arXiv:2301.00586v1 [math.FA] 2 Jan 2023

不定雅可比算子

Christian Berg 和 Ryszard Szwarc

2023年1月3日

摘要

我们研究与一个不确定的 Hamburger矩问题相关的雅可比算子（$T, D(T)$），即定义在 ℓ^2 中的算子，它是将 Jacobi 矩阵作用于仅含有限个非零项的复数序列子空间所得算子的闭包。众所周知，该算子是对称的，亏指数为（1, 1）。对于复数 z，令 $\mathfrak{p}_z, \mathfrak{q}_z$ 表示分别对应于正交归一多项式 p_n和第二类多项式 q_n 的平方可和序列（$p_n(z)$）和（$q_n(z)$）。我们确定线性组合 $\mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v, \mathfrak{q}_u, \mathfrak{q}_v$在 $u, v \in \mathbb{C}$条件下是否属于 $D(T)$，或属于 T 在 ℓ^2中的自伴扩张的定义域。所得结果取决于与该矩问题相关的四个二元 Nevanlinna 函数。我们还证明， $D(T)$是一个显式构造的有界算子族在 ℓ^2上的公共值域。

数学主题分类：主要分类 47B25、47B36、44A60。关键词：Jacobi 矩阵与算子、不确定矩问题。

1 引言

我们将考虑与矩序列$s = (s_n)_{n\geq 0}$ 相关联的 Jacobi 矩阵 J，其形式为

$$s_n = \int x^n \, d\mu(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

其中， μ 是 $\mathbb{R}$ 上的正测度，具有无限支撑集，且各阶矩均存在。它是一个形式如下的三对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & a_1 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $a_n > 0$、 $b_n \in \mathbb{R}$、 $n \geq 0$ 由三项递推关系给出 n

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x), n \geq 0, \quad a_{-1} := 0.$$

这里，$(p_n)_{n\geq 0}$ 是与 μ相关联的正交归一多项式序列，因此满足

$$\int p_n(x) p_m(x)\, d\mu(x) = \delta_{n,m},$$

并且 p_n 是次数为 n且首项系数为正的实多项式。本文沿用 [17]中的术语。关于经典矩问题的基本结果也可见于 [1] 和 [16]。关于不定矩问题的近期结果可见于 [5], [6] [7], [8]。

显然，成比例的测度 $\lambda\mu$、 $\lambda > 0$ 对应同一个 Jacobi 矩阵 J。众所周知的 Favard定理（见 [17, 定理 5.14]）指出，任何满足 $a_n > 0$、 $b_n \in \mathbb{R}$ 的形式如 (2) 的矩阵，都来自唯一的矩序列 (s_n)，如上所述，并按 $s_0 = 1$进行归一化。在下文中，我们始终假设满足这一归一化条件，因此 (1) 的解 μ 是概率测度，并且 $p_0 = 1$。

Jacobi 矩阵在平方可和复数序列的希尔伯特空间 ℓ^2 中作为对称算子作用。其定义域 $\mathcal{F}$ 由仅含有限个非零项的复数序列 $(c_n)_{n\geq 0}$ 组成，作用方式是将矩阵 J 乘以视为列向量的 $c \in \mathcal{F}$，即，

$$(Jc)_n := a_{n-1} c_{n-1} + b_n c_n + a_n c_{n+1}, \quad n \geq 0. \tag{3}$$

记 $(e_n)_{n\geq 0}$ 为 ℓ^2的标准正交归一基，则有

$$\mathcal{F} = span\{e_n | n \geq 0\}.$$

定义 1.1. 与 J 相关联的雅可比算子按定义是对称算子 $(J, \mathcal{F})$ 的闭包 $(T, D(T))$。

这是一个经典事实：$(T, D(T))$ 是一个闭对称算子，其亏指数只能是 (0, 0) 或 (1, 1)。当且仅当矩序列 (1) 是确定的或不确定的时，分别出现这两种情形；也就是说，满足 (1) 的解 μ 恰好有一个或有多个。

根据定义，$D(T)$由满足以下条件的 $c \in \ell^2$ 组成：存在一个序列 $(c^{(k)}) \in \mathcal{F}$，使得 $\lim_{k\to\infty} c^{(k)} = c$，且 $(Jc^{(k)})$ 是 ℓ^2中的收敛序列。对于这样的 c，我们有 $Tc = \lim_{k\to\infty} Jc^{(k)}$，并且该极限与所选的逼近序列 $(c^{(k)})$ 无关。

显然，$D(T)$在复共轭下封闭，并且

$$T\overline{c} = \overline{Tc}, \quad c \in D(T).$$

本文旨在研究不定情形下的雅可比算子 $(T, D(T))$ 及其自伴扩张 $(T_t, D(T_t))$ $t \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$。我们尤其将给出若干属于 $D(T)$ 的序列族 $c \in \ell^2$，参见定理 1.2–定理 1.4。

第 2 节在介绍 $(T, D(T))$ 的亏空间后，证明定理 1.2。第 3 节介绍 $(T, D(T))$ 的自伴扩张及其对应于 (1) 的 N-极值解，参见 (26)。

在定理 3.2、定理 3.4 和定理 3.7 中，我们描述属于 $D(T_t) \setminus D(T)$ 的向量。与定理 1.2–定理 1.4 中的结果一样，这些结果取决于式 (6)、(7)、(8)、(9) 中定义的两个变量的 Nevanlinna 函数。

在第 4 节中，我们为每个 $z_0 \in \mathbb{C}$ 构造一个 ℓ^2 中的有界算子 Ξ_{z_0}，其值域为 $D(T)$。根据定理 4.3，Ξ_{z_0} 在 $(T - z_0 I)(D(T))$ 上的限制是到 $D(T)$ 的双射，且等于 $(T - z_0 I)^{-1}$。这一结果基于对式 (28) 中定义的函数空间 $\mathcal{E}$ 的研究；由 $[10, \text{定理 } 23]$ 可知，该空间是由整函数构成的 de Branges 空间。我们特别证明了定理 4.2，表明 $\mathcal{E}$ 在形成差商后仍保持稳定。

第 5 节给出了关于 Nevanlinna 函数的各种技术性结果。

在概述本文内容之后，我们回顾一下，伴随算子（$T^*, D(T^*)$)是与 J相关联的极大算子，参见 $[17, \text{命题 } 6.5]$。事实上，J 与任意列向量 c 的矩阵乘积都有意义，参见（3）；而 $D(T^*)$由满足乘积 Jc属于 ℓ^2的那些 $c \in \ell^2$ 组成。对于 $c \in D(T^*)$，我们有 $T^*c = Jc$。

在方程 (1) 有唯一解 μ的确定情形下，雅可比算子是自伴的，且 (p_n) 是 $L^2(\mu)$ 的标准正交基。这个自伴

乘法算子 M_μ 在 $L^2(\mu)$ 中定义为

$$D(M_\mu) = \{f \in L^2(\mu) \mid xf(x) \in L^2(\mu)\}, \quad M_\mu f(x) = xf(x)$$

通过酉算子 U， $\ell^2 \to L^2(\mu)$ 与 $(T, D(T))$ 酉等价，其中 $U(e_n) = p_n, n \geq 0$。本文不研究确定情形，而是着重讨论不定情形；已知方程 (1) 的解集 μ 是一个无限凸集 V。第二类多项式 (q_n) 定义如下

$$q_n(z) = \int \frac{p_n(z) - p_n(x)}{z - x}\, d\mu(x), \quad z \in \mathbb{C},$$

其中 $\mu \in V$ 是任意的。

我们定义并回顾

$$\mathfrak{p}_z := (p_n(z)), \mathfrak{q}_z := (q_n(z)) \in \ell^2, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

这里我们采用了 [17] 的术语。已知 $||\mathfrak{p}_z||$ 和 $||\mathfrak{q}_z||$ 是 $\mathbb{C}$ 上的正连续函数。因此，可以由 $c \in \ell^2$ 定义整函数 F_c、G_c，如下所示

$$F_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z), \quad G_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q_n(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

我们还有以下四个关于两个复变量的整函数，称为不定矩问题的 Nevanlinna 函数:

$$A(u,v) = (u-v)\sum_{k=0}^{\infty} q_k(u)q_k(v) \tag{6}$$

$$B(u,v) = -1 + (u-v)\sum_{k=0}^{\infty} p_k(u)q_k(v) \tag{7}$$

$$C(u,v) = 1 + (u-v)\sum_{k=0}^{\infty} q_k(u)p_k(v) \tag{8}$$

$$D(u,v) = (u-v)\sum_{k=0}^{\infty} p_k(u)p_k(v), \tag{9}$$

参见 [17] 第 7.1 节。二元函数最初以略有不同的形式发表于 [11]，随后在 [3],[14] 中得到了应用。一个

对二元函数的近似早已在 [1, 第 123] 页中得到讨论。若将 [11] 中的函数标记为 $*$，则有

$$\begin{aligned} A^*(u,v) &= -A(u,v),\ B^*(u,v) = -C(u,v), \\ C^*(u,v) &= -B(u,v),\ D^*(u,v) = -D(u,v). \end{aligned}$$

接下来我们需要用到关于这些函数的若干公式，参见附录中的定理 5.1 和推论 5.2；不过此处我们只回顾

$$A(u,v)D(u,v) - B(u,v)C(u,v) = 1, \quad u,v \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

令第二个变量为 0，即可定义单变量整函数：

$$A(u) = A(u,0),\ B(u) = B(u,0),\ C(u) = C(u,0),\ D(u) = D(u,0), \tag{11}$$

对（10）作特化，得到

$$A(u)D(u) - B(u)C(u) = 1, \quad u \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

根据 [17] 第 6.5 节，我们有

$$\mathfrak{p}_z, \mathfrak{q}_z \in D(T^*), \quad T^*\mathfrak{p}_z = z\mathfrak{p}_z, T^*\mathfrak{q}_z = e_0 + z\mathfrak{q}_z, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

我们的第一个主要结果如下：

定理 1.2. 对所有 $z \in \mathbb{C}$，我们有 $\mathfrak{p}_z$、$\mathfrak{q}_z \notin D$（T）。

给定 u、$v \in \mathbb{C}$。

(i) 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $\mathfrak{p}_u + \alpha\mathfrak{p}_v \in D(T)$，当且仅当 $D(u,v) = 0$。在肯定的情况下，α 唯一确定为 $\alpha = B(u,v)$。

(ii) 存在 $\beta \in \mathbb{C}$ 使得 $\mathfrak{q}_u + \beta\mathfrak{q}_v \in D(T)$，当且仅当 $A(u,v) = 0$。在肯定的情况下，β 唯一确定为 $\beta = -C(u,v)$。(iii) 存在 $\gamma \in \mathbb{C}$ 使得 $\mathfrak{p}_u + \gamma\mathfrak{q}_v \in D(T)$，当且仅当 $B(u,v) = 0$。在肯定的情况下，γ 唯一确定为 $\gamma = -D(u,v)$。特别地，对于所有 u、$\gamma \in \mathbb{C}$，$\mathfrak{p}_u + \gamma\mathfrak{q}_u \notin D(T)$。

证明将在第 2 节给出。

接下来，我们将给出关于二元整函数A、.....、D的零点集的结果。

定理 1.3. 设 $F(u,v)$ 表示 $\mathbb{C}^2$ 上的四个函数 A、B、C、D 中的任意一个。对于 $v\in\mathbb{C}$，定义

$$Z(F)_v := \{u\in\mathbb{C} \mid F(u,v)=0\}. \tag{14}$$

那么 $Z(F)_v$ 是可数无穷的。若 $v\in\mathbb{R}$，则 $Z(F)_v\subset\mathbb{R}$；若 v 位于上半平面或下半平面，则 $Z(F)_v$ 属于同一个半平面。

作为对前两个定理的延续，我们有如下结论：

定理 1.4。给定 $v\in\mathbb{R}$，并考虑定理 1.3 中的实零点集 $Z(F)_v$。

(i) 设 $u\in Z(D)_v$ 满足 $u<v$ 且满足 $]u,\ v[\cap Z(D)_v=\emptyset$。那么 $B(u,v)>0$，其中根据定理 1.2，$\mathfrak{p}_u+B(u,v)\mathfrak{p}_v\in D(T)$。

(ii) 设 $u\in Z(A)_v$ 满足 $u<v$ 且满足 $]u,\ v[\cap Z(A)_v=\emptyset$。那么$C(u,v)<0$，其中根据定理 1.2，$\mathfrak{q}_u-C(u,v)\mathfrak{q}_v\in D(T)$。

定理 1.3 和定理 1.4 的证明将在第 5 节给出。

2 预备知识与定理 1 的证明。 2

取开上半平面中的 $z_0\in\mathbb{C}$，并考虑亏空间

$$\begin{aligned}\Delta^+(z_0) &= \ker(T^*-z_0 I)=\mathbb{C}\mathfrak{p}_{z_0}\\ \Delta^-(z_0) &= \ker(T^*-\overline{z_0}I)=\mathbb{C}\mathfrak{p}_{\overline{z_0}},\end{aligned}$$

参见（13）。

我们由 [2, 第 80] 节可知

$$D(T^*)=D(T)\oplus\Delta^+(z_0)\oplus\Delta^-(z_0), \tag{15}$$

并且如 $\oplus$ 符号所示，该和是直和。

命题 2.1. 对于任意 $\lambda\in\mathbb{C}$，我们有式 (15) 中的分解

$$\mathfrak{p}_\lambda = s_\lambda + s_\lambda^+\mathfrak{p}_{z_0}+s_\lambda^-\mathfrak{p}_{\overline{z_0}}, \tag{16}$$

其中 $s_\lambda \in D(T)$，且

$$s_\lambda^+ = \frac{D(\lambda, \overline{z_0})}{2i\mathrm{Im}\,(z_0)||\mathfrak{p}_{z_0}||^2}, \quad s_\lambda^- = -\frac{D(\lambda, z_0)}{2i\mathrm{Im}\,(z_0)||\mathfrak{p}_{z_0}||^2}. \tag{17}$$

类似地，我们有如下分解

$$\mathfrak{q}_\lambda = r_\lambda + r_\lambda^+ \mathfrak{p}_{z_0} + r_\lambda^- \mathfrak{p}_{\overline{z_0}}, \tag{18}$$

其中 $r_\lambda \in D(T)$ 且

$$r_\lambda^+ = \frac{C(\lambda, \overline{z_0})}{2i\mathrm{Im}\,(z_0)||\mathfrak{p}_{z_0}||^2}, \quad r_\lambda^- = -\frac{C(\lambda, z_0)}{2i\mathrm{Im}\,(z_0)||\mathfrak{p}_{z_0}||^2}. \tag{19}$$

证明。将算子 $T^* - \overline{z_0}I$ 作用于方程 (16)，得到

$$(T^* - \overline{z_0}I)\mathfrak{p}_\lambda = (T - \overline{z_0}I)s_\lambda + s_\lambda^+(z_0 - \overline{z_0})\mathfrak{p}_{z_0},$$

这是根据正交分解对左端项进行的拆分

$$\ell^2 = (T - \overline{z_0}I)(D(T)) \oplus \Delta^+(z_0). \tag{20}$$

因此，$s_\lambda^+(z_0 - \overline{z_0})\mathfrak{p}_{z_0}$ 是 $(T^* - \overline{z_0}I)\mathfrak{p}_\lambda$ 在$\Delta^+(z_0)$上的正交投影，故

$$2i\mathrm{Im}\,(z_0)s_\lambda^+\mathfrak{p}_{z_0} = \langle (T^* - \overline{z_0}I)\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}_{z_0}\rangle \frac{\mathfrak{p}_{z_0}}{||\mathfrak{p}_{z_0}||^2},$$

由此得到 (17) 中的第一个公式。将算子 $(T^* - z_0 I)$ 作用于方程 (16)，可类似地得到第二个公式。注意，$||\mathfrak{p}_{z_0}|| = ||\mathfrak{p}_{\overline{z_0}}||$。

将算子 $T^* - \overline{z_0}I$ 作用于方程 (18)，得到

$$(T^* - \overline{z_0}I)\mathfrak{q}_\lambda = (T - \overline{z_0}I)r_\lambda + r_\lambda^+(z_0 - \overline{z_0})\mathfrak{p}_{z_0},$$

这是根据正交分解 (20) 对左端项进行的拆分。因此，$r_\lambda^+(z_0 - \overline{z_0})\mathfrak{p}_{z_0}$ 是 $(T^* - \overline{z_0}I)\mathfrak{q}_\lambda$ 在 $\Delta^+(z_0)$上的正交投影，从而

$$2i\mathrm{Im}\,(z_0)r_\lambda^+\mathfrak{p}_{z_0} = \langle (T^* - \overline{z_0}I)\mathfrak{q}_\lambda, \mathfrak{p}_{z_0}\rangle \frac{\mathfrak{p}_{z_0}}{||\mathfrak{p}_{z_0}||^2},$$

由此得到 (19) 中的第一个公式，因为根据 (13)，$T^*(\mathfrak{q}_\lambda) = \lambda\mathfrak{q}_\lambda + e_0$。第二个公式类似地通过将算子 $(T^* - z_0 I)$ 作用于方程 (18) 得到。

□

推论 2.2. 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们有 $\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{q}_\lambda \notin D(T)$。

证明。对于 $\lambda = z_0$，由 (16) 和 (17) 得到

$$s_{z_0} = 0, \quad s^+_{z_0} = 1, \quad s^-_{z_0} = 0,$$

这表明 $\mathfrak{p}_{z_0} \notin D(T)$。由于 $D(T)$ 在复共轭下封闭，因此 $\lambda = \overline{z_0}$ 的情形也成立。由于上半平面中的 z_0 是任意的，关于 $\mathfrak{p}_\lambda$ 的断言对 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 成立。

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们注意到 $s^-_\lambda = \overline{s^+_\lambda} \neq 0$，因为 $z \mapsto D(\lambda, z)$ 只有实零点，参见 [4,定理 3] 或定理 1.3。

对于 $\lambda = z_0$，由 (19) 得到

$$r^-_{z_0} = \frac{-1}{2i\mathrm{Im}\,(z_0)||\mathfrak{p}_{z_0}||^2} \neq 0,$$

这表明 $\mathfrak{q}_{z_0} \notin D(T)$，从而也有 $\mathfrak{q}_{\overline{z_0}} \notin D(T)$。由于上半平面中的 z_0 是任意的，关于 $\mathfrak{q}_\lambda$ 的断言对 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 成立。

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们注意到 $r^-_\lambda = \overline{r^+_\lambda}$，并且由 (57) 得到

$$C(\lambda, z_0) = D(z_0)[A(\lambda) - \rho C(\lambda)] \neq 0, \quad \rho := B(z_0)/D(z_0).$$

因为 D 只有实零点。此外，由于 B/D 是 Pick 函数，$\mathrm{Im}\,\rho > 0$，参见命题 5.8，因此第二个因子也不为零。 □

注 2.3. 关于推论 2.2，显然 $\mathfrak{p}_\lambda \notin D(T)$ 对于 $\lambda \notin \mathbb{R}$成立，因为否则 $\mathfrak{p}_\lambda$ 将是 T 的特征向量，对应特征值 λ；而由于 T 是对称的，特征值均为实数。

稍作修改也可得出 $\mathfrak{q}_\lambda \notin D(T)$ 对于 $\lambda \notin \mathbb{R}$成立。事实上，否则根据 T的对称性

$$\langle T\mathfrak{q}_\lambda, \mathfrak{q}_\lambda \rangle = \langle \mathfrak{q}_\lambda, T\mathfrak{q}_\lambda \rangle. \tag{21}$$

(21) 的左端项等于 $\langle \lambda\mathfrak{q}_\lambda + e_0, \mathfrak{q}_\lambda \rangle = \lambda||\mathfrak{q}_\lambda||^2$，因为 $\langle e_0, \mathfrak{q}_\lambda \rangle = 0$。类似地，(21) 的右端项等于 $\overline{\lambda}||\mathfrak{q}_\lambda||^2$，最后 λ必为实数。我们稍后将证明 $(T, D(T))$ 没有任何特征值，参见 (37)。

定理 1.2 的证明。

推论 2.2 证明了第一个断言，由此断言显然可知，至多存在一个满足 $\mathfrak{p}_u + \alpha\mathfrak{p}_v \in D(T)$ 的数 α，对于 β、γ 也是如此。

现在证明定理的断言 (i)。

由 (16) 得

$$\mathfrak{p}_u + \alpha\mathfrak{p}_v = (s_u + \alpha s_v) + (s_u^+ + \alpha s_v^+)\mathfrak{p}_{z_0} + (s_u^- + \alpha s_v^-)\mathfrak{p}_{\overline{z_0}},$$

因此，$\mathfrak{p}_u + \alpha\mathfrak{p}_v \in D(T)$ 当且仅当

$$s_u^+ + \alpha s_v^+ = s_u^- + \alpha s_v^- = 0,$$

根据 (17)，这等价于

$$D(u, \overline{z_0}) + \alpha D(v, \overline{z_0}) = D(u, z_0) + \alpha D(v, z_0) = 0. \tag{22}$$

该线性方程组的行列式为

$$\mathcal{D} := D(u, \overline{z_0})D(v, z_0) - D(u, z_0)D(v, \overline{z_0})$$

并利用引理 5.7，其中

$$x = \begin{pmatrix} B(u) \\ D(u) \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} B(\overline{z_0}) \\ D(\overline{z_0}) \end{pmatrix},\ z = \overline{y},\ w = \begin{pmatrix} B(v) \\ D(v) \end{pmatrix},$$

由推论 5.2 和 (58) 可得

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} B(u) & B(v) \\ D(u) & D(v) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B(\overline{z_0}) & B(z_0) \\ D(\overline{z_0}) & D(z_0) \end{vmatrix} = D(u, v)D(\overline{z_0}, z_0).$$

然而，$D(\overline{z_0}, z_0) = -2\mathrm{Im}\,(z_0)||\mathfrak{p}_{z_0}||^2 \neq 0$，因此 $\mathcal{D} = 0$ 当且仅当 $D(u, v) = 0$。因此，若 α 是 (22) 的一个解，则有 $D(u, v) = 0$。接下来，假设$D(u, v) = 0$。为证明 (22) 存在一个解 α，注意到 $D(v,\overline{z_0})$ 和$D(v, z_0)$ 不可能同时为零。事实上，定义 $\rho := B(z_0)/D(z_0)$，则有 $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$，因为 B/D 是一个 Pick 函数，参见命题 5.8；并且由 (58)，$D(v,\overline{z_0}) = 0$ 当且仅当 $B(v) = \overline{\rho}D(v)$，而 $D(v, z_0) = 0$ 当且仅当 $B(v) = \rho D(v)$，故这两个方程不可能同时成立。这里我们利用了这样一点：$B(v) = D(v) = 0$ 不可能成立，这是由 (12) 得出的。

若 $D(v, z_0) \neq 0$，则 $\alpha := -D(u, z_0)/D(v, z_0)$ 满足 (22)，因为 $\mathcal{D} = 0$。类似地，如果 $D(v, \overline{z_0}) \neq 0$，则 $\alpha := -D(u, \overline{z_0})/D(v, \overline{z_0})$ 满足 (22)。

此外，在 $D(v, z_0) \neq 0$ 的情形下，利用 (54) 以及 $D(u, v) = 0$，我们得到

$$D(u, z_0) = D(u, v)C(v, z_0) - B(u, v)D(v, z_0) = -B(u, v)D(v, z_0),$$

因此最终得到 $\alpha = B(u,v)$。 $D(v,\overline{z_0}) \neq 0$ 的情形类似。

(ii) 的证明：由

(18) 得到

$$\mathfrak{q}_u + \beta\mathfrak{q}_v = (r_u + \beta r_v) + (r_u^+ + \beta r_v^+)\mathfrak{p}_{z_0} + (r_u^- + \beta r_v^-)\mathfrak{p}_{\overline{z_0}},$$

因此 $\mathfrak{q}_u + \beta\mathfrak{q}_v \in D(T)$ 当且仅当

$$r_u^+ + \beta r_v^+ = r_u^- + \beta r_v^- = 0,$$

由 (19) 可知，这等价于

$$C(u,\overline{z_0}) + \beta C(v,\overline{z_0}) = C(u,z_0) + \beta C(v,z_0) = 0. \tag{23}$$

该线性方程组的行列式为

$$\mathcal{D}_1 := C(u,\overline{z_0})C(v,z_0) - C(u,z_0)C(v,\overline{z_0})$$

并利用引理 5.7 以及

$$x = \begin{pmatrix} A(u) \\ C(u) \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} B(\overline{z_0}) \\ D(\overline{z_0}) \end{pmatrix},\ z = \overline{y},\ w = \begin{pmatrix} A(v) \\ C(v) \end{pmatrix}$$

结合 (55)、(57)、(58)，由推论 5.2 得到

$$\mathcal{D}_1 = \begin{vmatrix} A(u) & A(v) \\ C(u) & C(v) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B(\overline{z_0}) & B(z_0) \\ D(\overline{z_0}) & D(z_0) \end{vmatrix} = A(u,v)D(\overline{z_0},z_0).$$

与情形 (i) 一样，我们看到 $\mathcal{D}_1 = 0$ 当且仅当 $A(u,v) = 0$。因此，若 β 是 (23) 的一个解，则有 $A(u,v) = 0$。接下来，假设 $A(u,v) = 0$。为证明 (23) 存在一个解 β，我们像在 (i) 中那样注意到， $C(v,\overline{z_0})$ 和 $C(v,z_0)$ 不可能同时为零。为此，我们利用 A/C 是命题 5.8 所述的 Pick 函数。

若 $C(v,z_0) \neq 0$，则 $\beta := -C(u,z_0)/C(v,z_0)$ 满足 (23)。同理，若 $C(v,\overline{z_0}) \neq 0$，则 $\beta := -C(u,\overline{z_0})/C(v,\overline{z_0})$ 满足 (23)。

此外，在 $C(v,z_0) \neq 0$ 的情形下，利用 (53) 和 $A(u,v) = 0$，我们得到

$$C(u,z_0) = C(u,v)C(v,z_0) - A(u,v)D(v,z_0) = C(u,v)C(v,z_0),$$

因此最后得到 $\beta = -C(u,v)$。 $C(v,\overline{z_0}) \neq 0$ 的情形类似。

（iii）的证明：由（16）和（18）可得

$$\mathfrak{p}_u + \gamma \mathfrak{q}_v = (s_u + \gamma r_v) + (s_u^+ + \gamma r_v^+)\mathfrak{p}_{z_0} + (s_u^- + \gamma r_v^-)\mathfrak{p}_{\overline{z_0}},$$

因此 $\mathfrak{p}_u + \gamma \mathfrak{q}_v \in D(T)$ 当且仅当

$$s_u^+ + \gamma r_v^+ = s_u^- + \gamma r_v^- = 0,$$

根据 (17) 和 (19)，这等价于

$$D(u, \overline{z_0}) + \gamma C(v, \overline{z_0}) = D(u, z_0) + \gamma C(v, z_0) = 0. \tag{24}$$

该线性方程组的行列式为

$$\mathcal{D}_2 := D(u, \overline{z_0})C(v, z_0) - D(u, z_0)C(v, \overline{z_0})$$

并利用引理 5.7，其中

$$x = \begin{pmatrix} B(u) \\ D(u) \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} B(\overline{z_0}) \\ D(\overline{z_0}) \end{pmatrix},\ z = \overline{y},\ w = \begin{pmatrix} A(v) \\ C(v) \end{pmatrix}$$

结合 (56)、(57)、(58)，由推论 5.2 可得

$$\mathcal{D}_2 = \begin{vmatrix} B(u) & A(v) \\ D(u) & C(v) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B(\overline{z_0}) & B(z_0) \\ D(\overline{z_0}) & D(z_0) \end{vmatrix} = B(u, v)D(\overline{z_0}, z_0).$$

如情形 (i) 一样，我们看到 $\mathcal{D}_2 = 0$ 当且仅当 $B(u, v) = 0$。因此，若 γ 是 (24) 的一个解，则有 $B(u, v) = 0$。接下来假设 $B(u, v) = 0$。如同 (ii) 中一样，我们看到，若 $C(v, z_0) \neq 0$，则 $\gamma := -D(u, z_0)/C(v, z_0)$ 满足 (24)；若 $C(v, \overline{z_0}) \neq 0$，则 $\gamma := -D(u, \overline{z_0})/C(v, \overline{z_0})$ 满足 (24)。

最后，根据（54），我们看到在这两种情况下 $\gamma = -D(u, v)$。 □

注 2.4。情形（ii）可以通过情形（i）推导出来，只需注意到，多项式 $(q_{n+1}(x)/q_1(x))_{n\geq 0}$ 是与截断雅可比矩阵 $J^{(1)}$ 相关的正交归一多项式，而该截断雅可比矩阵由 J 删除第一行和第一列得到。参见 [1, 第 28] 页。我们有

$$J^{(1)}(Sc) = S(Jc) - a_0\langle c, e_0\rangle, \quad c \in \mathcal{F},$$

其中，S 是 ℓ^2 中的有界移位算子，由 $(Sc)_n := c_{n+1}, n \geq 0$ 给出。

若令 $(T_{(1)}\ D(T_{(1)}))$ 表示与 $J^{(1)}$ 相关联的雅可比算子，则可以证明

$$v \in D(T^{(1)}) \iff v = Su, u \in D(T)$$

and

$$T^{(1)}(Su) = S(Tu) - a_0\langle u, e_0\rangle, \quad u \in D(T).$$

3 雅可比算子的自伴扩张

与之前一样，(s_n) 是一个不定矩序列，且 $s_0 = 1$。相应的雅可比算子 $(T, D(T))$ 的亏指数为 $(1, 1)$，ℓ^2 中的自伴扩张可以参数化为算子 $T_t, t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，其定义域为

$$D(T_t) = D(T) \oplus \mathbb{C}(\mathfrak{q}_0 + t\mathfrak{p}_0) \text{ for } t \in \mathbb{R}, \quad D(T_\infty) = D(T) \oplus \mathbb{C}\mathfrak{p}_0 \tag{25}$$

并由 T^* 在定义域上的限制定义，参见 [17, 定理 6.23]。回顾一下，$\mathfrak{p}_0$、$\mathfrak{q}_0$ 在（4）中定义。

本节旨在给出一些关于自伴算子 T_t、$t \in \mathbb{R}^*$的定义域$D(T_t)$的结果。

对于 $t \in \mathbb{R}^*$，我们定义矩问题的解

$$\mu_t(\cdot) := \langle E_t(\cdot)e_0, e_0\rangle, \tag{26}$$

其中 $E_t(\cdot)$ 是自伴算子 T_t的谱测度。

根据 M. Riesz 的一个著名定理，测度 μ_t、$t \in \mathbb{R}^*$ 恰好是满足多项式 $\mathbb{C}[x]$ 在 $L^2(\mu)$ 中稠密的那些测度 $\mu \in V$；参见 [15], 。它们在 [1] 中称为 N-极端测度，在 [16]中称为冯·诺依曼解。它们构成 ext(V) 的一个闭子集；ext(V) 是凸集 V 的极端点集合。然而，已知 ext(V) 是 V 的稠密子集。它们由以下公式刻画：

$$\int \frac{d\mu_t(x)}{x - z} = -\frac{A(z) + tC(z)}{B(z) + tD(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*, \tag{27}$$

其中，A、...、D 是式 (11) 中给出的整函数，参见 [17, 定理 7.6]。回忆一下，式 (12) 成立。

我们总结了 μ_t 的一些性质，这些性质可见于 [1] 和[17]。

命题 3.1。（i）解 μ_t 是一个离散测度，其支撑集等于整函数 $B(z) + tD(z)$ 的可数零点集 Λ_t；约定 Λ_∞ 是 D 的零点集。特别地，对于 $t \in \mathbb{R}^*$，有 $\Lambda_t \subset \mathbb{R}$。

（ii）两个不同的 N-极值解的支撑集互不相交，且每个点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 都属于唯一的 N-极端测度 μ_t 的支撑集，其中若 $D(x_0) \neq 0$，则 $t \in \mathbb{R}^*$ 定义为 $t = -B(x_0)/D(x_0)$；若 $D(x_0) = 0$，则 $t \in \mathbb{R}^*$ 定义为 $t = \infty$。

让我们考虑向量空间

$$\mathcal{E} := \{F_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z) \mid c \in \ell^2\} \tag{28}$$

由整函数组成，参见（5）。在范数下，它是一个希尔伯特空间

$$||F_c||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \int |F_c(x)|^2 \, d\mu(x),$$

其中 $\mu \in V$ 可以是任意的。它是一个函数的再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$K(u, v) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n(u) p_n(v), \quad u, v \in \mathbb{C},$$

从.....的意义上说，假设

$$\int K(u, x) F_c(x) \, d\mu(x) = F_c(u), \quad \mu \in V, u \in \mathbb{C}.$$

注意，(p_n) 是 $\mathcal{E}$ 的标准正交基，且映射 $c \mapsto F_c$ 是希尔伯特空间 ℓ^2 到 $\mathcal{E}$ 上的酉算子。

对于每个 N-极值测度 μ_t，映射 $c \mapsto F_c|_{\mathrm{supp}(\mu_t)}$ 是从 ℓ^2 到 $L^2(\mu_t)$ 的酉算子。逆映射为

$$f \mapsto \left(\langle f, p_n \rangle_{L^2(\mu_t)}\right)_{n \geq 0}, \quad f \in L^2(\mu_t),$$

and

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, p_n \rangle_{L^2(\mu_t)} p_n(x), \quad x \in \mathrm{supp}(\mu_t). \tag{29}$$

(29) 中的级数收敛到 f in $L^2(\mu_t)$，并且对于 $x \in \mathbb{C}$ 也局部一致收敛，但 f 先验地仅在 $\mathrm{supp}(\mu_t)$ 上有定义，因此该等式对 $x \in \mathrm{supp}(\mu_t)$ 中的点成立。该级数给出了 f 在整个 $\mathbb{C}$ 上的全纯延拓。

(25) 中的自伴算子 T_t 与 $L^2(\mu_t)$ 上的乘法算子 M_{μ_t} 酉等价，该乘法算子定义如下：

$$M_{\mu_t} f(x) = xf(x), \quad f \in L^2(\mu_t), x \in \operatorname{supp}(\mu_t).$$

定理 3.2. 设 μ_t 是一个 N-极值测度，且令 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \mu_t$。那么

$$w_{\mu_t}(\lambda)\mathfrak{p}_\lambda + \mathfrak{q}_\lambda \in D(T_t), \tag{30}$$

其中

$$w_{\mu_t}(\lambda) := \int \frac{1}{x-\lambda}\, d\mu_t(x) = -\frac{C(\lambda,x)}{D(\lambda,x)}, \quad x \in \operatorname{supp} \mu_t. \tag{31}$$

特别地，比值 $C(\lambda,x)/D(\lambda,x)$ 与 $x \in \operatorname{supp}\ \mu_t$. 无关

证明. 由于 $\lambda \notin \operatorname{supp}\ \mu_t$，函数 $(x-\lambda)^{-1}$ 和 $x(x-\lambda)^{-1}$ 在 $\operatorname{supp}\ \mu_t$ 上有界，特别是它们属于 $L^2(\mu_t)$。因此 $(x-\lambda)^{-1} \in D(M_{\mu_t})$，从而得到

$$\int \frac{p_n(x)}{x-\lambda}\, d\mu_t(x) = w_{\mu_t}(\lambda)p_n(\lambda) + q_n(\lambda),$$

其中 $w_{\mu_t}(\lambda)$ 由 (31) 的第一个等式给出。此外，根据 (29)

$$(x-\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [w_{\mu_t}(\lambda)p_n(\lambda) + q_n(\lambda)]p_n(x), \quad x \in \operatorname{supp} \mu_t. \tag{32}$$

鉴于 T_t 与 M_{μ_t} 酉等价，我们得到 (30)。将 (32) 两边乘以 $x-\lambda$，得到

$$1 = w_{\mu_t}(\lambda)(x-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} p_n(\lambda)p_n(x) + (x-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} q_n(\lambda)p_n(x), \quad x \in \operatorname{supp}(\mu_t).$$

因此，由 (8) 和 (9) 可得

$$w_{\mu_t}(\lambda)D(\lambda,x) + C(\lambda,x) = 0, \quad x \in \operatorname{supp} \mu_t.$$

假设 $D(\lambda,x) = 0$. 那么 $C(\lambda,x) = 0$，但这与 (10) 矛盾。因此 $D(\lambda,x) \neq 0$ 并且

$$w_{\mu_t}(\lambda) = -\frac{C(\lambda,x)}{D(\lambda,x)}, \quad x \in \operatorname{supp} \mu_t,$$

由此得到式 (31) 的第二部分。 □

注 3.3. 将公式 (57) 和 (58) 代入式 (31) 的最后一个表达式，可得公式 (27)，其中 $t = -B(x)/D(x)$ 与 $x \in \text{supp}(\mu_t)$ 无关，当 $D(x) \neq 0$ 时；而当 $D(x) = 0$ 时，$t = \infty$。

还要注意，由定理 1.2 (iii) 可知 $w_{\mu_t}(\lambda)\mathfrak{p}_\lambda + \mathfrak{q}_\lambda \notin D(T)$，因为$B(\lambda, \lambda) = -1$。

由定理 1.2 可知，对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}$，都有 $\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{q}_\lambda \notin D(T)$。现在我们将说明何时 $\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{q}_\lambda$ 属于与 N-极端测度 μ_t相关联的自伴扩张 T_t的定义域。

定理 3.4. 对于 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $t \in \mathbb{R}^*$，有

$$\mathfrak{p}_\lambda \in D(T_t) \iff D(\lambda, x) = 0 \ \forall x \in \text{supp}(\mu_t) \iff \lambda \in \text{supp}(\mu_t). \tag{33}$$

$$\mathfrak{q}_\lambda \in D(T_t) \iff C(\lambda, x) = 0 \ \forall x \in \text{supp}(\mu_t). \tag{34}$$

证明. 我们定义整函数 $g_\lambda, h_\lambda \in L^2(\mu_t)$ 如下

$$g_\lambda(x) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)p_k(x), \quad h_\lambda(x) := \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\lambda)p_k(x), \quad x \in \mathbb{C}.$$

若 $\mathfrak{p}_\lambda \in D(T_t)$，则由 (13) 得 $(T_t - \lambda I)\mathfrak{p}_\lambda = 0$，因为 T_t 是 T^*的限制。此外，由 T_t 与 $L^2(\mu_t)$ 上的乘法算子 M_{μ_t} 酉等价可知，我们有 $xg_\lambda(x) \in L^2(\mu_t)$，且 $D(\lambda, x) = (\lambda - x)g_\lambda(x) = 0$ 属于 $L^2(\mu_t)$。由 μ_t 的离散性可得，对于所有$x \in$supp(μ_t)，$D(\lambda, x) = 0$。等价关系 (33) 中最后一个等价条件由注 5.10 得出。另一方面，容易看出，(33) 中最后两个等价条件蕴含 $\mathfrak{p}_\lambda \in D(T_t)$，因为零函数 $x \mapsto (\lambda - x)g_\lambda(x)$ 和 $\lambda g_\lambda(x)$ 均属于 $L^2(\mu_t)$，因此 $xg_\lambda(x) \in L^2(\mu_t)$ 也成立。因此 $g_\lambda \in D(M_{\mu_t})$，最终得到 $\mathfrak{p}_\lambda \in D(T_t)$。

若 $\mathfrak{q}_\lambda \in D(T_t)$，则由 (13) 得 $(T_t - \lambda I)\mathfrak{q}_\lambda = e_0$，因为 T_t 是 T^*的限制。这说明 $(x - \lambda)h_\lambda(x) = 1$ 属于 $L^2(\mu_t)$，因此对所有 $x \in \text{supp}(\mu_t)$，都有 $C(\lambda, x) = 0$。另一方面，若对 $x \in \text{supp}(\mu_t)$，有 $C(\lambda, x) = 0$，则可得 $xh_\lambda(x) \in L^2(\mu_t)$，进而得到 $\mathfrak{q}_\lambda \in D(T_t)$。这就证明了 (34)。 □

由命题 3.1 可知，supp(μ_t) 是整函数 $B(z) + tD(z)$ 的零点集；当 $t = \infty$ 时，该函数理解为 $D(z)$。由此可得关于 $\mathfrak{p}_\lambda$ 的以下推论。利用式 (57)，我们还可得到关于 $\mathfrak{q}_\lambda$ 的类似结果。

推论 3.5. 对于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $t = \infty$，有

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\lambda \in D(T_t) &\iff B(\lambda) + tD(\lambda) = 0, \\ \mathfrak{q}_\lambda \in D(T_t) &\iff A(\lambda) + tC(\lambda) = 0. \\ \mathfrak{p}_\lambda \in D(T_\infty) &\iff D(\lambda) = 0, \\ \mathfrak{q}_\lambda \in D(T_\infty) &\iff C(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

特别是，$\mathfrak{p}_\lambda$ 和 $\mathfrak{q}_\lambda$ 仅当 $\lambda \in \mathbb{R}$时才属于 $D(T_t)$；而对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，它们属于唯一的 $D(T_t)$。此外，它们绝不会属于同一个定义域$D(T_t)$。

注记 3.6. 由于对所有 $t \in \mathbb{R}^*$，$D(T) \subset D(T_t)$，显然推论 3.5蕴含 $\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{q}_\lambda \notin D(T)$，正如推论 2.2中所述。

我们还有一个定理 3.2的某种逆命题。

定理 3.7. 假设 $\lambda, \tau \in \mathbb{C}$ 满足：对某个 $t \in \mathbb{R}^*$，$\tau\mathfrak{p}_\lambda + \mathfrak{q}_\lambda \in D(T_t)$。那么 $\lambda \notin \mathrm{supp}(\mu_t)$，并且 $\tau = w_{\mu_t}(\lambda)$由式（31）给出。

证明. 假设 $\lambda \in \mathrm{supp}(\mu_t)$。由定理 3.4可知 $\mathfrak{p}_\lambda \in D(T_t)$，因此 $\mathfrak{q}_\lambda \in D(T_t)$，这与推论 3.5矛盾。

由已证明的 $\lambda \notin \mathrm{supp}(\mu_t)$，根据定理 3.2 可得 $(\tau - w_{\mu_t}(\lambda))\mathfrak{p}_\lambda \in D(T_t)$；但由于 $\mathfrak{p}_\lambda \notin D(T_t)$，因此得到 $\tau - w_{\mu_t}(\lambda) = 0$。 □

定理 3.8. 给定 $t \in \mathbb{R}^*$ 和 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\mu_t)$。则存在唯一的一对 $(s, c) \in D(T) \times \mathbb{C}$，它依赖于 t, λ，并满足

$$w_{\mu_t}(\lambda)\mathfrak{p}_\lambda + \mathfrak{q}_\lambda = \begin{cases} s + c(\mathfrak{q}_0 + t\mathfrak{p}_0), & t \in \mathbb{R} \\ s + c\mathfrak{p}_0, & t = \infty. \end{cases}$$

我们有

$$c = \begin{cases} -1/(B(\lambda) + tD(\lambda)), & t \in \mathbb{R} \\ -1/D(\lambda), & t = \infty, \end{cases}$$

而 s 由代入 c 的值给出。

证明. 回忆一下，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\mu_t)$ 当且仅当 $B(\lambda) + tD(\lambda) \neq 0$ 在$t \in \mathbb{R}$时成立，并且 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\mu_\infty)$ 当且仅当 $D(\lambda) \neq 0$。由定理 3.2 和公式 (25) 可得 (s, c) 的存在性和唯一性。

在 $t \in \mathbb{R}$ 的情况下，我们有

$$w_{\mu_t}(\lambda)\mathfrak{p}_\lambda + \mathfrak{q}_\lambda - c(\mathfrak{q}_0 + t\mathfrak{p}_0) \in D(T),$$

并将 z_0 固定在开上半平面中，根据命题 2.1，我们有

$$w_{\mu_t}(\lambda)s_\lambda^+ + r_\lambda^+ - c(r_0^+ + ts_0^+) = w_{\mu_t}(\lambda)s_\lambda^- + r_\lambda^- - c(r_0^- + ts_0^-) = 0,$$

或者等价地，由 (17) 和 (19) 得到

$$w_{\mu_t}(\lambda)D(\lambda,\overline{z_0}) + C(\lambda,\overline{z_0}) - c(C(0,\overline{z_0}) + tD(0,\overline{z_0})) = 0, \tag{35}$$

and

$$w_{\mu_t}(\lambda)D(\lambda,z_0) + C(\lambda,z_0) - c(C(0,z_0) + tD(0,z_0)) = 0. \tag{36}$$

由 (36) 和 (31)，对于 $x \in \text{supp}(\mu_t)$，我们得到

$$\begin{aligned} c &= -\frac{w_{\mu_t}(\lambda)D(\lambda,z_0) + C(\lambda,z_0)}{B(z_0) + tD(z_0)} \\ &= \frac{C(\lambda,x)D(\lambda,z_0) - D(\lambda,x)C(\lambda,z_0)}{(B(z_0) + tD(z_0))D(\lambda,x)} \\ &= -\frac{D(z_0,\lambda)C(\lambda,x) - B(z_0,\lambda)D(\lambda,x)}{(B(z_0) + tD(z_0))D(\lambda,x)} \\ &= -\frac{D(z_0,x)}{(B(z_0) + tD(z_0))D(\lambda,x)} = -\frac{1}{B(\lambda) + tD(\lambda)}. \end{aligned}$$

这里我们先用了 (54)，接着两次用了 (58)。最后回忆一下，对于 $x \in \text{supp}(\mu_t)$，$t = -B(x)/D(x)$，参见命题 3.1。

注意，(35) 得到的 c 表达式相同。

情形 $t = \infty$ 的处理方式相同。 □

4 Jacobi 算子定义域的参数化

不定情形下的雅可比算子 $(T, D(T))$ 按 [13, p. 20], i.e. 的意义是正则的，也就是说，对于任意 $z \in \mathbb{C}$，都存在 $d(z) > 0$，使得

$$||(T - zI)c|| \geq d(z)||c||, \quad c \in D(T). \tag{37}$$

对于 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，这在 $d(z) = |\text{Im}(z)|$ 时成立；对于 $z \in \mathbb{R}$，令 $t_0 \in \mathbb{R}^*$ 满足 $z \in \text{supp}(\mu_{t_0})$。对于 $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{t_0\}$，距离

$$d_t(z) := \min\{|z - x| \mid x \in \text{supp}(\mu_t)\} > 0,$$

可代入 (37)，因为我们有

$$||(T-zI)c||^2 = \int |(x-z)F_c(x)|^2 \, d\mu_t(x) \geq d_t(z)^2||c||^2,$$

其中 F_c 由式 (5) 给出。

我们有闭子空间的正交分解

$$\ell^2 = (T-zI)(D(T)) \oplus \mathbb{C}\mathfrak{p}_{\overline{z}}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{38}$$

算子 $(T, D(T))$ 没有特征值，连续谱为空，且谱 $\sigma(T) = \mathbb{C}$ 等于剩余谱，参见 [18,第 209] 页。

对于 $z_0 \in \mathbb{C}$ ，我们有正交展开

$$\frac{p_n(z)-p_n(z_0)}{z-z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}(z_0)p_k(z), \quad z \in \mathbb{C} \tag{39}$$

关于次数为 $n-1$ 的多项式 $(p_n(z) - p_n(z_0)/(z-z_0)$，容易看出

$$a_{n,k}(z_0) = \int \frac{p_n(x)-p_n(z_0)}{x-z_0} p_k(x)\, d\mu(x) = q_n(z_0)p_k(z_0) - p_n(z_0)q_k(z_0), \tag{40}$$

其中 $\mu \in V$ 是式 (1) 的任意解，参见 [1, 第 18] 页。

引理 4.1. 式 (40) 中的系数$a_{n,k}(z_0)$ 满足

$$|a_{n,k}(z_0)|^2 \leq \left(|p_n(z_0)|^2 + |q_n(z_0)|^2\right)\left(|p_k(z_0)|^2 + |q_k(z_0)|^2\right). \tag{41}$$

因此

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_{n,k}(z_0)|^2 \leq (||\mathfrak{p}_{z_0}||^2 + ||\mathfrak{q}_{z_0}||^2)(|p_k(z_0)|^2 + |q_k(z_0)|^2). \tag{42}$$

此外,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{p_n(z)-p_n(z_0)}{z-z_0}\right|^2 \leq ||\mathfrak{p}_z||^2 \left(||\mathfrak{p}_{z_0}||^2 + ||\mathfrak{q}_{z_0}||^2\right)^2. \tag{43}$$

特别地，对于 $z \to z_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n'(z_0)|^2 \leq ||\mathfrak{p}_{z_0}||^2 \left(||\mathfrak{p}_{z_0}||^2 + ||\mathfrak{q}_{z_0}||^2\right)^2.$$

证明。公式（41）是柯西-施瓦茨不等式的推论。由（39）和（41）可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_n(z)-p_n(z_0)}{z-z_0}\right|^2 &\leq \sum_{k=0}^{n-1}|a_{n,k}(z_0)|^2\sum_{k=0}^{n-1}|p_k(z)|^2\\ &\leq ||\mathfrak{p}_z||^2\sum_{k=0}^{n-1}\left(|p_n(z_0)|^2+|q_n(z_0)|^2\right)\left(|p_k(z_0)|^2+|q_k(z_0)|^2\right),\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{p_n(z)-p_n(z_0)}{z-z_0}\right|^2\\ &\leq ||\mathfrak{p}_z||^2\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(|p_k(z_0)|^2+|q_k(z_0)|^2\right)\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(|p_n(z_0)|^2+|q_n(z_0)|^2\right)\right]\\ &\leq ||\mathfrak{p}_z||^2\left(||\mathfrak{p}_{z_0}||^2+\mathfrak{p}_{z_0}||^2\right)^2,\end{aligned}$$

由此得到（43）。 □

现在我们将证明，在（28）中定义的希尔伯特空间 $\mathcal{E}=\{F_c(z)\}$ 在差商运算下保持不变：

定理 4.2. 对于 $c\in\ell^2$ 和 $z_0\in\mathbb{C}$，存在 $\xi(c,z_0)\in\ell^2$，使得

$$\frac{F_c(z)-F_c(z_0)}{z-z_0}=F_{\xi(c,z_0)}(z)\in\mathcal{E}, \tag{44}$$

且 $\xi(c,z_0)$ 的坐标定义如下

$$\xi_k(c,z_0)=\sum_{n=k+1}^{\infty}c_n a_{n,k}(z_0),\quad k\geq 0. \tag{45}$$

此外，

$$||\xi(c,z_0)||\leq||c||\left(||\mathfrak{p}_{z_0}||^2+||\mathfrak{q}_{z_0}||^2\right). \tag{46}$$

证明。(45) 中的级数是两个ℓ^2 序列的乘积，因此绝对收敛。此外，由柯西-施瓦茨不等式和 (41) 可得

$$|\xi_k(c,z_0)|^2\leq||c||^2(||\mathfrak{p}_{z_0}||^2+||\mathfrak{q}_{z_0}||^2)\left(|p_k(z_0)|^2+|q_k(z_0)|^2\right),$$

因此 $(\xi_k(c,z_0)) \in \ell^2$，且 (46) 成立。

接下来求得

$$\frac{F_c(z)-F_c(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{p_n(z)-p_n(z_0)}{z-z_0}, \quad z \neq z_0.$$

将表达式 (39) 代入右侧，可得 $z \neq z_0$

$$\begin{aligned}
\frac{F_c(z)-F_c(z_0)}{z-z_0} &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}(z_0) p_k(z) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z) \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n a_{n,k}(z_0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(c,z_0) p_k(z),
\end{aligned}$$

其中，由于绝对收敛，可以进行重排：

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F_c(z)-F_c(z_0)}{z-z_0}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} |a_{n,k}(z_0)|\,|p_k(z)| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |p_k(z)| \sum_{n=k+1}^{\infty} |c_n|\,|a_{n,k}(z_0)| \\
&\leq ||c|| \sum_{k=0}^{\infty} |p_k(z)| \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_{n,k}(z_0)|^2\right]^{1/2} \\
&\leq ||c|| \sum_{k=0}^{\infty} |p_k(z)| \left[\left(||\mathfrak{p}_{z_0}||^2 + ||\mathfrak{q}_{z_0}||^2\right)\left(|p_k(z_0)|^2 + |q_k(z_0)|^2\right)\right]^{1/2} \\
&\leq ||c|| \left(||\mathfrak{p}_{z_0}||^2 + ||\mathfrak{q}_{z_0}||^2\right)^{1/2} ||\mathfrak{p}_z|| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(|p_k(z_0)|^2 + |q_k(z_0)|^2\right)\right)^{1/2} \\
&= ||c||\,||\mathfrak{p}_z||\left(||\mathfrak{p}_{z_0}||^2 + ||\mathfrak{q}_{z_0}||^2\right),
\end{aligned}$$

其中使用了 (42)。

现在显然，整函数 $z \mapsto (F_c(z) - F_c(z_0))/(z-z_0)$（当 $z = z_0$ 时取值为 $F_c'(z_0)$）和 $F_{\xi(c,z_0)}(z)$ 相等。 □

定理 4.3. 设 Ξ_{z_0} 表示 ℓ^2 中由下式定义的有界算子

$$\Xi_{z_0}(c) := \xi(c, z_0), \quad z_0 \in \mathbb{C},\ c \in \ell^2, \tag{47}$$

其中 $\xi(c, z_0)$ 在定理 4.2 中定义。我们有 $\Xi_{z_0}(\ell^2) = D(T)$，并且对每个 $z_0 \in \mathbb{C}$，$\ker(\Xi_{z_0}) = \mathbb{C}e_0$。

此外，对于 $z_0 \in \mathbb{C}$

$$(T - z_0 I)\Xi_{z_0}(c) + F_c(z_0)e_0 = c, \quad c \in \ell^2. \tag{48}$$

Ξ_{z_0} 对 $(T - z_0 I)(D(T))$ 的限制是到 $D(T)$ 的双射，且等于 $(T - z_0 I)^{-1}$。

证明。设 $U : \ell^2 \to \mathcal{E}$ 表示由 $U(c) = F_c$ 给出的酉映射。则

$$U(Jc)(z) = z\sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(z), \quad c \in \mathcal{F}, z \in \mathbb{C},$$

也就是说，U 是 J 与在 $\mathbb{C}[z] \subset \mathcal{E}$ 上乘以 z 的稠密定义算子之间的交织算子。因此

$$U(Tc)(z) = zF_c(z), \quad c \in D(T), z \in \mathbb{C}. \tag{49}$$

对于 $c \in \ell^2$ 和 $z_0 \in \mathbb{C}$，我们有

$$c - F_c(z_0)e_0 \perp \mathfrak{p}_{\overline{z_0}},$$

因此，由 (38) 可知，$c - F_c(z_0)e_0$ 属于 $(T - z_0 I)(D(T))$。因此，存在一个唯一向量 $v \in D(T)$，使得

$$c - F_c(z_0)e_0 = (T - z_0 I)(v), \tag{50}$$

将 U 应用于 (50)，再由 (49) 可得

$$F_c(z) - F_c(z_0) = (z - z_0)F_v(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

现在，(44) 表明，对于 $z \neq z_0$，有 $F_v(z) = F_{\xi(c,z_0)}(z)$，因而对于所有 z 都成立；最后，$v = \xi(c, z_0)$，这表明 $\Xi_{z_0}(c) \in D(T)$。将 $v = \xi(c, z_0)$ 代入 (50)，即可得到 (48)。

对于 $v \in D(T)$，我们定义 $c = (T - z_0 I)(v)$。由 (38) 可知，$F_c(z_0) = 0$ 如 $c \perp \mathfrak{p}_{\overline{z_0}}$，随后由 (48) 得到 $(T - z_0 I)\Xi_{z_0}(c) = c$。根据 $T - z_0 I$ 的单射性，我们得到 $v = \Xi_{z_0}(c) = (T - z_0 I)^{-1}(c)$。

容易看出，$\xi(e_0, z_0) = 0$，因此 $\mathbb{C}e_0 \subseteq \ker(\Xi_{z_0})$，反向包含关系也由此得出。 (48) □

注 4.4. 在式 (47) 中定义的算子 Ξ_{z_0} 满足

$$\Xi_{z_0}(e_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}(z_0)e_k, \quad n \geq 1,$$

并且很容易得出 $\Xi_{z_0}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$。

此外，由于 $(\mathbb{C}e_0)^\perp = \{c \in \ell^2 \mid c_0 = 0\}$，我们得到 $D(T)$ 的以下参数化

$$D(T) = \{\Xi_{z_0}(c) \mid c \in \ell^2, c_0 = 0\}, \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

5 附录

我们需要以下关于引言中定义的 Nevanlinna 函数的结果。

定理 5.1. 对于 $u, v, w \in \mathbb{C}$，我们有

$$\begin{aligned}
A(u,v) &= C(u,w)A(w,v) - A(u,w)B(w,v) && (51)\\
B(u,v) &= D(u,w)A(w,v) - B(u,w)B(w,v) && (52)\\
C(u,v) &= C(u,w)C(w,v) - A(u,w)D(w,v) && (53)\\
D(u,v) &= D(u,w)C(w,v) - B(u,w)D(w,v). && (54)
\end{aligned}$$

由显然的关系

$$A(u,v) = -A(v,u),\ B(u,v) = -C(v,u),\ D(u,v) = -D(v,u)$$

并将 $w = 0$ 代入定理 5.1 的公式中，我们得到以下用单变量函数 (11) 表示的公式：

推论 5.2。对于 u、$v \in \mathbb{C}$，我们有

$$\begin{aligned}
A(u,v) &= \begin{vmatrix} A(u) & A(v) \\ C(u) & C(v) \end{vmatrix} && (55)\\
B(u,v) &= \begin{vmatrix} B(u) & A(v) \\ D(u) & C(v) \end{vmatrix} && (56)\\
C(u,v) &= \begin{vmatrix} A(u) & B(v) \\ C(u) & D(v) \end{vmatrix} && (57)\\
D(u,v) &= \begin{vmatrix} B(u) & B(v) \\ D(u) & D(v) \end{vmatrix}. && (58)
\end{aligned}$$

我们未能在文献中找到定理 5.1 的公式，因此在此给出证明。据我们所知，推论 5.2 中用单变量函数表示二变量函数的公式最早由 [11] 给出，并收录于 [17, 的习题 7.8 (3)]。（遗憾的是，这道习题有一处印刷错误：B 和 C 的位置互换了。）

我们首先引入 Nevanlinna 函数的多项式逼近。

命题 5.3。 *[17, 命题 5.24]* 对于 u, $v \in \mathbb{C}$ 和 $n \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}
A_n(u,v) &:= (u-v)\sum_{k=0}^{n} q_k(u)q_k(v) = a_n \begin{vmatrix} q_{n+1}(u) & q_{n+1}(v) \\ q_n(u) & q_n(v) \end{vmatrix} \\
B_n(u,v) &:= -1 + (u-v)\sum_{k=0}^{n} p_k(u)q_k(v) = a_n \begin{vmatrix} p_{n+1}(u) & q_{n+1}(v) \\ p_n(u) & q_n(v) \end{vmatrix} \\
C_n(u,v) &:= 1 + (u-v)\sum_{k=0}^{n} q_k(u)p_k(v) = a_n \begin{vmatrix} q_{n+1}(u) & p_{n+1}(v) \\ q_n(u) & p_n(v) \end{vmatrix} \\
D_n(u,v) &:= (u-v)\sum_{k=0}^{n} p_k(u)p_k(v) = a_n \begin{vmatrix} p_{n+1(}u) & p_{n+1}(v) \\ p_n(u) & p_n(v) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

值得注意的是

$$\begin{vmatrix} A_n(u,v) & B_n(u,v) \\ C_n(u,v) & D_n(u,v) \end{vmatrix} = 1 \text{ for } (u,v) \in \mathbb{C}^2,$$

参见 [17,方程(5.57)]。

为后续使用，我们引入行列式为 1 的传递矩阵

$$h_n(u,v) = \begin{pmatrix} C_n(u,v) & A_n(u,v) \\ -D_n(u,v) & -B_n(u,v) \end{pmatrix}, \quad u,v \in \mathbb{C},\ n \geq 0. \tag{59}$$

传递矩阵这一名称的由来是

命题 5.4。对于 u、$v \in \mathbb{C}$、$n \geq 0$，我们有

$$\begin{pmatrix} p_n(u) & q_n(u) \\ p_{n+1}(u) & q_{n+1}(u) \end{pmatrix} h_n(u,v) = \begin{pmatrix} p_n(v) & q_n(v) \\ p_{n+1}(v) & q_{n+1}(v) \end{pmatrix} \tag{60}$$

证明。命题 5.3 的四个公式可以表示为矩阵方程

$$h_n(u,v) = a_n \begin{pmatrix} q_{n+1}(u) & -q_n(u) \\ -p_{n+1}(u) & p_n(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n(v) & q_n(v) \\ p_{n+1}(v) & q_{n+1}(v) \end{pmatrix}.$$

然而，由 [17, 方程 (5.52)]

$$\begin{pmatrix} q_{n+1}(u) & -q_n(u) \\ -p_{n+1}(u) & p_n(u) \end{pmatrix}^{-1} = a_n \begin{pmatrix} p_n(u) & q_n(u) \\ p_{n+1}(u) & q_{n+1}(u) \end{pmatrix},$$

并可得 (60)。 □

由满足 (60) 的矩阵 $h_n(u,v)$ 的唯一性可得：

推论 5.5。对于 $u, v, w \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$，有

$$h_n(u,w)h_n(w,v) = h_n(u,v),$$

$$h_n(u,v) = h_n(v,u)^{-1}.$$

定理 5.1 的证明。令 n 趋于无穷大，由 (59) 得到整矩阵函数

$$h(u,v) = \begin{pmatrix} C(u,v) & A(u,v) \\ -D(u,v) & -B(u,v) \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{C},$$

其行列式为 1，且满足 $h(u,w)h(w,v) = h(u,v)$，这等价于定理中的公式 (51)、(52)、(53) 和 (54)。□

注 5.6。由下式定义的 M¨obius 变换 $M(u,v)$: $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$

$$M(u,v)(z) := \frac{C(u,v)z + A(u,v)}{-D(u,v)z - B(u,v)}, \quad z \in \mathbb{C}^*,$$

将 Weyl 圆 K_v 映射到 Weyl 圆 K_u，其中当 $u \in \mathbb{R}$时 $K_u = \mathbb{R}^*$。对于 $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，Weyl 圆的定义见 [17, 第 7 节3]。

下面的引理统一了若干计算：

引理 5.7. 对于向量 x、y、z、$w \in \mathbb{C}^2$，我们有以下行列式方程

$$\begin{vmatrix} |x\ \ y| & |x\ \ z| \\ |w\ \ y| & |w\ \ z| \end{vmatrix} = |x\ \ w||y\ \ z|,$$

其中

$$|x\ \ y| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\ etc.$$

证明。第一种方法：直接计算。

第二种方法：定义

$$M(x,y,z,w) = |x\ \ y||z\ \ w| + |x\ \ z||w\ \ y| + |x\ \ w||y\ \ z|,$$

其中应注意，y、z、w 以循环置换的形式出现。显然，M 是定义在 $\mathbb{C}^2$ 上的四重线性形式，且为交错形式，即任意两个自变量相同时，其值为零。维数为 ≤ 3 的向量空间上的交错四重线性形式恒等于零，因此 $M \equiv 0$。 □

在各种证明中，我们需要某些函数是 Pick 函数，即在割平面 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上的全纯函数，并满足某些性质，见 [12]。

命题 5.8。亚纯函数 B/D 和 A/C 是 Pick 函数，即它们将上（分别为下）开半平面映入自身。

证明。关于 B/D 的结果见 [3, 命题 1.3]。关于A/C 的结果可通过考虑与注 2.4 中所讨论的截断雅可比矩阵 $J^{(1)}$相对应的不定矩问题，从前一个结果推导出来。截断问题的 Nevan-~linna 函数 A、.....、D 与原矩问题的 Nevan-~linna 函数之间存在简单的关系，见 [14]:

$$A(z) = a_0^{-2}\widetilde{D}(z), \quad C(z) = -b_0 a_0^{-2}\widetilde{D}(z) - \widetilde{B}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

因此 $-C/A = b_0 + a_0^2$（B/D），这表明 $-C/A$ 是 Pick 函数，A/C也是。 □

根据 M. Riesz 的著名定理，(5) 中定义的每个函数 F_c 都是最小指数型的，这意味着对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $C_\varepsilon > 0$，使得

$$|F_c(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

这由柯西-施瓦茨不等式得出，因为范数 $||\mathfrak{p}_z||$ 满足相同的不等式，依据 $[1,$ 定理 2.4.3$]$。利用多项式 q_{n+1}/q_1 是不确定的截断 Jacobi 矩阵 $J^{(1)}$ 的正交归一多项式（参见注 2.4），我们还可以得到，(5) 中的函数 G_c 是最小指数型的。

接下来，我们回顾这些函数在不是多项式时的一个重要性质。

命题 5.9. 对每个 $c \in \ell^2 \setminus \mathcal{F}$，函数 F_c, G_c 都是超越的，且有可数无穷多个零点。

特别地，对每个 $v \in \mathbb{C}$，变量 u 的函数 $A(u,v)$ $B(u,v)$,$C(u,v)$ $D(u,v)$ 有可数无穷多个零点。

证明. 一个最小指数型的整超越函数 f 有可数无穷多个零点。事实上， f 的阶 ρ 要么严格小于 1，要么等于 1；后一种情况下， f 的型为零。第一种情况下，结论由阿达玛因式分解定理得出，参见$[9,$ 第22$]$页。第二种情况下，结论由 Lindel¨of 的一个定理得出，参见 $[9,$ 定理 2.20。3$]$。

对于 $v \in \mathbb{C}$ 和 F 为函数 A、.....、D 之一的情形，我们看到 $u \mapsto F(u,v)$ 是一个最小指数型的整超越函数。 □

定理 1.3 的证明：情形 1：我们先考虑给定 $v \in \mathbb{C}$ 时， D 满足 $Z(D)_v = \{u \in \mathbb{C} \mid D(u,v) = 0\}$ 的情形，参见（14）。

若 $v \in \mathbb{R}$，则由定理 $3]$，可知 $Z(D)_v \subset \mathbb{R}$，并且 $Z(D)_v$ 等于唯一的 N-极端测度的支撑集，该测度的支撑集包含 v 。

若 $v \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，则 $D(v) \neq 0$，利用（58）可得

$$D(u,v) = D(v)[B(u) - \rho D(u)],\ \rho := B(v)/D(v),$$

因此， $u \in Z(D)_v$ 当且仅当 $B(u) = \rho D(u)$。对于这样的 u ，必有 $D(u) \neq 0$ ，否则 $B(u) = D(u) = 0$ ，这与（12）矛盾。由此可得， $u \in Z(D)_v$ 当且仅当 $B(u)/D(u) = \rho$。利用命题 5.8 所述的 B/D 是 Pick 函数这一点，我们看到 u、v 属于同一个半平面。

情形 2：我们考虑 $Z(B)_v$ ，并使用 (56)，即。

$$B(u,v) = B(u)C(v) - D(u)A(v).$$

首先令 $v \in \mathbb{R}$。若 $C(v) = 0$，则由 (12) 得 $A(v) \neq 0$，因此 $B(u,v) = 0$ 当且仅当 $D(u) = 0$，故 $Z(B)_v \subset \mathbb{R}$。若 $C(v) \neq 0$，则

$$B(u,v) = C(v)[B(u) - \tau D(u)],\ \tau := A(v)/C(v) \in \mathbb{R},$$

因此，$Z(B)_v$ 是 $B - \tau D$的零点集，故根据命题 3.1，它是实数。

接下来令 $v \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$。于是 $C(v) \neq 0$，因此 $u \in Z(B)_v$ 当且仅当 $B(u) = \tau D(u)$，其中τ 如上所述；但这只有在 $D(u) \neq 0$ 时才可能成立，从而 $B(u)/D(u) = \tau$。利用 A/C 和 B/D 都是 Pick 函数这一事实，参见命题 5.8，可知 u、v 属于同一个半平面。

情形 3：我们考虑 $Z(C)_v$，并使用 (57)，即

$$C(u,v) = A(u)D(v) - C(u)B(v).$$

分别考虑 $v \in \mathbb{R}$和 $v \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$两种情形，并在 $D(v)$ 非零时将其约去，我们便可像情形 2 那样继续。

最后，考虑截断情形，如注 2.4 所述，情形 1 可推出 $Z(A)_v$ 的情形。 □

注 5.10。如上文证明中所注意到的，对于 $v \in \mathbb{R}$，有：

$$D(u,v) = 0 \iff u \in \mathrm{supp}(\mu),$$

其中 μ 是 N-极值测度，满足 $v \in$supp(μ)。

另请参见注 3.3。

命题 1.4 的证明：

情形 (i)：由定理 1.2 (i) 的证明可知，对于所有 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，$B(u,v) = -D(u,z)/D(v,z)$，因为对于这些 z，$D(v,z) \neq 0$。根据假设，对于 $u < x < v$，$D(x,v) \neq 0$，因此由连续性可知，对于这些 x，$B(u,v) = -D(u,x)/D(v,x)$。接下来我们注意到

$$B(u,v)\frac{v-x}{x-u} = \frac{v-x}{D(v,x)}\frac{D(u,x)}{u-x} \neq 0, \quad u < x < v, \tag{61}$$

and

$$\lim_{x \to u^+} \frac{D(u,x)}{u-x} = ||\mathfrak{p}_u||^2, \quad \lim_{x \to v^-} \frac{D(v,x)}{v-x} = ||\mathfrak{p}_v||^2,$$

因此，式 (61) 中的函数对于 $u < x < v$ 为正，故 $B(u,v) > 0$。

情形 (ii)：根据注 2.4，对于截断雅可比矩阵$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$，此情形可归约为情形 (i)。若 A，....., D 表示二变量 Nevalinna 函数

对于截断情形，以下公式可见于 [14]。（请读者注意，该参考文献采用了 [11] 的归一化。）

$$\widetilde{B}(u,v) = (v - b_0)A(u,v) - C(u,v), \quad \widetilde{D}(u,v) = a_0^2 A(u,v),$$

~并且由于我们假设 $A(u,v) = 0$，因此有 $-C(u,v) = B(u,v) > 0$。□

参考文献

[1] N. I. Akhiezer，《经典矩问题及分析学中的若干相关问题》。英文译本，Oliver and Boyd，爱丁堡，1965。[2] N. I. Akhiezer，I. M. Glazman，《希尔伯特空间中的线性算子理论》。两卷合订为一册。Dover，1993。[3] C. Berg，不定矩问题与整函数理论，计算与应用数学杂志 65 (1995)，27–55。[4] C. Berg 和 J. P. R. Christensen，经典矩理论中的稠密性问题，傅里叶研究所年刊 31，第 3 期 (1981)，99–114。[5] C. Berg 和 R. Szwarc，汉克尔矩阵的最小特征值，构造性逼近 34 (2011)，107–133。[6] C. Berg 和 R. Szwarc，无限汉克尔矩矩阵的逆，SIGMA 14 (2018)，109，48 页。[7] C. Berg 和 R. Szwarc，可闭汉克尔算子与矩问题，积分方程与算子理论 92(1) (2020)，1–9。[8] C. Berg 和 R. Szwarc，与汉克尔矩矩阵相关的自伴算子，泛函分析杂志，283 (2022)，109674。[9] R. P. Boas，《整函数》。Academic Press Inc. 出版社，纽约，1954。[10] L. de Branges，《整函数希尔伯特空间》。Prentice-Hall, Inc.，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1968。

[11] H. Buchwalter 和 G. Cassier，Hamburger矩问题中的 Nevanlinna 参数化，Expo Math. 2 (1984)，155–178。[12] W. F. Donoghue, Jr.，《单调矩阵函数与解析延拓》。Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约，1974。[13] M. L. Gorbachuk 和 V. I. Gorbachuk，《M. G. Krein 关于整算子的讲义》。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔、波士顿、柏林，1997。[14] H. L. Pedersen，与平移的不定Hamburger矩问题相关的整函数 Nevanlinna 矩阵，Math. Scand. 74 (1994)，152–160。[15] M. Riesz，关于矩问题及其对应的 Parseval 定理，Acta Litt. Ac. Sci. Szeged 1 (1923)，209–225。

[16] B. Simon，《经典矩问题作为自伴有限差分算子》，Adv. Math. 137 (1998), 82–203。

[17] K. Schm¨udgen，《矩问题》，数学研究生教材第 277 卷。Springer International Publishing AG，2017。

[18] K. Yosida，《泛函分析》第三版，Springer Verlag，柏林、海德堡、纽约，1971。

Christian Berg 数学科学系，哥本哈根大学，
Universitetsparken 5，DK-2100 哥本哈根，丹麦，电子邮件：
berg@math.ku.dk

Ryszard Szwarc 数学研究所，弗罗茨瓦夫大学，pl. Grunwaldzki 2/4，50-384 弗罗茨瓦夫，
波兰，电子邮件： szwarc2@gmail.com