arXiv:2301.00600v1 [cond-mat.stat-mech] 2 Jan 2023

阿兹特克菱形中的涨落与北极曲线

***Bryan Debin*[1], *Jean-Franc.ois de Kemmeter*[2], *Philippe Ruelle*[1]**

[2] 那慕尔大学数学系及那慕尔复杂系统研究所（*naXys*），*Rue de Bruxelles 61*，那慕尔，*B-5000*，比利时
jean-francois.dekemmeter@unamur.be[1] 鲁汶天主教大学数学与物理研究所，新鲁汶，*B-1348*，比利时

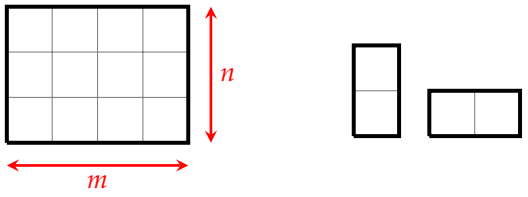
2023年1月3日

摘要

众所周知，阿兹特克菱形的多米诺骨牌铺砌会呈现北极现象，即冻结区域（其中所有多米诺骨牌方向相同）与中央无序区域（其中的多米诺骨牌排列没有明显规律）彼此分隔。在适当重新缩放后，这一分界已被证明会收敛到艾里过程，其1点分布为 Tracy-Widom 分布。本文通过数值分析提出猜想：在相同的重新缩放下，冻结区域与无序区域之间的边界会收敛到艾里线系综，这是艾里过程的一种推广。

引言

自然界中可以观察到各种各样的图案。它们往往源于微观单元之间的相互作用。一个例子是某些分子在石墨上的吸附 [2]。吸附后，这些分子会彼此结合，使任意两个相邻分子形成的角度要么是 $60°$，要么是 $120°$。扫描隧道显微镜揭示，这些由熵稳定的构型等价于菱形铺砌。铺砌，尤其是多米诺骨牌铺砌，将是本文的核心。铺砌模型也与顶点 模型密切相关；后者最初由 Linus Pauling 提出，用于解释零温度下冰的剩余熵 [14]。在这些模型中，边界条件会显著影响系统的体性质，这一特点最近在胶体人工冰中通过实验得到证实 [16]。接下来，我们将介绍多米诺骨牌铺砌的概念，并通过著名的阿兹特克菱形讨论边界条件的影响。



(a) **(b)**

图1： *(a)* 一个尺寸为 4×3、可以用多米诺骨牌铺砌的矩形区域。*(b)* 一个多米诺骨牌，无论其方向为竖直还是水平，都是由两个单位正方形组成的。

矩形的多米诺骨牌铺砌

设想一位铺砌者想要铺砌一个尺寸为 $m \times n$（m、$n \in \mathbb{N}$）的矩形区域。他可以使用尺寸为 1×2 的矩形铺砖，以下称为多米诺骨牌，见图1。

在开始动手之前，铺砌者想先回答以下问题：该区域能否铺砌？如果可以，有多少种不同的铺砌方式？如果至少存在一种铺砌方式，该区域就称为可铺砌 的；也就是说，存在一种构型，使得其中任意一点都被

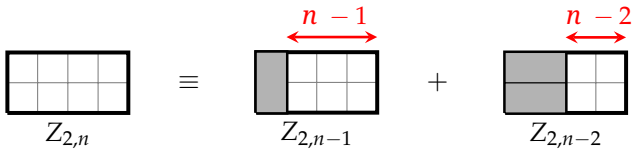


图2： 一个 $2 \times n$ 矩形的多米诺骨牌铺砌数 $Z_{2,n}$ 可以分解为两项之和，具体取决于覆盖最左侧单位正方形的多米诺骨牌的方向。这便得到斐波那契递推关系 $Z_{2,n} = Z_{2,n-1} + Z_{2,n-2}$。

该区域恰好 被一块多米诺骨牌覆盖，且没有多米诺骨牌越过区域的边界。设$Z_{m,n}$为该区域的铺砌方式数。该区域可铺砌的必要条件（实际上也是充分条件），即$Z_{m,n} \geq 1$，是$m \cdot n$ 必须为偶数（且非零）。例如，考虑$m = 2$的情形，此时可以直接得到一个显式公式。数列 $(Z_{2,n})_n$ 的前几项为 0、1、2、3、5、8、 $\cdots$。读者或许已经认出了斐波那契数列。事实上，如图 2 所示，$Z_{2,n}$ 的各项满足以下递推关系：

$$\begin{aligned} Z_{2,n} &= Z_{2,n-1} + Z_{2,n-2}, \\ Z_{2,0} &= 0\,,\; Z_{2,1} = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

解这个递推关系即可得到 $2 \times n$ 矩形的多米诺骨牌铺砌数的显式公式：

$$Z_{2,n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2}$$

对于一般的 m 和 n，也存在显式公式，不过其推导比 $m = 2$ 的情况复杂得多。已证明 [13, 18]:

$$Z_{m,n} = \prod_{j=1}^{\lceil m/2 \rceil} \prod_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil} \left(4\cos^2\frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2\frac{\pi k}{n+1}\right). \tag{3}$$

只要 m、n 不同时为奇数，铺砌数就会随着 m 和n快速增长。例如，若 $m = n$，上述公式给出 $Z_{2,2} = 2$、$Z_{4,4} =$36、$Z_{6,6} = 6728$、$Z_{8,8} = 12988816$。图3展示了一个构型，其中 $m = n = 100$，它是从所有铺砌中随机选取的。暂且不考虑赋予多米诺骨牌的颜色。

可以看出，该区域任意一块宏观区域中，垂直多米诺骨牌的平均占比

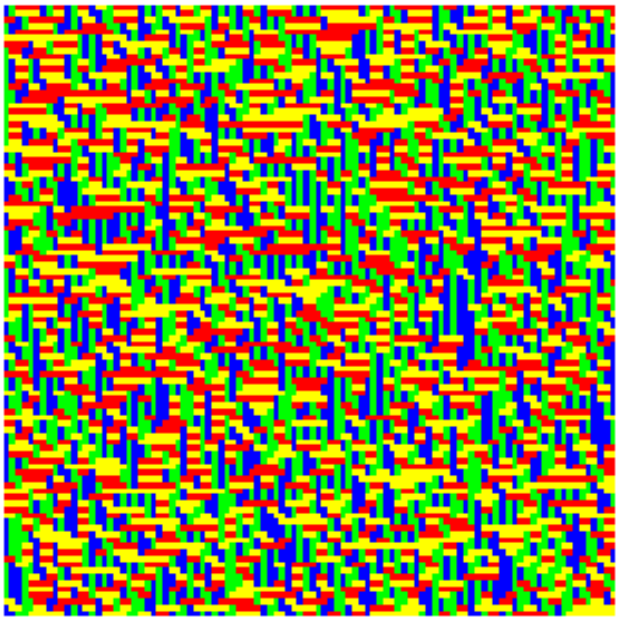


图3： 边长为 $n = m = 100$ 的正方形构型，使用 *Janvresse* 算法 *[10]*随机生成。

都与水平多米诺骨牌相同。人们或许会想，类似的现象是否也适用于其他可铺砌区域。答案是否定的。以图4（a）所示的区域为例，其尺寸由n参数化。

该区域可以铺砌，但边界施加的约束非常强，因此只有一种构型，即所有多米诺骨牌都水平放置的构型。

阿兹特克菱形与北极现象

图4 (a)所示的例子在某种意义上具有病态性，本身并不太有趣。稍微修改区域后，就能得到有趣得多的情形：如图4 (b)所示，引入一行单位正方形。这一细微修改将带来重大影响，我们将在下文中看到。该区域称为阿兹特克菱形（下文简称**交替符号矩阵**），最早由 [8, 9] 引入。形式上，它由中心$(i,\ j)$ 满足 $|i| + |j| \leq n$ 的单位正方形组成，其中原点$(0,\ 0)$与**交替符号矩阵**的中心重合。请注意，

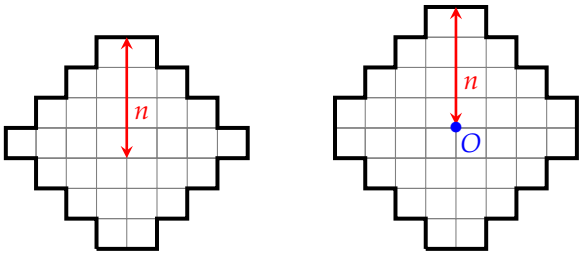


图4： *(a)* 该区域唯一的铺砌完全由水平多米诺骨牌组成。在该区域中添加一排$2n$ 个单位正方形，即可得到右侧 *(b)* 所示的 n 阶阿兹特克菱形（交替符号矩阵）。交替符号矩阵 是由满足不等式 $|i| + |j| \leq n$ 的中心点$(i,\ j)$ 组成的单位正方形集合，其中原点 O 取为交替符号矩阵的中心。

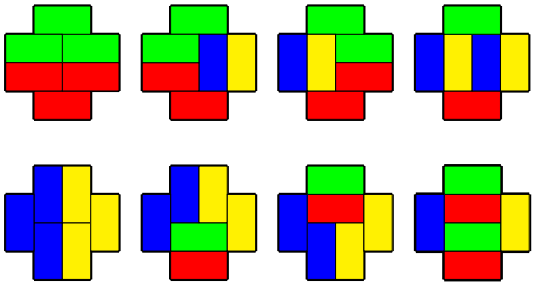


图 5： 二阶交替符号矩阵可以有8 种不同的铺砌方式。

该区域关于四分之一转旋转对称。对于$n = 2$，图 5 中展示了八种构型。

设A_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ 表示 n**交替符号矩阵** 的不同构型数。已证明：

$$A_n = 2^{n(n+1)/2} \tag{4}$$

尽管这个结果简洁而令人惊叹，但已知的诸多证明都不是初等证明。或许更令人惊讶的是，随着n 增大，**交替符号矩阵** 的铺砌会呈现出一种奇特的行为；图6展示了阶数为$n = 10$、$n = 100$ 和$n = 1000$时随机抽取的构型。

我们观察到，**交替符号矩阵** 的四个角看起来像砖墙：每个角都只包含水平或垂直的多米诺骨牌。与之相反，在远离边界的地方，水平和垂直的多米诺骨牌以无序的方式交替排列。随着**交替符号矩阵** 的阶数增大，四个冻结角与中央无序区域之间的分界变得更加清晰。在极限 $n \to +\infty$，这条分界是一条圆，称为该模型的北极曲线。这意味着，以概率 1，圆外的四个区域都由同一种多米诺骨牌铺成。可以用以下直观方式来理解这一点。

假设以$(-n + 1/2, -1/2)$ 为中心的单位正方形由一块水平多米诺骨牌覆盖，见图7 (a)。这将迫使与西北和西南边界相邻的所有多米诺骨牌也都为水平放置。满足这一约束的构型数恰好为A_{n-1}；因此，随着n 增大，观察到其中任一种构型的概率p 会变得可以忽略不计，因为它随n呈指数级下降：

$$p = \frac{A_{n-1}}{A_n} = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{5}$$

换句话说，以$(-n + 1/2, -1/2)$ 为中心的单位正方形几乎必然会由一块垂直多米诺骨牌覆盖。由于**AD** 在四分之一圈旋转下保持不变，以$(n - 1/2, -1/2)$为中心的单位正方形也几乎必然会由一块垂直多米诺骨牌覆盖，而以$(-1/2, n - 1/2)$ 和$(-1/2, -n + 1/2)$ 为中心的单位正方形则会由水平多米诺骨牌覆盖。我们再进一步推演，以了解北极现象的成因，见图7 (b)。在$(-n + 3/2, -j + 1/2)$为中心的单位正方形是左侧单位正方形的四块水平多米诺骨牌，其概率在$n \to +\infty$的极限下同样会消失，其中$j = -2, -1, 0, 1$，因为观察到满足这些要求的构型的概率为：

$$\frac{A_{n-1} - A_{n-2}}{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{6}$$

因此，以概率 1，也必定存在（至少）一块垂直多米诺骨牌，覆盖以$(-n + 3/2, -j + 1/2)$ 为中心的单位正方形，其中$j \in \{-2, -1, 0, 1\}$。这一启发式推测表明，每个角落都会出现砖墙图案。或许出乎意料的是，这些冻结区域占据了交替符号矩阵中不可忽略的一部分（约 21.5%），即使在$n \to +\infty$的极限下也是如此。

不相交格路径

为了进一步刻画这种北极现象，方便起见，我们引入一种以不相交格路径描述的等价表述。首先考虑该区域的棋盘式着色，见图 8（a）。

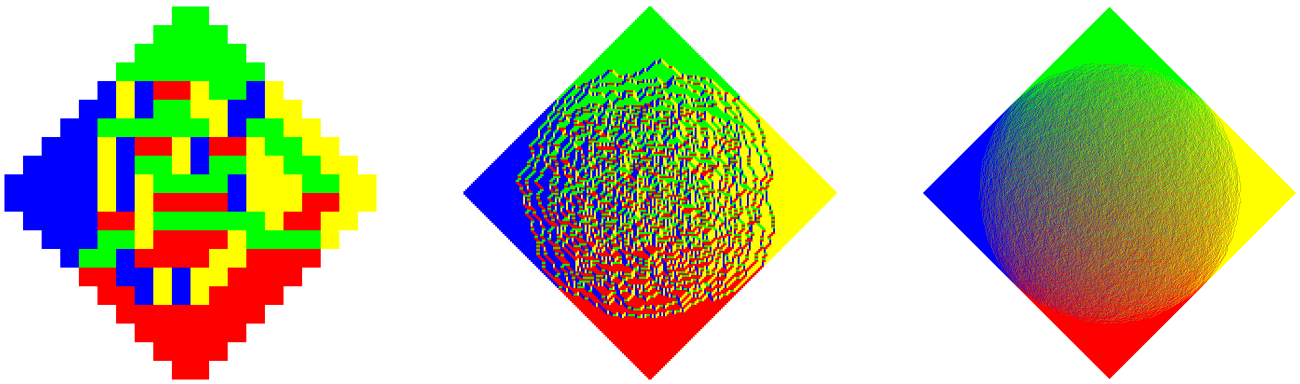


图6： 构型　　一个阶数为***10***、100和1000 的交替符号矩阵（从左到右），由洗牌算法生成　　.

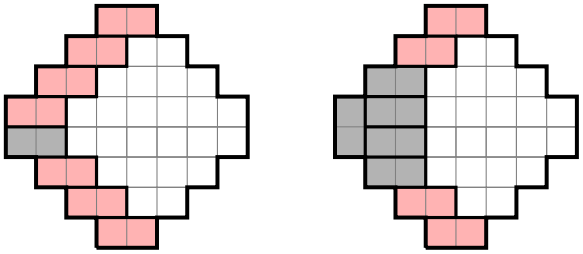


图7： *(a)* 若最初以一块水平多米诺骨牌（灰色）覆盖中心位于 $(-n\ +1/2,-1/2)$ 的单位正方形，则与西北边界和西南边界相邻的所有多米诺骨牌也必须是水平的（粉色多米诺骨牌）。此类铺砌的数量为 A_{n-1}。*(b)* 若灰色多米诺骨牌固定，则与西北边界和西南边界相邻的所有其他多米诺骨牌也必须是水平的。构型的数量为 $A_{n-1}-A_{n-2}$。事实上，固定这些多米诺骨牌后，剩下的是一个阶数为 $\boldsymbol{n}$ 的交替符号矩阵，其最左侧的两个方格被排除，或者说由一块垂直多米诺骨牌覆盖。因此，构型数量为 A_{n-1}，再减去（一个阶数为 $\boldsymbol{n}$ 的交替符号矩阵中）用两块水平多米诺骨牌覆盖最左侧部分的构型数量 A_{n-2}。

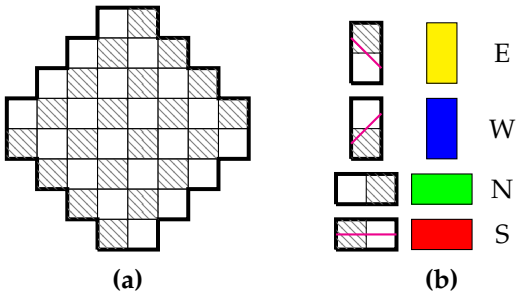
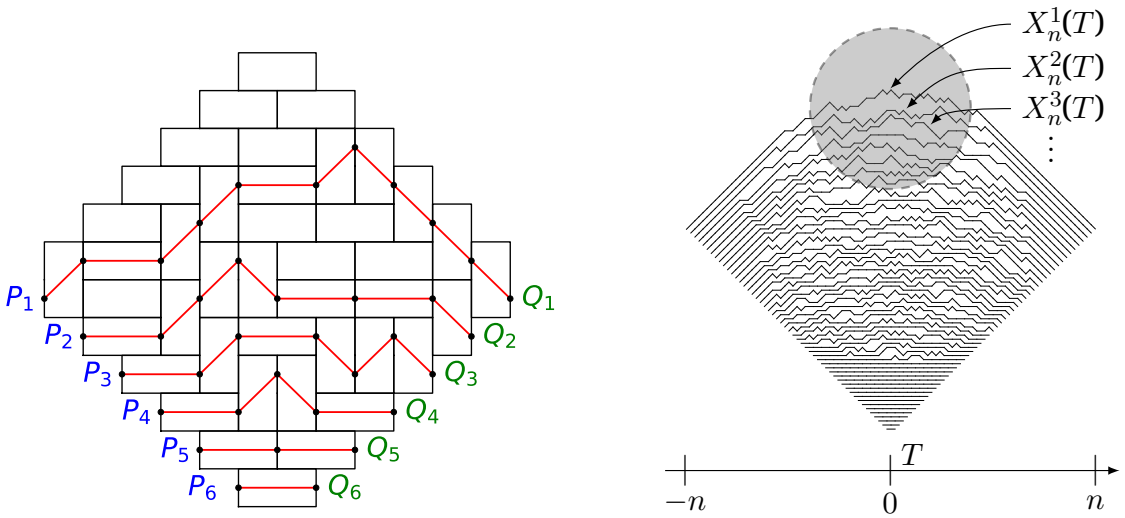


图 8： *(a)* 交替符号矩阵 的棋盘式着色，其中以 $-n\ +1/2,-1/2$ 为中心的单位正方形被填充。*(b)* 多米诺骨牌有四种不同类型，分别标记为 N、S、W 和 E，用以表示其方向和阴影单位正方形的位置。除绿色骨牌外，每种骨牌都对应一个基本步（以洋红色显示）。

这样便可根据阴影单位正方形的位置区分出四种多米诺骨牌类型，并以大写字母标记，见图 8（b）。接着，除保持空白的 N 型多米诺骨牌外，我们在每块多米诺骨牌上按如下方式画一条线段：S 型多米诺骨牌上画一条水平$(2,0)$ 线段，W 型多米诺骨牌上画一条对角$(1,1)$ 线段，E 型多米诺骨牌上画一条对角$(1,-1)$ 线段。按照规定将线段实际画在多米诺骨牌上后，它们便形成连续路径，从菱形的西南边界延伸至东南边界，彼此互不相交。这一过程在交替符号矩阵铺砌与一组由n 条不相交路径组成的集合之间建立了双射，其中交替符号矩阵的阶数为n（[11], 第 2.1 节）。例如，图 9（a）展示了一个阶数为 6 的构型，以及与之对应的不相交格路径。

如图 6 和图 9(b) 所示，冻结北部



(a) (b)

图 9： *(a)* 一个 *6* 阶交替符号矩阵的构型，以及它对应的不相交格路径。*(b) 50* 阶交替符号矩阵的同类示例。第 k^{th} 条最上方路径的垂直位置记为 $X_n^k(T)$，其中 $-n+k-1 \leq T \leq n-k+1$。

该区域完全由 N 型多米诺骨牌构成，因此没有路径。在无序区域中，已证明 N 型多米诺骨牌密度的等值线（即密度相同的点集）是（不完整的）椭圆 [4]，，如图10所示：越靠近北部区域，N 型多米诺骨牌的密度越大。

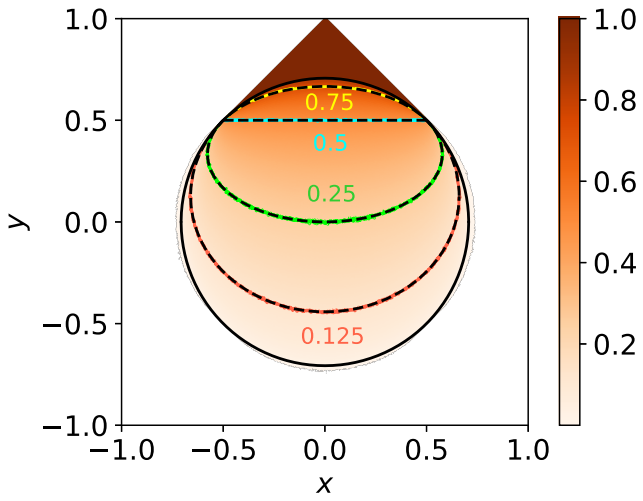


图 10： *N* 型多米诺骨牌的密度，根据 *100 000* 个阶数为 $n = 500$ 的构型样本计算得出。长度已除以 n。北极圆以黑色显示。预测的密度等值线（虚线）给出了 *N* 型多米诺骨牌密度分别等于0.125、0.25、0.5、0.75的点集（即椭圆）。这些曲线与彩色显示的数值结果一致。

特雷西-威多姆分布与高斯酉系综

令$X_n^k(T)$ 表示k^{th} 最上方路径在横坐标T $(-n+k-1 \leq T \leq n-k+1)$处的垂直位置，其中$k = 1, \cdots, n$。最上方路径$X_n^1(T)$ 将中央无序区域与冻结北部区域分隔开来。图 11 和图 11 (a) 所示的构型表明，以下概率收敛成立：

$$\begin{aligned}
&\frac{X_n^1(T)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1+\frac{T}{n} \quad \forall \frac{T}{n} \in [-1,-1/2[\\
&\frac{X_n^1(T)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{T}{n}\right)^2} \quad \forall \frac{T}{n} \in [-1/2,1/2[\\
&\frac{X_n^1(T)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1-\frac{T}{n} \quad \forall \frac{T}{n} \in]1/2,1]
\end{aligned} \tag{7}$$

换言之，当$n \to +\infty$ 趋于无穷大，并将所有长度除以n后，最上方路径几乎必然收敛到一条从$(-1,0)$到$(-1/2,1/2)$的直线段，接着是一段从$(-1/2,1/2)$到$(1/2,1/2)$的四分之一圆弧，最后又是一条从$(1/2,1/2)$到$(1,0)$的直线段。

特别地，对于 $T=0$，我们有：

$$\frac{X_n^1(0)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

然而，这还不是全部。如果我们生成大量铺砌，并记录每个铺砌中垂直位置$X_n^1(0)$，那么得到的一组点到 $n\sqrt{2}$ 的距离平均而言与$n^{1/3}$成正比，见图 11。换句话说：

$$\mathbb{E}\Big(X_n^1(0)-\frac{n}{\sqrt{2}}\Big)\sim n^{1/3} \text{ as } n\to+\infty, \tag{9}$$

其中，期望值 $\mathbb{E}$ 是对 **交替符号矩阵** 中所有阶数为n的铺砌取的。下一步是确定哪种概率分布 ξ（如果存在）支配适当重缩放后的垂直位置$X_n^1(0)$的涨落：

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\frac{X_n^1(0)-\frac{n}{\sqrt{2}}}{n^{1/3}}\le s\Big)=\xi(s), \tag{10}$$

我们将$X_n^1(0)$ 分解如下：

$$\begin{aligned} X_n^1(0) &= X_n^n(0)+\sum_{k=1}^{n-1} Y_k, \\ Y_k &= X_n^k(0)-X_n^{k+1}(0). \end{aligned} \tag{11}$$

如果增量Y_k 是独立同分布的随机变量，那么根据中心极限定理，ξ 将服从正态分布（前提是涨落采用$n^{1/2}$ 的缩放）。然而，这里的增量并非独立同分布。事实上，基于启发式论证（见 [6]第3.2节），我们以概率1有$X_n^k(0)-X_n^{k+1}(0)=O(n^{1/3})$，对于$k=O(1)$；而在南部冻结区域中，几乎必然有$X_n^k(0)-X_n^{k+1}(0)=1$，见图 9（b）。因此，我们不应预期 ξ 服从高斯分布。事实上，分布 ξ 是已知的，其具体形式为 [12]：

$$\xi(s)=F_2^1(2^{5/6}s), \tag{12}$$

其中F_2^1 是特雷西-威多姆累积分布函数[1]，，见图 12。特雷西-威多姆分布最初由随机矩阵理论引入，用于描述属于高斯酉系综 [19]的矩阵的最大特征值的涨落。该系综由 $n\times n$ 厄米矩阵H 组成，其矩阵元素服从如下高斯变量分布：

$$\begin{aligned} &H_{kk}\sim N(0,1/2), \\ &H_{kl}\sim N(0,1/4)+iN(0,1/4)\quad (1\le k<l\le n). \end{aligned} \tag{13}$$

有序特征值的联合概率密度函数$P(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$ 为：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) &= \frac{1}{Z_n}\prod_{1\le i<j\le n}|\lambda_i-\lambda_j|^2 e^{-\sum_{i=1}^n\lambda_i^2} \\ &= \frac{1}{Z_n}e^{\sum_{i\ne j}\log|\lambda_i-\lambda_j|-\sum_{i=1}^n\lambda_i^2}, \end{aligned} \tag{14}$$

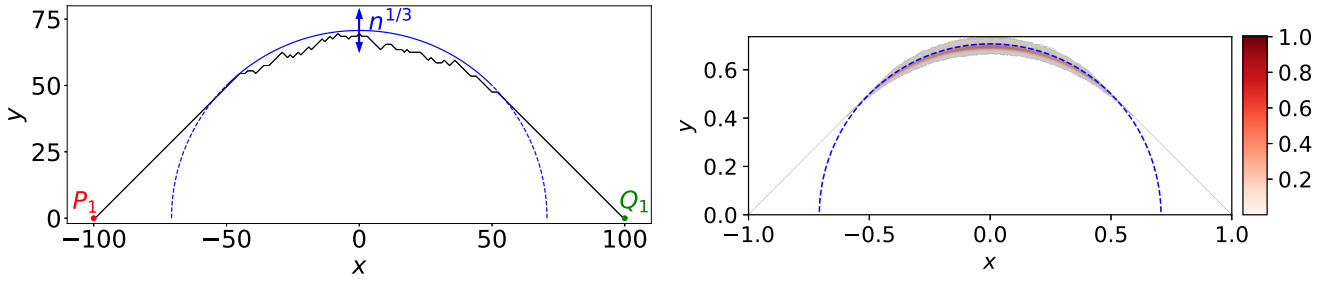
其中，Z_n为某个归一化常数。上述表达式中有两个相互竞争的项：项$|\lambda_i-\lambda_j|$ 表示特征值之间的排斥，而$e^{-\sum_{i=1}^n\lambda_i^2}$则促使特征值向原点聚集。重缩放后的最大特征值：

$$\Lambda_n^i := \frac{\lambda_i-2\sqrt{n}}{2^{-1/2}n^{-1/6}}, \tag{15}$$

是随机变量，其累积分布函数在极限$n\to+\infty$下记为 F_2^i，并在图 12 中展示了$i=1,\cdots$、6 的情形。特雷西-威多姆分布出现在许多领域：举例来说，它见于组合学 [1] 以及某些生长过程，例如多核生长模型[15]。实验上，人们也曾通过向一层薄薄的向列型液晶施加交流电压而发现这一分布。当电压足够大时，两种不同的湍流相会共存。两相之间的界面随时间生长，其涨落被证明服从特雷西-威多姆累积分布函数 [17]。所有这些模型的共同点是，涨落具有不同寻常的尺度$n^{1/3}$，其中n 表示系统大小的某种度量（例如交替符号矩阵的阶数）。事实上，将 Λ_n^i 写作

$$\Lambda_n^i=\frac{\sqrt{n}\lambda_i-2n}{2^{-1/2}n^{1/3}} \tag{16}$$

[1]Tracy-Widom 分布 F_2^1 既可以表示为 Fredholm 行列式，也可以用 Painlevé II 方程的解来表示 [3]。



(a) (b)

图 11： *(a)* 通过洗牌算法抽样得到的一个阶数为 $n = 100$ 的交替符号矩阵 的最上方路径（黑线）。当 n 趋于无穷时，最上方路径以1 的概率收敛到一个四分之一圆。在 $X = 0$ 邻域内，最上方路径与北极圆之间的标准差正比于 $n^{1/3}$。*(b)* 对500阶构型进行重标度（长度除以 n）后，得到最上方路径出现在该区域内的概率密度；此结果是对100000 个独立构型取平均得到的。

使$X_n^1(0)$ 与 $\sqrt{n}\lambda_i$ 具有可比性：它们的均值和偏差遵循相同的标度律，与n有关。

艾里线系综

到目前为止，我们已经看到，随机厄米矩阵的最大特征值 λ_1 与交替符号矩阵的最上方路径的垂直位置 $X_n^1(0)$ 都是随机变量；当n趋于无穷时，它们服从相同的概率分布。事实上， [12] 中证明了一个更强的结果：最上方路径$X_n^1(T)$ 加上一个二次项后，在有限维分布意义下并经过适当重新缩放，会收敛到艾里过程$A_2^1(t)$，其中 $t = 2^{1/6}n^{-2/3}$。艾里过程$A_2^1(t)$ 是平稳且平移不变的过程；在固定t处，其累积分布函数为 Tracy-Widom 分布F_2^1。因此，[12] 中证明的结果意味着：

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{X_n^1(2^{-1/6}n^{2/3}t)-\frac{n}{\sqrt{2}}}{2^{-5/6}n^{1/3}}+t^2\le s\right) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_2^1(t)\le s)=F_2^1(s). \tag{17}$$

特别地，当$t = 0$时，我们得到式（10）。

很自然地，我们会提出以下问题：这种对应关系是否也适用于其他特征值和路径？也就是说，对于$k = 2, 3, \cdots$（$k = O(1)$）以及固定的T ，$X_n^k(T)$ 和 $\sqrt{n}\lambda_k$ 是否具有相同的极限概率分布？据我们所知，尽管尚未有人为$X_n^k(T)$ （$k = 2, 3, \cdots$）的极限概率分布给出解析证明，但数值模拟清楚地表明答案是肯定的。粗略地说，在$t = 0$的邻域内，交替符号矩阵的最上方路径看起来像是受限而不会相交的布朗运动，见图 9 (b)。这让人想起 [7] 中讨论的随时间变化的库仑气体模型，以及受到限制、彼此不相交且起点和终点相同的布朗桥 [5]。在后一种情形下，已证明曲线加上一个二次项后，经过适当的重新缩放，会收敛到艾里线系综。基于这些模型之间的相似性，以及交替符号矩阵用不相交格路径描述的方式，我们猜想交替符号矩阵的最上方路径也应收敛到艾里线系综，即：

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{X_n^i(2^{-1/6}n^{2/3}t)-\frac{n}{\sqrt{2}}}{2^{-5/6}n^{1/3}}+t^2\le s\right) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_2^i(t)\le s)=F_2^i(s), \tag{18}$$

当$i = O(1)$时。这一猜想得到了图 12 的有力支持，其中我们比较了$T = -1/2$时，按式（18）给出的重新缩放后，最上方几条路径的概率密度函数与概率密度函数$\frac{d}{ds}F_2^i(s)$ $(i = 1, \cdots, 6)$。

结论

在这项工作中，我们研究了平面区域上的多米诺骨牌铺砌。我们已经看到，区域的边界会彻底改变模型的性质，并导致北极现象，著名的阿兹特克菱形就是如此。在

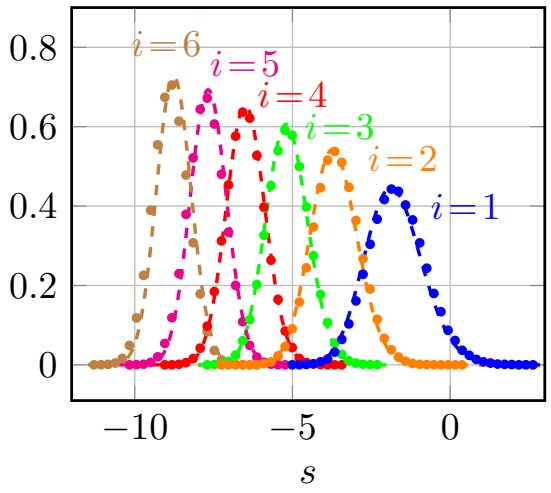


图 12： 虚线曲线表示从高斯酉系综中抽取的随机厄米矩阵的第 i^{th} 大特征值所对应的概率密度函数 $\frac{d}{ds}F_2^i(s)$。数据点表示一个阶数为 $n = 500$、$T = -1/2$（对应 $t \approx -0.0089$）的交替符号矩阵 中最上方的6条路径（$i = 1, \cdots, 6$）对应的 $\frac{d}{ds}\mathbb{P}\left(X_n^i(2^{-1/6}n^{2/3}t) - n2^{-5/6} + t^2 \leq s\right)$。数据取自100 000个构型组成的样本。

当区域趋于无穷大并经过适当的重新缩放后，已知冻结区域与中央无序区域之间的边界会收敛到艾里过程，其单点分布函数是随机厄米矩阵最大特征值的 Tracy-Widom 分布。基于启发式论证和数值模拟，我们猜想该边界应收敛到扩展艾里过程的艾里线系综。

参考文献

[1]J. Baik、P. Deift 和 K. Johansson。关于随机排列的最长递增子序列长度的分布。*J. Am.Math.Soc.*，12(4):1119–1178，1999。

[2]Matthew O Blunt、James C Russell、María del Carmen Giménez-López、Juan P Garrahan、Xiang Lin、Martin Schroder、Neil R Champness 和 Peter H Beton。二维分子网络中的随机铺砖与拓扑缺陷。*Science*，322(5904):1077–1081，2008。[3] F. Bornemann。随机矩阵理论中分布的数值计算：综述。*arXive-prints*，2009。[4] H. Cohn、N. Elkies 和 J. Propp。阿兹特克菱形随机多米诺骨牌铺砌的局部统计特性。*arXiv e-prints*。[5]Ivan Corwin 和 Alan Hammond。艾里线系综的布朗吉布斯性质。*Inventionesmathematicae*，195(2):441–508，2014。[6] Bryan Debin。通过切线法探索格点统计模型中的北极曲线现象。博士论文，UCL-鲁汶天主教大学，2021。[7] Freeman J Dyson。随机矩阵特征值的布朗运动模型。*JournalofMathematicalPhysics*，3(6):1191–1198，1962。[8] N. Elkies、G. Kuperberg、M. Larsen 和 J. Propp。交错符号矩阵与多米诺骨牌铺砌（第一部分）。*J.Algebr.Comb.*，1(2):111–132，1992。[9] N. Elkies、G. Kuperberg、M. Larsen 和 J. Propp。交错符号矩阵与多米诺骨牌铺砌（第二部分）。*J.Algebr.Comb.*，1(3):219–234，1992。

致谢

作者感谢 Timoteo Carletti 仔细审阅稿件。部分研究结果使用了“高性能计算设备联盟”（CECI）提供的计算资源；该联盟由比利时科学研究基金会（F.R.S.-FNRS）根据第 2.5020.11 号资助项目及瓦隆大区提供资金支持。JF DK 获得 FNRS博士生奖学金资助，项目编号为 FC38477。PR 是 FRS-FNRS（比利时科学研究基金会）的高级研究员。

[10] É. Janvresse、T. de La Rue 和 Y. Velenik。关于多米诺骨牌洗牌的一则注记。电子组合学期刊，13(1):R30，2006。[11]K. Johansson。不相交路径、随机铺砌与随机矩阵。概率论及相关领域，123(2):225–280，2002。[12] K. Johansson。北极圈边界与艾里过程。概率年刊，33(1):1–30，2005。

[13] Pieter W Kasteleyn。晶格上二聚体的统计特性：I. 正方晶格上的二聚体排列数。*Physica*，27(12):1209–1225，1961。[14] Linus Pauling。冰及其他原子排列具有一定随机性的晶体的结构与熵。美国化学会志，57(12):2680–2684，1935。[15] Michael Prähofer 和 Herbert Spohn。 1+ 1维生长过程与随机矩阵的普适分布。*Physicalreviewletters*，84(21):4882，2000。[16] Carolina Rodríguez-Gallo、Antonio Ortiz-Ambriz 和 Pietro Tierno。人工胶体冰中的拓扑边界约束。物理评论快报，126(18):188001，2021。[17]Kazumasa A Takeuchi、Masaki Sano、Tomohiro Sasamoto 和 Herbert Spohn。生长界面揭示尺度不变性背后的普适涨落。科学报告，1(1):1–5，2011。[18] Harold NV Temperley 和 Michael E Fisher。统计力学中的二聚体问题——一个精确结果。哲学杂志，6(68):1061–1063，1961。[19]C. A. Tracy 和 H. Widom。能级间距分布与艾里核。*Commun.Math.Phys.*，159(1):151–174，1994。