arXiv:2301.00587v1 [math.OC] 2 Jan 2023

使用 SCIP 8 对混合整数非线性规划进行全局优化

Ksenia Bestuzheva*、Antonia Chmiela†、Benjamin M¨uller‡、
Felipe Serrano§、Stefan Vigerske¶、Fabian Wegscheider‖

2023年1月3日

摘要

十多年来，约束整数规划框架 SCIP 一直在扩展其求解凸和非凸混合整数非线性规划问题（MINLP）的能力。随着最近发布的 8.0 版本，这些能力得到了大幅重构和扩展。本文探讨了近期进行这些更改的动机，并概述了 SCIP 中专用于混合整数非线性规划求解的功能。此外，本文还讨论了全局 MINLP 求解器基准测试中的难点，并与若干最先进的全局 MINLP 求解器进行了比较。

1 引言

混合整数非线性规划（MINLP）关注的是目标函数的优化，同时满足有限个线性或非线性约束以及整数性条件。这类问题的普遍性意味着许多现实应用都可以建模为混合整数非线性规划问题 [28, 37, 58, 69], ，但也意味着要高效处理这类问题的软件会变得极其复杂。MINLP 求解器 [19]通常构建于混合整数线性规划（MIP）求解器之上，或通过组合这类求解器与能够求得非线性规划（NLP）局部最优解的求解器来构建。事实上，最早的商用 MINLP 求解器之一 SCICONIC [7], 通过对低维非线性项进行分段线性近似，扩展了混合整数规划求解器。第一个通用求解器是 DICOPT [41], ，它将混合整数非线性规划问题的求解分解为一系列混合整数规划和非线性规划求解 [25]„从而利用了这两类问题已有的成熟软件。DICOPT 可以将非线性约束为凸的混合整数非线性规划问题求至最优，但对于非凸混合整数非线性规划问题，它只能作为启发式方法使用。最早能够将非凸混合整数非线性规划问题也求至最优的通用求解器是 α BB、BARON 和 GLOP [4, 60, 65], ，它们均基于针对非凸约束的凸化技术。本文将对 SCIP（求解约束整数规划）求解器进行综述，它也属于后一类。

*柏林祖斯研究所，AIS^{2}T 部门， bestuzheva@zib.de，ORCID：0000-0002-7018-7099
†柏林祖斯研究所，AIS^{2}T 部门， chmiela@zib.de，ORCID：0000-0002-4809-2958
‡柏林祖斯研究所，AIS^{2}T 部门， benjamin.mueller@zib.de，ORCID：0000-0002-4463-2873§柏林祖斯研究所，AIS^{2}T 部门， serrano@zib.de，ORCID：0000-0002-7892-3951
¶GAMS Software GmbH，柏林祖斯研究所 AIS^{2}T 部门转交， svigerske@gams.com
‖柏林祖斯研究所，AIS^{2}T 部门

以下考虑如下形式的混合整数非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x, \\ \text{such that} \quad & \underline{g} \leq g(x) \leq \overline{g}, \\ & \underline{b} \leq Ax \leq \overline{b}, \\ & \underline{x} \leq x \leq \overline{x}, \\ & x_{\mathcal{I}} \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{I}|}, \end{aligned} \tag{MINLP}$$

其中考虑了 x、 $x \in \mathbb{R}^n$、 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$、 $x \leq \underline{x}$、 $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, n\}$、 $c \in \mathbb{R}^n$、 $\underline{g}$、 $\overline{g} \in \overline{\mathbb{R}}^m$、 $g \leq g$、 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 以代数形式显式指定， b， $b \in \mathbb{R}^m$、 $\underline{b} \leq \overline{b}$和 $A \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times n}$。将目标函数限制为线性形式是 SCIP 的技术细节，且不失一般性。

SCIP 软件被设计为一个分支-割平面-定价框架，用于求解不同类型的优化问题，最一般的是约束整数规划（CIP），其中最重要的是混合整数规划和混合整数非线性规划问题。粗略地说，CIP 是具有任意约束和线性目标函数的有限维优化问题，并满足以下性质：如果固定所有整数变量，剩余的子问题必须构成线性规划或非线性规划。CIP 这一问题类别的提出，旨在兼顾约束规划的建模灵活性，以及将其与混合整数规划领域中现有高效求解技术相结合的算法需求 [1]。

为求解约束整数规划，SCIP 会构造松弛问题——通常是线性规划（LP）。如果松弛解对当前子问题不可行，那么处理被违反约束的插件就需要采取措施，使松弛解最终对于更新后的松弛问题不可行，例如通过分支或分离 [1]。此外，还有大量其他插件类型，例如用于预处理、寻找可行解或收紧变量界的插件，可以加快求解流程。经过 20 年对框架本身及其内置插件的开发，SCIP 已包含成熟的混合整数规划、混合整数非线性规划求解器，以及适用于其他若干问题类别的求解器。自 2022 年 11 月起，SCIP 可通过开源许可证免费使用。

SCIP 通过一种结合分支推断与分支割 [9]的空间分支定界算法，将（混合整数非线性规划）等问题求至全局最优。该算法的重要组成部分包括预处理、域传播（即收紧变量界）、线性松弛和分支。SCIP 的一个显著特点是，其处理非线性约束的能力并不限于混合整数非线性规划问题，而是可用于任何约束整数规划。例如，只要在 SCIP 中加入了适当的约束处理器，就能处理线性约束、非线性约束与约束规划中的典型约束混合的问题。由于 SCIP 中的大多数约束处理器都会为其约束构造线性松弛，因此处理非线性约束时也侧重于线性松弛。SCIP 更强调处理带非线性约束的约束整数规划，而非仅处理混合整数非线性规划；这也是迄今为止较少探索使用非线性松弛，或将完整的混合整数非线性规划重新表述为其他问题类型（例如混合整数锥规划）的原因之一。

SCIP 的开发最初专注于求解约束整数规划：固定所有整数变量后，所得问题为线性规划 [1]。然而，人们很快意识到，这一要求实际上并未由实现强制执行。只要约束处理器能够通过分离、分支或其他方式消除不可行性，SCIP 就可以处理该问题。首次针对连续变量中的非线性约束进行处理的实验，针对的是矿山生产计划中的双线性混合约束 [18]。这些实验取得的积极成果促使人们决定加入对更一般非线性约束的支持。随着版本 1.2（2009年）的发布，SCIP 开始支持二次约束（凸或非凸），并可通过 Ipopt [1]将二次约束

规划（QCPs）求解至局部最优性 [13]。对于版本 2.0（2010年），新增了可求解子混合整数规划的原始启发式 [10]，并扩展了其他大邻域搜索启发式，以生成子混合整数非线性规划 [12]。此外，还可以处理含三个变量的二阶锥约束。SCIP 2.1（2011 年）首次支持以代数形式指定的更一般非线性约束 [73]。除了对二次约束进行专门处理外，还加入了符号幂约束处理器（对于某些 $p \geq 1$，$x|x|^p = z$） [32] 以及单凸双变量约束处理器（f（x，y）$= z$，其中当 x 或 y 被固定时，f 为凸函数或凹函数） [6] 。

在具备了对非线性约束的基本处理能力后， [74], 后续版本便致力于增加能够提升性能的功能。SCIP 3.0（2012 年）引入了基于优化的界收紧（OBBT） [33] 和非线性规划潜水启发式。SCIP 3.2（2015 年）新增了将一般二次约束重新表述为二阶锥约束的功能，以及针对二次约束边凹分解的分离功能 [30]。在 SCIP 4.0（2017 年）中，高维二阶锥约束被拆分处理，二次规划的 KKT 条件得以利用，非线性规划求解会尝试多个初始点，线性规划松弛的解会被投影到凸非线性规划松弛上，并且 OBBT 也可以在非线性规划松弛上而非线性规划松弛上执行 [47]。通过增加线性约束改进双线性约束的凸化 [54], 、一种通过求解一系列非线性规划重新表述问题来获取解的全新原始启发式，以及与非线性规划求解器 filterSQP 和 Worhp 的接口 [27, 20, 56] ，均在 SCIP 5.0（2017 年）中加入 [34]。随后的两个重要版本分别带来了用于环填充的基于分支定价的求解器 [35] （SCIP 6.0，2018 年），以及对 Benders 分解中凸非线性子问题的支持（SCIP 7.0 [31],2020 年）。

SCIP 6 和 7 为混合整数非线性规划问题添加的功能相对较少，这是因为当时正在全面改进处理非线性约束的方式。此次改进的主要动机是提高求解器的可靠性，并缓解由问题重新表述引发的数值问题；这些问题曾导致 SCIP 返回在重新表述后的问题中可行、但在原始问题中不可行的解。该改进随 SCIP 8.0（2022 年） [14], 发布。更具体地说，先前版本的 SCIP 会显式构建（混合整数非线性规划）的扩展形式，因此原始约束不再包含在预求解问题中。尽管理论上这些公式等价，但重新表述后问题的 ε 可行解可能在原始问题中并非 ε可行。SCIP 8 通过将隐式扩展表述作为注释附加到原始问题中，解决了这一问题。SCIP 8 重大改进的第二个动机，是通过为定义表达式的底层结构类型和为特定（有时彼此重叠）结构添加功能的高层结构类型实现不同的插件类型，从而减少表达式结构类型和非线性结构类型的歧义。最后，SCIP 8 还引入了旨在提升求解器处理混合整数非线性规划问题性能的新功能，包括针对二次表达式的交集割、半定规划（半定规划）割和重新表述线性化技术割 [21, 16],、透视强化 [15], 以及对称性检测 [76]。

SCIP 可以读取以下格式文件中的混合整数非线性规划问题：线性规划、MPS、NL（AMPL）、OSiL、PIP 和 ZIMPL。此外，还可以通过多种编程语言和建模软件包的接口将问题传递给 SCIP，包括 AMPL、C语言、GAMS、Java、Julia、Python 和 MATLAB。

以下章节将概述 SCIP 求解混合整数非线性规划问题的能力。随后，我们将比较 SCIP 与其他先进的混合整数非线性规划全局求解器的性能。

2 SCIP 的混合整数非线性规划功能

下面将概述 SCIP 中专用于处理混合整数非线性规划问题的功能。首先，列出可用的非线性函数，并讨论如何将非线性约束集成到 SCIP 的分支割平面求解器中。接下来介绍非线性处理器的概念；这是 SCIP 8 新增的一种插件类型，便于集成用于处理特定非线性结构的扩展。本节其余部分将概述 SCIP 中可提高混合整数非线性规划求解效率的功能，例如用于收紧线性松弛的割平面生成器、用于简化问题的预处理约简，以及用于尽早找到可行解的原始启发式。

为简明起见，本介绍仅提供高层次的描述，省略了技术细节。除非另有说明，更多详情通常见于 [14]。

2.1 框架

2.1.1 表达式

代数表达式是由常数、变量以及各种代数运算（如加法、乘法和乘方）构成的良构组合，用于描述数学函数。它们通常表示为有向无环图，其中节点表示变量、常数和运算，弧表示计算流向。示例见图1。

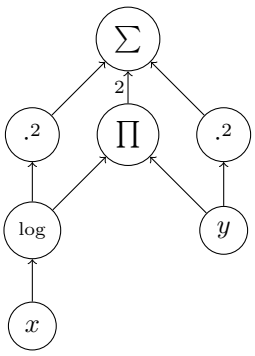


图1：代数表达式 $\log(x)^2 + 2\log(x)y + y^2$ 的表达式图。

在 SCIP 中，表达式也以有向无环图的形式存储，而表达式操作数的所有语义均由表达式处理器插件定义。这些处理器实现了回调函数，供 SCIP 核心中的方法用于管理表达式（创建、修改、复制、释放、解析、打印），在某个点处求值并计算导数，在区间上求值，进行简化，识别公共子表达式，检查曲率和整数性，以及遍历表达式。约束处理器仅在处理非线性约束（第 2.1.2 节）时使用一些额外的表达式处理器回调。

SCIP 8.0 中包含以下运算符的表达式处理器：

- 值：标量常数；
- 变量：一个 SCIP 变量；
- 和：一个仿射线性函数，$y \mapsto a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j y_j$ 其中系数为常数 $a \in \mathbb{R}^{k+1}$；
- prod：乘积，$y \mapsto c \prod_{j=1}^{k} y_j$ 对于 $y \in \mathbb{R}^k$，常数因子为 $c \in \mathbb{R}$；

- pow：常数指数的幂，$y \mapsto y^p$ 对于 $y \in \mathbb{R}$，指数为 $p \in \mathbb{R}$（如果$p \notin \mathbb{Z}$，则需要 $y \geq 0$）；
- 符号幂：带符号的幂，$y \mapsto \text{sign}(y)|y|^p$，适用于 $y \in \mathbb{R}$ 且指数为常数$p \in \mathbb{R}$，$p > 1$;
- 指数函数：乘方，$y \mapsto \exp(y)$，适用于 $y \in \mathbb{R}$;
- 自然对数：自然对数，$y \mapsto \log(y)$，适用于 $y \in \mathbb{R}_{>0}$;
- 熵：熵，$y \mapsto \begin{cases} -y\log(y), & \text{如果 } y > 0, \\ 0, & \text{如果 } y = 0, \end{cases}$ 适用于 $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;
- 正弦：正弦，$y \mapsto \sin(y)$，适用于 $y \in \mathbb{R}$;
- 余弦：余弦，$y \mapsto \cos(y)$，适用于 $y \in \mathbb{R}$;
- 绝对值：$y \in \mathbb{R}$的绝对值，$y \mapsto |y|$。

在 SCIP 的早期版本中，二次函数等高层结构也可以表示为表达式类型。为避免歧义并降低复杂性，现已改为识别二次表达式，不再通过更改表达式类型来显式表示。

2.1.2 非线性约束的约束处理器

所有 $\underline{g} \leq g(x) \leq \overline{g}$（混合整数非线性规划）的非线性约束均由 SCIP 中的非线性约束处理器处理，而线性约束 $\underline{b} \leq Ax \leq \overline{b}$则由线性约束处理器及其特化处理器（例如背包约束、集合覆盖约束）处理。约束处理器负责检查解是否满足约束；如果不满足，则通过强制执行约束来解决不可行性。这尤其适用于线性规划松弛的解。目前，非线性约束处理器通过以下方式强制执行约束：

域传播 通过根据分支定界树中当前节点的变量界分析非线性约束，可以推导出不可行性或界收紧，从而分别剪枝该节点或切除给定解；这也称为域传播；

分离 可以计算一个被给定解违反的切平面；

分支 将分支定界树中的当前节点细分，即选择一个变量 x_i 和一个分支点 $\tilde{x}_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$，并创建两个子节点，分别将 x_i限制为 $[\underline{x}_i, \tilde{x}_i]$ 和 $[\tilde{x}_i, \overline{x}_i]$。

为了判断一个节点是否可以被剪枝（域传播），通过区间算术 [53]计算 $g(x)$ 在当前变量界下取值范围的一个上估计。如果发现某个约束 k 使得 $g_k([\underline{x}, \overline{x}]) \cap [\underline{g}_k, \overline{g}_k] = \emptyset$，那么在 $[\underline{x}, \overline{x}]$ 中不存在满足该约束的点。通过逆向应用相同的方法，可以进行界收紧。也就是说，使用区间算术对 $g^{-1}([\underline{g}, \overline{g}])$进行上估计，即在 $[\underline{g}, \overline{g}]$上 $g(x)$的原像，并将变量界收紧为 $[\underline{x}, \overline{x}] \cap g^{-1}([\underline{g}, \overline{g}])$。这也称为基于可行性的界限收紧（FBBT）。在最简单的情况下，表达式处理器的回调函数用于在表达式中传播区间。不过，有些情况下会使用其他方法，这些方法会考虑更多结构，或利用额外信息收紧变量界和约束边界（参见第 2.3.1 节和第 2.3.2 节）。

为了构造非线性约束的线性松弛（分离选项），

我们考虑一种扩展形式：

$$\begin{aligned} &\min\ c^\top x, \\ &\text{such that } h_i(x, w_{i+1}, \dots, w_{\hat{m}}) \lesseqgtr_i w_i, \quad i = 1, \dots, \hat{m}, \\ &\qquad \underline{b} \le Ax \le \overline{b}, \\ &\qquad \underline{x} \le x \le \overline{x}, \\ &\qquad \underline{w} \le w \le \overline{w}, \\ &\qquad x_{\mathcal{I}} \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{I}|}. \end{aligned} \tag{MINLP$_{\text{ext}}$}$$

函数 h_i 是通过对定义函数 g_i 的表达式进行递归处理而得到的：使用辅助变量 w_{i+1}、...、$w_{\hat{m}}$ 为子表达式添加标注，其中 $\hat{m} \ge m$ 取某个值。首先，引入松弛变量 w_1、...、w_m，并将其分别赋给所有表达式的根节点，即对于 $i = 1$、...、m，有 $h_i := g_i$、$w_i := g_i$、$w_i := g_i$。接下来，对于每个函数 h_i，可以为子表达式 f 分配新的辅助变量 $w_{i'}$、$i' > m$，从而通过附加约束 $h_{i'}(x) = w_{i'}$（其中 $h_{i'} := f$）扩展（MINLP$_{\text{ext}}$）。如果可用，则将界 $\underline{w}_{i'}$ 和 $\overline{w}_{i'}$ 初始化为 $h_{i'}$ 的界。由于 h_i 的子表达式中的辅助变量所获得的索引始终大于 $\max(m, i)$，因此对于任意 $i = 1$、...、$\hat{m}$，所得结果称为 $h_i(x, w_{i+1}, \dots, w_{\hat{m}})$。也就是说，为简化记号，使用 w_{i+1} 代替 $w_{\max(i,m)+1}$。如果某个子表达式出现在多个表达式中，则至多为其分配一个辅助变量，并且可能需要重新索引，使 h_i 仅依赖于 x 和 w_{i+1}、...、$w_{\hat{m}}$。

对于等式或不等式的含义 $\lesseqgtr_i$，一种有效的简化方式是始终假设为等式。不过，出于性能方面的考虑，如果将某些等式放宽为不等式后，投影到 x 上的 (MINLP$_{\text{ext}}$) 可行域并未改变，那么这样做可能会有益。因此，

$$\lesseqgtr_i := \begin{cases} =, & \text{if } \underline{g}_i > -\infty,\ \overline{g}_i < \infty, \\ \le, & \text{if } \underline{g}_i = -\infty,\ \overline{g}_i < \infty, \\ \ge, & \text{if } \underline{g}_i > -\infty,\ \overline{g}_i = \infty, \end{cases} \qquad \text{for } i = 1, \dots, m.$$

对于 $i > m$，会考虑表达式的单调性来推导 $\lesseqgtr_i$。

是否用辅助变量标注子表达式，取决于识别出的结构。在最简单的情况下，每个尚未是变量的子表达式都会用一个辅助变量标注。这实质上对应于史密斯标准形 [65]。对于 (MINLP$_{\text{ext}}$) 中的每个函数 h_i，都可以使用相应表达式处理器的回调函数来计算线性下估计函数和上估计函数，从而构造 (MINLP$_{\text{ext}}$) 的线性松弛。不过，不为每个子表达式都添加辅助变量可能更有益，这样便能在 (MINLP$_{\text{ext}}$) 中使用更复杂的函数。下文第2.1.3节将讨论这一点。

示例 回顾图1和约束

$$\log(x)^2 + 2\log(x)\, y + y^2 \le 4.$$

通过为表达式图的根节点标注一个松弛变量 w_1，并为其他每个非变量节点标注一个辅助变量，即可得到扩展形式

$$\begin{aligned} w_2 + 2w_3 + w_4 &\le w_1, \\ w_5^2 &\le w_2, \\ w_5\, y &\le w_3, \\ y^2 &\le w_4, \\ \log(x) &= w_5, \\ w_1 &\le 4. \end{aligned}$$

此处省略了辅助变量的界。由于 $w_2 + 2w_3 + w_4$ 对每个变量都单调递增，因此将约束 $w_5^2 = w_2$、 $w_5 y = w_3$ 和 $y^2 = w_4$ 放宽为不等式。不过，若要将 $\log(x) = w_5$ 放宽为 $\log(x) \leq w_5$， w_5^2 和 $w_5 y$ 都需要关于 w_5 单调递增。若 $x \geq 1$ 和 $y \geq 0$，则满足这一条件。

如果（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）中的约束 $h_i(x, w_{i+1}, \ldots, w_{\hat{m}}) \leq w_i$ （ $\geq$情形类似）被违反，且 h_i 是非凸的，那么 h_i 上的线性下估计函数至多只能与 h_i的凸包络一样紧。因此，可能无法找到一个被线性规划松弛的解违反的超平面。由于 h_i 的凸包络取决于出现在 h_i中的变量的界，这些变量是分支（BRANCH）的候选对象。更准确地说，当表达式处理器为 $h_i(x, w_{i+1}, \ldots, w_{\hat{m}})$ 计算线性下估计函数或上估计函数时，也会标记它使用了哪些变量的当前变量界。随后，标记的原始变量会被添加到分支候选列表中。对于辅助变量 $w_{i'}, i' > i$，则考虑其所表示的子表达式 $h_{i'}$ 中的变量进行分支。

关于是添加一个能够将线性规划松弛的解分离开的割平面，还是进行分支，这一决策相当复杂；但其思路是：如果找不到割平面，或者与定义这些割平面的下/上估计函数的凸化间隙相比，松弛解违反现有割平面的程度较小，就进行分支。在后一种情况下，先通过分支缩小凸化间隙可能更有利。为了从分支候选变量列表中选出一个变量，会综合考虑约束在 ($\text{MINLP}_{\text{ext}}$) 中的违反程度，以及关于对给定变量进行分支会如何影响线性规划松弛最优值的历史信息（“伪成本”）。分支点是该变量在线性规划松弛中的取值与其区间中点的凸组合。

2.1.3 非线性处理器

在前面的示例中，为构造扩展形式引入了四个辅助变量。这是因为表达式处理器的视野相当狭窄，基本上只实现能够处理其直接子项的技术。显然，对于这个示例，只将 $\log(x)$ 替换为一个辅助变量 w_2 ，就能得到更高效的扩展形式。不过，这需要能够检测二次（或凸）结构的方法，并能为二次（凸）表达式 $w_2^2 + 2w_2 y + y^2$ 计算线性下估计函数，或为由 $w_2^2 + 2w_2 y + y^2 \leq w_1$ 定义的集合分离割平面。

此类结构检测和处理方法是随 SCIP 8 引入的新型非线性处理器插件的任务。非线性处理器通过决定何时为子表达式添加辅助变量，来确定扩展形式（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）。也就是说，给定约束 $h_i(x) \lesseqgtr_i w_i$，非线性处理器会分析定义 h_i 的表达式，并尝试检测特定结构。此时，它也可以请求引入额外的辅助变量，从而将 $h_i(x)$ 转换为 $h_i(x, w_{i+1}, \ldots\ldots, w_{\hat{m}})$。此外，它会告知约束处理器，接下来将为 $h_i(x, w_{i+1}, \ldots\ldots, w_{\hat{m}}) \leq w_i$、 $\geq w_i$，或两者提供分离。如果没有任何非线性处理器声明将处理 $h_i(x) \lesseqgtr_i w_i$，则会为表达式 h_i 根节点的每个参数引入辅助变量，并使用表达式处理器回调，根据线性下估计器／上估计器构造切平面。

除了分离之外，非线性处理器还可以对域传播作出贡献。其实现方式与分离类似：设置一个附加的扩展形式，类似于（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）；主要区别在于，松弛变量和辅助变量实际上不会在 SCIP 中创建，并且等式目前不会放松为不等式。

请注意，扩展形式以注释 的形式存储在原始表达式上。因此，对于每个任务，都可以使用最合适的公式。例如，可行性在原始约束上进行检查，域传播和分离使用相应的扩展形式，但默认情况下，分支仅针对原始变量执行。在 SCIP 7 及更早版本中，只显式构造了一个扩展形式，并且与原始公式的连接不再可用，从而由于未确保解也对原始约束是（ε-）可行的而导致问题。

除了提高数值可靠性外，非线性处理器在处理非线性结构时也具有更高的灵活性。对于表达式中的每个节点，都可以附加多个非线性处理器，每个处理器都可以用辅助变量标注可能不同的子表达式。例如，对于非凸二次约束 $\sum_{i,\ j} a_{i,\ j} x_i x_j \leq w$，二次函数的非线性处理器可以声明将通过分离（使用交集割，参见第 2.3.5 节）提供分离，但也应尝试其他分离方法。然而，由于没有其他非线性处理器声明将提供分离，因此会为和的每个参数引入辅助变量，也就是说，为每个乘积 $x_i x_j$分配一个辅助变量 X_{ij}。对于相应的约束 $x_i x_j \leq X_{ij}$ （如果 $a_{i,\ j} \geq 0$），则采用著名的 McCormick 下估计函数 [49],

$$\begin{aligned} X_{ij} &\geq \underline{x}_i x_j + \underline{x}_j x_i - \underline{x}_i \underline{x}_j, \\ X_{ij} &\geq \overline{x}_i x_j + \overline{x}_j x_i - \overline{x}_i \overline{x}_j, \end{aligned} \tag{1}$$

或其他方法（参见第 2.3.2 节）来构造线性松弛。

2.1.4 非线性规划松弛

与 SCIP 的中心线性规划松弛类似，SCIP 也提供非线性规划松弛。与约束处理器不同，非线性规划松弛使用一个通用数据结构来存储其约束。目前，线性约束处理器和非线性约束处理器都会在非线性规划松弛中存储其约束的表示，因此，对于混合整数非线性规划，非线性规划松弛与变量的整数性条件共同提供了问题的统一视图。对于非线性约束，原始（非扩展）形式 $g \leq g(x) \leq \overline{g}$ 会被添加到非线性规划中。为求解非线性规划松弛的局部最优解，现已提供与非线性规划求解器 filterSQP、Ipopt 和 Worhp [27, 75, 20]的接口。这些求解器的一阶和二阶导数通过 CppAD [8]计算。

目前，非线性规划松弛主要由一些原始启发式（第 2.8 节）和分离器（第 2.4.2 节）使用。

2.2 预处理

预处理非线性约束时，会简化表达式并将其转换为规范形式。例如，会将递归和与积展平，并将固定或聚合变量替换为常数或活跃变量的和。此外，还会确保：如果某个子表达式在同一个或不同的约束中出现多次，始终使用同一个表达式对象。这样可以确保在扩展形式（混合整数非线性规划$_{\text{ext}}$）中，这类公共子表达式至多关联一个辅助变量。

2.2.1 变量固定

正如 Hansen等人 所证明的，如果一个有界变量 x_j 不出现在目标函数 $c_j = 0$ 中，而只出现在一个约束 $g_k \leq g_k$（x）中，且对于其他变量的任意固定值，g_k（x）关于 x_j 是凸的，$\underline{g}_k = +\infty$ （或关于 x_j 和 $\overline{g}_k = -\infty$ 是凹的），那么总是存在一个满足 $\underline{x}_j \in \{x_j, \overline{x}_j\}$ 的最优解。

例如，如果 $y \in [0,1]$ 只出现在一个约束 $xy + yz - y^2 \leq 5$ 中，那么 y 可以改为二元变量。

对于多项式约束中的此类变量（在附加假设 [14] 下），SCIP 会识别它们；如果满足 $x_j = 0$ 和 $x_j = 1$，便将变量类型改为二元变量，否则添加一个界析取约束 $x_j \leq x_j \vee x_j \geq x_j$。因此，对 x_j 进行分支会使该变量在两个子问题中都被固定。

2.2.2 乘积线性化

引言强调，使用 SCIP 8 时，会避免对非线性约束进行显式的扩展重构。预处理阶段对二元变量乘积进行线性化，是对这一“规则”的一个例外。这样做的优点是，可以利用更多 SCIP 的混合整数规划求解技术。

在最简单的情况下，乘积 $\prod_i x_i$ 会被一个新变量 z 替代，并添加一个类型为“与”的约束来刻画 $z = \bigwedge_i x_i$。随后，“与”约束处理器会对该乘积 [11] 进行线性化分离。对于仅含两个二元变量的乘积，则直接添加其线性化。

对于包含许多项的二元变量二次函数，引入的变量数量可能很大。因此，在这种情况下，即使所用线性化可能导致较弱的松弛，也会采用需要较少额外变量的线性化。

2.2.3 针对二次规划的 KKT 强化

现有一种预处理方法，通过添加由 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件导出的冗余约束，来收紧二次规划 (QP) 的松弛。考虑如下形式的二次规划：

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x, \\ \text{such that} \quad & Ax \leq b, \end{aligned} \tag{QP}$$

其中，$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称的，$c \in \mathbb{R}^n$、$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$和 $b \in \mathbb{R}^m$。如果 (QP) 有界，则 (QP) 的所有最优解都满足以下 KKT 条件：

$$\begin{aligned} Qx + c + A^\top \mu &= 0, \\ Ax &\leq b, \\ \mu_i (Ax - b)_i &= 0, \qquad i \in \{1, \ldots, m\}, \\ \mu &\geq 0, \end{aligned} \tag{KKT}$$

其中，μ 是约束 $Ax \leq b$ 的拉格朗日乘子向量。

在专用预处理器中，SCIP 通过检查二次目标函数是否已被重新表述为约束，来识别 (MINLP) 是否等价于 (QP)。如果发现了一个 (QP)，且所有变量都有界，则将方程 (KKT) 作为冗余约束添加到问题中，其中互补约束通过 1 型特殊有序集表示。这些冗余约束有助于强化线性松弛，并优先选择能够满足互补约束的分支决策，从而使搜索更多地聚焦于 (QP) 的局部最优解。

除了（QP）之外，该实现还可以处理混合二进制二次规划。详情请参见 [47, 26]。该预处理器在 SCIP 4.0 中加入后，已证明对盒约束二次规划非常有益。由于 SCIP 8 中进行了许多更改和扩展，尤其是对二次约束的处理（第 2.3 节），因此需要重新评估应在何种条件下启用该预处理器。目前默认禁用。

2.2.4 对称性检测

MINLP 中的对称性是 $\mathbb{R}^n$ 上的一种自同构，它将最优解映射为最优解。这种对称性会对分支定界求解器的性能产生不利影响，因为对称子问题可能会被重复处理。因此，SCIP 可以通过界收紧和分离线性不等式，强制从一组对称解的轨道中选取字典序最大解 [39, 34, 31, 14]。

由于最优解通常无法预先得知，对称性检测会寻找能够将可行集映射到自身、并将每个点映射到具有相同目标函数值的点的变量置换 [48]。这些置换由辅助对称性检测图中的同构给出，该图根据问题数据（例如 c、 A、 $\mathcal{I}$，以及定义 $g(x)$ 的表达式）构建而成 [43, 76]。

2.3 二次函数

由于二次函数常见于混合整数非线性规划问题中（MINLPLib [50] 中每两个实例就有一个仅包含线性约束和二次约束），SCIP 已添加多种技术来处理这种结构。除上一节讨论的预求解方法外，还有三个非线性处理器和四个分离器用于处理二次结构。当没有非线性处理器处于活动状态时，会为二次函数中的每个平方项和双线性项在扩展形式中添加一个辅助变量，并生成梯度、割线以及 McCormick下估计器和上估计器（见 (1)）。

2.3.1 域传播

如果变量在二次函数中出现多次，那么逐项域传播不一定能得到最佳结果，因为会受到区间算术中所谓的依赖性问题的影响。例如，对于 x 的给定界，计算 x^2+x 的范围很容易；或者对于 x^2+x 的给定区间，计算 x 的界也很容易，但标准区间算术会将 x^2 和 x 分别处理，这可能导致高估结果。

因此，SCIP 中的专用非线性处理器为二次表达式提供了域传播过程，旨在减少高估。为此，非线性处理器的检测程序将二次表达式写为

$$q(y)=\sum_{i=1}^{k} q_i(y) \quad \text{with} \quad q_i(y)=a_i y_i^2+c_i y_i+\sum_{j\in P_i} b_{i,j} y_i y_j, \tag{2}$$

其中， y_i 或者是一个原始变量（x），或者是另一个表达式， a_i， $c_i\in\mathbb{R}$, $b_{i,\,j}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j\in P_i \Rightarrow i\notin P_j$ 对所有 $j\in P_i$, $P_i\subset\{1,\ldots,k\}$, $i=1,\ldots..k$ 均成立。对于至少包含两项的函数 q_i（ a_i、 $b_{i,\,j}$、 $j\in P_i$ 和 c_i 中至少有两个非零），通过将每个 y_j 替换为 $[y_j,y_j]$、 $j\in P_i$ 可以得到一个松弛。对于关于 y_i 的这个一元二次区间项，可以计算出紧界 [24]。

此外，通过考虑以下因素计算变量 y_j, $j\in P_i$ 的界

$$\sum_{j\in P_i} b_{i,j} y_j \in ([\underline{q},\overline{q}]-\sum_{i'\neq i} q_{i'}(y))/y_i - a_i y_i - c_i, \qquad y_i\in[\underline{y}_i,\overline{y}_i], \tag{3}$$

其中， $[\underline{q},\overline{q}]$ 是给定的 q界（y）。将每个 $q_{i'}$ 松弛为一个区间后，计算式（3）右端的界，再据此计算每个 y_j和 $j\in P_i$的界。

2.3.2 双线性项

对于乘积 y_1y_2，其中 y_1 和 y_2 要么是非二元变量，要么是其他表达式，乘积表达式处理器已经提供了线性下估计器和上估计器，以及域传播；仅考虑界 $[y_1, y_1] \times [y_2, y_2]$ 时，这些处理已达到最佳效果。然而，如果和中存在可用的线性不等式，则可能计算出更紧的线性估计和变量界。在 SCIP 中，这是通过专用非线性处理器实现的，该处理器采用 Locatelli 的算法 [45]。这些不等式是通过将线性规划松弛投影到变量（y_1，y_2）上得到的。更多详情请参见 [54]。另一种利用线性约束收紧二次约束松弛的方法，是下文所述的 RLT 割。

2.3.3 RLT 割

重构线性化技术（RLT） [2, 3] 已被证明对于收紧多项式规划问题的松弛非常有用。在 SCIP 中，提供了一种分离器，用于生成通过 RLT 对（MINLP$_{\text{ext}}$）中的双线性乘积关系计算得到的割。

为简便起见，用 X_{ij} 表示与（MINLP$_{\text{ext}}$）的约束 $x_ix_j \lesseqgtr X_{ij}$ 相关联的辅助变量（X_{ji} 表示与 X_{ij}相同的变量）。请注意，可以将 $\lesseqgtr$ 替换为 $=$。给定 $X_{ij} = x_ix_j$，其中 $x_i \in [x_i, x_i]$、 $x_j \in [x_j, x_j]$，以及一个线性约束 $a^\top x \leq b$，RLT 割的推导方法是：先将该约束乘以非负界限因子（$x_i - x_i$）、（$x_i - x_i$）、（$x_j - x_j$）或（$x_j - x_j$）。例如，考虑乘以因子（$x_i - x_i$），由此得到一个有效的非线性不等式：

$$a^\top x\,(x_i - x_i) \leq b\,(x_i - x_i). \tag{4}$$

这称为重新表述步骤。

随后对（4）中的所有项 x_kx_i 执行线性化步骤。如果存在乘积关系 $X_{ki} = x_kx_i$，则用 X_{ki}替换该乘积。如果 x_k 和 x_i 属于同一个团，则用等价的线性表达式替换该乘积。否则，用线性下估计函数或上估计函数（例如（1））替换。

此外，RLT分离器可以发现二元变量与连续变量之间的线性化乘积。为此，它会检查由同一组三个变量（其中一个为二元变量，另两个为连续变量）定义的线性不等式对是否蕴含乘积关系。随后，这些隐式乘积可用于RLT切平面生成的线性化步骤 [16]。

2.3.4 SDP切平面

与上一节一样，用 X_{ij} 表示与（MINLP$_{\text{ext}}$）的约束 $x_ix_j \lesseqgtr X_{ij}$ 相关联的辅助变量。对条件$X = xx^\top$ 的一种常见凸松弛，是要求 $X - xx^\top$ 为半正定。可以对集合 $\{(x,\ X)$ 本身进行分离，但生成的割通常较稠密，而且可能包含问题中不存在的乘积变量 X_{ij}。因此，仅考虑 $X - xx^\top$的主 2×2 子式，这些子式也必须为半正定。根据舒尔补，这意味着条件

$$A_{ij}(x, X) := \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_j \\ x_i & X_{ii} & X_{ij} \\ x_j & X_{ij} & X_{jj} \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{5}$$

对于任意 $i,\ j, i \neq j$都必须成立。SCIP 中的分离器会检测满足以下条件的子式：在 (MINLP$_{\text{ext}}$) 中存在 X_{ii}, X_{jj}, X_{ij}，并施加 $A_{ij}(x,\ X) \succeq 0$。为此，对于违反 (5) 的解 $(\hat{x},\ \hat{X})$，计算 $A_{ij}(\hat{x},\ \hat{X})$ 的一个特征向量 $v \in \mathbb{R}^3$，其中 $v^\top A_{ij}(\hat{x},\ \hat{X})v < 0$，并加入全局有效线性不等式 $v^\top A_{ij}(x,\ X)v \geq 0$。

2.3.5 交集割

交集割 [70, 5] 已被证明是强化混合整数规划松弛的有效工具。最近，Mu˜noz 和 Serrano 展示了如何为二次规划 [55]计算尽可能紧的交集割。该方法已在 SCIP [21] 中实现。

假设（MINLP$_{\text{ext}}$）的一个非凸二次约束为 $q(y) \leq w$，其中 $q(y)$ 如（2）所示，并且 w 为辅助变量。对集合 S 执行交集割的分离：$= \{(y,\ w) \in \mathbb{R}^k :\ q(y) \leq w\}$，该集合由此约束定义。

设（$\hat{}y,\ \hat{}w$）是一个违反 $q(y) \leq w$ 的基本可行线性规划解。首先，构造一个凸不等式 $g(y,\ w) < 0$，该不等式被（$\hat{}y,\ \hat{}w$）满足，但集合 S 中没有任何点满足它。由此定义所谓的 S-自由集 $C = \{(y,\ w) \in \mathbb{R}^{k+1} :\ g(y,\ w) \leq 0\}$，即一个包含（$\hat{}y,\ \hat{}w$）于其内部的凸集，其中不含 S 内部的任何点。所得割的质量在很大程度上取决于所使用的 S-自由集，但使用极大 S-自由集可得到尽可能紧的交集割 [55]。

通过使用由非基变量在 $(\hat{}y,\ \hat{}w)$ 处定义的线性规划可行域的锥松弛 K，可以计算出 K 的极射线与 C 的边界之间的交点。随后，将经过这些交点的超平面定义为交集割，并成功分离 $(\hat{}x,\ \hat{}w)$ 与 S。图 2 展示了示意图。为获得更强的割，还实现了一种强化程序，利用了锥 K [36] 的负边延拓思想。

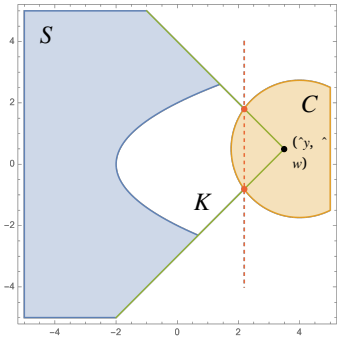


图 2：交集割（红色）将基本可行线性规划解 $(\hat{}y,\ \hat{}w)$ 与 S（蓝色）分离。该割根据一个 S-自由集合 C（橙色）与单纯锥 $K \supseteq S$ 的射线（边界为绿色）的交点计算得出，该单纯锥的顶点为 $(\hat{}y,\ \hat{}w) \notin S$。

除了对由约束$q(y) \leq w$给出的集合 S 进行交集割分离外，SCIP 还可以为隐含的二次方程生成交集割。回顾一下第 2.3.3 节中引入的辅助变量矩阵 X。条件 $X = xx^\top$ 意味着 X 的秩必须为1。因此，X 的任意 2×2 子式$\begin{pmatrix} X_{i_1j_1} & X_{i_1j_2} \\ X_{i_2j_1} & X_{i_2j_2} \end{pmatrix}$的行列式都必须为零。也就是说，对于任意一组变量索引 i_1、i_2、j_1、j_2，若满足 $i_1 \neq i_2$ 和 $j_1 \neq j_2$，则条件 $X_{i_1j_1}X_{i_2j_2} = X_{i_1j_2}X_{i_2j_1}$ 必须成立。如果该条件中的所有变量都存在于 (MINLP$_{\text{ext}}$) 中，且某个解违反了该条件，则对由该条件定义的集合应用前述生成交集割的过程。

由于交集割可能相当稠密，目前尚不清楚何时生成此类割才有利。因此，默认情况下目前禁用其分离。更多详情请参阅 [21]。

2.3.6 边凹切割

获取二次约束线性外逼近的另一种方法是利用二次函数的边凹分解。事实证明，这种方法对随机生成的二次实例 [51, 52] 尤其有用。如果函数在变量定义域（例如 $[x, x]$）上是逐分量凹的，则称该函数在此定义域上边凹。

给定一个二次函数，边凹切割的分离器会求解一个辅助混合整数规划，将平方项和双线性项划分为边凹函数之和以及一个剩余函数。由于边凹函数的凸包络是顶点多面体 [67]，，也就是说，它是一个多面体函数，其顶点与变量界盒的顶点相对应，因此可以通过求解辅助线性规划来计算每个边凹函数的凸包络上的面（另见第 2.4.1 节）。对于剩余项构成的函数，则将诸如式（1）中的逐项线性下估计函数相加。

由于 SCIP 中边凹切割的当前实现对于一般混合整数非线性规划并未显示出特别的实用性，因此暂时禁用此分离器。

2.3.7 二阶锥

混合整数非线性规划与锥规划之间的一个重要联系，是检测可表示为二阶锥（SOC）约束的约束，因为后者定义了一个凸集，而原始约束可能使用的是非凸约束函数。

专用非线性处理器旨在检测二阶锥可表示结构。在检测阶段，将扩展形式（混合整数非线性规划$_{\text{ext}}$）中的约束 $h_i(x) \leq w_i$ （$\geq$ 的情况以类似方式处理）传递给非线性处理器。对于该约束，将检查它是否定义了欧几里得范数的界 $(\sqrt{\sum_{j=1}^{k}(a_j y_j^2 + b_j y_j)} + c \leq w_i$，其中系数为 a_j、b_j、$c \in \mathbb{R}$、$a_j > 0$，且 y_j либо 是原始变量，或者是 $h_i(\cdot)$ 的某个子表达式），或者它是否是一个可表示为二阶锥的二次约束 [46]。由于引入松弛变量 w_i、$i \leq m$ 可能会阻碍此类检测，因此改为考虑等价约束 $h_i(x) \leq \bar{w}_i$。

检测到的二阶锥约束以如下形式存储

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{k}(v_j^\top y + \beta_j)^2} \leq v_{k+1}^\top y + \beta_{k+1} \tag{6}$$

其中 $v_j \in \mathbb{R}^\ell$、$j = 1$、.....、$k+1$，且 y_1、.....、y_ℓ 是（混合整数非线性规划$_{\text{ext}}$）中的变量。由于（6）的左侧是凸的，因此可以通过对（6）左侧进行线性化，将违反（6）的解 $\hat{}y$ 分离出来。

然而，如果 (6) 左侧有很多项（k 很大），那么可能需要很多割才能为 (6) 提供紧的线性松弛。因此，当 $k \geq 3$ 时，使用锥 [72] 的分解：

$$(v_j^\top y + \beta_j)^2 \leq z_j(v_{k+1}^\top y + \beta_{k+1}), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{k} z_j \leq v_{k+1}^\top y + \beta_{k+1}, \tag{8}$$

其中，变量 z_1、.....、z_k 是新变量。若解 ($\hat{}y$、$\hat{}z$) 违反 (6)，则也必定会违反某个 $j \in \{1, \ldots, k\}$ 对应的 (7) 或 (8)。后者已经是线性的，可以作为割加入。如果某个 j 对应的旋转二阶锥约束 (7) 被违反，则将其转换为标准形式

$$\sqrt{4(v_j^\top y + \beta_j)^2 + (v_{k+1}^\top y + \beta_{k+1} - z_j)^2} \leq v_{k+1}^\top y + \beta_{k+1} + z_j$$

并通过对左侧进行线性化来构造梯度割。

2.4 凸性

2.4.1 凸约束与凹约束

对于 $x\exp(x)$ 或 $x^2+2xy+y^2$ 这类函数的线性低估，不建议构造扩展形式（xw, $\exp(x) = w$; $w_1+2w_2+w_3$, $w_1 = x^2$, $w_2 = xy$,$w_3 = y^2$）。相反，如果能够识别出凸性，则可以使用支撑凸函数上图集的超平面。在 SCIP 中，提供了专用非线性处理器，用于检测（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）中函数 $h_i(x)$里需要用辅助变量替换的子表达式 w_{i+1}，……，$w_{\hat{m}}$，从而使剩余表达式$h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$ 成为凸或凹函数。该检测采用了常用的函数复合凸性/凹性判定规则（例如，f 凸且单调递减，g 凹 $\Rightarrow f\circ g$ 凸），但以逆向顺序应用这些规则。也就是说，该算法并非根据函数自变量的凸性/凹性和单调性信息来判断函数是否为凸/凹，而是在给定函数自身的凸性/凹性要求时，对函数自变量的凸性/凹性提出条件。当某个自变量的条件无法满足时，就用辅助变量替换该自变量。

除了由表达式处理器实现的“短视”凸性/凹性规则外，还提供了适用于乘积复合（$af(bg(x)+c)g(x)$，其中包含常数a,b,c以及重复子表达式 $g(x)$）、符号多项式（$c\prod_{j=1}^{k} f_j^{p_j}(x)$，其中包含 $c,p_j\in\mathbb{R}$和子表达式 $f_j(x)$、$j=1,\ldots,k$）以及二次型的规则。对于二次型，可以通过计算海森矩阵的特征值来检查其定性。此外，研究表明，对于凸函数的复合 $f\circ g$，考虑扩展形式 $f(w)$、$w\geq g(x)$，而非复合 $f(g(x))$ [68]，可能有利于线性松弛。通过对检测算法稍作修改即可实现这一点。

当混合整数非线性规划（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）的凸约束 $h_i(x,w_{i+1},\ldots,w_{\hat{m}})\leq w_i$ 在点 $(\hat{x},\hat{w})$ 处被违反时，会使用 h_i 在 $(\hat{x},\hat{w})$ 处图像上的切线来计算分离超平面。该切线的斜率由 h_i 在 $(\hat{x},\hat{w})$ 处的梯度给出，这个梯度通过对表达式图进行自动微分计算得出。然而，如果 h_i 是单变量的，也就是说，对于某个变量 y，$h_i(x,w_{i+1},\ldots,w\hat{}_m) = f(y)$，且 y为整数，那么取经过点 $(\lfloor\hat{y}\rfloor, f(\lfloor\hat{y}\rfloor))$ 和 $(\lfloor\hat{y}\rfloor+1, f(\lfloor\hat{y}\rfloor+1))$ 的超平面，可以得到更紧的下估计函数。

对于凹函数 $h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$，任何在盒 $[x,x]\times[w_{i+1},w_{i+1}]\times\cdots\times[\underline{w}_{\hat{m}},\overline{w}_{\hat{m}}]$ 的所有顶点处都低估 $h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$ 的超平面 $\alpha x+\beta w+\gamma$ 是一个有效线性低估函数，因为 h_i 相对于该盒是顶点多面体。最大化 $\alpha\hat{x}+\beta\hat{w}+\gamma$，使其对所有顶点都不超过 $h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w\hat{}_m)$，可得到在给定参考点 $(\hat{x},\ \hat{w})$ 处尽可能紧的下估计函数。对于常见的情况 $k=1$ 和 $k=2$，已有可直接计算此类下估计函数的例程。对于 $k>2$，则通过求解线性规划来完成。由于该线性规划的规模随 k呈指数增长，目前不会为含有 14 个以上变量的凹函数计算下估计函数。

2.4.2 更紧梯度割

如上一节所述，为（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）的凸函数生成的分离超平面通常并非（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）可行域的支撑超平面，因为函数线性化所在的点并不位于可行域边界上（这正是需要对其进行分离的原因）。因此，通常需要进行多轮割生成和线性规划求解，直到松弛解满足凸约束。凸混合整数非线性规划求解器通过多种方式处理这一问题 [25, 42], ，但基本思路是在可行域上一个合适的边界点处构造梯度割。

SCIP 中包含三种用于为凸松弛构造更紧或更深梯度割的方法。前两种方法会计算一个点，该点位于由（MINLP）的所有凸约束定义的集合边界上，且靠近待分离点。第一种方法通过求解一个额外的非线性规划，将待分离点投影到凸集上。由于对每个待分离点都求解一个非线性规划可能代价很高，第二种方法则沿用 Veinott [71]，提出的思路，在凸集的一个内点与待分离点之间进行二分搜索。搜索开始时，通过求解一个辅助非线性规划来计算该内点。更多详情请参见 [47]。

第三种方法的目标并非分离给定点，而是利用 SCIP 原始启发式找到的可行点。找到新解时，会在该解处为（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）的凸约束生成梯度割，并将其加入割池。如果之后发现此类割能够分离松弛解，就会将其加入线性规划。

目前所有方法均已禁用，因为要使其普遍高效，还需要进一步调整。

2.5 商

请注意，可用的表达式处理器（参见第 2.1.1 节）不包含处理商的处理器，因为商可以等价地写成乘积和幂表达式。因此，表达式 $y_1 y_2^{-1}$ 的默认扩展形式是将 y_2^{-1} 替换为一个新的辅助变量 w。然后，分别估计 $y_1 w$ 和 y_2^{-1}，以此得到线性外逼近。不过，通常可以得到更紧的线性估计。因此，专用非线性处理器会检查给定函数 $h_i(x)$ 是否可以表示为

$$f(y) = \frac{a y_1 + b}{c y_2 + d} + e \tag{9}$$

其中 a、b、c、d、$e \in \mathbb{R}$、a、$c \neq 0$ 和 y_1 与 y_2，它们均为原始变量或 $h_i(x)$ 的子表达式。

通过区分若干种情形，可以计算出式 (9) 的紧线性估计函数。例如，对于 $a y_1 + b \geq 0$ 和 $c y_2 + d > 0$ （如果 $c > 0$），通过在 f 的凸下估计函数图像上计算切线，可得到一个线性下估计函数；该凸下估计函数由 [78] 给出。通过在 f 的凹包络上计算一个面，可得到一个线性上估计函数；由于 $-f$ 是顶点多面体，这一计算很容易。此外，在单变量情形（$y_1 = y_2$）下，如果 $-d/c \notin [y_2, y_2]$，则 f 在 $[y_1, y_1]$ 上要么是凸的，要么是凹的。

由于在单变量情形下同一个变量会出现两次，因此还可以使用一种专门的域传播方法，以避免区间算术中的依赖性问题。

2.6 透视强化

透视重构已证明能够有效收紧具有开关结构的凸混合整数非线性规划的松弛，这类结构通常通过大M约束或半连续变量来建模 [29]。变量 x_j 相对于二元指示变量 $x_{j'}$，$j' \in \mathcal{I}$是半连续的，当且仅当它在 $x_{j'} = 1$时受限于定义域$[x_j^1, x_j^1]$，并在 $x_{j'} = 0$时具有固定值 x_j^0。

在 SCIP 中，可对依赖半连续变量的函数的下估计器和上估计器进行强化。考虑一个约束 $h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}}) \lessgtr w_i$（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$），并将其写成非线性部分与线性部分之和：

$$h_i(x, w_{i+1}, \ldots, w_{\hat{m}}) = h_i^{\text{nl}}(x_{\text{nl}}, w_{\text{nl}}) + h_i^{\text{l}}(x_{\text{l}}, w_{\text{l}}),$$

其中， h_i^{nl}是非线性函数， h_i^{l} 是线性函数， x_{nl} 和 w_{nl} 分别是仅出现在 h_i的非线性部分中的变量向量 x 和 w，而 x_{l} 和w_{l} 分别是仅出现在 h_i的线性部分中的变量向量 x 和 w。如果 x_{nl} 和 w_{nl} 相对于同一个指示变量 $x_{j'}$是半连续的，则尝试强化 $h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$的下估计器或上估计器。

为判断变量 x_j 是否为半连续变量，需要分析通过固定二元变量所隐含的关于 x_j 的界。隐含界可以直接从线性约束中获得，也可以通过探测获得，并由 SCIP 存储在全局可用的数据结构中。如果发现关于 x_j 的一对隐含界对应同一个二元变量 $x_{j'}$，即

$$x_j \le \alpha^{(u)} x_{j'} + \beta^{(u)},$$
$$x_j \ge \alpha^{(\ell)} x_{j'} + \beta^{(\ell)},$$

且 $\beta^{(u)} = \beta^{(\ell)}$，那么 x_j 就是一个半连续变量，其 $x_j^0 = \beta^{(u)}$、 $x_j^1 = \underline{\alpha}^{(\ell)} + \beta^{(\ell)}$和 $x_j^1 = \alpha^{(u)} + \beta^{(u)}$如此。此外，如果辅助变量 w_i 的函数 $h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$仅依赖于具有相同指示变量的半连续变量，则该辅助变量也被判定为半连续变量。

假设已计算出 $h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$的线性下估计函数 $\ell(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$，并将其分别拆分为对应于 h_i的非线性变量和线性变量的部分：

$$\ell(x, w_{i+1}, \ldots, w_{\hat{m}}) = \ell^{\mathrm{nl}}(x_{\mathrm{nl}}, w_{\mathrm{nl}}) + \ell^{\mathrm{l}}(x_{\mathrm{l}}, w_{\mathrm{l}}).$$

透视强化是将下估计函数中对应于非线性部分的部分进行扩展，使其在 $x_{j'} = 0$处紧确：

$$\ell^{\mathrm{nl}}(x_{\mathrm{nl}}, w_{\mathrm{nl}}) + \left(h_i^{\mathrm{nl}}(x_{\mathrm{nl}}^0, w_{\mathrm{nl}}^0) - \ell^{\mathrm{nl}}(x_{\mathrm{nl}}^0, w_{\mathrm{nl}}^0)\right)(1 - x_{j'}) + \ell^{\mathrm{l}}(x_{\mathrm{l}}, w_{\mathrm{l}}).$$

线性部分保持不变，因为它与非线性部分不共享任何变量。此扩展可确保对于 $x_{j'} = 0$、 $x_{\mathrm{nl}} = x_{\mathrm{nl}}^0$和 $w_{\mathrm{nl}} = w_{\mathrm{nl}}^0$，估计函数等于 $h_i(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$；对于 $x_{j'} = 1$，则等于 $\ell(x,\ w_{i+1},\ \ldots\ldots,\ w_{\hat{m}})$。如果 h_i是凸的，通过这种方式得到的割等价于经典的透视割 [29]。有关在 SCIP 中实现的更多详情，请参见 [15]。图3给出了一个示例。

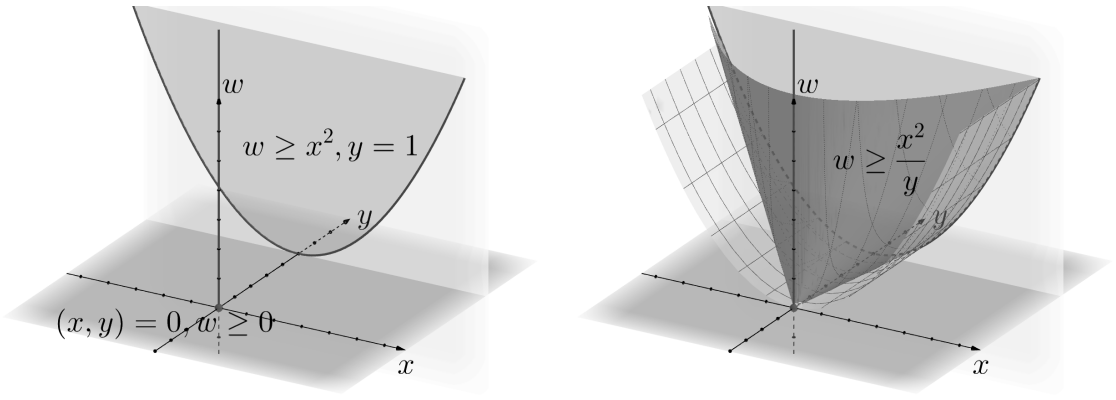


图3：原始集合 $\{(x,\ y,\ w) :\ x^2 \le w,\ y \in \{0, 1\},\ y = 0 \to x = 0\}$（左）以及由 $\{(x,\ y,\ w) :\ x^2 \le wy,\ y \in [0, 1],\ w \ge 0\}$ 给出的连续松弛（右）。根据原始集合，将生成形如 $\hat{x}^2 + 2\hat{x}(x - \hat{x}) \le w$ 的割，其中参考点为 $\hat{x}$。采用透视强化后，则可在右侧集合上得到线性化，即 $\hat{x}^2 + 2\hat{x}(x - \hat{x}) + \hat{x}^2(1 - y) \le w$。后者通常效果更好，因为它在 $y = 0$ 处也紧确。

2.7 基于优化的界收紧

基于优化的界收紧（OBBT）是一种域传播技术，它在问题的可行集或其某种松弛上对每个变量分别求最小值和最大值 [59]。FBBT（见第 2.1.2 节）对非线性部分逐一进行传播，而 OBBT 则同时考虑所有约束（或其松弛），因此可能计算出更紧的界。不过，与 FBBT 相比，这种方法的计算成本相当高。

在 SCIP 中，OBBT 会为每个可能进行空间分支的变量 x_k 求解两个辅助线性规划：

$$\min / \max\{x_k : D^x x + D^w w \leq d, c^\top x \leq U, x \in [\underline{x}, \overline{x}], w \in [\underline{w}, \overline{w}]\} \tag{10}$$

其中，$D^x x + D^w w \leq d$、$D^x \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$、$D^w \in \mathbb{R}^{\ell \times \hat{m}}$、$d \in \mathbb{R}^\ell$ 是（$\text{MINLP}_{\text{ext}}$）可行域的线性松弛，而 $c^\top x \leq U$ 是一个目标截止约束，用于排除目标函数值劣于当前当前最优解的解。随后，可以使用（10）的最优值来收紧变量 x_k的下界/上界。如果分离例程使用分支定界树中某个节点处变量的界，则该变量可进行空间分支。

默认情况下，SCIP 会在根节点应用 OBBT，以全局收紧界。它通过限制求解辅助线性规划所耗用的线性规划迭代次数，并在两次线性规划求解之间中断，以便调用成本更低的域传播技术，从而限制计算开销。

此外，SCIP 不仅利用 (10) 的最优目标函数值来收紧 x_k 的界，还会在分支定界搜索期间，利用在根节点求解 (10) 得到的对偶解，应用一种计算开销较低的 OBBT 近似方法。假设最大化线性规划已求解且可行，其对偶乘子为λ_1，……，λ_ℓ, $\mu \geq 0$，分别对应 $D^x x + D^w w \leq d$, $c^\top x \leq U$，并得到相应的约化成本向量 r^x 和 r^w。那么

$$x_k \leq \sum_j r_j^x x_j + \sum_j r_j^w w_j + \lambda^\top d + \mu U \tag{11}$$

是一个有效不等式，称为拉格朗日变量界 (LVB)，而

$$\sum_{j: r_j^x < 0} r_j^x \underline{x}_j + \sum_{j: r_j^x > 0} r_j^x \overline{x}_j + \sum_{j: r_j^w < 0} r_j^w \underline{w}_j + \sum_{j: r_j^w > 0} r_j^w \overline{w}_j + \lambda^\top d + \mu U \tag{12}$$

是 x_k 的一个有效上界；当对偶乘子为最优时，该上界等于基于优化的界收紧所得到的界。SCIP 会在根节点学习 LVB，并在树搜索期间，当 (11) 右端变量的界变得更紧或找到改进的原始解时传播这些界。更多详情请参阅 [33]。

除了针对线性规划松弛执行基于优化的界收紧（OBBT）外，还提供了一种变体：在由（混合整数非线性规划）中的所有线性约束和凸非线性约束构成、可能更紧的凸非线性规划松弛上优化单个变量。对于这一变体，也可以通过考虑约束的凸性和 KKT 条件，构造类似于（11）的线性拉格朗日变量界。由于求解大量非线性规划的计算成本可能很高，因此默认禁用此 OBBT 变体。更多详情请参阅 [47]。

2.8 原始启发式

原始启发式的目的是在搜索早期找到高质量的可行解。对于一个混合整数非线性规划，SCIP 默认会启用多达 40 种原始启发式。其中许多旨在为线性规划松弛寻找整数可行解。下文将讨论仅在存在非线性约束时才会启用的原始启发式。

2.8.1 subNLP

几乎所有全局 MINLP 求解器都实现了类似 subNLP 的原始启发式。给定一个满足整数性要求（$\tilde{x}_{\mathcal{I}} \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{I}|}$）的点 $\tilde{x}$，该启发式首先将（MINLP）中的所有整数变量固定为 $\tilde{x}$ 给出的值。然后，它会调用 SCIP 预处理器，对该子问题进行可能的简化。最后，它会以 $\tilde{x}$ 作为起始点，求解剩余的非线性规划。如果非线性规划求解器（如 Ipopt）找到一个满足非线性规划松弛约束的解（且往往还是局部最优解），那么就找到了（MINLP）的一个可行点。

起始点 $\tilde{x}$ 可以是线性规划松弛的当前解（如果满足整数可行性），也可以是通过搜索线性规划松弛的整数可行解的原始启发式找到的点，或由其他用于混合整数非线性规划的原始启发式传递的点，例如下一节提到的那些启发式。

启发式应以多高的频率运行，以及在求解非线性规划时投入多少计算量，是一个需要慎重考虑的问题。在当前实现中，启发式首次运行时，非线性规划求解器的迭代次数上限采用一个固定值。后续调用时，上限设为此前各次运行所需平均迭代次数的两倍。不过，如果此前许多次运行都达到了迭代次数上限，则会提高该上限。是否在分支定界树的某个节点运行该启发式，取决于自上次运行以来已处理的节点数、将要采用的迭代次数上限，以及该启发式在此前调用中找到可行点的成效。

2.8.2 多起点

如果固定所有整数变量后，（混合整数非线性规划）仍是非凸的，那么子非线性规划启发式所求解的非线性规划可能存在多个局部最优解。此时，非线性规划求解器的效果很大程度上取决于初始点。因此，多起点启发式旨在计算多个初始点，并将其传递给子非线性规划启发式。

该算法最初由 [66]，开发，旨在通过从 $[x, x]$ 中采样点，并使用计算开销较低的梯度下降法将这些点推向可行集，来近似非线性规划松弛的可行集边界。之后，将彼此距离较近的点归为一簇。理想情况下，每个簇都近似于可行集某个连通分量的边界。对于每个簇，将这些点的一个线性组合传递给 subNLP，作为初始点。对于整数变量 x_i、$i \in \mathcal{I}$，初始点中的值会被舍入为整数。

为降低点 $\hat{x}$ 的不可行程度，采用约束共识方法 [66]。该算法为（混合整数非线性规划）中每个违反约束的约束计算一个下降方向。例如，如果 $g_i(\hat{x}) > g_i$ 对某个 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 成立，则下降方向为 $-\frac{g_i(\hat{x})}{\|\nabla g_i(\hat{x})\|^2} \nabla g_i(\hat{x})$。随后，将所有违反的线性约束和非线性约束的下降方向取平均，并将其加到点 $\hat{x}$ 上，以更新该点。重复此步骤，直到 $\hat{x}$ 变为可行，或满足停止准则。

目前，多起点启发式默认仅适用于连续问题（$\mathcal{I} = \emptyset$），因为对整数变量进行舍入并固定，很可能会导致非线性规划子问题不可行。详情请参见 [47]。

2.8.3 非线性规划潜水启发式

作为一种为（混合整数非线性规划）中的所有整数变量寻找合适固定值的替代方法，非线性规划潜水启发式首先使用非线性规划求解器，在当前分支定界节点上求解非线性规划松弛。随后，它迭代地固定取值为小数的整数变量，并重新求解线性规划松弛和非线性规划松弛，从而模拟分支定界树中的深度优先搜索。默认情况下，对于其线性规划松弛解和非线性规划松弛解到某个共同整数值的距离之和最小的变量，会将其取值舍入到最近的整数值。

此外，二元变量和非线性变量具有优先权。如果所得的非线性规划被判定为（局部）不可行，则会进行一级回溯，即撤销最近一次固定，并尝试相反的固定。如果这样仍然不可行，该启发式便会中止。

2.8.4 数学规划互补约束

非线性规划潜水启发式要么完全忽略整数性约束，要么在非线性规划松弛中强制执行这些约束；而数学规划互补约束启发式则在非线性规划中加入整数性约束的松弛，并迭代收紧该松弛。目前，该启发式仅适用于混合二元非线性规划。

该启发式的基本思想最初由 [61], 提出，其做法是将混合整数非线性规划重新表述为带均衡约束的数学规划（数学规划互补约束），并求解该数学规划互补约束问题以获得局部最优解。通过将条件 $x_i \in \{0,1\}, i \in \mathcal{I}$ 改写为互补约束 $x_i \perp 1 - x_i$，即可从混合整数非线性规划得到该数学规划互补约束问题。随后，将这一重新表述通过写成 $x_i(1 - x_i) = 0$ 的形式，再次改写为非线性规划。然而，由于这些重新表述后的互补约束通常不满足约束资格条件，使用通用非线性规划求解器求解这一非线性规划重新表述往往会失败。

因此，为了提高求解 NLP 重新表述的成功率，该启发式通过将 $x_i(1 - x_i) = 0$ 放宽为$x_i(1 - x_i) \leq \theta$，针对不同且逐渐减小的 $\theta > 0$ 求解 NLP 的正则化版本。这样，一个 NLP 的解便可用作下一次求解的起始点。如果 NLP 的解接近满足$x_{\mathcal{I}} \in \{0,1\}^{|\mathcal{I}|}$，则将其作为起始点传递给子NLP启发式。如果某个 NLP（局部）不可行，该启发式还会额外尝试两次，将已接近 0 或 1 的二元变量的值分别翻转为 1 或 0。更多详情请参见 [34]。

2.8.5 Undercover

之前的启发式主要侧重于在 NLP 中强制满足整数性条件，而启发式 Undercover [10] 则采用了截然不同的思路。该启发式基于这样一种观察：有时只需固定（混合整数非线性规划）中的相对少量变量，就能得到一个所有约束均为线性的子问题。例如，对于双线性项，只需固定其中一个变量。要固定的变量通过求解一个集合覆盖问题来选定，目标是尽量减少需要固定的变量数量。固定变量的取值取自线性规划或非线性规划松弛的解，或者混合整数非线性规划的已知可行解。

由此得到的子 MIP 求解起来更简单，而且无需证明其最优性。子 MIP 的解可直接用于（混合整数非线性规划）。不过，最优解也会作为初始点传递给子非线性规划启发式，以尝试进一步改进。更多详情请参阅 [10]。

3 基准测试

以下内容旨在公平比较 SCIP 与其他几款用于一般混合整数非线性规划的先进求解器。要做到这一点绝非易事。首先，需要选出一组适合作为基准测试集的实例。其次，必须设置求解器参数，使所有求解器在相同的工作限制以及相同的可行性和最优性要求下求解相同的实例——这一目标未能完全实现。第三，必须检查求解器结果的正确性；若无法做到，则需检查其合理性。

实验使用 GAMS，因为它提供了多种便于进行求解器比较的功能，并且附带当前版本的 SCIP 和商业求解器 BARON [40], Lindo API [44], 以及 Octeract。由于 ANTIGONE 的开发似乎已在数年前停止，因此未将其纳入比较。

所有计算均在一台 Linux 集群上运行，该集群配备 Intel Xeon E5-2670 v2 中央处理器（20 个处理器核心）。使用的 GAMS 版本为 41.2.0，其中包含 SCIP 8.0.2、BARON 22.9.30、Lindo API 14.0.5099.162 和 Octeract 4.5.1。使用了启用所有求解器的 GAMS 许可证，因此 SCIP 使用 CPLEX 22.1.0.0 作为线性规划求解器，并使用 Ipopt 与 HSL MA27 作为非线性规划求解器；BARON 可在其接口支持的所有线性规划/混合整数规划/非线性规划求解器中进行选择；Octeract 则使用 CPLEX 22.1.0.0 作为线性规划/混合整数规划/二次规划/二次约束规划求解器。

3.1 测试集

为构建适用于基准测试的测试集，我们以 MINLPLib [50] 中收录的 1595 个混合整数非线性规划实例为来源。首先，排除了某些所考虑的求解器无法处理的所有实例，例如包含三角函数的实例，因为 BARON 不支持这类函数。随后，使用下文所述的参数设置，在剩余的 1505 个实例上以串行模式（即禁用并行化功能）运行所有求解器。根据运行结果，我们选出 200 个实例：这些实例至少能由一个求解器求解，难度并非全都过于简单，整数性和非线性的程度各不相同，并且尽量避免纳入许多名称相似的实例。这样做是为了避免过度代表那些有大量实例被加入 MINLPLib 的优化问题。

由于对实例进行微小改动就可能导致求解器性能出现较大波动，因此，通过为每个实例考虑另外四种变体来提高基准测试的可靠性。在这些变体中，变量和方程的顺序经过了排列。排列后的实例由 GAMS/Convert 生成。因此，最终得到一个包含 1000 个实例的测试集。

选择排列前的 200 个实例时采用了以下方法：令 I 为包含 1505 个实例的集合，d_i 为实例$i \in I$中整数变量所占的比例，e_i 为雅可比矩阵和目标函数梯度中对应于非线性项的非零元所占的比例。接下来，为每个实例分配一个标识符 $f_i \in F$，使得看起来来自同一模型的实例获得相同的标识符。具体做法是将 i 映射为实例名称，截取至第一个数字、下划线或连字符之前；但块布局设计实例 fo*、m*、no*、o* 除外，这些实例都被分配了同一个标识符。通过这种方式找到了 $|F| = 230$ 个不同的标识符。

此外，设 $\bar{t_i}$ 为未在实例 i 上产生错误结果的求解器在实例 i上花费的最长时间（秒）。最后，设 S 为至少能由一个求解器求解的实例数量。

为确保包含整数变量数量和非线性程度各异的实例，将区间 $[0, 1]$ 先在 0.05, $0.25, 0.5, 0.9$ 处划分一次，再在 $0.1, 0.25, 0.5$ 处划分一次。设 D和 E为由此得到的 $[0, 1]$划分。对于来自 D 和 E的每个区间，目标是使分别落入相应区间的、具有 d_i 和e_i 的实例数量大致相同。选择用于定义 D 和 E的断点时，已考虑 d_i 和 e_i、$i \in I$ 的分布。例如，MINLPLib 包含许多纯连续和纯离散实例，但几乎没有以线性为主或完全非线性的实例。

为避免纳入过多源自同一模型的实例，不建议在 F 中为每个标识符纳入超过两个实例。此外，还会排除看似简单的实例（即所有求解器都能在五秒内求解的实例），以及任何求解器都无法求解的实例。引入惩罚项后，以下

得到用于实例选择的优化问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{d\in D}\lambda_d^2+\sum_{e\in E}\lambda_e^2+10\sum_{f\in F}\lambda_f^2 & \\
\text{such that} \quad & \sum_{i\in I:d_i\in d} z_i=\left\lfloor\frac{N}{|D|}\right\rceil+\lambda_d & \forall d\in D,\\
& \sum_{i\in I:e_i\in e} z_i=\left\lfloor\frac{N}{|E|}\right\rceil+\lambda_e & \forall e\in E,\\
& \sum_{i\in I:f_i=f} z_i\le 2+\lambda_f & \forall f\in F,\\
& z_i=0 & \forall i\in I:\bar{t}_i\le 5,\\
& z_i=0 & \forall i\in I:i\notin S,\\
& z\in\{0,1\}^{|I|},\lambda\in\mathbb{Z}^{|D|+|E|+|F|} &
\end{aligned}
$$

针对 N 在 180 到 220 之间变化的情况求解了该问题。对于 $N=208$，由此选出了 200 个惩罚值可接受的实例，惩罚值为 106。所有选定实例的列表见附录 A。表 1 显示了$D\times E$中每个元素对应的实例数量。对于 F中的五个标识符，选取了三个实例而非两个，即$\lambda_f=1$，对应五个 $f\in F$。

$E\downarrow \mid D\rightarrow$	$[0,0.05)$	$[0.05,0.25)$	$[0.25,0.5)$	$[0.5,0.9)$	$[0.9,1]$	$[0,1]$
$[0,0.1)$	3	7	19	15	6	50
$[0.1,0.25)$	8	22	9	7	4	50
$[0.25,0.5)$	8	8	6	10	18	50
$[0.5,1]$	25	2	5	7	11	50
$[0,1]$	44	39	39	39	39	200

表 1：在 D 和 E的区间内，选取的“离散性” d_i 和“非线性” e_i 实例数量。

3.2 参数设置

3.2.1 缺失变量界

为了计算最小化问题最优值的下界，此处考虑的所有求解器都会构造给定问题的凸松弛。对于非凸约束，这通常依赖于计算有效凸下估计函数或凹上估计函数。由于这些估计函数通常取决于变量界（回顾 McCormick 下估计函数 (1)），非凸项中的变量缺少界或界过大，可能导致实例极难求解，甚至无法求解。

即使用户忘记指定某些变量界，求解器仍可能通过域传播推导出界。此外，一旦找到可行解 $\hat{x}$，还可以从不等式 $c^\top x\le c^\top\hat{x}$ 推导出更多界。然而，由于预处理后仍可能存在界缺失的情况，求解器便设计了不同的方法来应对这一障碍。

如果 SCIP 因缺少变量界而无法构造下估计函数或上估计函数，就会继续对无界变量进行分支。这样，分支定界树中最终会出现一个所有变量都有界的节点。对于仍包含无界变量域的节点，如果推导出的目标函数下界超过当前最优解的目标函数值，就可以将其剪枝

。但也可能无法进行剪枝，导致 SCIP 无法终止。不过，在 SCIP 中，分支后的变量界不会无限增长，而是默认受限于 $\pm 10^{20}$ 。也就是说，SCIP 不会搜索变量值超过此值的解。

此处考察的其他求解器会根据启发式判断添加变量界。如果 BARON 在预处理后仍未为非凸项中的变量设置界，就会根据所涉及的非线性类型，将界设为一个相应的值。通常，该值约为 $\pm 10^{10}$。BARON 还会在自然对数中打印警告，并且不再声称已求得问题的全局最优解，也就是说，它不会返回下界。Lindo API 会调整所有参与凸化的变量的界，使其位于 $[-10^{10}, 10^{10}]$ 之内。终止时，它会返回受限问题的下界。Octeract 采用类似的做法，为每个缺失的界设定 $\pm 10^{7}$ ，并在终止时返回受限问题的下界。

显然，只是将含有无界变量的实例直接交给采用默认设置的求解器，可能会导致每个求解器求解实际问题的不同子问题，而且通常也只会报告与所求解子问题相对应的下界。幸运的是，对于此处考察的每个求解器，都可以通过参数调整其对无界变量的处理方式。第一反应或许是让所有求解器都将缺失的界设为无穷大，但这并不可行，因为每个求解器都会将超过某个有限值的数视为“无穷大”（BARON： 10^{50}, Octeract： 10^{308}, SCIP： 10^{20}）。更改这个值要么不可行，要么并不可取。

因此，我们决定以 $\pm 10^{12}$ 作为缺失变量界的替代值。对于 BARON 和 SCIP，在将实例传递给求解器之前，GAMS 接口可以用 $\pm 10^{12}$替换任何缺失的界。因此，BARON 也会为这个受限问题返回一个下界。对于 Lindo API，可以更改求解器参数，使所有需要进行凸化的变量的界都限制在 $\pm 10^{12}$ 以内（而不是 $\pm 10^{10}$）。最后，对于 Octeract，也可以通过更改求解器参数，将所有缺失的界设为 $\pm 10^{12}$ （而不是 $\pm 10^{7}$）。请注意，这仍不能确保所有求解器求解的是同一个实例，因为 Lindo API 仍会将初始有限界调整至超出 10^{12} ，并且也可能不会为未参与凸化的变量设置任何界。

除了问题变量缺少界之外，函数中的奇异性（例如， $1/x$、$\log(x)$）也可能导致无法获得有限的下估计函数或上估计函数。遗憾的是，没有可用参数能确保所有求解器对此情况采用统一的处理方式。SCIP 会确保变量 x 在 x^p、 $p < 0$或 $\log(x)$ 中与零保持至少 10^{-9}的距离，并在终止时为这个修改后的问题返回一个下界。对于问题变量缺少界的情况，BARON 采用相同的方法为 x选择合适的界。因此，终止时不会返回下界。我们不了解 Lindo API 和 Octeract 所采用的方法。

3.2.2 解的质量

为确保所有求解器返回的解具有相同的质量，要求（混合整数非线性规划）的约束满足绝对容差 10^{-6}。这适用于线性方程、非线性方程、变量界和整数性。

此外，还为最优性证明设置了容差。为此，通常允许求解器在最优值的下界与上界之间的绝对间隙或相对间隙足够小时停止。由于测试集的多样性较高，且最优值的量级各不相同，因此最好只设置相对间隙限值，而不设置绝对间隙限值。遗憾的是，Octeract 不允许为这两个限值设置不同的值。作为折中，BARON、Lindo API 和 SCIP 的相对间隙限值设为 10^{-4}，绝对间隙限值设为 10^{-6}；Octeract 则将 10^{-6} 同时用作绝对间隙限值和相对间隙限值。下文将通过单独的对比分析使用更严格的最优性容差对 Octeract 的影响。

3.2.3 工作限制

工作限制方面，时间限制设为两小时，并将集群上的作业可使用的随机存取存储器限制为 50 GB。此外，还对求解器可使用的并行化程度（多线程或多进程）作了不同程度的限制。为简化表述，本文也将 Octeract 使用的并行单元称为“线程”，尽管它在求解过程中是通过多进程而非多线程实现并行化的。

3.2.4 总结

总结来说，使用了以下参数：

GAMS（适用于所有求解器）：optcr=1e-4，optca=1e-6，reslim=7200，workspace=50000，线程 $\in \{1, 4, 8, 16\}$

BARON： InfBnd=1e12，AbsConFeasTol=1e-6，AbsIntFeasTol=1e-6

Lindo API: GOP BNDLIM=1e12, 求解器 FEASTOL=1e-6

Octeract： 无穷大=1e12，整数性违反容差=1e-6

SCIP： gams/infbound=1e12, constraints/nonlinear/linearizeheursol=0（这会撤销 SCIP 算法设置中的一项更改，而该更改属于 GAMS/SCIP 接口的一部分）

3.3 正确性检查

GAMS/Examiner 2.0 工具用于评估求解器报告的解中约束、界和整数性的违反情况。Examiner 会为每个求解器生成一个文件，其中包含每个实例的求解时间、返回的下界和上界，以及解不可行性。

如果求解器异常终止、解不满足可行性容差，或者下界或上界与 MINLPLib 页面上指定的最优值界相矛盾，则该求解器对某个实例的运行会被标记为失败 。请注意，MINLPLib 页面上的原始界和对偶界是在未强制执行无界变量的 $\pm 10^{12}$ 限制的情况下计算的。不过，要使某个实例被纳入测试集，这里考虑的求解器中必须有一个成功求解该实例，并找到一个落在 MINLPLib 所给下界和上界范围内的最优值。因此，使用这些界进行检查是可以接受的。

未发生失败的运行会标记为已求解，前提是下界与上界之间的间隙满足相对或绝对限值。如果求解器在时间限制前停止，但未能消除间隙，则将求解器用时改为时间限制。唯一的例外是 BARON：由于函数存在奇异性（见第 3.2.1 节），它在两个实例上于时间限制前停止，且未报告下界。为与其他求解器的处理方式保持一致，这两个实例均按 BARON 已求解处理，并采用原始求解器用时。

3.4 结果

3.4.1 串行模式

在主要比较中，禁用了求解器的所有并行化功能，也就是说，运行 GAMS 时将选项 threads 设为 1。除了求解器本身的结果外，还报告了虚拟最佳和虚拟最差求解器的结果；这两者分别通过为每个实例选取用时最快或最慢的求解器得出。

表 2 展示了每个求解器成功求解的实例数、达到时间限制的次数，以及被标记为失败的运行次数。此外，还给出了求解器运行时间的平移几何平均数

。平移量设为 1 秒。此处，失败的实例按时间限制计入。图4中的性能剖面 [23] 展示了求解器在不超过最快求解器运行时间一定倍数的时间内求解的实例数。B.1节提供了详细结果。

	已求解	超时	fail	time
BARON	790	183	27	75.4
Lindo API	538	323	139	489.1
Octeract	671	279	50	184.1
SCIP	776	183	41	85.2
虚拟最差	368	405	227	1505.2
虚拟最佳	967	33	0	19.7

表 2：禁用并行化时，测试集 1000 个实例上所有求解器的汇总性能数据。

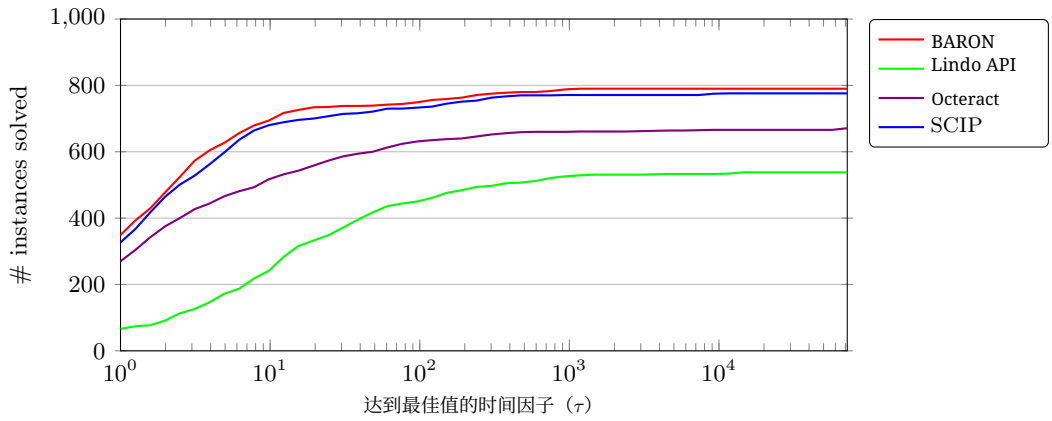


图4：比较禁用并行化时所有求解器的性能剖面。

结果显示，在求解实例数量和平均时间方面，BARON 略微领先于 SCIP。由于超时次数几乎相同，因此可以认为，BARON 稳定性更高，因而位居第一。事实上，SCIP 的 41 次失败中，有 16 次是由于返回了错误的最优值，23 次是由于返回了不可行解，还有两次是因数值问题而中止，涉及两个实例。对于 BARON，失败原因有 26 次是返回了错误的最优值，只有一次是返回了不可行解。尽管 SCIP 8.0 在确保非预求解问题中的非线性约束得到满足方面取得了长足进步，但少数实例仍会出现线性约束或变量界被违反的情况。这通常是由于变量在预处理过程中被聚合所致。

尽管 Octeract 和 Lindo API 求解的实例数量远少于 BARON 和 SCIP，平均用时也因此有所增加，但值得注意的是，两者分别在 270 个和 66 个实例上成为最快的求解器。此外，Octeract 对测试集中的 95% 给出了正确结果；而 Lindo API 则出现了相对较多的错误最优值、不可行解或中止情况。

真实求解器与虚拟求解器之间的巨大差异表明，没有任何求解器能够胜过所有其他求解器，也没有任何求解器会被其他求解器全面压制。

接下来，我们研究了改变 Octeract 的间隙限制所产生的影响。回顾 B.2 节，除 Octeract 外，所有求解器使用的相对间隙限值和绝对间隙限值分别为 10^{-6} 和 10^{-4}。由于 Octeract 不允许分别选择

这些限值，因此运行时采用了更严格的相对间隙限值 10^{-6}。为了检查这是否会让该求解器处于显著劣势，我们在 200 个未置换实例上重新运行了该求解器，并将相对间隙限值和绝对间隙限值都设为 10^{-4}。B.2 节中的表格显示，收敛容差的变化对求解器性能基本没有影响。两种情况下都能求解相同的 134 个实例。限值为 10^{-6} 时，平均时间为 178.6；限值为 10^{-4}时，平均时间为 179.0。

3.4.2 并行模式

在接下来的比较中，每个求解器都可以使用多线程或多个进程。由于 SCIP 对多线程的使用仅限于混合整数规划预求解、检查二次函数的凸性以及 Ipopt 中的线性代数，因此使用 FiberSCIP [64] 以并行模式运行 SCIP。FiberSCIP 是 UG 框架 [62] 的一种共享内存实现，用于并行化基于分支定界的求解器。该框架通过在彼此独立的 SCIP 实例之间收集和分发开放子问题，实现分支定界树搜索的并行化。此外，求解过程开始后的几秒钟用于“竞速爬坡”阶段。在此阶段，会并行运行多个参数集不同的 SCIP 实例，并在剩余求解过程中使用下界最佳的实例。UG 版本为 1.0.0 beta3。

在串行模式下运行时，没有任何求解器达到 50 GB 的内存限制。但由于并行化通常会增加内存需求，因此并行模式下的运行采用了 100 GB 的内存限制。由于这意味着可用计算资源减少，因此比较仅使用 200 个未置换实例。

表3展示了随着线程数增加，各求解器能够求解的实例数量及所耗费的平均时间。此外，图5仅提供了比较SCIP和FiberSCIP的性能剖面。B.3节给出了详细结果。

	1 个线程		4 个线程		8 个线程		16 个线程	
	已求解	time	已求解	time	已求解	time	已求解	time
BARON	161	64.3	160	58.2	160	57.1	158	58.6
Lindo API	114	423.6	114	379.2	106	459.5	107	456.4
Octeract	134	178.6	133	146.9	138	118.1	135	123.2
(Fiber)SCIP	161	76.9	145	94.3	147	77.8	152	74.8

表3：允许并行化时，所有求解器在包含 200 个实例的测试集上的汇总性能数据。

显然，在这个测试集中，启用并行化很少能带来显著优势。对于将并行化作为原始设计一部分的 Octeract，观察到使用最多 8 个并行进程时，可求解的实例数量略有增加，运行时间缩短了 34%。据我们所知，BARON 目前仅限于在求解器中为混合整数规划松弛启用多线程。因此，运行时间最多只改善了 11%。对于 Lindo API，使用多线程时失败次数进一步增加（1 个线程：24，4 个：28，8 个：35，16 个：43），似乎阻碍了并行化带来的性能提升。最后，对于 SCIP/FiberSCIP，由于并行化是在求解器之上实现的，而不是与求解器紧密集成，因此产生的额外开销无法通过使用多线程得到补偿。不过，与其他求解器不同，线程数从 4 增加到 16 时，求解的实例数量和平均求解时间均呈单调改善趋势。此外，虚拟求解器在

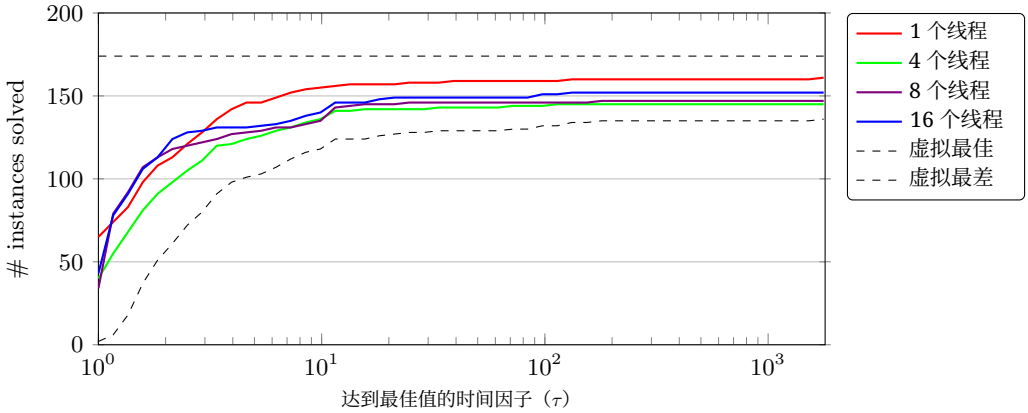


图5：比较 SCIP 和 FiberSCIP 的性能剖面。

性能剖面显示，FiberSCIP 可以求解 SCIP 使用 1 个线程无法求解的实例。

最后请注意，由于复制和同步数据及进程会产生额外开销，通常只有面对相当具有挑战性的实例时，才能期待并行化带来收益。然而，测试集特意只纳入了至少有一个求解器能在串行模式下求解的实例，并排除了所有求解器都能轻易求解的实例，尽管某些求解器可能可以很快求解这些实例。作为一项小规模实验，我们针对每个求解器，仅考虑在串行模式下需要至少 10 秒或 100 秒才能求解的实例。遗憾的是，这基本上重现了表3所示的趋势，因此这里不再详述。若要更全面地分析 MINLP 求解器的并行化能力，就需要仅使用一组具有挑战性的实例，但这超出了本文的范围。

4 结论

SCIP 中 MINLP 求解器的开发已经取得了长足进展。在最近一次版本间比较中，[57, 幻灯片 49-51], 测得，过去十年间 SCIP 在混合整数非线性规划上的性能稳步提升，使得 SCIP 8 求解的实例数量达到 SCIP 3 的两倍，速度提升了三倍。这一进步部分得益于改进和新增了专门针对混合整数非线性规划的功能。然而，由于 SCIP 作为 CIP 求解器具有通用性，许多旨在改进混合整数规划求解的开发成果也能立即应用于混合整数非线性规划求解。

在 8.0 版本中，SCIP 的混合整数非线性规划求解功能经过了大幅改进和扩展，使其稳健性和性能均显著提升 [14, 57]。因此，SCIP 目前的性能已可媲美最先进的商业求解器 BARON。

与此处讨论的商业求解器不同，SCIP 为用户、开发者或研究人员提供了多种与求解过程交互的方式。尤其是新增的“非线性处理器”插件类型，使 SCIP 有别于大多数其他 MINLP 求解器，因为它允许用户专注于试验用于处理非线性函数中特定结构的新算法，而无需修改求解器代码。

默认禁用的功能数量相当庞大，这表明优化和改进现有代码库已变得愈发必要。未来的工作当然也会包括添加新功能，例如改进对符号函数的分离 [77], ，以及对多项式函数采用替代松弛 [17],

或对二次约束的交集割进行幺半群强化 [22]。

如今中央处理器中的处理器核心数量不断增加，这意味着要充分利用普通台式计算机，求解器就必须实现并行化。尽管 UG 框架可让 SCIP 在共享内存和分布式内存环境中实现并行，但 FiberSCIP 在最多 16 个线程上的实验表明，仍需进一步调优，才能确保通过利用额外的计算资源来弥补额外开销。由于 UG 的开发最初是受大规模并行计算环境的使用所推动，且主要聚焦于此，因此，研究如何将 UG 与 SCIP 配合使用，在拥有大量 CPU 核心的分布式内存环境中求解具有挑战性的混合整数非线性规划问题，也可能很有意义 [63],。

致谢

我们对所有 SCIP 开发者都深怀感激——若非框架的存在以及我们能够在其基础上构建的强大混合整数规划求解器，用于支持非线性约束并求解混合整数非线性规划问题的扩展便无从实现。本文作者是 SCIP 8 中新混合整数非线性规划功能的主要开发者，但此前多个版本 SCIP 的混合整数非线性规划功能也有许多人参与贡献，他们是 Martin Ballerstein、Timo Berthold、Tobias Fischer、Thorsten Gellermann、Ambros Gleixner、Renke Kuhlmann、Dennis Michaels、Marc Pfetsch 和 Stefan Weltge。此外，我们感谢 Yuji Shinano 开发 FiberSCIP，并迅速响应我们的请求，使我们能够设置间隙限制。最后，我们衷心感谢 Franziska Schl¨osser 为 SCIP 那个声名狼藉的“consexpr”开发分支搭建并维护基准测试和测试设施。

本文的研究工作是在德国联邦教育与研究部资助的 Research Campus Modal 项目框架内开展的（德国联邦教育与研究部资助编号：05M14ZAM、05M20ZBM）。此外，本研究还获得了德国联邦经济事务与能源部 EnBA-M 项目（编号：03ET1549D）的资助。

参考文献

[1] T. Achterberg。《约束整数规划》。博士论文，柏林工业大学，2007年。[2] W. P. Adams 和 H. D. Sherali。0-1 二次规划问题的紧致线性化及其算法。《管理科学》，32(10):1274–1290，1986。doi:10.1287/mnsc.32.10.1274。[3] W. P. Adams 和 H. D. Sherali。一类 0-1 混合整数规划问题的线性化策略。《运筹学》，38(2):217–226，1990。doi:10.1287/opre.38.2.217。[4]C. Adjiman 和 C. Floudas。一般二阶可微问题的严格凸下估计函数。《全球优化杂志》，9(1):23–40，1996。doi:10.1007/BF00121749。[5] E. Balas。交集割——一种新型整数规划割平面。《运筹学》，19(1):19–39，1971。doi:10.1287/opre.19.1.19。[6] M. Ballerstein、D. Michaels 和 S. Vigerske。具有固定凸性特征的二元函数的线性下估计函数。ZIB 报告 13-02，柏林祖斯研究所，2015年。urn:nbn:de:0297-zib-17641。

[7] E. Beale。非凸函数数值优化的分支定界方法。载于 M. Barritt 和 D. Wishart（编），《COMPSTAT 80 计算统计学会议论文集》，第 11–20 页，维也纳，1980年。Physica-Verlag。[8] B. Bell。CppAD：用于微分 C++算法的软件包。https:// github.com/coin-or/CppAD/。[9]P. Belotti、C. Kirches、S. Leyffer、J. Linderoth、J. Luedtke 和 A. Maha- jan。混合整数非线性优化。《Acta Numerica》，22:1–131，2013年。doi:10.1017/S0962492913000032。[10] T. Berthold 和 A. Gleixner。Undercover：探索最大子 MIP 的原始 MINLP 启发式。《数学规划》，144(1-2):315–346，2014年。doi:10.1007/s10107-013-0635-2。[11] T. Berthold、S. Heinz 和 M. E. Pfetsch。非线性伪布尔优化：松弛还是传播？载于 O. Kullmann（编），《可满足性测试理论与应用 – SAT 2009》，计算机科学讲义第 5584 卷，第 441–446 页，柏林、海德堡，2009 年。施普林格。doi:10.1007/978-3-642-02777-2 40。[12] T. Berthold、S. Heinz、M. E. Pfetsch 和 S. Vigerske。超越 MIP 的大邻域搜索。载于 L. D. Gaspero、A. Schaerf 和 T. St¨ utzle（编），《第九届元启发式国际会议论文集（MIC 2011）》，第 51–60 页，2011年。[13] T. Berthold、S. Heinz 和 S. Vigerske。扩展 CIP 框架以求解混合整数二次约束规划。载于 J. Lee 和 S. Leyffer（编），《混合整数非线性规划》，《IMA 数学及其应用丛书》第 154 卷，第 427–444 页。Springer 纽约州，2012年。doi:10.1007/978-1-4614-1927-3 15。[14] K. Bestuzheva、M. Besan¸con、W.-K. Chen、A. Chmiela、T. Donkiewicz、J. van Doornmalen、L. Eifler、O. Gaul、G. Gamrath、A. Gleixner、L. Gottwald、C. Graczyk、K. Halbig、A. Hoen、C. Hojny、R. van der Hulst、T. Koch、M. L¨ubbecke、S. J. Maher、F. Matter、E. M¨uhmer、B. M¨uller、M. E. Pfetsch、D. Rehfeldt、S. Schlein、F. Schl¨osser、F. Serrano、Y. Shinano、B. Sofranac、M. Turner、S. Vigerske、F. Wegscheider、P. Wellner、D. Weninger 和 J. Witzig。SCIP 优化套件 8.0。ZIB 报告 21-41，柏林祖斯研究所，2021年。urn:nbn:de:0297-zib-85309。[15] K. Bestuzheva、A. Gleixner 和 S. Vigerske。透视割的计算研究。ZIB 报告 21-07，柏林祖斯研究所，2021年。[16] K. Bestuzheva、A. Gleixner 和 T. Achterberg。隐式和显式双线性乘积的 RLT 割高效分离。技术报告 2211.13545，arXiv，2022年。doi:10.48550/ARXIV.2211.13545。[17] K. Bestuzheva、A. Gleixner 和 H. V¨ olker。利用由变量界导出的约束强化 SONC 松弛。准备中，2022年。[18] A. Bley、T. Koch 和 L. Niu。SCIP 非线性扩展的实验。ZIB 报告 08-28，柏林祖斯研究所，2008年。urn:nbn:de:0297-zib-8300。[19] M. R. Bussieck 和 S. Vigerske。MINLP 求解器软件。载于 J. J. Cochran、L. A. Cox, Jr.、P. Keskinocak、J. P. Kharoufeh 和 J. C. Smith（编），《Wiley 运筹学与管理科学百科全书》。Wiley & Sons, Inc.，新泽西州，2010 年。doi:10.1002/9780470400531.eorms0527。[20] C. B¨uskens 和 D. Wassel。ESA NLP 求解器 WORHP。载于 G. Fasano 和 J. D. Pint´er（编），《空间工程中的建模与优化》，《Springer 优化及其应用丛书》第 73 卷，第 85–110 页。Springer 纽约州，2013年。doi:10.1007/978-1-4614-4469-5 4。

[21] A. Chmiela、G. Mu˜noz 和 F. Serrano。关于 QCQP 的交集割的实现与强化。载于 M. Singh 和 D. P. Williamson 编，《整数规划与组合优化》，第 134–147 页，尚，2021。施普林格。doi:10.1007/978-3-030-73879-2 10.[22] A. Chmiela、G. Mu˜noz 和 F. Serrano。MIQCP 中的幺半群强化与唯一提升。已投稿，预印本见 https://www.gonzalomunoz.org/ publications/，2022年。[23]E. D. Dolan 和 J. J. Mor´e。利用性能剖面对优化软件进行基准测试。《数学规划》，91(2):201–213，2002。doi:10.1007/s101070100263。[24] F. Domes 和 A. Neumaier。二次约束上的约束传播。《约束》，15(3):404–429，2010。doi:10.1007/s10601-009-9076-1。[25] M. A. Duran 和 I. E. Grossmann。针对一类混合整数非线性规划的外逼近算法。《数学规划》，36(3):307–339，1986。doi:10.1007/BF02592064。[26] T. Fischer。《互补性与基数约束线性规划的分支割》。博士论文，达姆施塔特工业大学，2017。[27] R. Fletcher 和 S. Leyffer。filterSQP 用户手册。数值分析报告 NA/181，邓迪大学数学系，苏格兰，1998。[28] C. A. Floudas。《非线性与混合整数优化：基础与应用》。牛津大学出版社，纽约，1995。[29] A. Frangioni 和 C. Gentile。一类凸0–1 混合整数规划的透视割。《数学规划》，106(2):225–236，2006。doi:10.1007/s10107- 005-0594-3。[30] G. Gamrath、T. Fischer、T. Gally、A. Gleixner、G. Hendel、T. Koch、S. J. Maher、M. Miltenberger、B. M¨uller、M. E. Pfetsch、C. Puchert、D. Rehfeldt、S. Schenker、R. Schwarz、F. Serrano、Y. Shinano、S. Vigerske、D. Weninger、M. Winkler、J. T. Witt 和 J. Witzig。SCIP 优化套件 3.2。ZIB 报告 15-60，柏林祖斯研究所，2016。urn:nbn:de:0297-zib-57675。[31] G. Gamrath、D. Anderson、K. Bestuzheva、W.-K. Chen、L. Eifler、M. Gasse、P. Gemander、A. Gleixner、L. Gottwald、K. Halbig、G. Hendel、C. Hojny、T. Koch、P. L. Bodic、S. J. Maher、F. Matter、M. Miltenberger、E. M¨uhmer、B. M¨uller、M. E. Pfetsch、F. Schl¨osser、F. Serrano、Y. Shinano、C. Tawfik、S. Vigerske、F. Wegscheider、D. Weninger 和 J. Witzig。SCIP 优化套件 7.0。ZIB 报告 20-10，柏林祖斯研究所，2020年。urn:nbn:de:0297-zib-78023。[32] A. Gleixner、H. Held、W. Huang 和 S. Vigerske。迈向供水网络的全局最优运行。《数值代数、控制与优化》，2(4):695–711，2012。doi:10.3934/naco.2012.2.695。[33] A. Gleixner、T. Berthold、B. M¨uller 和 S. Weltge。基于优化的界收紧的三项改进。《全球优化杂志》，67(4): 731–757，2017。doi:10.1007/s10898-016-0450-4。[34] A. Gleixner、L. Eifler、T. Gally、G. Gamrath、P. Gemander、R. L. Gottwald、G. Hen- del、C. Hojny、T. Koch、M. Miltenberger、B. M¨uller、M. E. Pfetsch、C. Puchert、D. Rehfeldt、F. Schl¨osser、F. Serrano、Y. Shinano、J. M. Viernickel、S. Vigerske、D. Weninger、J. T. Witt 和 J. Witzig。SCIP 优化套件 5.0。ZIB 报告 17-61，柏林祖斯研究所，2017。urn:nbn:de:0297-zib-66297。

[35] A. Gleixner、S. J. Maher、B. M¨uller 和 J. P. Pedroso。定价与验证：使用 Dantzig–Wolfe 分解进行递归圆装填的新算法。《运筹学年鉴》，284(2):527–555，2020年。doi:10.1007/s10479-018-3115-5。[36] F. Glover。多面体凸性割与负边扩展。《运筹学杂志》，18:181–186，1974年。doi:10.1007/BF02026599。[37] I. E. Grossmann 和 Z. Kravanja。混合整数非线性规划：算法与应用综述。载于 A. R. Conn、L. T. Biegler、T. F. Coleman 和 F. N. Santosa 编，《大规模优化及其应用，第二部分：最优设计与控制》，IMA 数学及其应用丛书第 93 卷，第 73–100 页。施普林格，纽约，1997年。doi:10.1007/978-1-4612- 1960-6 5。[38] P. Hansen、B. Jaumard、M. Ruiz 和 J. Xiong。盒约束下不定二次函数的全局最小化。《海军研究后勤学》，40(3):373–392，1993年。doi:10.1002/1520-6750(199304)40:3<373::AID- NAV3220400307>3.0.CO;2-A。[39] C. Hojny 和 M. E. Pfetsch。与对称性处理相关的多胞体。《数学规划》，175(1):197–240，2019年。doi:10.1007/s10107-018-1239-7。[40] A. Khajavirad 和 N. V. Sahinidis。用于全局优化松弛的混合线性规划/非线性规划范式。《数学规划计算》，10(3):383–421，2018年。doi:10.1007/s12532-018-0138-5。[41] G. Kocis 和 I. Grossmann。使用 DICOPT 的计算经验：求解过程系统工程中的混合整数非线性规划问题。《计算机与化学工程》，13(3):307–315，1989年。doi:10.1016/0098-1354(89)85008-2。[42] J. Kronqvist、A. Lundell 和 T. Westerlund。凸混合整数非线性规划的扩展支撑超平面算法。《全球优化杂志》，64(2):249–272，2016。doi:10.1007/s10898-015-0322-3。[43] L. Liberti。数学规划中的重新表述：自动对称性检测与利用。《数学规划》，131(1):273–304，2012。doi:10.1007/s10107-010-0351-0。[44] Y. Lin 和 L. Schrage。LINDO API 中的全局求解器。《优化方法与软件》，24(4–5):657–668，2009年。doi:10.1080/10556780902753221。[45] M. Locatelli。通过求解 KKT 系统构造二元函数的凸包络。《全球优化杂志》，72(2):277–303，2018年。doi:10.1007/s10898- 018-0626-1。[46] A. Mahajan 和 T. Munson。利用二阶锥结构进行全局优化。技术报告 ANL/MCS-P1801-1010，阿贡国家实验室，2010年。[47] S. J. Maher、T. Fischer、T. Gally、G. Gamrath、A. Gleixner、R. L. Gottwald、G. Hendel、T. Koch、M. E. L¨ubbecke、M. Miltenberger、B. M¨uller、M. E. Pfetsch、C. Puchert、D. Rehfeldt、S. Schenker、R. Schwarz、F. Serrano、Y. Shinano、D. Weninger、J. T. Witt 和 J. Witzig。SCIP 优化套件 4.0。ZIB 报告 17-12，柏林祖斯研究所，2017。urn:nbn:de:0297-zib-62170。[48] F. Margot。整数线性规划中的对称性。载于 M. J¨unger、T. M. Liebling、D. Naddef、G. L. Nemhauser、W. R. Pulleyblank、G. Reinelt、G. Rinaldi 和 L. A. Wolsey 编，《整数规划五十年》，第 647–686 页，柏林、海德堡，2010年。施普林格。doi:10.1007/978-3-540-68279-0 17。

[49] G. P. McCormick. 可分解非凸规划全局解的可计算性：第一部分——凸下估问题。《数学规划》，10(1):147–175，1976。doi:10.1007/bf01580665。[50] MINLPLib。一个混合整数与连续非线性规划实例库。https://www.minlplib.org, 2022-10-14。[51] R. Misener 和 C. A. Floudas。通过分段线性和边凹松弛，对混合整数二次约束二次规划（MIQCQP）进行全局优化。《数学规划》，136(1):155–182，2012。doi:10.1007/s10107-012-0555-6。[52] R. Misener、J. B. Smadbeck 和 C. A. Floudas。为混合整数二次约束二次规划动态生成切平面，并将其纳入 GloMIQO 2。优化方法与软件，30(1):215–249，2015。doi:10.1080/10556788.2014.916287。[53] R. E. Moore。区间分析。新泽西州恩格尔伍德克利夫斯：普伦蒂斯·霍尔，1966。[54] B. M¨uller、F. Serrano 和 A. Gleixner。利用二维投影加强双线性项的分离与传播。《*SIAM*优化杂志》，30(2):1339–1365，2020。doi:10.1137/19m1249825。[55] G. Mu˜noz 和 F. Serrano。极大无二次项集合。载于 D. Bienstock 和 G. Zambelli 编，整数规划与组合优化，第307–321页，尚，2020。施普林格。doi:10.1007/978-3-030-45771-6 24。[56] B. M¨uller、R. Kuhlmann 和 S. Vigerske。全局 MINLP 求解器中 NLP 求解器的性能。载于运筹学研究论文集 *2017*，第633–639页，尚，2018。施普林格国际出版社。doi:10.1007/978-3-319- 89920-6 84。[57] M. Pfetsch。SCIP：过去、现在与未来。在研讨会*Let's SCIP it!*上的报告，2022年11月。URL https://scipopt.org/20years/slides/pfetsch.pdf。[58] J. D. Pint´er，编。全局优化：科学与工程案例研究，第85卷，丛书《非凸优化及其应用》。Springer 纽约，纽约州，2006。doi:10.1007/0-387-30927-6。[59] I. Quesada 和 I. E. Grossmann。换热网络的全局优化算法。工业与工程化学研究，32(3):487–499，1993年。doi:10.1021/ie00015a012。[60] N. Sahinidis。BARON：通用全局优化软件包。《全球优化杂志》，8(2):201–205，1996。doi:10.1007/BF00138693。[61]L. Schewe 和 M. Schmidt。为带数学规划互补约束的二元混合整数非线性规划计算可行点。数学规划计算，11(1):95–118，2019年。doi:10.1007/s12532-018-0141-x。[62] Y. Shinano。UG – Ubiquity Generator 框架 v1.0.0beta。https://ug.zib.de, 2021。doi:10.12752/8521。[63] Y. Shinano、T. Achterberg、T. Berthold、S. Heinz、T. Koch 和 M. Winkler。使用 ParaSCIP 在超级计算机上求解开放混合整数规划实例，最多使用 80,000 个处理器核心。载于*2016*年 *IEEE* 国际并行与分布式处理研讨会（*IPDPS*），第770–779页，2016。doi:10.1109/IPDPS.2016.56。

[64] Y. Shinano、S. Heinz、S. Vigerske 和 M. Winkler。FiberSCIP——SCIP 的共享内存并行化。*INFORMS*计算杂志，30(1):11–30，2018年。doi:10.1287/ijoc.2017.0762。[65] E. Smith 和 C. Pantelides。用于非凸混合整数非线性规划全局优化的符号重构/空间分支定界算法。《计算机与化学工程》，23(4-5):457–478，1999。doi:10.1016/s0098-1354(98)00286-5。[66] L. Smith、J. Chinneck 和 V. Aitken。改进约束共识方法，以在非线性规划中寻求可行性。计算优化与应用，54(3):555–578，2013。doi:10.1007/s10589-012-9473-z。[67] F. Tardella。多面体凸包络的存在性。载于 C. A. Floudas 和 P. Pardalos 编，全局优化前沿，第563–573页，马萨诸塞州波士顿，2004。施普林格美国。doi:10.1007/978-1-4613-0251-3 30。[68] M. Tawarmalani 和 N. V. Sahinidis。全局优化的多面体分支割方法。《数学规划》，103(2):225–249，2005。doi:10.1007/s10107-005-0581-8。[69] F. Trespalacios 和 I. ̄Grossmann。混合整数非线性规划与广义析取规划方法综述。化学工程技术，86(7):991–1012，2014。doi:10.1002/cite.201400037。[70] H. Tuy。带线性约束的凹规划。科学院学报，159(1):32–35，1964。[71] A. F. Veinott。单峰规划的支撑超平面法。《运筹学》，15(1):147–152，1967。doi:10.1287/opre.15.1.147。[72] J. P. Vielma、I. Dunning、J. Huchette 和 M. Lubin。混合整数锥二次规划中的扩展公式。数学规划计算，9(3):369–418，2016。doi:10.1007/s12532-016-0113-y。[73] S. Vigerske。多阶段随机规划分解及混合整数非线性规划的约束整数规划方法。博士论文，柏林洪堡大学，2013。urn:nbn:de:kobv:11-100208240。[74] S. Vigerske 和 A. Gleixner。SCIP：基于分支割框架的混合整数非线性规划全局优化。优化方法与软件，33 (3):563–593，2017。doi:10.1080/10556788.2017.1335312。[75] A. W¨achter 和 L. Biegler。大规模非线性规划原始对偶内点滤波线搜索算法的实现。《数学规划》，106(1):25–57，2006。doi:10.1007/s10107-004-0559-y。[76] F. Wegscheider。混合整数非线性规划中的对称性利用。硕士论文，柏林祖斯研究所，2019。urn:nbn:de:0297-zib-77055。[77] L. Xu、C. D'Ambrosio、L. Liberti 和 S. H. Vanier。关于符号多项式规划扩展形式的割平面。技术报告，arXiv，2022。doi:10.48550/ARXIV.2212.02857。[78] J. M. Zamora 和 I. E. Grossmann。结构化过程系统模型的连续全局优化。计算机与化学工程，22(12):1749–1770，1998。doi:10.1016/S0098-1354(98)00244-0。

一个测试集

下表详细列出了通过第 3.1 节所述选择过程构建的、包含 200 个实例的测试集。对于每个实例，表中给出了变量数量（n）、离散变量数量（$|\mathcal{I}|$）、约束数量（$m+\tilde{m}$）、雅可比矩阵和目标函数梯度中的非零元数量（nz），以及对应于非线性项的非零元数量（nlnz）。

实例	n	$\lvert\mathcal{I}\rvert$	m+$\tilde{m}$	nz	nlnz
alan	8	4	7	23	3
autocorr bern20-05	20	20	0	20	20
autocorr bern35-04	35	35	0	35	35
ball_mk2_10	10	10	1	20	10
ball_mk2_30	30	30	1	60	30
ball_mk3_10	10	10	1	20	10
batch0812_nc	76	36	205	472	232
batchs101006m	278	129	1019	2865	49
batchs121208m	406	203	1511	4255	59
bayes2_20	86	0	77	615	440
bayes2_30	86	0	77	618	440
blend029	102	36	213	542	64
blend146	222	87	624	1721	256
camshape100	199	0	200	696	299
cardqp_inlp	50	50	1	100	50
cardqp_iqp	50	50	1	100	50
carton7	328	256	687	3979	678
carton9	360	288	893	4917	758
casctanks	500	40	517	1605	514
cecil_13	840	180	898	2811	360
celar6-sub0	640	640	16	1280	640
脉轮	62	0	41	142	41
chem	11	0	4	36	11
Chenery	43	0	38	132	56
Chimera_k64maxcut-01	1101	1101	0	1101	1101
Chimera_mis-01	2032	2032	0	2032	2032
CHP_shorttermplan1a	1008	144	2068	6118	576
chp_shorttermplan2a	1584	240	3896	10160	1152
chp_shorttermplan2b	1392	192	2552	7672	1440
clay0204m	52	32	90	284	64
clay0205m	80	50	135	430	80
color_lab3_3x0	316	316	80	632	237
越库15x7_	210	210	44	630	210
越库15x8_	240	240	46	720	240
原油_lee1_07_	749	56	1776	8124	896
原油汇集ct2_	403	108	732	2523	140
csched1	76	63	22	173	8
csched1a	28	15	22	77	7
cvxnonsep_psig20	20	10	0	20	20
cvxnonsep_psig30	30	15	0	30	30
du-opt	20	13	9	46	20
du-opt5	20	13	9	46	20
edgecross10-040	90	90	480	1530	90
edgecross10-080	90	74	480	1528	88
eg_all_s_	7	7	27	219	196
eigena2	2500	0	1275	127500	127500
elec50	150	0	50	300	300
elf	54	24	38	177	30
eniplac	141	24	189	510	48
enpro56pb	127	73	191	650	24
ex1244	95	23	129	468	52
ex1252a	24	9	34	93	36
faclay20h	190	190	2280	7030	190
faclay80	3160	3160	164320	496120	3160
feedtray	97	7	91	450	282
fin2bb	588	175	618	9413	42
flay04m	42	24	42	154	4
flay05m	62	40	65	242	5
flay06m	86	60	93	350	6
fo7_ar25_1_	112	42	269	1054	14
fo7_ar3_1_	112	42	269	1054	14
森林	236	73	309	1013	178
gabriel01	215	72	467	1789	512
gabriel02	261	71	597	2608	1024
GasNet	90	10	69	266	130
gasprod_sarawak16	1526	38	2252	6453	1088
gastrans582_cold13_95	2186	250	3732	8538	2139

实例	n	$\lvert\mathcal{I}\rvert$	$m+\tilde{m}$	nz	nlnz
gastrans582 mild11	2186	250	3732	8538	2139
gear	4	4	0	4	4
gear2	28	24	4	32	4
gear4	6	4	1	8	4
genpooling lee1	49	9	82	369	128
genpooling lee2	53	9	92	453	192
ghg 1veh	29	12	37	130	91
Gilbert	1000	0	1	2000	2000
图划分 2g-0066-0066	108	108	36	216	108
graphpart clique-60	180	180	60	360	180
gsg 0001	77	0	111	368	44
哈达玛矩阵 5	25	25	0	25	25
heatexch spec1	56	12	64	224	32
heatexch spec2	76	16	90	300	42
hhfair	29	0	25	80	21
himmel16	18	0	21	96	84
房屋	8	0	8	25	9
hs62	3	0	1	6	6
hvb11	9817	9537	10251	36005	64
混合动态变量	81	10	100	286	61
混合动力 VarCC	151	0	110	388	101
水能1	288	96	428	1212	120
ibs2	3010	1500	1821	13510	3000
johnall	194	190	192	957	573
Kall_圆 C6b	17	0	53	148	86
kall_congruentcircles c72	17	0	59	160	86
kissing2	772	0	10000	154400	154400
kport20	101	40	27	189	116
kriging_peaks-red020	2	0	0	2	2
kriging_peaks-red100	2	0	0	2	2
lop97icx	986	899	87	1890	704
mathopt5_7	1	0	0	1	1
mathopt5_8	1	0	0	1	1
maxcsp-geo50-20-d4-75-36	1000	1000	50	2000	1000
meanvar-orl400_05_e_7	2000	400	2003	7200	1600
meanvar-orl400_05_e_8	1600	400	1603	6400	800
mhw4d	5	0	3	13	10
milinfract	1000	500	501	502000	1000
minlphi	64	0	79	206	36
multiplants_mtg1a	193	93	256	1972	95
multiplants_mtg2	229	112	306	2689	126
nd-netgen-3000-1-1-b-b-ns 7	15000	3000	12155	48000	9000
netmod_kar1	456	136	666	1848	4
netmod_kar2	456	136	666	1848	4
nous1	50	2	43	196	122
nous2	50	2	43	196	122
nvs02	8	5	3	19	16
nvs06	2	2	0	2	2
oil2	936	2	926	2214	440
optmass	30010	0	25005	80020	10006
ortez	87	18	74	268	54
p_ball_10b_5p_3d_m	95	50	129	518	150
p_ball_15b_5p_2d_m	105	75	139	523	150
parabol5_2_3	40400	0	40200	240004	601
并行	205	25	115	751	155
pedigree ex485	485	426	296	1925	485
pedigree ex485 2	485	426	296	1925	485
pointpack06	12	0	20	86	60
pointpack08	16	0	35	155	112
pooling epa1	214	30	340	1154	257
pooling epa2	331	45	524	1913	554
投资组合买入	17	8	19	58	16
投资组合卡	17	8	20	66	16
powerflow0014r	118	0	197	652	461
潮流0057r	440	0	725	2462	1795
问题07	14	0	35	109	63
流程	10	0	7	27	11
采购1mot	784	60	749	2444	12
采购2mot	796	60	761	2480	12
产品	1553	107	1925	5555	264
产品2	2842	128	3125	8249	1056
Prolog	20	0	22	128	14
qp3	100	0	52	2747	100
qspp-0_10_0_1_10_1	180	180	100	540	180
qspp-0_11_0_1_10_1	220	220	121	660	220
radar-2000-10-a-6 延迟 7	10000	2000	8001	28000	6000
radar-3000-10-a-8 延迟 7	15000	3000	12001	42000	9000
ravempb	112	54	186	610	28

实例	n	$\lvert\mathcal{I}\rvert$	$m+\tilde{m}$	nz	nlnz
risk2bpb	463	14	580	2288	3
布线延迟 bigm	1123	396	2977	7739	1827
rsyn0815m	205	79	347	909	11
rsyn0815m03m	705	282	1647	4120	33
sfacloc2 2 95	186	39	239	595	76
sfacloc2 3 90	291	75	496	1282	135
sjup2	1696	8	17085	151716	88800
slay06m	102	60	135	462	12
slay07m	140	84	189	644	14
smallinvDAXr1b010-011	30	30	3	120	30
smallinvDAXr1b020-022	30	30	3	120	30
sonet17v4	136	136	2057	6527	272
sonet18v6	153	153	2466	7802	306
sonetgr17	152	152	152	694	302
spectra2	69	30	72	408	240
sporttournament24	276	276	0	276	276
sporttournament30	435	435	0	435	435
sssd12-05persp	95	75	52	305	45
sssd18-06persp	150	126	66	474	54
st_testgr1	10	10	5	51	10
st_testgr3	20	20	20	181	20
steenbrf	468	0	108	972	108
库存周期	480	432	97	1008	48
supplychainp1 022020	2940	460	5300	15040	40
供应链p1 030510	445	70	835	2330	15
供应链r1 022020	1440	460	1840	7000	40
供应链r1 030510	230	70	280	1005	15
syn15m04m	340	120	806	1986	44
syn30m02m	320	120	604	1502	40
synheat	56	12	64	224	28
储罐尺寸	46	9	73	290	63
Telecomsp_Pacbell	3570	3528	2940	121302	74088
tln5	35	35	30	155	50
tln7	63	63	42	287	98
tls2	37	33	24	209	8
tls4	105	89	64	613	32
topopt-mbb 60x40 50	33600	2400	14363	259956	33600
toroidal2g20 5555	400	400	0	400	400
toroidal3g7 6666	343	343	0	343	343
transswitch0009r	69	9	103	346	255
tricp	169	0	190	1493	1140
tspn08	44	28	18	136	60
tspn15	135	105	34	502	165
机组组合1	960	720	5329	12404	240
机组组合2	960	720	5329	12404	480
赌注	156	84	142	532	240
废弃物	2484	400	1991	9242	2736
废纸3	52	27	30	177	108
废纸4	76	44	38	274	176
废纸6	136	90	54	528	360
水4	195	126	137	756	46
水nd1	74	20	83	301	114
水no2 02_	332	18	410	1088	202
水no2 03_	498	27	616	1635	303
waterund01	40	0	38	152	78

B 详细计算结果

下表展示了在测试集中的实例上运行各个求解器所得的结果。如果某个实例已求得最优解，则报告所用时间。请注意，由于各个求解器对相对间隙的计算公式存在差异，即使求解器运行至时间限制后停止，某个实例仍可能被计为已求解。如果某次运行被标记为失败，则会给出作此判定的原因："中止"表示求解器未返回结果；"非最优"表示报告的上界或下界与 MINLPLib 给出的结果不一致；"不可行"表示根据可行性容差，报告的解不可行。否则，将报告终止时的相对间隙；如果尚未计算出可行解或下界，则该间隙为 ∞ 。BARON 是一个例外：如果求解器仅因函数中的奇异性而决定不返回下界，则该实例仍被视为已求解（见第 3.2.1 节）。实例 mhw4d 和 multiplants mtg2 及其

排列属于这种情况。对于每个实例，与该实例上最佳求解器所得结果相比，时间或间隙最多差 10% 的结果将以粗体显示。

B.1 串行模式

下表展示了在串行模式下，对测试集中的 200 个实例及其排列运行各个求解器所得的结果。

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
alan	-	0.33	0.89%	**0.05**	0.19
	1	0.30	0.89%	**0.05**	0.14
	2	0.19	0.89%	0.13	**0.11**
	3	0.19	0.89%	**0.05**	0.11
	4	0.18	0.89%	**0.05**	0.13
autocorr_bern20-05	-	7.29	100.43	**4.36**	16.34
	1	5.18	90.50	**3.73**	13.26
	2	6.19	86.68	**4.58**	23.15
	3	6.01	70.76	**3.30**	15.95
	4	5.35	63.71	**4.33**	19.75
autocorr_bern35-04	-	**29.91**	13.5%	12.7%	107.46
	1	**45.39**	不可行	3524.97	93.55
	2	**55.21**	不可行	2425.34	104.74
	3	**79.60**	不可行	6572.33	88.83
	4	**39.39**	不可行	4446.69	77.29
ball_mk2_10	-	0.07	3.98	**0.01**	0.05
	1	0.07	3.96	**0.01**	0.10
	2	0.07	3.98	**0.01**	0.01
	3	0.07	3.66	**0.01**	0.01
	4	0.07	3.66	**0.01**	0.01
ball_mk2_30	-	0.25	100.0%	**0.02**	0.06
	1	0.08	100.0%	**0.02**	0.08
	2	0.09	100.0%	**0.02**	0.03
	3	0.08	100.0%	**0.02**	0.03
	4	0.13	100.0%	0.04	**0.03**
ball_mk3_10	-	10.58	3.58	0.04	**0.00**
	1	10.30	3.85	0.04	**0.00**
	2	10.47	3.88	0.04	**0.00**
	3	10.15	3.68	0.04	**0.00**
	4	10.20	3.56	0.04	**0.00**
batch0812_nc	-	6.57	25.46	8.37	**1.45**
	1	8.95	22.13	9.06	**1.18**
	2	5.85	20.34	8.84	**1.01**
	3	6.41	20.35	8.65	**1.45**
	4	70.42	23.51	9.21	**1.05**
batchs101006m	-	6.91	134.04	**4.84**	7.63
	1	18.23	59.63	**5.28**	6.55
	2	10.39	51.85	**5.20**	6.44
	3	10.03	81.83	**5.13**	6.31
	4	8.77	57.22	**4.80**	6.19
batchs121208m	-	47.33	198.76	79.1%	**6.99**
	1	27.10	221.28	中止	**14.64**
	2	30.58	180.28	中止	**15.32**
	3	33.04	184.44	中止	**14.49**
	4	26.62	152.58	60.6%	**12.04**
bayes2_20	-	**67.77**	0.033%	0.033%	0.033%
	1	**80.24**	0.033%	0.033%	0.033%
	2	**69.41**	0.033%	0.033%	0.033%
	3	**58.54**	0.033%	6051.51	0.033%
	4	**372.69**	0.033%	0.033%	0.033%
bayes2_30	-	**21.02**	7200.00	7200.00	7200.00
	1	**57.89**	7200.00	7200.00	7200.00
	2	**30.04**	7200.00	7200.00	7200.00
	3	**20.17**	7200.00	7200.00	25.1%
	4	**33.53**	7200.00	7200.00	7200.00
blend029	-	**1.03**	中止	29.33	3.67
	1	**1.07**	中止	30.37	2.79
	2	**1.28**	中止	36.35	3.29
	3	**0.72**	2512.99	27.62	3.86
	4	**1.15**	中止	23.74	2.66
blend146	-	3648.64	中止	8.8%	**471.12**
	1	4300.65	中止	3.6%	**860.35**
	2	2597.99	4.9%	8.4%	**770.63**
	3	2642.15	5.5%	8.8%	**380.89**
	4	3212.94	中止	7.9%	**534.07**
camshape100	-	9.2%	9.2%	**19.40**	5.4%
	1	9.9%	9.2%	**110.89**	5.2%

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	2	9.5%	9.3%	**97.31**	5.3%
	3	11.1%	9.5%	**111.83**	5.2%
	4	9.9%	9.6%	**113.55**	5.6%
cardqp_inlp	-	**12.40**	134.08	792.06	2751.70
	1	**12.39**	133.88	878.19	3093.49
	2	**12.35**	137.71	747.37	3131.70
	3	**12.34**	134.87	765.74	3163.05
	4	**12.21**	136.55	797.50	3091.96
cardqp_iqp	-	**12.92**	133.22	785.02	2769.87
	1	**12.23**	133.62	878.44	3105.68
	2	**12.38**	138.12	744.48	3145.64
	3	**12.26**	135.01	765.38	3174.45
	4	**12.19**	136.78	807.90	3101.12
carton7	-	987.64	110.53	**6.03**	13.54
	1	1174.14	66.95	**5.57**	121.71
	2	3846.89	84.70	**9.25**	13.62
	3	516.36	173.14	**12.03**	14.55
	4	2021.71	75.91	**8.99**	12.96
carton9	-	45.0%	287.45	344.94	**36.30**
	1	37.9%	197.12	**9.94**	31.5%
	2	38.6%	375.81	**9.28**	78.81
	3	43.8%	684.50	**19.96**	67.78
	4	31.2%	296.68	**27.07**	187.44
casctanks	-	**256.46**	3.4%	11.8%	199%
	1	**333.16**	3.5%	10.2%	196%
	2	**338.11**	3.1%	10.5%	199%
	3	**357.11**	3.5%	10.1%	198%
	4	**447.59**	3.6%	11.3%	196%
cecil_13	-	280.62	0.32%	**188.40**	605.03
	1	227.21	0.6%	**157.90**	626.61
	2	**207.11**	0.32%	242.70	571.07
	3	230.85	0.32%	**94.69**	648.09
	4	181.85	0.32%	**113.29**	614.13
celar6-sub0	-	100.0%	100%	∞	**1503.66**
	1	100.0%	100%	**3042.60**	92.3%
	2	100.0%	100%	**4763.43**	6435.62
	3	100.0%	100%	**6198.12**	93.7%
	4	100.0%	100%	**2291.77**	79.2%
脉轮	-	0.14	1.28	7200.00	**0.04**
	1	0.31	1.27	7200.00	**0.05**
	2	0.15	1.28	7200.00	**0.04**
	3	0.15	1.01	7200.00	**0.11**
	4	0.30	1.27	7200.00	**0.05**
chem	-	**0.04**	1172.22	0.18	932.15
	1	**0.04**	1159.31	0.19	914.43
	2	**0.04**	1168.01	0.18	844.62
	3	**0.04**	1169.18	0.18	887.05
	4	**0.04**	1168.36	0.18	847.04
Chenery	-	**1.40**	0.43%	200.71	2.10
	1	**1.11**	0.43%	239.04	4.92
	2	1.39	0.78%	259.88	**1.26**
	3	**1.15**	0.9%	262.94	7.66
	4	1.77	0.43%	261.43	**1.50**
Chimera_k64maxcut-01	-	560.62	16.4%	**168.60**	450.42
	1	499.78	17.8%	**142.22**	435.54
	2	1969.20	19.0%	**112.38**	552.15
	3	605.37	18.7%	**106.61**	595.36
	4	738.03	14.9%	**71.59**	431.57
Chimera_mis-01	-	13.69	非最优	**1.14**	6.76
	1	16.00	非最优	**1.58**	7.06
	2	14.94	非最优	**1.46**	7.71
	3	14.89	非最优	**1.57**	7.48
	4	15.41	非最优	**1.30**	7.54
CHP_shorttermplan1a	-	2296.84	∞	64.74	**17.55**
	1	2708.40	∞	27.60	**20.99**
	2	4998.33	∞	61.12	**15.40**
	3	0.092%	∞	27.43	**19.76**
	4	2693.91	∞	62.06	**15.63**
chp_shorttermplan2a	-	937.38	∞	**17.59**	27.16
	1	2.6%	∞	19.04	**16.19**
	2	1181.77	∞	**19.44**	27.58
	3	5678.85	∞	**19.96**	26.63
	4	5971.28	∞	19.61	**16.91**
chp_shorttermplan2b	-	0.34%	16.6%	0.67%	**7200.00**
	1	非最优	0.27%	0.7%	**0.08%**
	2	0.3%	0.32%	0.67%	**0.11%**
	3	0.31%	48.9%	0.67%	**0.08%**
	4	0.3%	0.18%	0.67%	**0.067%**

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
clay0204m	-	**0.47**	4.75	1.47	1.67
	1	**0.67**	6.32	1.24	1.63
	2	**0.31**	5.77	1.33	1.59
	3	**0.45**	5.32	1.55	1.96
	4	**0.47**	4.80	1.32	1.67
clay0205m	-	**4.92**	51.80	15.10	8.40
	1	**4.22**	61.13	9.78	8.07
	2	**4.75**	63.96	8.70	9.07
	3	**6.57**	77.14	7.83	9.11
	4	**5.30**	62.76	11.03	6.53
color_lab3_3x0	-	**2654.00**	65.6%	∞	15.3%
	1	**5176.64**	65.6%	∞	13.7%
	2	**5761.65**	65.7%	∞	15.1%
	3	**5225.72**	65.5%	∞	13.0%
	4	**0.51%**	65.6%	∞	11.5%
越库15x7_	-	**385.56**	124%	∞	32.0%
	1	**418.01**	123%	∞	28.1%
	2	**233.85**	123%	∞	39.1%
	3	**180.42**	124%	∞	31.1%
	4	**183.64**	123%	∞	33.5%
越库15x8_	-	**788.81**	124%	6306.65	42.8%
	1	**2830.45**	121%	∞	59.2%
	2	**681.63**	124%	∞	52.7%
	3	**1084.33**	121%	∞	57.8%
	4	**1414.43**	121%	∞	58.7%
原油 lee1_07_	-	7.50	63.26	8.56	**4.72**
	1	12.30	272.58	10.36	**6.96**
	2	12.42	非最优	10.48	**7.01**
	3	13.79	111.62	**4.11**	7.31
	4	7.69	103.43	4.54	**3.09**
原油汇集ct2_	-	**4.95**	1.8%	非最优	18.94
	1	**22.28**	3.5%	非最优	26.23
	2	**3.24**	2.9%	5.85	17.42
	3	**5.98**	3%	非最优	17.02
	4	28.56	2.4%	**3.84**	30.75
csched1	-	13.03	66.81	8.1%	**1.59**
	1	10.52	91.91	8.1%	**2.44**
	2	12.10	57.13	8.7%	**3.25**
	3	11.92	60.21	8.2%	**2.29**
	4	14.74	77.16	8.1%	**3.06**
csched1a	-	**0.70**	4.85	17.77	6.53
	1	**0.98**	5.76	17.34	5.08
	2	**0.50**	4.48	2.49	6.85
	3	**0.89**	4.33	18.52	5.70
	4	**0.90**	4.69	19.54	5.65
cvxnonsep_psig20	-	0.99	**0.48**	35.0%	12.04
	1	1.05	**0.24**	35.1%	14.75
	2	0.96	**0.25**	34.9%	15.16
	3	0.92	**0.50**	35.1%	16.56
	4	1.04	**0.41**	34.9%	10.64
cvxnonsep_psig30	-	4.25	**3.26**	45.6%	65.40
	1	4.29	**3.06**	45.7%	367.26
	2	4.25	**2.98**	45.5%	239.09
	3	4.17	**3.22**	45.8%	127.14
	4	4.31	**3.28**	45.5%	88.59
du-opt	-	**2.37**	5.35	122.38	**2.38**
	1	**2.37**	4.83	60.86	**2.16**
	2	**1.86**	5.11	52.34	2.68
	3	**2.05**	4.97	44.64	2.40
	4	**2.25**	4.79	44.04	4.24
du-opt5	-	3.61	4.70	101.32	**1.69**
	1	4.48	4.48	130.24	**1.50**
	2	4.86	4.64	94.97	**1.56**
	3	3.97	4.88	103.22	**1.68**
	4	5.33	4.77	132.03	**1.31**
edgecross10-040	-	7.25	**0.29**	4.16	8.36
	1	5.42	非最优	**4.57**	6.42
	2	5.71	非最优	4.84	**3.65**
	3	6.30	非最优	**5.29**	**5.03**
	4	6.34	非最优	**4.82**	7.68
edgecross10-080	-	**51.58**	非最优	6%	74.51
	1	**42.04**	非最优	7.2%	58.81
	2	**41.55**	非最优	6.2%	77.79
	3	50.34	非最优	6.8%	**43.25**
	4	51.39	非最优	7.1%	**43.84**
eg_all_s_	-	不可行	中止	102%	**3095.77**
	1	90.7%	中止	109%	**4758.26**
	2	90.9%	中止	89.9%	**6829.05**

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	3	**85.5%**	中止	98.1%	**5101.84**
	4	**89.7%**	中止	119%	**1520.48**
eigena2	-	1146.69	∞	**416.89**	∞
	1	1131.74	∞	**101.71**	∞
	2	1147.70	∞	**117.89**	∞
	3	1028.72	∞	**288.60**	∞
	4	1134.27	∞	**269.29**	∞
elec50	-	66.5%	**798.72**	66.4%	45.1%
	1	66.5%	**919.20**	66.5%	44.9%
	2	66.5%	**1073.13**	66.4%	44.6%
	3	66.5%	**1191.25**	66.5%	44.8%
	4	66.5%	**930.48**	66.5%	44.7%
elf	-	5.91	非最优	2.54	**1.01**
	1	6.24	2.09	不可行	**1.67**
	2	4.51	3.47	不可行	**2.42**
	3	4.39	不可行	1.76	**1.28**
	4	4.05	不可行	不可行	**1.74**
eniplac	-	4.54	3%	**1.54**	2.19
	1	4.01	2.7%	**2.01**	2.64
	2	5.11	3.6%	**1.67**	2.61
	3	6.47	3.9%	**1.25**	2.58
	4	3.63	3.7%	**1.64**	**1.76**
enpro56pb	-	**1.84**	1454.20	**1.98**	3.40
	1	**2.00**	2040.82	**2.11**	2.27
	2	**2.21**	不可行	**2.08**	3.78
	3	4.95	2838.41	**2.08**	4.34
	4	5.63	1628.60	**2.07**	2.44
ex1244	-	**4.86**	9.69	81.99	7.67
	1	**1.34**	11.66	2.74	64.25
	2	**2.62**	12.32	非最优	26.26
	3	**2.06**	11.75	3.98	**2.07**
	4	**2.34**	13.07	非最优	15.20
ex1252a	-	**9.12**	不可行	245.41	7200.00
	1	**16.38**	51.58	334.58	0.031%
	2	**2.94**	36.26	260.68	0.06%
	3	1812.77	不可行	**313.87**	358.50
	4	**5.17**	55.21	292.16	0.2%
faclay20h	-	**349.36**	非最优	785.28	741.15
	1	**251.18**	非最优	721.19	720.40
	2	**524.94**	非最优	713.21	934.75
	3	**238.74**	非最优	693.80	780.05
	4	**478.08**	非最优	1071.27	834.45
faclay80	-	120%	**5096.67**	∞	160%
	1	**120%**	中止	∞	160%
	2	**120%**	中止	∞	159%
	3	120%	中止	∞	**93.9%**
	4	∞	中止	∞	**160%**
feedtray	-	80.5%	13.79	82.1%	**1.70**
	1	80.5%	**22.18**	80.5%	80.5%
	2	80.5%	**74.65**	83.2%	80.5%
	3	80.5%	**19.32**	80.5%	非最优
	4	80.5%	**19.37**	80.5%	80.5%
fin2bb	-	114.16	1294.03	100.0%	**15.92**
	1	69.25	1827.21	100.0%	**7.78**
	2	55.05	1645.40	100.0%	**9.54**
	3	108.22	512.39	100.0%	**7.80**
	4	**64.77**	2036.16	∞	138.92
flay04m	-	10.56	647.41	**0.87**	3.93
	1	10.74	503.62	**0.85**	4.29
	2	10.35	583.37	**0.91**	4.17
	3	10.15	494.25	**0.95**	4.35
	4	11.30	552.23	**0.78**	3.83
flay05m	-	394.85	0.54%	不可行	**120.82**
	1	404.17	0.65%	不可行	**123.07**
	2	396.72	0.58%	不可行	**116.15**
	3	411.54	0.58%	不可行	**117.29**
	4	439.41	0.56%	不可行	**123.48**
flay06m	-	7%	14.3%	不可行	**4931.28**
	1	6.6%	14.0%	不可行	**4727.15**
	2	6.1%	13.9%	不可行	**5259.68**
	3	7.2%	14.5%	不可行	**4811.50**
	4	6%	13.7%	**3154.62**	5047.64
fo7_ar25_1_	-	17.00	1282.08	**8.95**	39.74
	1	9.09	1719.51	**7.78**	41.70
	2	13.13	1424.43	**9.90**	53.04
	3	13.99	1979.11	**6.24**	36.41
	4	**10.36**	1738.14	**9.99**	45.67
fo7_ar3_1_	-	25.69	1847.41	**18.33**	88.79

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	1	51.20	2351.00	**7.57**	63.32
	2	55.38	940.00	**10.98**	59.84
	3	46.00	1796.83	**18.54**	65.72
	4	41.03	2416.13	**12.23**	59.26
森林	-	747.74	**1.18**	非最优	538.83
	1	**1244.39**	∞	非最优	非最优
	2	**27.0%**	不可行	非最优	非最优
	3	**0.36%**	非最优	非最优	非最优
	4	**654.45**	非最优	非最优	非最优
gabriel01	-	1760.52	5.4%	2%	**351.17**
	1	1596.81	中止	3.5%	**331.53**
	2	1676.43	8.6%	4.9%	**292.51**
	3	1584.57	8.7%	3.7%	**245.91**
	4	2622.95	10.5%	2%	**286.68**
gabriel02	-	11.1%	44.0%	7078.04	**1435.31**
	1	16.6%	∞	5618.78	**3606.13**
	2	17.4%	∞	6015.73	**2175.98**
	3	19.2%	57.3%	5439.17	**973.13**
	4	16.8%	∞	5941.14	**2639.64**
GasNet	-	**22.38**	64.9%	96.7%	42.5%
	1	非最优	64.9%	96.5%	**41.0%**
	2	非最优	64.9%	96.3%	**41.7%**
	3	56.9%	65.1%	96.8%	**41.1%**
	4	非最优	65.0%	96.5%	**41.9%**
gasprod sarawak16	-	**4578.18**	不可行	0.74%	0.39%
	1	**0.18%**	1.5%	1.1%	0.92%
	2	**0.18%**	0.39%	0.71%	0.94%
	3	**0.29%**	0.43%	0.88%	0.8%
	4	**1258.01**	不可行	0.75%	0.92%
gastrans582 cold13 95	-	1442.44	∞	∞	**55.01**
	1	828.50	∞	∞	**60.20**
	2	2066.06	∞	∞	**36.26**
	3	1801.06	∞	∞	**60.01**
	4	**652.52**	∞	∞	∞
gastrans582 mild11	-	687.72	∞	∞	**7.41**
	1	1845.78	∞	∞	**13.16**
	2	1635.11	∞	∞	**20.77**
	3	2784.89	∞	∞	**10.81**
	4	2150.14	∞	∞	**10.53**
gear	-	0.12	**0.05**	0.11	12.55
	1	0.12	**0.04**	0.07	13.78
	2	0.12	**0.03**	0.07	13.68
	3	0.08	**0.03**	0.07	16.84
	4	0.11	**0.05**	0.07	12.58
gear2	-	0.64	0.23	**0.14**	18.25
	1	0.28	**0.23**	**0.21**	16.14
	2	0.50	0.20	**0.09**	17.22
	3	0.43	0.62	**0.11**	17.01
	4	0.31	0.28	**0.12**	15.55
gear4	-	**1.63**	不可行	17.56	4.05
	1	1.20	不可行	18.07	**0.82**
	2	1.61	不可行	18.56	**0.75**
	3	**0.88**	不可行	17.84	**0.80**
	4	1.46	不可行	18.12	**0.56**
genpooling lee1	-	9.37	0.41%	117.04	**2.09**
	1	10.02	0.94%	192.20	**2.44**
	2	4.20	1.1%	39.59	**2.40**
	3	5.08	1.1%	73.26	**3.12**
	4	8.35	0.29%	52.15	**2.43**
genpooling lee2	-	85.93	3724.02	186.63	**6.88**
	1	25.74	4288.32	254.82	**6.48**
	2	76.31	1402.41	236.81	**5.23**
	3	54.53	3502.43	278.49	**5.03**
	4	54.56	2305.10	281.04	**6.53**
ghg 1veh	-	**2.77**	106.61	12.42	32.25
	1	**4.52**	105.03	12.61	31.41
	2	**1.84**	104.86	13.26	34.17
	3	**6.61**	100.45	14.83	32.06
	4	**4.62**	98.82	12.80	33.13
Gilbert	-	2.35	14.25	0.9%	**1.13**
	1	2.98	15.68	0.99%	**1.16**
	2	2.85	15.75	1%	**1.03**
	3	3.49	15.54	0.99%	**1.29**
	4	3.00	16.13	0.95%	**1.24**
图划分 2g-0066-0066	-	**0.65**	8.7%	0.75	1.39
	1	0.93	8.7%	**0.69**	0.78
	2	1.08	8%	**0.42**	1.73
	3	0.62	8.2%	**0.44**	2.06

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	4	0.83	8.7%	**0.45**	1.12
graphpart clique-60	-	34.6%	83.3%	**2890.51**	3962.88
	1	32.0%	83.1%	**7034.14**	58.2%
	2	39.7%	80.3%	**3824.11**	48.7%
	3	36.1%	83.3%	**5323.55**	55.6%
	4	36.8%	80.3%	**1751.71**	54.5%
gsg_0001	-	13.68	351.30	**8.58**	32.26
	1	**11.72**	412.60	75.14	30.21
	2	**10.34**	372.91	95.72	28.77
	3	**12.57**	567.84	62.47	27.70
	4	**13.55**	379.44	115.60	28.15
哈达玛矩阵 5_	-	54.92	129.27	**20.45**	**21.56**
	1	65.13	117.17	44.80	**27.78**
	2	**15.25**	121.23	34.82	66.81
	3	**17.17**	121.44	30.28	23.27
	4	**10.01**	141.44	33.75	22.94
heatexch_spec1	-	**1.39**	0.34%	17.7%	7.1%
	1	**46.44**	0.29%	15.0%	214.24
	2	**29.74**	0.26%	15.8%	不可行
	3	**2001.04**	0.46%	14.1%	7.3%
	4	0.53%	**0.3%**	15.4%	不可行
heatexch_spec2	-	**6.60**	0.041%	5%	不可行
	1	8.17	0.055%	5.2%	**7.08**
	2	**5.50**	0.048%	5%	15.69
	3	**7.98**	0.043%	5.1%	9.42
	4	9.97	0.053%	5.2%	**8.75**
hhfair	-	**0.43**	100.0%	∞	100.0%
	1	**0.20**	100.0%	∞	100.0%
	2	**0.35**	100.0%	∞	∞
	3	**0.27**	100.0%	∞	100.0%
	4	**0.92**	100.0%	∞	100.0%
himmel16	-	41.46	20.42	12.95	**6.13**
	1	19.50	22.20	13.13	**7.20**
	2	29.07	21.96	16.00	**5.29**
	3	23.68	23.39	13.04	**6.44**
	4	22.73	22.24	14.29	**6.12**
房屋	-	0.37	0.89	108.41	**0.33**
	1	0.38	1.24	73.21	**0.29**
	2	0.37	不可行	80.09	**0.21**
	3	**0.46**	1.18	115.14	0.58
	4	0.44	0.88	81.46	**0.30**
hs62	-	**1.07**	4.04	0.023%	2.65
	1	**0.95**	4.02	0.021%	3.23
	2	**1.07**	4.61	0.021%	3.22
	3	**1.02**	3.79	0.023%	2.29
	4	**0.87**	3.91	0.021%	3.00
hvb11	-	175.10	40.7%	7.3%	**103.26**
	1	431.91	45.5%	7.2%	**76.87**
	2	**176.62**	29.0%	5.9%	868.06
	3	616.86	47.9%	5.7%	**37.39**
	4	158.69	36.5%	6.9%	**77.85**
混合动态变量 _	-	**0.75**	4.11	0.32%	2.21
	1	**0.83**	4.04	3775.94	2.08
	2	**1.05**	4.04	2838.97	1.87
	3	**0.89**	4.14	349.49	2.13
	4	**0.95**	4.08	433.50	1.66
混合动力 VarCC _	-	**0.91**	12.00	158.14	2.40
	1	**2.08**	13.02	730.83	100%
	2	**0.97**	13.51	7200.00	100%
	3	**2.38**	13.18	7200.00	100%
	4	**1.20**	12.90	7200.00	100%
水能1	-	**1026.99**	0.93%	0.65%	6295.41
	1	**1305.68**	0.93%	0.66%	5883.90
	2	**3528.61**	0.92%	0.65%	5487.34
	3	**2844.90**	0.92%	0.66%	4605.84
	4	**3324.70**	0.93%	0.67%	6541.83
ibs2	-	非最优	中止	5.1%	**20.64**
	1	非最优	∞	40.8%	**12.25**
	2	非最优	中止	17.4%	**8.54**
	3	非最优	中止	14.6%	**8.39**
	4	非最优	中止	13.3%	**8.14**
johnall	-	**2.85**	22.36	44.23	30.44
	1	**3.54**	37.05	43.07	31.43
	2	**2.30**	40.92	44.03	29.52
	3	**2.86**	40.69	43.02	31.01
	4	**2.59**	30.65	43.35	30.52
Kall_圆 C6b_	-	310.13	**62.28**	463.62	183.83
	1	274.68	**55.04**	309.04	179.76

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	2	335.78	**72.49**	417.47	170.66
	3	323.33	**52.58**	374.48	284.95
	4	309.15	**58.86**	459.34	195.62
kall_congruentcircles_c72	-	26.45	**4.74**	49.42	22.40
	1	20.00	**10.50**	41.78	29.79
	2	24.93	**4.45**	38.33	30.96
	3	20.36	**10.36**	44.57	28.19
	4	14.04	**5.11**	40.23	26.06
kissing2	-	**184.78**	867.71	100.0%	100.0%
	1	**286.21**	911.33	100.0%	100.0%
	2	**249.09**	927.99	100.0%	∞
	3	**278.40**	916.33	100.0%	1623.09
	4	**212.31**	909.74	100.0%	397.82
kport20	-	6.1%	13.1%	3596.06	**1001.03**
	1	**1387.42**	10.4%	4236.68	4384.07
	2	3.5%	12.0%	**2599.71**	**2587.04**
	3	3294.62	11.9%	2950.96	**1982.41**
	4	6.3%	11.4%	1998.33	**1456.99**
kriging_peaks-red020	-	**10.33**	21.79	85.61	117.65
	1	**10.52**	21.32	90.28	117.03
	2	**8.61**	21.31	90.38	116.84
	3	**10.46**	21.11	90.31	117.11
	4	**10.84**	21.33	89.54	117.06
kriging_peaks-red100	-	196.08	**140.14**	629.86	7200.00
	1	**131.90**	**142.45**	616.46	7200.00
	2	**133.05**	**140.39**	616.91	7200.00
	3	**132.12**	**138.68**	612.72	7200.00
	4	**133.57**	**142.08**	613.09	7200.00
lop97icx	-	1709.08	39.83	**5.90**	25.38
	1	1963.46	92.39	**8.45**	29.05
	2	2294.75	74.88	**6.74**	30.77
	3	1893.25	68.66	**8.80**	45.83
	4	1623.45	45.81	**8.93**	36.10
mathopt5_7	-	0.29	12.35	**0.08**	0.17
	1	**0.12**	12.49	0.21	0.17
	2	0.12	12.35	**0.08**	0.19
	3	0.12	12.22	**0.08**	0.33
	4	0.22	12.27	**0.08**	0.18
mathopt5_8_	-	0.26	9.72	**0.06**	0.14
	1	0.26	10.66	**0.07**	0.22
	2	0.26	10.83	**0.07**	0.14
	3	0.26	10.71	**0.07**	0.26
	4	0.25	10.79	**0.07**	0.13
maxcsp-geo50-20-d4-75-36	-	16.94	101%	**7.71**	52.80
	1	20.06	101%	**5.53**	335.96
	2	27.23	101%	**7.01**	49.99
	3	**8.13**	103%	25.70	296.74
	4	**22.97**	102%	25.64	186.01
meanvar-orl400_0.5_e_7_	-	95.4%	**23.95**	∞	4080.76
	1	94.3%	**31.77**	6630.62	5981.88
	2	94.2%	**25.01**	6570.19	0.59%
	3	95.0%	非最优	∞	**5120.84**
	4	94.5%	非最优	6663.61	**5806.16**
meanvar-orl400_0.5_e_8_	-	600.24	19.32	**6.00**	2404.35
	1	571.98	∞	**6.89**	2126.66
	2	549.46	非最优	**6.24**	2366.11
	3	645.73	∞	**6.61**	2115.85
	4	407.85	∞	**6.32**	2353.26
mhw4d	-	0.83	0.78	**0.43**	**0.44**
	1	0.82	0.62	1.64	**0.44**
	2	0.69	0.51	1.26	**0.40**
	3	0.82	**0.78**	1.61	**0.74**
	4	0.74	0.65	1.31	**0.37**
milinfract	-	**55.06**	不可行	75.5%	68.8%
	1	**55.42**	不可行	75.4%	75.2%
	2	**55.04**	不可行	75.5%	72.0%
	3	**54.76**	不可行	76.0%	75.3%
	4	**54.45**	不可行	75.7%	70.6%
minlphi	-	∞	**1.86**	100%	100.0%
	1	∞	**1.65**	100%	100.0%
	2	∞	1.74	100%	**0.20**
	3	∞	1.65	100%	**0.07**
	4	∞	1.24	100%	**0.16**
multiplants_mtg1a	-	**2245.95**	15.6%	5.1%	4320.86
	1	1669.44	17.9%	**149.26**	18.8%
	2	**212.57**	15.1%	288.46	3067.67
	3	2199.49	17.9%	**98.00**	4467.25
	4	**1918.40**	17.3%	2301.73	3773.36

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
multiplants_mtg2	-	**2115.70**	0.12%	2%	21.0%
	1	**717.45**	0.15%	1.8%	0.4%
	2	**276.56**	0.13%	469.69	0.27%
	3	**132.47**	0.041%	1%	6.6%
	4	**212.58**	2.2%	1.9%	1%
nd_netgen-3000-1-1-b-b-ns 7_	-	∞	680.80	**3.67**	31.10
	1	99.7%	不可行	不可行	**32.20**
	2	∞	不可行	不可行	**47.17**
	3	99.7%	∞	不可行	**40.17**
	4	99.7%	不可行	不可行	**47.92**
netmod_kar1	-	**4.53**	5948.45	41.89	5.51
	1	11.3%	110.53	51.27	**4.90**
	2	11.1%	311.30	39.29	**4.88**
	3	4420.66	576.52	42.64	**5.64**
	4	15.4%	1050.14	40.84	**5.11**
netmod_kar2	-	**5.26**	5917.59	42.01	**5.77**
	1	11.3%	110.81	51.55	**5.48**
	2	11.1%	311.71	39.14	**4.90**
	3	4429.25	576.74	43.00	**5.64**
	4	15.4%	1051.59	40.95	**5.12**
nous1	-	51.20	2.9%	52.93	**7.70**
	1	39.45	1.7%	48.64	**5.19**
	2	38.92	0.88%	62.63	**2.62**
	3	36.38	1.5%	37.63	**5.75**
	4	15.51	1.5%	42.83	**4.75**
nous2	-	**0.40**	2.16	8.29	0.80
	1	**0.43**	不可行	10.50	0.91
	2	0.77	2.21	8.61	**0.65**
	3	**0.51**	1.76	6.92	0.87
	4	**0.59**	2.25	5.81	0.69
nvs02	-	**0.04**	69.68	0.22	0.06
	1	0.05	63.08	0.11	**0.04**
	2	0.12	54.34	0.28	**0.03**
	3	0.09	39.48	0.11	**0.03**
	4	0.05	46.77	0.15	**0.04**
nvs06	-	0.08	6.64	0.06	**0.02**
	1	0.08	3.90	0.13	**0.03**
	2	0.09	3.79	0.06	**0.03**
	3	0.08	3.83	0.06	**0.03**
	4	0.08	3.84	0.06	**0.03**
oil2	-	**3.30**	43.56	非最优	4.64
	1	非最优	不可行	非最优	**4.55**
	2	**3.55**	不可行	非最优	8.76
	3	**5.05**	22.24	非最优	7.57
	4	**3.64**	39.41	非最优	6.34
optmass	-	∞	11.3%	**463.14**	1.8%
	1	∞	∞	**480.52**	9.9%
	2	∞	∞	**493.97**	7.6%
	3	∞	12.8%	**502.07**	9.9%
	4	∞	12.8%	**507.91**	9.9%
ortez	-	非最优	2.42	9.48	**0.14**
	1	非最优	3.56	18.07	**0.12**
	2	非最优	1.50	0.98	**0.14**
	3	非最优	3.47	1.26	**0.26**
	4	0.25	2.95	7.15	**0.15**
p_ball 10b 5p 3d m_	-	32.22	26.41	49.66	**4.26**
	1	23.79	30.34	52.39	**3.94**
	2	26.62	35.67	不可行	**4.35**
	3	30.37	29.09	70.38	**4.35**
	4	31.69	33.60	49.71	**4.43**
p_ball 15b 5p 2d m_	-	90.52	101.62	不可行	**5.44**
	1	93.01	110.13	不可行	**5.30**
	2	59.07	83.88	不可行	**5.01**
	3	70.12	103.04	不可行	**5.71**
	4	73.50	153.02	不可行	**4.21**
parabol5_2_3_	-	0.051%	15.7%	**4095.70**	0.051%
	1	**7200.00**	不可行	6.6%	**7200.00**
	2	0.051%	16.1%	6.6%	**7200.00**
	3	6.7%	16.4%	**406.60**	7200.00
	4	**7200.00**	不可行	6.6%	**7200.00**
并行	-	19.19	38.93	102.24	**10.26**
	1	17.35	37.95	295.19	**8.15**
	2	19.55	36.08	291.45	**8.78**
	3	22.27	40.15	299.21	**8.40**
	4	20.80	37.29	295.03	**7.73**
pedigree_ex485	-	**68.37**	5.8%	276.45	105.90
	1	**85.93**	6.5%	248.15	104.00
	2	535.45	9.1%	161.40	**56.53**

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	3	**75.96**	5.7%	243.80	**77.55**
	4	**54.46**	4.8%	240.39	79.44
pedigree_ex485_2_	-	17.30	192.97	**3.66**	35.24
	1	14.91	221.77	**1.86**	53.86
	2	17.00	245.18	**1.86**	53.18
	3	15.79	238.26	**1.77**	40.26
	4	16.50	231.25	**1.83**	39.39
pointpack06	-	5.59	27.80	4.76	**3.05**
	1	5.68	30.47	5.09	**2.99**
	2	6.00	31.82	4.68	**3.54**
	3	5.71	47.47	5.55	**3.41**
	4	6.45	30.25	5.18	**3.12**
pointpack08	-	159.31	3611.87	208.18	**61.22**
	1	172.19	3492.98	205.47	**67.88**
	2	194.38	4171.95	201.51	**64.73**
	3	210.56	2597.64	234.46	**60.70**
	4	170.46	3025.00	178.05	**63.89**
pooling_epa1	-	**12.84**	不可行	21.07	**12.87**
	1	**10.13**	不可行	17.86	1054.75
	2	**14.46**	不可行	20.75	19.10
	3	**7.62**	不可行	18.78	21.67
	4	**10.55**	2.4%	20.88	35.76
pooling_epa2	-	2.4%	0.041%	**1694.37**	1.9%
	1	**1030.44**	1.4%	2186.70	1.8%
	2	1.8%	0.088%	**1797.05**	1.8%
	3	3.2%	6096.04	**1992.47**	1.7%
	4	4.3%	0.39%	**1615.89**	2%
投资组合买入	-	**0.34**	2.34	3.56	0.50
	1	0.56	2.27	0.85	**0.35**
	2	**0.30**	2.25	1.72	**0.29**
	3	**0.22**	2.28	3.42	0.41
	4	**0.31**	2.26	3.49	0.57
投资组合卡	-	**0.31**	2.15	5.29	0.58
	1	**0.22**	2.34	1.93	0.95
	2	**0.43**	2.33	4.81	**0.45**
	3	**0.36**	2.09	7.60	**0.33**
	4	**0.31**	2.33	7.36	0.75
powerflow0014r	-	**50.50**	100.0%	100.0%	7079.42
	1	**31.00**	100.0%	66.6%	2519.01
	2	**47.00**	100.0%	100.0%	0.025%
	3	**59.10**	100.0%	100.0%	6935.50
	4	**50.99**	100.0%	88.1%	7200.00
潮流0057r	-	∞	∞	∞	**80.19**
	1	∞	∞	∞	**102.21**
	2	∞	∞	∞	**78.25**
	3	∞	∞	∞	**78.13**
	4	∞	∞	∞	**68.48**
问题07	-	75.62	68.41	**16.19**	76.05
	1	74.75	67.34	15.70	**10.94**
	2	73.53	69.74	15.49	**11.11**
	3	80.90	69.79	16.44	**11.47**
	4	78.75	71.26	16.69	**10.54**
流程	-	**0.51**	1.38	0.93	0.4%
	1	**0.39**	1.53	0.64	0.46
	2	**0.66**	1.44	0.95	0.39%
	3	**0.41**	1.39	0.89	0.39%
	4	**0.42**	1.36	0.58	0.4%
采购1mot	-	**59.57**	86.4%	79.5%	85.0%
	1	**114.45**	87.8%	79.7%	84.2%
	2	**177.11**	86.6%	79.7%	80.6%
	3	**144.06**	87.4%	79.7%	83.9%
	4	**148.48**	87.6%	79.7%	84.5%
采购2mot	-	4.13	13.59	2.71	**2.03**
	1	8.12	12.54	**2.54**	**2.39**
	2	5.86	12.99	2.80	**1.76**
	3	7.10	15.11	3.40	**2.37**
	4	7.46	19.46	**2.67**	3.02
产品	-	48.09	465.36	非最优	**16.80**
	1	非最优	471.35	非最优	**11.71**
	2	非最优	2467.73	非最优	**13.45**
	3	非最优	278.34	非最优	**18.04**
	4	107.32	446.81	非最优	**21.42**
产品2	-	2.90	145.38	**2.53**	3.85
	1	**79.81**	185.85	非最优	不可行
	2	3.41	184.60	**2.92**	不可行
	3	26.03	467.30	**2.62**	不可行
	4	242.41	**133.79**	非最优	不可行
Prolog	-	0.31	100.0%	100.0%	**0.06**

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	1	**1.16**	100.0%	100.0%	中止
	2	0.30	100.0%	100.0%	**0.08**
	3	1.22	100.0%	100.0%	**0.05**
	4	0.36	100%	100.0%	**0.06**
qp3	-	13.7%	**0.01**	4.6%	14.1%
	1	12.2%	**0.01**	4.6%	6%
	2	11.9%	**0.01**	4.6%	6%
	3	12.7%	**0.01**	4.6%	13.8%
	4	13.2%	**0.01**	4.6%	13.4%
qspp_0_10_0_1_10_1_	-	24.2%	632.32	**26.39**	180.85
	1	22.5%	653.67	**25.59**	190.34
	2	21.3%	643.24	**23.37**	174.14
	3	22.5%	661.55	**23.97**	207.82
	4	23.7%	650.22	**22.88**	158.80
qspp_0_11_0_1_10_1_	-	30.5%	3676.78	**124.07**	623.76
	1	31.5%	3955.95	**138.43**	710.85
	2	29.0%	3821.06	**143.49**	770.51
	3	31.4%	3870.07	**131.00**	679.01
	4	31.1%	3857.65	**116.44**	756.40
radar-2000-10-a-6 lat 7_	-	75.1%	**33.14**	**33.34**	129.82
	1	96.8%	64.95	**39.42**	140.45
	2	95.9%	65.73	**39.22**	142.02
	3	6060.60	65.56	**39.32**	141.78
	4	96.8%	64.08	**10.04**	139.60
radar-3000-10-a-8 延迟 7 _	-	100.0%	558.69	**209.09**	422.76
	1	100.0%	732.73	**14.72**	291.33
	2	100.0%	724.04	**14.73**	769.42
	3	99.9%	754.45	**13.79**	287.51
	4	100.0%	730.86	**14.73**	307.35
ravempb	-	**0.82**	3438.61	1.26	3.09
	1	**0.98**	560.99	1.09	2.22
	2	**0.73**	不可行	0.83	1.54
	3	0.91	182.23	**0.80**	2.26
	4	**0.85**	990.98	1.06	2.70
risk2bpb	-	**0.70**	1.46	10.70	不可行
	1	**0.93**	1.72	2.49	不可行
	2	**0.92**	1.49	47.77	不可行
	3	**0.49**	1.51	2.72	不可行
	4	**0.46**	0.99	2.39	不可行
布线延迟 bigm	-	**26.08**	非最优	18.4%	非最优
	1	**14.94**	2.5%	54.3%	非最优
	2	**16.96**	非最优	20.3%	3223.45
	3	**25.96**	2.9%	18.9%	0.97%
	4	**24.02**	非最优	23.3%	非最优
rsyn0815m	-	**0.29**	92.08	1.02	1.44
	1	**0.29**	80.27	1.02	1.45
	2	**0.35**	62.63	1.00	1.88
	3	**0.34**	72.91	0.82	1.57
	4	**0.34**	112.79	1.01	1.61
rsyn0815m03m	-	31.23	非最优	44.8%	**14.06**
	1	47.45	非最优	中止	**20.78**
	2	40.66	中止	33.6%	**14.84**
	3	44.05	非最优	中止	**14.36**
	4	38.36	非最优	中止	**17.09**
sfacloc2_2_95	-	**0.31**	5.25	1.11	2.78
	1	0.74	77.82	**0.58**	2.18
	2	**0.30**	69.08	1.02	2.19
	3	**0.38**	129.88	0.64	2.05
	4	**0.39**	22.24	0.57	2.36
sfacloc2_3_90	-	29.12	588.76	67.86	**20.32**
	1	28.72	3934.46	39.19	**17.48**
	2	**27.15**	11.7%	47.61	**27.05**
	3	**25.26**	1353.20	28.54	**25.05**
	4	**16.92**	39.7%	94.54	27.50
sjup2	-	∞	3456.91	∞	**469.64**
	1	**3049.75**	**2931.24**	∞	1.6%
	2	∞	3562.09	∞	**254.22**
	3	∞	3131.78	100.0%	**308.94**
	4	∞	2986.81	∞	**345.25**
slay06m	-	**0.46**	5.66	0.69	1.85
	1	**0.81**	5.20	0.94	2.42
	2	**0.65**	5.53	0.91	0.94
	3	**0.64**	6.30	0.93	1.25
	4	0.78	5.21	**0.63**	1.57
slay07m	-	**0.62**	6.96	**0.61**	2.05
	1	**0.81**	10.48	1.12	2.01
	2	**0.80**	8.22	1.14	2.01
	3	**0.73**	11.43	0.81	3.39

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	4	**0.85**	11.45	1.26	3.28
smallinvDAXr1b010-011	-	**1.62**	3.51	8.69	2.17
	1	**1.72**	3.08	7.52	2.31
	2	**1.75**	3.57	7.69	2.29
	3	**2.79**	3.05	6.83	**2.74**
	4	**1.65**	3.60	9.48	2.19
smallinvDAXr1b020-022	-	**1.95**	3.46	205.80	3.37
	1	**2.43**	3.95	209.56	2.80
	2	**1.94**	3.56	185.73	2.92
	3	2.26	4.04	192.10	**0.75**
	4	2.22	3.57	158.16	**0.75**
sonet17v4	-	339.62	非最优	**160.55**	949.25
	1	414.29	非最优	**188.66**	1453.04
	2	324.27	非最优	**143.09**	926.01
	3	238.47	非最优	**138.66**	916.91
	4	358.04	非最优	**186.01**	927.66
sonet18v6	-	429.30	非最优	**184.16**	1445.90
	1	439.64	非最优	**154.31**	1353.80
	2	421.41	非最优	**171.20**	1426.08
	3	557.19	非最优	**180.39**	1211.53
	4	624.38	非最优	**206.98**	1208.09
sonetgr17	-	346.77	非最优	**65.24**	1255.92
	1	327.68	29.5%	**129.02**	1229.96
	2	370.11	非最优	**81.73**	1228.20
	3	424.67	5378.39	**36.48**	1043.24
	4	324.24	4886.49	**30.05**	1290.93
spectra2	-	**1.37**	不可行	105%	9.20
	1	**1.35**	不可行	104%	8.46
	2	**1.59**	不可行	105%	12.31
	3	**1.33**	5.75	105%	11.51
	4	**1.33**	不可行	104%	11.05
sporttournament24	-	4982.31	6.7%	**21.48**	45.75
	1	1.3%	8%	**27.89**	59.26
	2	2.5%	7.9%	**15.68**	81.50
	3	1.3%	4.1%	**20.86**	81.00
	4	4451.83	9.8%	**21.45**	121.43
sporttournament30	-	11.8%	12.5%	**1946.51**	0.72%
	1	11.7%	14.3%	**2934.20**	0.84%
	2	12.5%	13.3%	**2795.89**	0.55%
	3	12.0%	13.6%	**2178.10**	6530.54
	4	11.8%	15.3%	**4553.97**	7010.55
sssd12-05persp	-	27.8%	**378.13**	780.87	4.5%
	1	28.1%	中止	**572.29**	4.6%
	2	27.7%	∞	**691.17**	4.8%
	3	28.4%	非最优	**695.56**	4.7%
	4	28.5%	中止	100.0%	**5.1%**
sssd18-06persp	-	41.4%	**7200.00**	19.9%	15.1%
	1	41.4%	非最优	21.4%	**15.9%**
	2	41.4%	中止	25.6%	**16.6%**
	3	41.3%	中止	23.2%	**15.9%**
	4	41.6%	中止	100.0%	**16.5%**
st_testgr1	-	0.24	5.51	**0.07**	0.12
	1	0.34	4.73	**0.06**	0.24
	2	0.37	4.93	**0.07**	0.13
	3	0.13	4.50	**0.06**	0.12
	4	0.12	4.45	**0.07**	0.13
st_testgr3	-	0.24	3.67	**0.07**	0.24
	1	0.23	3.66	**0.07**	0.17
	2	0.23	3.52	**0.06**	0.17
	3	0.24	3.28	**0.07**	0.17
	4	0.24	3.33	**0.07**	0.17
steenbrf	-	14.39	**0.75**	98.0%	12.42
	1	7.59	**1.87**	97.9%	0.038%
	2	9.81	**1.21**	97.9%	0.33%
	3	8.40	**0.99**	98.0%	13.85
	4	**4.69**	9.33	97.8%	0.34%
库存周期	-	7.82	3.18	39.57	**0.79**
	1	6.15	1.36	35.36	**0.56**
	2	5.74	1.85	35.21	**0.96**
	3	6.14	1.57	36.67	**0.79**
	4	7.59	1.63	36.22	**0.71**
supplychainp1 Q22020	-	非最优	20.8%	8.5%	**1056.69**
	1	非最优	33.7%	**11.5%**	中止
	2	非最优	25.5%	11.6%	**0.098%**
	3	非最优	36.8%	11.4%	**0.077%**
	4	非最优	18.6%	11.1%	**4696.71**
供应链p1 030510	-	非最优	63.91	**3.08**	3.54
	1	非最优	92.12	**3.56**	5.41

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
	2	非最优	114.12	3.52	**2.84**
	3	非最优	85.05	**3.39**	4.46
	4	**1.48**	63.43	3.35	3.68
供应链r1 022020	-	**6.13**	12.5%	2966.92	21.97
	1	**11.57**	15.8%	0.88%	27.18
	2	19.28	15.9%	1.1%	**1.64**
	3	6.66	15.5%	1.2%	**2.39**
	4	**10.05**	15.2%	1.9%	26.06
供应链r1 030510	-	0.28	7.19	0.74	**0.12**
	1	0.40	7.87	0.73	**0.28**
	2	0.41	9.32	0.81	**0.20**
	3	0.38	9.23	0.78	**0.16**
	4	0.42	6.65	0.79	**0.16**
syn15m04m	-	**0.54**	42.37	1.04	2.75
	1	**0.67**	43.23	1.44	2.05
	2	**0.58**	41.87	1.48	1.13
	3	**0.49**	44.00	1.13	0.94
	4	**0.50**	43.84	1.40	1.86
syn30m02m	-	2.51	239.18	1.83	**1.58**
	1	2.14	239.12	2.28	**1.39**
	2	**1.92**	249.03	**1.88**	2.18
	3	**2.27**	187.53	2.53	**2.27**
	4	2.71	226.18	2.04	**1.62**
synheat	-	**35.92**	0.36%	17.1%	不可行
	1	**734.68**	0.33%	16.6%	3.9%
	2	**5112.71**	0.34%	15.3%	不可行
	3	**33.77**	0.39%	14.7%	7.2%
	4	**26.63**	0.34%	15.9%	不可行
储罐尺寸	-	4.81	13.85	54.61	**4.12**
	1	5.53	14.77	59.53	**3.22**
	2	5.07	14.41	57.79	**3.13**
	3	4.37	16.30	57.19	**3.40**
	4	5.57	14.46	58.71	**3.34**
Telecomsp Pacbell	-	3393.96	2.8%	**1125.10**	0.63%
	1	2926.69	8.2%	**2376.86**	0.81%
	2	3854.14	5.4%	**2301.23**	0.96%
	3	0.52%	5%	**1194.43**	0.78%
	4	2094.65	6.2%	**1483.59**	0.58%
tln5	-	5.26	30.1%	2.08	**0.50**
	1	8.30	30.1%	1.20	**0.78**
	2	5.75	31.1%	1.91	**0.69**
	3	3.67	30.1%	1.74	**0.75**
	4	2.76	29.1%	1.63	**0.44**
tln7	-	2935.35	61.4%	274.33	**188.05**
	1	1666.87	70.9%	357.03	**122.53**
	2	1.3%	65.1%	**301.36**	**302.03**
	3	1622.52	69.1%	**328.32**	970.70
	4	4263.19	66.5%	**319.16**	**338.06**
tls2	-	**0.13**	5.43	0.18	0.93
	1	**0.14**	8.16	**0.14**	1.08
	2	**0.14**	7.82	**0.14**	0.59
	3	**0.13**	4.81	0.15	0.84
	4	**0.14**	7.82	**0.14**	0.79
tls4	-	**35.15**	833.24	**36.82**	41.19
	1	**30.56**	870.73	34.63	44.52
	2	42.93	中止	**31.00**	41.94
	3	**26.01**	中止	29.09	40.57
	4	38.94	865.53	**32.69**	47.23
topopt-mbb 60x40 50	-	∞	**195.38**	∞	∞
	1	∞	非最优	∞	∞
	2	∞	非最优	∞	∞
	3	∞	非最优	∞	∞
	4	∞	**481.77**	∞	∞
toroidal2g20 5555	-	3747.17	非最优	**3.23**	5.70
	1	833.26	非最优	**3.58**	6.35
	2	2465.17	非最优	**2.57**	5.91
	3	914.43	非最优	**3.40**	4.66
	4	1190.57	非最优	**3.07**	5.89
toroidal3g7 6666	-	6.2%	非最优	**67.16**	141.64
	1	4.6%	非最优	**74.53**	174.00
	2	5.7%	非最优	**86.25**	148.01
	3	6%	非最优	**122.43**	**122.20**
	4	5.4%	非最优	**88.10**	**89.17**
transswitch0009r	-	8%	16.0%	5.6%	**6975.38**
	1	6.5%	18.1%	5%	**5869.65**
	2	7.7%	23.3%	4%	**6188.29**
	3	11.9%	19.6%	5.6%	**0.43%**
	4	7.4%	21.9%	3.8%	**6364.97**

实例	perm	BARON	Lindo API	Octeract	SCIP
tricp	-	**0.82**	不可行	100.0%	100.0%
	1	**7.10**	不可行	0.02%	100.0%
	2	**182.36**	不可行	100.0%	100.0%
	3	167.41	不可行	**2.02**	100.0%
	4	**405.43**	不可行	100.0%	100.0%
tspn08	-	**10.81**	10.9%	2.3%	17.8%
	1	**13.75**	10.9%	2.3%	17.4%
	2	**10.93**	10.6%	2.3%	19.1%
	3	**11.68**	9.5%	2.4%	19.8%
	4	**8.78**	10.8%	2.3%	19.5%
tspn15	-	**884.44**	12.8%	81.4%	50.0%
	1	**967.84**	12.8%	79.9%	52.0%
	2	**1235.57**	12.6%	82.7%	52.7%
	3	**1129.22**	12.8%	79.7%	49.7%
	4	**1088.07**	12.8%	78.4%	52.7%
机组组合1	-	0.27%	**81.17**	1082.69	不可行
	1	1.4%	**65.40**	1838.25	不可行
	2	1.5%	**85.31**	1538.88	不可行
	3	1.3%	**60.10**	1517.16	不可行
	4	1.5%	**69.59**	1419.76	不可行
机组组合2	-	7200.00	18.0%	**11.20**	439.70
	1	7200.00	19.6%	**8.42**	23.15
	2	7200.00	19.3%	**9.70**	10.83
	3	7200.00	18.2%	**8.15**	不可行
	4	7200.00	21.1%	**7.83**	不可行
赌注	-	15.30	∞	252.73	**3.46**
	1	**17.16**	28.9%	482.07	53.79
	2	8.88	28.6%	1694.38	**1.53**
	3	15.85	∞	324.73	**9.28**
	4	14.15	37.2%	644.93	**11.81**
废弃物	-	**22.55**	46.3%	99.9%	38.85
	1	**34.81**	46.2%	100.0%	**34.62**
	2	**26.85**	36.9%	100.0%	不可行
	3	**38.54**	47.0%	100.0%	44.26
	4	**24.72**	46.6%	100.0%	41.89
废纸3	-	9.19	33.90	22.76	**4.22**
	1	11.99	33.19	27.77	**4.01**
	2	7.51	32.25	24.13	**3.55**
	3	8.27	39.31	26.56	**5.57**
	4	11.26	31.73	23.90	**2.41**
废纸4	-	871.50	2320.60	2099.99	**167.16**
	1	328.30	1712.61	1708.66	**144.72**
	2	365.29	2919.38	1800.71	**113.53**
	3	229.96	2723.08	1593.40	**117.95**
	4	349.52	2223.22	1838.80	**213.66**
废纸6	-	**0.022%**	中止	0.16%	**0.023%**
	1	**7200.00**	中止	0.22%	0.044%
	2	**7200.00**	**7200.00**	0.13%	0.044%
	3	**7200.00**	0.022%	0.2%	0.051%
	4	**7200.00**	**7200.00**	0.13%	0.058%
水4	-	44.4%	46.1%	**1648.53**	非最优
	1	42.9%	51.9%	**1946.91**	非最优
	2	47.4%	51.1%	**2214.42**	非最优
	3	45.8%	51.2%	**2181.62**	非最优
	4	44.1%	53.2%	**2084.97**	非最优
水nd1	-	5.50	1130.72	**1.34**	7.21
	1	5.06	1101.35	**1.30**	4.58
	2	7.94	1150.81	**1.36**	5.74
	3	22.42	1046.61	**1.40**	10.78
	4	10.55	1181.39	**1.61**	7.26
水no2 02 _	-	5.20	26.45	4.18	**2.89**
	1	**3.89**	60.16	6.69	**4.15**
	2	5.13	28.66	6.66	**3.72**
	3	**2.36**	28.36	6.69	3.91
	4	4.53	24.33	4.40	**3.38**
水no2 03 _	-	**260.33**	1886.92	440.65	非最优
	1	**254.85**	1847.35	479.46	非最优
	2	270.87	1970.97	494.92	**43.44**
	3	**313.74**	2146.47	681.78	非最优
	4	356.97	2060.53	550.59	**38.73**
waterund01	-	0.35%	不可行	0.18%	**1525.91**
	1	0.34%	0.84%	0.18%	**1988.24**
	2	0.34%	不可行	0.18%	**3003.09**
	3	0.35%	0.98%	0.18%	**0.025%**
	4	0.35%	不可行	0.18%	**16.83**

B.2 Octeract 间隙限制

下表显示了在测试集中的 200 个未置换实例上，以串行模式运行 Octeract 且将两个间隙限制均设置为 10^{-6} 或 10^{-4} 时的结果。

实例	10^{-6}	10^{-4}
alan	**0.05**	**0.05**
autocorr bern20-05	**4.36**	**4.39**
autocorr bern35-04	**12.7%**	**12.7%**
ball mk2 10	**0.01**	**0.01**
ball mk2 30	**0.02**	0.02
ball mk3 10	**0.04**	**0.04**
batch0812 nc	**8.37**	**8.63**
batchs101006m	**4.84**	**4.92**
batchs121208m	**79.1%**	**79.1%**
bayes2 20	**0.033%**	**0.033%**
bayes2 30	**7200.00**	**7200.00**
blend029	**29.33**	**30.14**
blend146	**8.8%**	**8.8%**
camshape100	**19.40**	**19.42**
cardqp inlp	**792.06**	**788.89**
cardqp iqp	**785.02**	**793.77**
carton7	**6.03**	**6.34**
carton9	**344.94**	**346.42**
casctanks	**11.8%**	**12.4%**
cecil 13	**188.40**	**205.63**
celar6-sub0	∞	∞
脉轮	**7200.00**	**7200.00**
chem	**0.18**	**0.18**
Chenery	**200.71**	**200.09**
Chimera k64maxcut-01	**168.60**	**169.03**
Chimera mis-01	**1.14**	1.45
CHP 短期计划1a	**64.74**	**65.18**
chp shorttermplan2a	**17.59**	**17.69**
chp shorttermplan2b	**0.67%**	**0.69%**
clay0204m	**1.47**	**1.45**
clay0205m	**15.10**	**14.97**
color lab3 3x0	∞	∞
越库15x7	∞	∞
越库15x8	**6306.65**	**6336.71**
原油 lee1 07	8.56	**7.58**
原油汇集ct2	非最优	非最优
csched1	**8.1%**	**8.1%**
csched1a	**17.77**	**17.43**
cvxnonsep psig20	**35.0%**	**35.0%**
cvxnonsep psig30	**45.6%**	**45.6%**
du-opt	**122.38**	**122.77**
du-opt5	**101.32**	**102.03**
edgecross10-040	**4.16**	**4.11**
edgecross10-080	**6%**	**5.6%**
eg all s	**102%**	**102%**
eigena2	**416.89**	523.38
elec50	**66.4%**	**66.4%**
elf	**2.54**	**2.54**
eniplac	1.54	**1.30**
enpro56pb	**1.98**	2.31
ex1244	**81.99**	**82.60**
ex1252a	**245.41**	**248.28**
faclay20h	**785.28**	**781.38**
faclay80	∞	∞
feedtray	**82.1%**	**82.1%**
fin2bb	**100.0%**	**100.0%**
flay04m	**0.87**	**0.90**
flay05m	不可行	不可行
flay06m	不可行	不可行
fo7 ar25 1	**8.95**	**8.99**
fo7 ar3 1	**18.33**	**18.57**
森林	非最优	非最优
gabriel01	**2%**	4.3%
gabriel02	**7078.04**	**6811.48**
GasNet	**96.7%**	**96.7%**
gasprod sarawak16	**0.74%**	**0.68%**
gastrans582 cold13 95	∞	∞
gastrans582 mild11	∞	∞
gear	0.11	**0.07**
gear2	0.14	**0.13**
gear4	**17.56**	**17.33**
genpooling lee1	**117.04**	**117.72**

实例	10^{-6}	10^{-4}
genpooling_lee2	**186.63**	**186.60**
ghg_1veh	**12.42**	**12.36**
Gilbert	**0.9%**	**0.9%**
图划分 2g-0066-0066	0.75	**0.43**
图划分 clique-60	**2890.51**	**2884.75**
gsg_0001	**8.58**	**8.56**
哈达玛矩阵 5_	**20.45**	**20.23**
heatexch_spec1	**17.7%**	**17.7%**
heatexch_spec2	**5%**	**5%**
hhfair	∞	∞
himmel16	**12.95**	**13.27**
房屋	**108.41**	**108.71**
hs62	**0.023%**	**0.023%**
hvb11	**7.3%**	**7.3%**
混合动态变量 _	**0.32%**	**0.32%**
混合动力 VarCC -	**158.14**	**158.12**
水能1	**0.65%**	**0.65%**
ibs2	**5.1%**	**5.1%**
johnall	**44.23**	**43.95**
Kall_圆 C6b-	**463.62**	**466.28**
kall_congruentcircles_c72	**49.42**	**49.78**
kissing2	**100.0%**	**100.0%**
kport20	**3596.06**	**3593.09**
kriging_peaks-red020	**85.61**	**85.98**
kriging_peaks-red100	**629.86**	**630.04**
lop97icx	**5.90**	**5.90**
mathopt5_7	**0.08**	**0.08**
mathopt5_8_	**0.06**	**0.07**
maxcsp-geo50-20-d4-75-36	**7.71**	**7.78**
meanvar-orl400_05_e_7_	∞	∞
meanvar-orl400_05_e_8_	**6.00**	**5.98**
mhw4d	**0.43**	0.62
milinfract	**75.5%**	**75.5%**
minlphi	**100%**	**100%**
multiplants_mtg1a	**5.1%**	**5.1%**
multiplants_mtg2	**2%**	**2%**
nd_netgen-3000-1-1-b-b-ns_7_	**3.67**	**3.59**
netmod_kar1	**41.89**	**41.79**
netmod_kar2	**42.01**	**42.04**
nous1	**52.93**	**52.90**
nous2	**8.29**	**8.04**
nvs02	0.22	**0.15**
nvs06	**0.06**	**0.06**
oil2	非最优	非最优
optmass	**463.14**	**463.57**
ortez	**9.48**	**9.48**
p_ball_10b_5p_3d_m_	**49.66**	**49.32**
p_ball_15b_5p_2d_m_	不可行	不可行
parabol5_2_3_	**4095.70**	**4110.54**
并行	**102.24**	**102.42**
pedigree_ex485	**276.45**	**277.27**
pedigree_ex485_2_	**3.66**	**3.94**
pointpack06	**4.76**	**4.77**
pointpack08	**208.18**	**209.02**
pooling_epa1	**21.07**	**21.10**
pooling_epa2	**1694.37**	2039.75
投资组合买入	**3.56**	**3.37**
投资组合卡	**5.29**	**5.26**
powerflow0014r	**100.0%**	**100.0%**
潮流0057r	∞	∞
问题07	**16.19**	**15.83**
流程	**0.93**	**0.92**
采购1mot	**79.5%**	**79.5%**
采购2mot	**2.71**	**2.69**
产品	非最优	非最优
产品2	**2.53**	2.84
Prolog	**100.0%**	**100.0%**
qp3	**4.6%**	**4.6%**
qspp-0_10_0_1_10_1_	**26.39**	**26.51**
qspp-0_11_0_1_10_1_	**124.07**	**124.05**
radar-2000-10-a-6_延迟_7_	**33.34**	**32.97**
radar-3000-10-a-8_延迟_7_	**209.09**	**208.61**
ravempb	1.26	**0.96**
risk2bpb	**10.70**	**10.68**
布线延迟 bigm	**18.4%**	**18.4%**
rsyn0815m	**1.02**	**1.05**
rsyn0815m03m	**44.8%**	**44.8%**
sfacloc2_2_95	1.11	**0.79**

实例	10^{-6}	10^{-4}
sfacloc2 3 90	**67.86**	**67.78**
sjup2	∞	∞
slay06m	0.69	**0.48**
slay07m	**0.61**	0.91
smallinvDAXr1b010-011	**8.69**	**8.99**
smallinvDAXr1b020-022	**205.80**	**208.43**
sonet17v4	**160.55**	**160.19**
sonet18v6	**184.16**	**184.08**
sonetgr17	**65.24**	**65.03**
spectra2	**105%**	**105%**
sporttournament24	**21.48**	**21.47**
sporttournament30	**1946.51**	**1959.43**
sssd12-05persp	**780.87**	**780.44**
sssd18-06persp	**19.9%**	**20.2%**
st_testgr1	**0.07**	**0.07**
st_testgr3	**0.07**	**0.07**
steenbrf	**98.0%**	**98.0%**
库存周期	**39.57**	**39.61**
supplychainp1 022020	**8.5%**	**8.8%**
供应链p1 030510	**3.08**	**3.10**
供应链r1 022020	**2966.92**	**2966.61**
供应链r1 030510	**0.74**	**0.74**
syn15m04m	**1.04**	1.36
syn30m02m	1.83	**1.56**
synheat	**17.1%**	**17.1%**
储罐尺寸	**54.61**	**54.45**
Telecomsp_Pacbell	**1125.10**	**1111.55**
tln5	**2.08**	**2.10**
tln7	**274.33**	**274.65**
tls2	**0.18**	0.22
tls4	**36.82**	**37.19**
topopt-mbb 60x40 50	∞	∞
toroidal2g20 5555	**3.23**	**2.98**
toroidal3g7 6666	**67.16**	**67.08**
transswitch0009r	**5.6%**	**5.5%**
tricp	**100.0%**	**100.0%**
tspn08	**2.3%**	**2.3%**
tspn15	**81.4%**	**81.4%**
机组组合1	**1082.69**	**1092.08**
机组组合2	**11.20**	**11.23**
赌注	**252.73**	**252.96**
废弃物	**99.9%**	**99.9%**
废纸3	**22.76**	**22.60**
废纸4	**2099.99**	**2110.22**
废纸6	**0.16%**	0.21%
水4	**1648.53**	2062.46
水nd1	1.34	**1.08**
水no2 02_	**4.18**	**4.11**
水no2 03_	**440.65**	**440.06**
waterund01	**0.18%**	**0.18%**

B.3 并行模式

下表展示了以串行和并行模式运行 BARON 的结果。

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
alan	**0.33**	0.38	0.37	**0.36**
自相关 bern20-05	7.29	1.91	**1.33**	**1.31**
自相关 bern35-04	29.91	8.44	5.71	**4.66**
ball_mk2_10	**0.07**	**0.07**	**0.07**	0.20
ball_mk2_30	0.25	**0.08**	**0.08**	**0.08**
ball_mk3_10	**10.58**	**11.19**	**11.35**	11.71
batch0812_nc	6.57	**5.33**	6.47	**5.32**
batchs101006m	**6.91**	13.82	9.41	11.02
batchs121208m	47.33	**26.40**	**24.95**	32.16
bayes2_20	**67.77**	**68.42**	**70.96**	**68.64**
bayes2_30	**21.02**	**22.46**	**21.94**	**23.08**
blend029	**1.03**	1.08	1.25	**0.95**
blend146	3648.64	**2175.95**	2854.41	3654.96
camshape100	**9.2%**	**9.2%**	**9.2%**	**9.2%**
cardqp_inlp	12.40	**10.82**	12.25	18.77
cardqp_iqp	12.92	**10.80**	12.49	18.70
carton7	987.64	1964.21	1441.91	**832.10**

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
carton9	45.0%	**36.0%**	46.9%	**37.9%**
casctanks	**256.46**	**251.20**	**248.18**	**251.93**
cecil_13	280.62	238.03	**201.60**	**195.64**
celar6-sub0	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
脉轮	**0.14**	**0.15**	**0.14**	**0.15**
chem	**0.04**	**0.04**	**0.04**	**0.04**
Chenery	1.40	1.42	**1.23**	**1.16**
Chimera_k64maxcut-01	560.62	183.06	**119.55**	171.40
Chimera_mis-01	13.69	**12.39**	**11.84**	**12.54**
CHP_shorttermplan1a	2296.84	2329.95	0.061%	**1276.12**
chp_shorttermplan2a	**937.38**	**1002.49**	**999.57**	**956.66**
chp_shorttermplan2b	0.34%	**0.31%**	**0.3%**	**0.31%**
clay0204m	0.47	0.37	**0.24**	1.28
clay0205m	4.92	3.78	**2.63**	4.94
color_lab3_3x0	2654.00	606.50	383.87	**346.70**
越库15x7_	385.56	87.79	49.36	**38.69**
越库15x8_	788.81	322.11	128.24	**102.94**
原油 lee1_07_	**7.50**	**7.47**	27.59	**6.98**
原油汇集_ct2_	4.95	41.75	21.47	**4.28**
csched1	**13.03**	**12.42**	29.59	31.28
csched1a	**0.70**	**0.76**	**0.70**	0.78
cvxnonsep_psig20	**0.99**	**0.92**	**0.91**	**0.95**
cvxnonsep_psig30	**4.25**	**4.06**	**4.13**	**4.21**
du-opt	2.37	2.18	**1.95**	2.26
du-opt5	**3.61**	**3.34**	**3.32**	**3.54**
edgecross10-040	7.25	2.73	**2.13**	2.54
edgecross10-080	51.58	15.21	10.25	**9.23**
eg_all_s_	不可行	不可行	不可行	**90.9%**
eigena2	**1146.69**	**1150.94**	**1136.30**	**1132.85**
elec50	**66.5%**	**66.5%**	**66.5%**	**66.5%**
elf	5.91	**4.52**	**4.24**	5.65
eniplac	4.54	**4.04**	5.48	9.66
enpro56pb	**1.84**	3.38	**2.01**	2.92
ex1244	4.86	**4.56**	**4.49**	**4.23**
ex1252a	**9.12**	**9.19**	**8.97**	10.85
faclay20h	349.36	91.42	98.32	**47.33**
faclay80	**120%**	**120%**	**120%**	**120%**
feedtray	**80.5%**	**80.5%**	**80.5%**	**80.5%**
fin2bb	114.16	**83.45**	97.44	91.84
flay04m	10.56	**9.18**	**8.80**	**8.94**
flay05m	394.85	**370.14**	**353.95**	411.75
flay06m	**7%**	7.2%	**6.4%**	**6.6%**
fo7_ar25_1_	17.00	4.55	5.17	**3.37**
fo7_ar3_1_	25.69	52.69	30.43	**21.73**
森林	**747.74**	1311.21	877.73	1470.56
gabriel01	1760.52	1619.79	1272.26	**1131.82**
gabriel02	11.1%	18.1%	**9%**	15.6%
GasNet	**22.38**	57.1%	50.7%	50.7%
gasprod_sarawak16	4578.18	5171.96	2524.08	**2214.82**
gastrans582_cold13_95	1442.44	**732.29**	954.39	1435.95
gastrans582_mild11	**687.72**	1206.29	1283.65	2130.36
gear	**0.12**	**0.11**	**0.11**	0.28
gear2	**0.64**	**0.62**	0.69	**0.67**
gear4	**1.63**	**1.53**	1.90	2.39
genpooling_lee1	9.37	**5.21**	**5.37**	**5.46**
genpooling_lee2	**85.93**	**84.33**	**83.67**	**85.79**
ghg_1veh	**2.77**	**2.96**	3.11	**2.98**
Gilbert	**2.35**	2.60	**2.56**	**2.38**
图划分 2g-0066-0066	0.65	0.76	0.46	**0.37**
graphpart_clique-60	**34.6%**	100.0%	100.0%	100.0%
gsg_0001	13.68	16.00	16.69	**11.94**
哈达玛矩阵 5_	54.92	17.35	**8.54**	9.77
heatexch_spec1	**1.39**	1.64	1.76	**1.32**
heatexch_spec2	**6.60**	7.91	8.50	7.88
hhfair	0.43	0.39	0.42	**0.35**
himmel16	41.46	**36.26**	**36.42**	**36.46**
房屋	**0.37**	**0.38**	**0.38**	0.57
hs62	1.07	1.08	**0.94**	**0.88**
hvb11	**175.10**	**174.88**	**179.60**	**177.88**
混合动态变量_	**0.75**	**0.75**	0.98	1.09
混合动力 VarCC_	0.91	**0.75**	**0.77**	**0.78**
水能1	**1026.99**	**1057.36**	**1054.54**	**1057.15**
ibs2	非最优	非最优	非最优	非最优
johnall	2.85	2.51	2.50	**2.23**
Kall_圆 C6b_	**310.13**	**313.79**	**307.19**	**306.85**
kall_congruentcircles_c72	26.45	27.78	**24.66**	**22.91**
kissing2	**184.78**	207.89	**184.05**	207.42
kport20	6.1%	**3.3%**	6.8%	5.7%

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
kriging peaks-red020	10.33	**9.90**	**9.00**	**9.43**
kriging peaks-red100	**196.08**	**198.30**	**195.92**	**193.18**
lop97icx	1709.08	450.05	**315.56**	**317.81**
mathopt5 7	0.29	**0.13**	**0.12**	**0.12**
mathopt5 8	**0.26**	0.43	0.40	**0.26**
maxcsp-geo50-20-d4-75-36	**16.94**	18.01	**15.92**	**17.40**
meanvar-orl400 05 e 7	**95.4%**	**94.7%**	**94.3%**	**94.8%**
meanvar-orl400 05 e 8	600.24	541.81	508.87	**455.48**
mhw4d	0.83	**0.70**	**0.67**	0.80
milinfract	**55.06**	**54.78**	**54.71**	**55.20**
minlphi	∞	∞	∞	∞
multiplants mtg1a	2245.95	2338.78	4026.31	**1138.55**
multiplants mtg2	**2115.70**	**2189.56**	**2175.33**	**2125.52**
nd-netgen-3000-1-1-b-b-ns 7	∞	∞	∞	∞
netmod kar1	**4.53**	5.70	5.71	6.81
netmod kar2	**5.26**	**5.46**	**5.75**	6.88
nous1	51.20	**47.60**	**44.39**	53.14
nous2	0.40	**0.35**	**0.34**	**0.36**
nvs02	**0.04**	0.05	0.05	0.05
nvs06	**0.08**	**0.08**	0.10	0.10
oil2	3.30	3.02	3.00	**2.67**
optmass	∞	∞	∞	∞
ortez	非最优	非最优	非最优	非最优
p_ball 10b 5p 3d m	32.22	23.87	**20.81**	25.42
p-ball 15b 5p 2d m	90.52	**63.59**	**63.02**	77.58
parabol5 2 3	**0.051%**	**0.051%**	**0.051%**	**0.051%**
并行	**19.19**	21.16	20.85	**18.15**
pedigree ex485	68.37	**39.15**	79.06	414.20
pedigree ex485 2	17.30	**14.20**	16.23	**14.65**
pointpack06	5.59	6.60	**4.94**	5.96
pointpack08	**159.31**	**153.67**	**154.66**	**151.67**
pooling epa1	**12.84**	**11.97**	14.83	14.15
pooling epa2	2.4%	**0.44%**	5.5%	3%
投资组合买入	**0.34**	**0.33**	**0.34**	**0.32**
投资组合卡	**0.31**	**0.30**	**0.29**	**0.30**
powerflow0014r	**50.50**	**51.54**	**50.22**	**53.19**
潮流0057r	∞	∞	∞	∞
问题07	**75.62**	81.05	**76.59**	**71.80**
流程	0.51	0.52	**0.42**	**0.42**
采购1mot	**59.57**	**59.24**	**63.12**	**61.09**
采购2mot	4.13	4.24	**3.78**	**3.65**
产品	48.09	**24.31**	49.29	非最优
产品2	**2.90**	225.61	76.64	289.08
Prolog	**0.31**	**0.32**	**0.33**	0.36
qp3	**13.7%**	**14.0%**	**14.2%**	**14.4%**
qspp-0 10 0 1-10 1	**24.2%**	**23.8%**	**23.7%**	**23.8%**
qspp-0 11 0 1-10 1	**30.5%**	**30.1%**	**30.1%**	**30.1%**
radar-2000-10-a-6 lat 7	**75.1%**	91.0%	91.0%	91.0%
radar-3000-10-a-8 延迟 7	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
ravempb	**0.82**	**0.80**	1.05	0.94
risk2bpb	0.70	**0.43**	**0.46**	0.49
布线延迟 bigm	26.08	**23.23**	**23.91**	**24.85**
rsyn0815m	0.29	**0.26**	**0.26**	**0.26**
rsyn0815m03m	**31.23**	38.94	34.49	39.53
sfacloc2 2 95	0.31	**0.28**	0.41	**0.27**
sfacloc2 3 90	29.12	24.28	**14.83**	**16.30**
sjup2	∞	∞	∞	∞
slay06m	0.46	**0.41**	0.48	0.59
slay07m	**0.62**	0.64	**0.58**	**0.58**
smallinvDAXr1b010-011	1.62	**1.52**	**1.44**	**1.52**
smallinvDAXr1b020-022	1.95	2.26	**1.63**	**1.75**
sonet17v4	339.62	62.99	**33.05**	**33.46**
sonet18v6	429.30	97.11	**62.50**	**60.56**
sonetgr17	346.77	74.19	44.37	**29.83**
spectra2	**1.37**	**1.29**	1.47	**1.38**
sporttournament24	4982.31	1521.61	**722.06**	**763.20**
sporttournament30	**11.8%**	67.7%	67.7%	67.7%
sssd12-05persp	**27.8%**	**28.0%**	**27.8%**	**27.6%**
sssd18-06persp	**41.4%**	**40.5%**	**41.4%**	**41.3%**
st testgr1	0.24	**0.14**	0.16	0.22
st testgr3	**0.24**	0.28	0.35	0.50
steenbrf	**14.39**	**15.32**	**15.07**	17.55
库存周期	7.82	**6.48**	**6.94**	**7.08**
supplychainp1 022020	非最优	非最优	非最优	非最优
供应链p1 030510	非最优	非最优	非最优	非最优
供应链r1 022020	6.13	**5.67**	**5.47**	**5.25**
供应链r1 030510	0.28	**0.26**	**0.25**	0.37
syn15m04m	0.54	**0.45**	**0.47**	**0.49**

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
syn30m02m	2.51	**2.20**	**2.38**	**2.21**
synheat	35.92	28.74	**26.21**	**25.37**
储罐尺寸	4.81	**4.17**	4.75	**4.07**
Telecomsp Pacbell	3393.96	1396.50	**1189.08**	1401.72
tln5	5.26	**1.33**	5.03	5.53
tln7	2935.35	**1739.45**	3085.42	2.7%
tls2	**0.13**	**0.12**	0.22	**0.12**
tls4	35.15	16.87	**14.67**	20.79
topopt-mbb 60x40 50	∞	∞	∞	∞
toroidal2g20 5555	3747.17	114.31	**81.54**	190.59
toroidal3g7 6666	**6.2%**	74.7%	74.7%	74.7%
transswitch0009r	**8%**	**8%**	**8%**	**8%**
tricp	**0.82**	1.25	1.11	1.14
tspn08	10.81	**9.28**	11.25	**9.49**
tspn15	884.44	1003.34	**412.58**	**410.34**
机组组合1	**0.27%**	**0.27%**	**0.27%**	**0.27%**
机组组合2	7200.00	**725.90**	6169.57	**732.94**
赌注	**15.30**	27.54	25.87	27.99
废弃物	**22.55**	**24.58**	**23.21**	29.11
废纸3	**9.19**	14.02	14.63	12.67
废纸4	871.50	**417.33**	763.71	556.85
废纸6	0.022%	0.022%	**7200.00**	0.022%
水4	**44.4%**	**43.7%**	**47.6%**	49.2%
水nd1	**5.50**	6.83	6.98	6.07
水no2 02 _	5.20	**4.18**	**4.33**	5.03
水no2 03 _	**260.33**	**262.06**	**272.21**	**272.70**
waterund01	**0.35%**	**0.35%**	**0.35%**	**0.35%**

下表展示了以串行和并行模式运行 Lindo API 的结果。

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
alan	**0.89%**	**0.89%**	**0.89%**	**0.89%**
autocorr bern20-05	100.43	33.83	**23.88**	**21.91**
autocorr bern35-04	13.5%	2655.83	**1788.33**	2461.81
ball_mk2 10	3.98	2.17	**1.28**	1.43
ball_mk2 30	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
ball_mk3 10	3.58	**1.79**	2.05	2.17
batch0812 nc	25.46	**18.73**	**17.51**	**17.68**
batchs101006m	**134.04**	中止	中止	中止
batchs121208m	**198.76**	中止	中止	中止
bayes2 20	**0.033%**	**0.033%**	**0.033%**	不可行
bayes2 30	**7200.00**	中止	**7200.00**	不可行
blend029	中止	205.94	166.19	**96.01**
blend146	中止	5.8%	**4.2%**	6.8%
camshape100	**9.2%**	**8.9%**	**8.7%**	**8.4%**
cardqp inlp	**134.08**	非最优	非最优	非最优
cardqp iqp	**133.22**	非最优	非最优	非最优
carton7	**110.53**	**110.35**	**110.48**	**110.50**
carton9	**287.45**	**287.68**	**287.13**	**287.83**
casctanks	**3.4%**	**3.4%**	**3.4%**	**3.4%**
cecil_13	0.32%	0.16%	0.11%	**5951.36**
celar6-sub0	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**
脉轮	1.28	**0.34**	不可行	不可行
chem	1172.22	471.44	**314.57**	**329.14**
Chenery	**0.43%**	**0.43%**	**0.43%**	中止
Chimera k64maxcut-01	**16.4%**	**16.4%**	**16.1%**	**16.7%**
Chimera mis-01	非最优	非最优	非最优	非最优
CHP_shorttermplan1a	∞	∞	∞	∞
chp shorttermplan2a	∞	∞	∞	∞
chp shorttermplan2b	16.6%	6045.30	5089.35	**3782.12**
clay0204m	4.75	**2.51**	**2.56**	**2.44**
clay0205m	51.80	18.76	11.84	**10.23**
color_lab3 3x0	**65.6%**	**65.6%**	**65.6%**	**65.6%**
越库15x7 _	**124%**	**124%**	**124%**	**124%**
越库15x8 _	**124%**	**124%**	**124%**	**124%**
原油 lee1_07 _	**63.26**	**63.10**	**63.51**	**63.54**
原油汇集ct2 _	1.8%	3.1%	**1.6%**	**1.5%**
csched1	66.81	65.05	46.49	**36.59**
csched1a	4.85	2.82	**2.44**	**2.36**
cvxnonsep psig20	0.48	**0.25**	**0.25**	**0.25**
cvxnonsep psig30	3.26	**3.00**	**3.05**	**2.95**
du-opt	**5.35**	5.94	5.92	6.74
du-opt5	**4.70**	**4.77**	**4.63**	5.17
edgecross10-040	0.29	**0.12**	**0.12**	**0.12**
edgecross10-080	非最优	非最优	非最优	非最优

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
eg_all_s_	中止	中止	中止	中止
eigena2	∞	∞	∞	∞
elec50	798.72	**648.65**	757.22	**656.49**
elf	非最优	**2.56**	不可行	3.02
eniplac	3%	3952.97	3085.99	**2683.08**
enpro56pb	1454.20	564.02	92.37	**42.35**
ex1244	9.69	**6.99**	**6.71**	**6.71**
ex1252a	不可行	不可行	不可行	不可行
faclay20h	非最优	非最优	非最优	非最优
faclay80	**5096.67**	**5092.40**	**5092.51**	**5120.74**
feedtray	**13.79**	**13.86**	**13.58**	**13.71**
fin2bb	**1294.03**	3136.42	0.59%	3467.31
flay04m	647.41	231.73	166.42	**123.11**
flay05m	0.54%	0.038%	5375.73	**3837.92**
flay06m	14.3%	9.5%	8.2%	**6.8%**
fo7_ar25_1_	1282.08	**662.73**	**661.65**	**661.84**
fo7_ar3_1_	1847.41	**796.80**	**752.45**	954.82
森林	**1.18**	**1.18**	**1.23**	1.53
gabriel01	5.4%	4.5%	4.2%	**3.8%**
gabriel02	**44.0%**	**43.0%**	**42.2%**	**42.1%**
GasNet	**64.9%**	**64.1%**	**63.9%**	**63.8%**
gasprod_sarawak16	不可行	**0.4%**	**0.4%**	1.2%
gastrans582_cold13_95	∞	∞	∞	∞
gastrans582_mild11	∞	∞	∞	∞
gear	**0.05**	0.06	0.06	0.06
gear2	**0.23**	**0.23**	**0.24**	**0.24**
gear4	不可行	不可行	不可行	不可行
genpooling_lee1	0.41%	680.62	**136.93**	不可行
genpooling_lee2	3724.02	169.90	111.71	**86.41**
温室气体 1veh	106.61	60.51	**46.93**	**45.15**
Gilbert	**14.25**	28.89	25.67	34.60
图划分 2g-0066-0066	**8.7%**	**8.7%**	**8.7%**	**8.7%**
图划分 clique-60	**83.3%**	**83.3%**	**83.3%**	**83.3%**
gsg_0001	351.30	578.61	**338.79**	**308.84**
哈达玛矩阵 5_	129.27	73.47	59.47	**35.89**
heatexch_spec1	0.34%	**0.14%**	0.16%	0.25%
heatexch_spec2	**0.041%**	0.052%	**0.039%**	**0.038%**
hhfair	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
himmel16	20.42	8.10	5.33	**3.63**
房屋	**0.89**	不可行	不可行	不可行
hs62	4.04	3.33	2.13	**1.81**
hvb11	40.7%	27.4%	**20.5%**	非最优
混合动态变量 _	4.11	1.54	1.26	**0.78**
混合动力 VarCC_	12.00	4.55	3.17	**2.71**
水能1	0.93%	0.74%	0.69%	**0.59%**
ibs2	中止	中止	中止	中止
johnall	**22.36**	**22.56**	**22.26**	**22.48**
Kall_圆 C6b_	**62.28**	120.62	90.79	80.68
kall_congruentcircles_c72	**4.74**	7.27	**5.22**	5.33
kissing2	**867.71**	**866.79**	**868.19**	**869.92**
kport20	13.1%	13.1%	**12.4%**	**11.5%**
kriging_peaks-red020	21.79	7.24	4.12	**3.65**
kriging_peaks-red100	140.14	59.63	41.23	**32.35**
lop97icx	39.83	**13.81**	非最优	非最优
mathopt5_7_	12.35	**10.93**	**10.78**	11.87
mathopt5_8_	9.72	**8.27**	**8.20**	9.06
maxcsp-geo50-20-d4-75-36	**101%**	**101%**	**101%**	**101%**
meanvar-orl400_05_e_7_	23.95	**16.40**	**14.93**	非最优
meanvar-orl400_05_e_8_	**19.32**	**19.40**	中止	**19.05**
mhw4d	0.78	0.63	**0.41**	0.65
milinfract	不可行	**68.0%**	**67.8%**	**68.1%**
minlphi	1.86	**1.14**	不可行	不可行
multiplants_mtg1a	15.6%	11.9%	**5.6%**	7%
multiplants_mtg2	0.12%	**1303.99**	**1336.22**	1444.62
nd-netgen-3000-1-1-b-b-ns_7_	**680.80**	不可行	760.69	不可行
netmod_kar1	5948.45	5.7%	6.2%	**4040.34**
netmod_kar2	**5917.59**	6.5%	7.6%	不可行
nous1	2.9%	0.79%	**6836.04**	**7023.44**
nous2	2.16	1.27	**1.08**	1.36
nvs02	**69.68**	**70.03**	**69.93**	**70.27**
nvs06	**6.64**	**6.36**	**6.68**	**6.68**
oil2	**43.56**	**43.27**	**43.63**	**43.29**
optmass	**11.3%**	12.8%	12.8%	12.8%
ortez	**2.42**	**2.38**	**2.28**	**2.38**
p_ball_10b_5p_3d_m_	26.41	11.49	**7.87**	9.79
p_ball_15b_5p_2d_m_	101.62	32.66	**13.84**	19.15
parabol5_2_3_	**15.7%**	**15.6%**	**15.5%**	**15.5%**
并行	**38.93**	153.77	89.39	66.77

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
pedigree ex485	5.8%	5.7%	5.1%	**2.4%**
pedigree ex485 2	192.97	128.78	**83.00**	**81.80**
pointpack06	27.80	11.29	**6.94**	10.78
pointpack08	3611.87	1638.66	2129.26	**1356.41**
pooling epa1	不可行	不可行	不可行	中止
pooling epa2	0.041%	**4885.54**	0.081%	6389.62
投资组合买入	**2.34**	**2.27**	**2.28**	**2.29**
投资组合卡	**2.15**	2.19	**1.96**	2.20
powerflow0014r	100.0%	82.1%	71.3%	**60.6%**
潮流0057r	∞	中止	中止	中止
问题07	**68.41**	155.23	105.41	100.26
流程	1.38	1.88	1.10	**0.96**
采购1mot	**86.4%**	**88.5%**	**89.2%**	**89.3%**
采购2mot	**13.59**	中止	中止	中止
产品	465.36	448.67	**267.76**	不可行
产品2	**145.38**	**145.40**	**145.40**	**145.42**
Prolog	100.0%	**0.40**	不可行	1.50
qp3	**0.01**	0.01	0.01	0.01
qspp-0 10 0 1 10 1	**632.32**	**624.71**	**631.86**	**623.84**
qspp-0 11 0 1 10 1	**3676.78**	**3669.93**	**3677.76**	**3673.84**
radar-2000-10-a-6 lat 7	**33.14**	**33.30**	**33.04**	**33.00**
radar-3000-10-a-8 延迟 7	558.69	**495.51**	**498.02**	**538.74**
ravempb	3438.61	305.70	**26.47**	不可行
risk2bpb	1.46	**1.20**	**1.20**	**1.19**
布线延迟 bigm	非最优	非最优	非最优	非最优
rsyn0815m	92.08	18.96	15.88	**14.40**
rsyn0815m03m	非最优	非最优	不可行	非最优
sfacloc2 2 95	**5.25**	**5.49**	**5.55**	**5.50**
sfacloc2 3 90	588.76	496.17	**400.13**	0.24%
sjup2	3456.91	**2496.08**	**2490.04**	**2495.30**
slay06m	5.66	**4.64**	**4.32**	5.06
slay07m	**6.96**	**6.39**	**6.64**	**6.65**
smallinvDAXr1b010-011	**3.51**	4.58	4.67	5.10
smallinvDAXr1b020-022	**3.46**	4.79	非最优	非最优
sonet17v4	非最优	非最优	非最优	非最优
sonet18v6	非最优	非最优	非最优	非最优
sonetgr17	非最优	**1464.38**	非最优	非最优
spectra2	不可行	不可行	不可行	不可行
sporttournament24	6.7%	5.4%	**4.7%**	**4.7%**
sporttournament30	12.5%	**10.4%**	**11.2%**	**10.8%**
sssd12-05persp	**378.13**	中止	中止	中止
sssd18-06persp	**7200.00**	**7200.00**	中止	中止
st testgr1	5.51	**2.49**	2.78	非最优
st testgr3	3.67	**3.20**	3.79	4.19
steenbrf	**0.75**	**0.73**	**0.77**	1.52
库存周期	**3.18**	3.97	4.50	3.75
supplychainp1 022020	20.8%	13.9%	**11.9%**	**11.8%**
供应链p1 030510	63.91	66.23	63.40	**48.63**
供应链r1 022020	12.5%	8.8%	7%	**2.9%**
供应链r1 030510	**7.19**	8.73	8.30	8.18
syn15m04m	42.37	19.93	**13.59**	14.97
syn30m02m	239.18	123.93	**79.51**	**85.36**
synheat	0.36%	0.19%	0.28%	**0.16%**
储罐尺寸	13.85	7.22	5.12	**4.44**
Telecomsp Pacbell	2.8%	3.5%	**2.4%**	5.1%
tln5	30.1%	26.2%	7.8%	**1682.28**
tln7	61.4%	60.0%	**9.9%**	28.3%
tls2	5.43	**3.96**	**4.13**	**3.86**
tls4	833.24	319.16	**276.69**	**302.31**
topopt-mbb 60x40 50	**195.38**	**194.93**	**194.58**	**194.68**
toroidal2g20 5555	非最优	非最优	非最优	非最优
toroidal3g7 6666	非最优	非最优	非最优	非最优
transswitch0009r	**16.0%**	中止	中止	中止
tricp	不可行	不可行	不可行	不可行
tspn08	**10.9%**	**10.8%**	**10.8%**	**10.7%**
tspn15	**12.8%**	**12.6%**	**12.4%**	**12.4%**
机组组合1	81.17	**68.02**	**67.44**	78.21
机组组合2	**18.0%**	**18.0%**	**17.8%**	**17.7%**
赌注	∞	**32.4%**	∞	∞
废弃物	**46.3%**	**46.1%**	**46.1%**	**46.1%**
废纸3	33.90	26.89	0.83%	**23.07**
废纸4	2320.60	1388.31	1206.13	**1041.52**
废纸6	中止	**7200.00**	**7200.00**	**7200.00**
水4	46.1%	39.1%	42.4%	**34.1%**
水nd1	1130.72	853.76	**525.28**	**560.05**
水no2 02	26.45	12.97	**9.72**	**10.04**
水no2 03	1886.92	737.09	532.41	**465.62**
waterund01	不可行	不可行	不可行	不可行

下表展示了 Octeract 在串行模式和并行模式下运行的结果。

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
alan	**0.05**	0.06	0.08	0.09
autocorr bern20-05	**4.36**	4.91	4.88	7.71
autocorr bern35-04	12.7%	4064.07	**1891.23**	2241.67
ball mk2 10	**0.01**	0.01	0.02	0.02
ball mk2 30	**0.02**	0.02	0.02	0.03
ball mk3 10	**0.04**	**0.04**	0.04	0.04
batch0812 nc	8.37	4.85	**3.34**	4.12
batchs101006m	**4.84**	5.55	5.40	7.16
batchs121208m	**79.1%**	**79.1%**	**79.1%**	中止
bayes2 20	0.033%	0.033%	**3777.02**	6089.69
bayes2 30	**7200.00**	**7200.00**	**7200.00**	**7200.00**
blend029	29.33	13.45	**10.27**	**11.02**
blend146	8.8%	3.4%	6.8%	**2.6%**
camshape100	19.40	9.17	**7.12**	9.91
cardqp inlp	792.06	258.89	147.93	**124.77**
cardqp iqp	785.02	259.33	148.69	**124.80**
carton7	6.03	1.00	0.89	**0.76**
carton9	344.94	7.49	**3.62**	**3.55**
casctanks	**11.8%**	**12.1%**	**11.6%**	**12.5%**
cecil 13	188.40	**99.55**	134.75	166.38
celar6-sub0	∞	**1637.26**	**1641.73**	**1562.09**
脉轮	**7200.00**	0.021%	0.022%	**7200.00**
chem	**0.18**	**0.19**	**0.19**	0.28
Chenery	200.71	77.26	35.42	**25.05**
Chimera k64maxcut-01	168.60	55.75	**40.84**	**39.93**
Chimera mis-01	**1.14**	1.50	1.38	1.94
CHP_shorttermplan1a	**64.74**	0.028%	0.023%	0.042%
chp shorttermplan2a	**17.59**	**16.76**	**16.30**	21.88
chp shorttermplan2b	**0.67%**	**0.67%**	**0.71%**	**0.7%**
clay0204m	**1.47**	2.10	2.28	3.10
clay0205m	15.10	**13.45**	**13.77**	29.70
color lab3 3x0	∞	∞	**5460.67**	∞
越库15x7	∞	6047.29	2087.00	**1851.98**
越库15x8	6306.65	4889.74	**2772.27**	**2837.68**
原油 lee1 07	8.56	8.03	**4.93**	5.83
原油汇集ct2	非最优	非最优	非最优	非最优
csched1	8.1%	4306.97	2116.58	**1592.40**
csched1a	17.77	11.89	**5.44**	**5.07**
cvxnonsep psig20	35.0%	28.1%	**24.8%**	**25.2%**
cvxnonsep psig30	45.6%	**36.6%**	**35.3%**	**34.4%**
du-opt	122.38	18.42	15.18	**8.15**
du-opt5	101.32	48.22	17.33	**14.29**
edgecross10-040	4.16	0.79	**0.44**	0.63
edgecross10-080	6%	3.8%	**5205.96**	3.8%
eg all s	102%	76.0%	**41.6%**	198%
eigena2	**416.89**	461.71	602.17	∞
elec50	**66.4%**	**66.4%**	**66.4%**	**66.3%**
elf	**2.54**	不可行	不可行	不可行
eniplac	1.54	**1.06**	**1.01**	1.61
enpro56pb	**1.98**	2.48	2.25	3.52
ex1244	81.99	**35.00**	0.056%	0.082%
ex1252a	245.41	94.34	42.83	**31.72**
faclay20h	785.28	**413.15**	463.78	**418.22**
faclay80	∞	∞	∞	∞
feedtray	**82.1%**	**82.1%**	**82.2%**	**82.1%**
fin2bb	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
flay04m	0.87	0.34	**0.27**	**0.28**
flay05m	不可行	不可行	不可行	不可行
flay06m	不可行	不可行	566.98	**413.02**
fo7 ar25 1	8.95	3.12	2.85	**1.49**
fo7 ar3 1	18.33	3.23	**2.13**	**2.18**
森林	非最优	非最优	非最优	非最优
gabriel01	2%	0.28%	3548.92	**2168.66**
gabriel02	7078.04	2457.11	1088.23	**588.74**
GasNet	**96.7%**	**96.4%**	**96.2%**	**96.1%**
天然气生产 砂拉越16	0.74%	0.68%	0.5%	**0.4%**
gastrans582 cold13 95	∞	∞	∞	∞
gastrans582 mild11	∞	∞	∞	∞
gear	0.11	**0.09**	**0.09**	0.14
gear2	0.14	**0.13**	**0.13**	0.26
gear4	17.56	7.25	3.29	**2.45**
genpooling lee1	117.04	40.77	20.27	**15.25**
genpooling lee2	186.63	77.47	36.61	**23.73**
ghg 1veh	12.42	不可行	**3.58**	4.05
Gilbert	**0.9%**	9.7%	9.7%	22.5%

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
图划分 2g-0066-0066	0.75	**0.19**	**0.21**	0.22
graphpart clique-60	2890.51	1502.07	**287.82**	802.57
gsg 0001	8.58	4.67	3.04	**2.54**
哈达玛矩阵 5	**20.45**	23.43	23.33	38.20
heatexch spec1	17.7%	17.0%	14.2%	**12.7%**
heatexch spec2	**5%**	**5.3%**	**5.2%**	**4.9%**
hhfair	∞	∞	∞	∞
himmel16	12.95	5.89	3.28	**2.22**
房屋	108.41	35.02	20.60	**12.89**
hs62	0.023%	0.02%	**7200.00**	**7200.00**
hvb11	7.3%	4.1%	2.1%	**1.5%**
混合动态变量	0.32%	166.64	73.29	**53.94**
混合动力 VarCC	158.14	61.30	27.37	**19.22**
水能1	0.65%	0.48%	0.36%	**0.3%**
ibs2	**5.1%**	6.4%	**5%**	**5%**
johnall	**44.23**	50.09	51.26	88.02
Kall_圆 C6b	463.62	158.77	77.24	**55.71**
kall_congruentcircles c72	49.42	19.60	8.03	**6.64**
kissing2	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
kport20	3596.06	1590.23	472.21	**381.94**
kriging_peaks-red020	85.61	35.87	18.22	**16.08**
kriging_peaks-red100	629.86	277.25	140.33	**113.86**
lop97icx	5.90	**3.76**	**3.67**	4.60
mathopt5_7	0.08	**0.07**	**0.07**	0.11
mathopt5_8	**0.06**	0.08	**0.06**	0.09
maxcsp-geo50-20-d4-75-36	**7.71**	9.59	21.01	23.19
meanvar-orl400_05_e_7	∞	2015.07	**1112.27**	**1205.72**
meanvar-orl400_05_e_8	**6.00**	**5.57**	**5.87**	8.45
mhw4d	0.43	**0.26**	0.39	0.40
milinfract	**75.5%**	**75.2%**	**75.0%**	**75.7%**
minlphi	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**
multiplants_mtg1a	5.1%	303.62	153.51	**64.70**
multiplants_mtg2	2%	**1.5%**	**1.4%**	1.6%
nd_netgen-3000-1-1-b-b-ns 7_	**3.67**	不可行	不可行	6.50
netmod_kar1	41.89	28.58	**25.95**	33.54
netmod_kar2	42.01	**28.58**	**26.39**	33.30
nous1	52.93	32.90	**19.28**	**18.50**
nous2	8.29	6.12	**3.68**	4.58
nvs02	**0.22**	0.25	0.25	**0.22**
nvs06	**0.06**	0.09	0.07	0.10
oil2	非最优	非最优	非最优	非最优
optmass	463.14	237.53	**155.15**	239.61
ortez	9.48	7.09	**1.10**	**1.18**
p_ball_10b_5p_3d_m_	**49.66**	不可行	不可行	不可行
p_ball_15b_5p_2d_m_	不可行	不可行	不可行	不可行
parabol5_2_3	4095.70	**1851.01**	**1883.43**	0.11%
并行	102.24	39.89	18.25	**15.46**
pedigree_ex485	276.45	65.18	**45.86**	**46.16**
pedigree_ex485_2	3.66	**2.61**	**2.57**	3.08
pointpack06	4.76	1.93	**0.90**	1.28
pointpack08	208.18	70.21	34.30	**23.21**
pooling_epa1	21.07	**14.15**	**13.18**	15.01
pooling_epa2	1694.37	463.42	**233.31**	**242.45**
投资组合买入	3.56	1.60	**1.12**	1.47
投资组合卡	5.29	2.64	**1.68**	5.86
powerflow0014r	100.0%	100.0%	100.0%	**28.4%**
潮流0057r	∞	∞	∞	∞
问题07	16.19	6.21	2.91	**2.55**
流程	0.93	0.30	**0.21**	0.33
采购1mot	**79.5%**	**77.1%**	**74.6%**	**73.4%**
采购2mot	**2.71**	**2.88**	**2.92**	4.47
产品	非最优	非最优	非最优	非最优
产品2	**2.53**	**2.51**	**2.40**	3.29
Prolog	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
qp3	4.6%	3.8%	**3.2%**	**3%**
qspp-0_10_0_1_10_1_	26.39	9.61	**7.43**	**7.73**
qspp-0_11_0_1_10_1_	124.07	39.87	27.50	**21.59**
radar-2000-10-a-6 延迟 7_	33.34	8.06	**6.80**	11.05
radar-3000-10-a-8 延迟 7_	209.09	**17.99**	**17.84**	138.18
ravempb	1.26	**1.06**	**1.04**	1.65
risk2bpb	**10.70**	非最优	非最优	非最优
布线延迟 bigm	**18.4%**	**18.6%**	**18.6%**	**18.6%**
rsyn0815m	1.02	**0.81**	**0.81**	1.26
rsyn0815m03m	**44.8%**	中止	中止	中止
sfacloc2_2_95	**1.11**	1.44	1.34	1.72
sfacloc2_3_90	67.86	**42.11**	**42.06**	46.51
sjup2	∞	∞	∞	∞
slay06m	0.69	0.84	**0.62**	1.00

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
slay07m	**0.61**	0.82	0.92	1.24
smallinvDAXr1b010-011	8.69	**4.27**	**4.64**	4.82
smallinvDAXr1b020-022	205.80	62.49	23.58	**17.20**
sonet17v4	160.55	32.25	**17.94**	**17.26**
sonet18v6	184.16	37.12	**22.59**	**20.81**
sonetgr17	65.24	18.42	13.25	**10.75**
spectra2	**105%**	**103%**	**104%**	**104%**
sporttournament24	21.48	**5.01**	7.20	**5.26**
sporttournament30	1946.51	476.70	**242.25**	285.89
sssd12-05persp	**780.87**	100.0%	100.0%	100.0%
sssd18-06persp	**19.9%**	100.0%	100.0%	不可行
st ŧestgr1	**0.07**	0.08	0.09	0.12
st ŧestgr3	**0.07**	0.10	0.11	0.10
steenbrf	**98.0%**	**97.6%**	**97.6%**	**97.0%**
库存周期	39.57	34.72	**19.66**	不可行
supplychainp1 022020	**8.5%**	**8.7%**	**8.7%**	**8.7%**
供应链p1 030510	3.08	**2.71**	**2.68**	3.86
供应链r1 022020	2966.92	752.44	333.16	**225.20**
供应链r1 030510	0.74	**0.66**	**0.64**	0.94
syn15m04m	**1.04**	**1.08**	**1.08**	1.77
syn30m02m	**1.83**	**1.72**	2.24	2.89
synheat	17.1%	16.2%	**14.0%**	**13.1%**
储罐尺寸	54.61	20.94	9.66	**7.03**
Telecomsp Ƥacbell	1125.10	966.13	**632.56**	1152.71
tln5	2.08	1.50	**1.36**	1.60
tln7	274.33	144.17	112.57	**78.00**
tls2	**0.18**	**0.18**	**0.18**	0.27
tls4	36.82	18.27	**10.79**	17.84
topopt-mbb 60x40 5Ɑ0	∞	∞	∞	∞
toroidal2g20 5555	3.23	**2.43**	**2.23**	**2.38**
toroidal3g7 6666	67.16	25.61	**21.88**	**23.43**
transswitch0009r	5.6%	3%	1.5%	**0.97%**
tricp	100.0%	**1236.23**	100.0%	100.0%
tspn08	2.3%	2%	1.6%	**1.4%**
tspn15	**81.4%**	**82.3%**	**75.3%**	**80.3%**
机组组合1	1082.69	422.70	208.33	**152.08**
机组组合2	**11.20**	**10.85**	**10.38**	12.71
赌注	**252.73**	100.0%	100.0%	100.0%
废弃物	**99.9%**	**99.9%**	**99.9%**	**99.9%**
废纸3	22.76	14.47	**11.86**	**12.59**
废纸4	2099.99	853.02	**460.96**	**443.80**
废纸6	0.16%	0.2%	0.16%	**0.12%**
水4	1648.53	704.24	302.89	**201.96**
水nd1	1.34	**1.08**	**1.08**	1.81
水no2 02 _	**4.18**	5.63	6.82	8.84
水no2 03 _	440.65	214.98	111.60	**71.05**
waterund01	0.18%	0.13%	**0.11%**	**0.097%**

下表展示了运行 SCIP（1 个线程）和 FiberSCIP（4、8、16 个线程）的结果。

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
alan	**0.19**	1.05	1.06	1.13
autocorr bern20-05	**16.34**	33.08	**17.10**	18.19
autocorr bern35-04	107.46	158.09	101.10	**64.17**
ball_mk2 10	**0.05**	1.05	1.06	1.12
ball_mk2 30	**0.06**	1.06	1.06	1.14
ball_mk3 10	0.00	0.00	0.00	**0.00**
batch0812 nc	1.45	**1.06**	**1.08**	**1.13**
batchs101006m	**7.63**	中止	中止	中止
batchs121208m	**6.99**	中止	**7.15**	中止
bayes2 20	**0.033%**	0.97%	**0.033%**	**0.033%**
bayes2 30	**7200.00**	**7200.00**	**7200.00**	**7200.00**
blend029	3.67	3.06	3.09	**2.12**
blend146	471.12	280.13	**119.13**	176.20
camshape100	**5.4%**	10.5%	10.4%	9.7%
cardqp inlp	2751.70	2408.46	**1083.38**	1285.54
cardqp iqp	2769.87	2406.76	1190.43	**758.44**
carton7	13.54	10.89	**6.94**	8.69
carton9	36.30	34.26	23.15	**20.50**
casctanks	199%	**114%**	**114%**	**114%**
cecil_13	605.03	0.36%	**72.23**	**71.31**
celar6-sub0	1503.66	**639.66**	**599.98**	685.13
脉轮	**0.04**	1.05	1.06	1.13
chem	932.15	**376.09**	545.11	6288.63

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
Chenery	**2.10**	16.06	4.06	3.13
Chimera k64maxcut-01	450.42	435.40	**352.61**	**387.45**
Chimera mis-01	**6.76**	8.20	**7.31**	10.29
CHP_shorttermplan1a	17.55	**7.21**	**7.24**	**7.36**
chp shorttermplan2a	27.16	17.68	**12.85**	**11.82**
chp shorttermplan2b	**7200.00**	23.3%	17.9%	11.5%
clay0204m	1.67	2.04	**1.09**	2.12
clay0205m	8.40	11.07	9.07	**6.15**
color lab3 3x0	**15.3%**	66.8%	63.3%	59.4%
越库15x7 _	**32.0%**	88.8%	87.6%	83.5%
越库15x8 _	**42.8%**	100.0%	89.6%	92.3%
原油 lee1_07 _	4.72	**2.20**	**2.16**	**2.23**
原油汇集ct2 _	**18.94**	4.5%	0.22%	0.26%
csched1	**1.59**	2.08	2.09	3.10
csched1a	6.53	**2.07**	**2.08**	4.11
cvxnonsep psig20	**12.04**	0.086%	163.10	119.16
cvxnonsep psig30	65.40	3.4%	8.2%	**52.11**
du-opt	**2.38**	3.30	3.20	3.30
du-opt5	1.69	**1.15**	**1.16**	**1.23**
edgecross10-040	8.36	**4.11**	5.12	6.13
edgecross10-080	74.51	53.15	62.17	**47.26**
eg_all_s_	3095.77	3082.62	**1220.55**	1492.45
eigena2	∞	**7200.00**	∞	∞
elec50	**45.1%**	**44.9%**	**44.9%**	**44.9%**
elf	**1.01**	**1.04**	**1.07**	1.13
eniplac	**2.19**	3.07	3.08	3.13
enpro56pb	3.40	**3.07**	**3.07**	**3.13**
ex1244	7.67	2.06	**1.09**	2.05
ex1252a	7200.00	13.05	**4.06**	**4.13**
faclay20h	741.15	589.88	**513.92**	832.87
faclay80	**160%**	∞	∞	∞
feedtray	**1.70**	87.7%	80.5%	80.5%
fin2bb	**15.92**	100.0%	100.0%	100.0%
flay04m	3.93	5.04	4.05	**3.11**
flay05m	120.82	44.06	15.6%	**16.12**
flay06m	**4931.28**	27.6%	25.1%	10.4%
fo7_ar25_1_	39.74	60.06	24.04	**15.12**
fo7_ar3_1_	88.79	65.08	37.08	**24.13**
森林	**538.83**	0.21%	中止	0.19%
gabriel01	351.17	353.14	**116.14**	146.23
gabriel02	1435.31	1638.34	782.25	**267.30**
GasNet	**42.5%**	65.0%	64.4%	63.6%
gasprod sarawak16	**0.39%**	**0.4%**	**0.39%**	**0.39%**
gastrans582 cold13 95	55.01	6.96	**4.97**	6.99
gastrans582 mild11	7.41	257.72	13.73	**4.04**
gear	12.55	24.05	**5.06**	39.16
gear2	18.25	51.07	**7.07**	597.17
gear4	4.05	**1.05**	**1.06**	**1.11**
genpooling lee1	**2.09**	3.06	**2.07**	**2.13**
genpooling lee2	6.88	**4.06**	**4.08**	**4.15**
ghg 1veh	32.25	26.07	**22.10**	**21.14**
Gilbert	**1.13**	5.12	11.14	19.72
图划分 2g-0066-0066	1.39	**1.10**	**1.11**	**1.19**
图划分 clique-60	3962.88	36.3%	5234.58	**2596.77**
GSG_0001	32.26	799.12	1209.24	**7.12**
哈达玛矩阵 5_	21.56	16.07	11.07	**8.15**
heatexch spec1	7.1%	3.8%	**13.09**	88.12
heatexch spec2	不可行	12.08	110.11	**5.15**
hhfair	**100.0%**	∞	∞	**100.0%**
himmel16	6.13	6.08	**4.07**	**4.04**
房屋	**0.33**	1.06	1.07	1.12
hs62	2.65	**2.05**	3.06	**2.11**
hvb11	103.26	**27.11**	**27.13**	2285.34
混合动态变量 _	2.21	**1.05**	**1.07**	**1.10**
混合动力 VarCC -	2.40	3.05	**2.08**	**2.14**
水能1	6295.41	5582.56	**1646.23**	3446.41
ibs2	20.64	**16.24**	**17.02**	22.00
johnall	**30.44**	55.01	46.41	44.71
Kall_圆 C6b-	183.83	95.07	48.08	**30.12**
kall_congruentcircles c72	22.40	21.05	12.07	**7.13**
kissing2	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
kport20	1001.03	非最优	334.10	**28.12**
kriging_peaks-red020	117.65	**36.08**	**39.08**	69.16
kriging_peaks-red100	7200.00	384.19	**325.21**	1028.67
lop97icx	**25.38**	118.18	84.13	**23.21**
mathopt5_7	**0.17**	1.04	1.05	1.10
mathopt5_8_	**0.14**	1.05	1.06	1.11
maxcsp-geo50-20-d4-75-36	**52.80**	63.05	74.36	74.19

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
meanvar-orl400_05_e_7_	**4080.76**	中止	2.3%	2.4%
meanvar-orl400_05_e_8_	**2404.35**	0.54%	中止	4849.82
mhw4d	**0.44**	1.05	1.07	1.09
milinfract	**68.8%**	76.0%	76.0%	75.9%
minlphi	100.0%	**34.04**	100%	100%
multiplants_mtg1a	**4320.86**	35.6%	6.4%	5.5%
multiplants_mtg2	**21.0%**	98.1%	97.2%	97.0%
nd-netgen-3000-1-1-b-b-ns_7_	**31.10**	38.65	42.30	52.25
netmod_kar1	5.51	4.09	**3.11**	5.16
netmod_kar2	5.77	**4.08**	5.13	6.19
nous1	**7.70**	26.07	16.07	16.13
nous2	**0.80**	1.05	2.07	1.12
nvs02	**0.06**	1.04	1.06	1.09
nvs06	**0.02**	1.04	1.06	1.11
oil2	**4.64**	5.23	5.25	7.34
optmass	**1.8%**	9.6%	7.1%	7.1%
ortez	**0.14**	1.06	1.07	1.14
p_ball_10b_5p_3d_m_	**4.26**	5.08	5.09	**4.17**
p_ball_15b_5p_2d_m_	**5.44**	6.11	**5.10**	6.17
parabol5_2_3_	**0.051%**	∞	∞	∞
并行	10.26	**7.07**	8.09	8.16
pedigree_ex485	105.90	**95.32**	**95.39**	153.99
pedigree_ex485_2_	35.24	76.58	**20.67**	**19.54**
pointpack06	**3.05**	4.06	**3.07**	**3.11**
pointpack08	61.22	25.05	12.07	**9.14**
pooling_epa1	**12.87**	29.09	49.12	30.19
pooling_epa2	1.9%	**1.8%**	**1.8%**	**1.6%**
投资组合买入	**0.50**	1.06	1.07	1.12
投资组合卡	**0.58**	1.07	1.07	1.11
powerflow0014r	**7079.42**	0.36%	0.47%	0.59%
潮流0057r	80.19	**57.15**	**59.19**	**61.29**
问题07	76.05	11.05	**6.07**	706.26
流程	0.4%	**3.05**	**3.07**	**3.11**
采购1mot	**85.0%**	**90.8%**	**90.8%**	**90.7%**
采购2mot	**2.03**	**2.19**	**2.14**	**2.22**
产品	16.80	31.11	**11.13**	13.14
产品2	**3.85**	4.45	5.48	6.88
Prolog	**0.06**	中止	中止	中止
qp3	**14.1%**	100%	100%	91.0%
qspp-0_10_0_1_10_1_	180.85	133.44	**80.79**	**75.94**
qspp-0_11_0_1_10_1_	623.76	208.02	154.94	**115.04**
radar-2000-10-a-6_延迟_7_	**129.82**	148.80	162.20	185.15
radar-3000-10-a-8_延迟_7_	**422.76**	0.37%	0.026%	68.0%
ravempb	3.09	**2.06**	**2.08**	**2.11**
risk2bpb	不可行	不可行	不可行	不可行
布线延迟_bigm	非最优	**6439.89**	1.1%	2.8%
rsyn0815m	**1.44**	2.06	3.04	3.14
rsyn0815m03m	14.06	81.16	14.17	**12.19**
sfacloc2_2_95	2.78	**2.06**	**2.09**	**2.14**
sfacloc2_3_90	**20.32**	62.08	28.09	**22.16**
sjup2	469.64	**107.74**	**114.44**	146.11
slay06m	1.85	**1.06**	**1.08**	**1.13**
slay07m	2.05	**1.05**	**1.08**	**1.14**
smallinvDAXr1b010-011	2.17	**1.08**	**1.10**	**1.14**
smallinvDAXr1b020-022	3.37	**1.07**	**1.09**	**1.15**
sonet17v4	949.25	**829.28**	**807.35**	**777.52**
sonet18v6	1445.90	906.34	**815.39**	**816.65**
sonetgr17	1255.92	651.90	**320.18**	368.98
spectra2	9.20	**3.10**	**3.14**	**3.23**
sporttournament24	**45.75**	71.17	58.16	69.26
sporttournament30	**0.72%**	4%	3.4%	1.5%
sssd12-05persp	4.5%	19.6%	2774.49	**256.15**
sssd18-06persp	**15.1%**	47.7%	46.1%	47.6%
st_testgr1	**0.12**	1.05	1.07	1.10
st_testgr3	**0.24**	1.05	1.08	1.10
steenbrf	12.42	6.08	**5.09**	7.14
库存周期	**0.79**	1.25	2.15	1.23
supplychainp1_022020	**1056.69**	32.8%	31.2%	26.7%
供应链p1_030510	3.54	**3.11**	**3.13**	4.19
供应链r1_022020	21.97	80.80	14.68	**2.81**
供应链r1_030510	**0.12**	1.09	1.11	1.17
syn15m04m	2.75	**1.10**	**1.12**	**1.18**
syn30m02m	1.58	**1.09**	**1.10**	2.16
synheat	不可行	0.83%	1.8%	**148.14**
储罐尺寸	4.12	**3.07**	**3.07**	**3.12**
Telecomsp_Pacbell	0.63%	**6523.90**	**6267.26**	0.45%
tln5	**0.50**	7.05	5.08	10.13
tln7	**188.05**	69.5%	30.4%	66.4%

实例	1 个线程	4 个线程	8 个线程	16 个线程
tls2	**0.93**	1.07	1.07	1.10
tls4	41.19	18.06	24.09	**13.14**
topopt-mbb 60x40 50	∞	∞	∞	∞
toroidal2g20 5555	**5.70**	6.27	6.40	6.33
toroidal3g7 6666	**141.64**	**142.26**	157.46	169.61
transswitch0009r	6975.38	2602.29	1289.17	**959.22**
tricp	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**
tspn08	**17.8%**	31.2%	**18.1%**	**18.6%**
tspn15	50.0%	62.5%	**27.4%**	**29.4%**
机组组合1	不可行	**2.38**	4.58	6.25
机组组合2	439.70	**3.81**	5.85	6.92
赌注	3.46	2.14	**1.16**	2.22
废弃物	**38.85**	57.1%	55.4%	55.0%
废纸3	**4.22**	6.07	5.09	5.14
废纸4	167.16	中止	中止	**40.14**
废纸6	0.023%	0.04%	0.034%	**7200.00**
水4	非最优	非最优	非最优	**3473.45**
水nd1	7.21	10.06	**4.08**	5.13
水no2 02 _	2.89	2.10	2.11	**1.19**
水no2 03 _	非最优	**33.13**	非最优	39.3%
waterund01	**1525.91**	1.5%	1.5%	中止