正问题与反问题，《数学问题》，2021，DOI：10.2989/16073606.2021.1928321。[RTT19] M. Ruzhansky、N. Tokmagambetov、B.T. Torebek，正算子的逆源问题 I：次椭圆扩散方程与次扩散方程，《反问题与病态问题杂志》，2019年。[SY11] K. Sakamoto 和 M. Yamamoto，具有终端超定条件的分数阶扩散方程逆源问题，《数学控制及相关领域》，1:4（2011年），509-518。[SD98] N.B. Salem、A. Dachraoui，与雅可比微分算子相关的伪微分算子，《数学分析及其应用》，220（1998年），365-381。[SD00] N.B. Salem、A. Dachraoui，与雅可比微分算子相关的 Sobolev 型空间，《积分变换与特殊函数》，9（2000年），163-184。

[SS11] N.B. Salem、T. Samaali，希尔伯特变换及其与区间 $(0,+\infty)$ 上微分 Jacobi 算子相关的主题，《Positivity》，15（2011年），221-240。[Sim14] T. Simon，比较 Frechet 分布与正稳定分布，《Electron. J. Probab.》，91（2014年），1-25。[Slo13] M. Slodi˘cka，线性抛物型问题中的源识别问题：一种半群方法，《反问题与病态问题杂志》，21（2013年），579-600。[SS16] M. Slodi˘cka，M. ˘Si˘skova，半线性时间分数阶扩散方程中的逆源问题，《Computers and Mathematics with Applications》，72（2016年），1655–1669。[SSB19] M.M. Slodi˘cka，M. ˘Si˘skova，K. V. Bockstal，时间分数阶扩散方程中空间依赖源确定问题的唯一性，《Appl. Math. Lett.》，91（2019年），15–21。[TE02] I.V. Tikhonov 和 Yu.S. Eidelman，Banach 空间中微分方程的一个反问题及整个 Mittag-Leffler 函数零点的分布，《Differential Equations》，38:5（2002年），669-677。[TT17] B.T. Torebek，R. Tapdigoglu，带 Caputo 分数阶导数的非局部热方程的若干反问题，《Mathematical Methods in the Applied Sciences》，40:18（2017年），6468–6479。[WYH13] W. Wang，M. Yamamoto，B. Han，分数阶扩散方程逆源问题的再生核空间数值方法，《Inverse Problems》，29（2013年），095009。[YG03] M. Yaman，O.F. G¨oz¨ukızıl，伪抛物方程反问题解的渐近行为，《Applied Mathematics and Computation》，154（2004年），69–74。[Yam12] M. Yaman，伪抛物型方程反问题的爆破解及稳定性，《Journal of Inequalities and Applications》，2012（2012年），274。

Bayan Bekbolat :Al-Farabi Kazakh National UniversityAlmaty, Kazakhstanand
Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics
Ghent University, Belgiumand
Institute of Mathematics and Mathematical ModelingAlmaty, Kazakhstanand
Suleyman Demirel UniversityKaskelen, Kazakhstan电子邮箱：bekbolat@math.kz
Niyaz Tokmagambetov:Centre de Recerca MatemáticaCampus de Bellaterra,
Edifici C, 08193 Barcelona, Spainand
Institute of Mathematics and Mathematical ModelingAlmaty, Kazakhstan电子邮箱：
tokmagambetov@crm.cat；tokmagambetov@math.kz