arXiv:2301.00605v1 [math.AP] 2 Jan 2023

自治半线性双曲型偏微分方程时间周期解的正则性

Irina Kmit * Lutz Recke †

摘要

本文研究一维半线性双曲型偏微分方程的自治边值问题。对于满足某一非共振条件的时间周期经典解，我们证明如下结论：如果偏微分方程关于空间变量连续，并且关于未知函数具有 C^∞ 阶光滑性，那么解关于时间变量具有 C^∞ 阶光滑性；如果偏微分方程关于 x 和 u 具有 C^∞ 阶光滑性，那么解关于 t 和 x 具有 C^∞ 阶光滑性。对于适当的弱解，同样的结论也成立。

此外，我们给出一些时间周期函数的例子，它们不满足非共振条件，因而是弱解而非经典解；还有一些是经典解，但既不关于 t 也不关于 x 具有 C^∞ 阶光滑性，即使偏微分方程关于 x 和 u 具有 C^∞ 阶光滑性也是如此。

在证明中，我们利用线性时间周期双曲型偏微分方程的弗雷德霍姆可解性性质，以及 E. N. Dancer 关于抽象等变方程解的正则性的一项结果。

关键词：一维半线性双曲型偏微分方程、自主边值问题、解的正则性、非共振条件、Fredholm可解性

1 引言

本文研究如下类型的一维半线性一阶双曲方程组的边值问题的时间周期解

$$\partial_t u_j(t,x) + a_j(x)\partial_x u_j(t,x) = f_j(x, u(t,x))$$

以及如下类型的一维半线性二阶双曲型方程的时间周期解

$$\partial_t^2 u(t,x) - a(x)^2 \partial_x^2 u(t,x) = f(x, u(t,x), \partial_t u(t,x), \partial_x u(t,x)).$$

下面我们来表述有关一阶系统的结果。具体而言，我们考虑具有反射边界条件且时间周期为 1 的时间周期解的 2×2系统，即问题（对于 $t\in\mathbb{R}$, $x\in[0,1]$）的一类解 $u=(u_1,u_2)$

$$\begin{aligned} &\partial_t u_j(t,x) + a_j(x)\partial_x u_j(t,x) = f_j(x,u(t,x)),\ j=1,2,\\ &u_1(t,0) = r_1 u_2(t,0),\ u_2(t,1) = r_2 u_1(t,1),\\ &u(t+1,x) = u(t,x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

*柏林洪堡大学数学研究所，菩提树下大街6号，D-10099 柏林。现借调至乌克兰国家科学院力学与数学应用问题研究所。电子邮箱：kmit@mathematik.hu-berlin.de

†柏林洪堡大学数学研究所，菩提树下大街6号，D-10099柏林。电子邮件：recke@mathematik.hu-berlin.de

我们假设对于 $j=1,\ 2$

$$\begin{aligned}&a_j\in C([0,1]),\ r_j\in\mathbb{R},\ a_j(x)\neq 0 \text{ and } a_1(x)\neq a_2(x) \text{ for all } x\in[0,1],\\&\partial_{u_1}^k\partial_{u_2}^l f_j \text{ exist and belong to } C([0,1]\times\mathbb{R}^2) \text{ for all } k,l\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

此外，我们记（对于 $t\in\mathbb{R}$、 x、 $y\in[0,1]$和 $j=1,\ 2$）

$$\alpha_j(x,y):=\int_x^y\frac{dz}{a_j(z)}.$$

定理 1.1 假设 (1.2) 成立，并令 $u\in C(\mathbb{R}\times[0,1];\mathbb{R}^2)$ 满足以下条件之一

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\frac{\partial_{u_1}f_1(x,u(t-\alpha_1(x,1),x))}{a_1(x)}-\frac{\partial_{u_2}f_2(x,u(t-\alpha_2(x,1),x))}{a_2(x)}\right)dx\\&\neq\ln|r_1r_2| \textit{ for all } t\in\mathbb{R}\end{aligned}\tag{1.3}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\frac{\partial_{u_1}f_1(x,u(t+\alpha_1(0,x),x))}{a_1(x)}-\frac{\partial_{u_2}f_2(x,u(t+\alpha_2(0,x),x))}{a_2(x)}\right)dx\\&\neq\ln|r_1r_2| \textit{ for all } t\in\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

则以下结论成立：

(i) 若 u 满足 (1.1) 中的边界条件和周期性条件，且存在一个序列 $u^1,u^2,\ldots\in C^1(\mathbb{R}\times[0,1];\mathbb{R}^2)$，使得对于 $j=1,\ 2$,

$$|u_j^n(t,x)-u_j(t,x)|+|\partial_t u_j^n(t,x)+a_j(x)\partial_x u_j^n(t,x)-f_j(x,u(t,x))|\to 0 \textit{ for } n\to\infty$$

关于 $(t,x)\in\mathbb{R}\times[0,1]$一致地，则 u 是 (1.1) 的经典解，特别是，u 是 C^1-光滑的。此外，所有偏导数 $\partial_t^k u,\ k\in\mathbb{N}$ 均存在，且属于 $C(\mathbb{R}\times[0,1];\mathbb{R}^2)$。

(ii) 若 u 是方程 (1.1) 的经典解，且函数 a_j 和 f_j、 $j=1$、2 均为 C^∞-光滑的，则 u 也为 C^∞-光滑。

现在，我们阐述关于满足一个狄利克雷边界条件和一个诺伊曼边界条件的二阶方程的时间周期解的结果。更确切地说，我们考虑如下类型的问题（针对 $t\in\mathbb{R}$ 和 $x\in[0,1]$）：

$$\begin{aligned}&\partial_t^2u(t,x)-a(x)^2\partial_x^2u(t,x)=f(x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)),\\&u(t,0)=0,\ \partial_x u(t,1)=0,\\&u(t+1,x)=u(t,x).\end{aligned}\tag{1.5}$$

我们假设

$$\begin{aligned}&a\in C^1([0,1]),\ a(x)\neq 0 \text{ for all } x\in[0,1],\\&\partial_2^j\partial_3^k\partial_4^l f \text{ exist and belong to } C([0,1]\times\mathbb{R}^3) \text{ for all } j,k,l\in\mathbb{N}\cup\{0\},\end{aligned}\tag{1.6}$$

其中， $\partial_j f$ 表示函数 f 对其第 j 个自变量的导数。更确切地说，若 $f=f(x,u,v,w)$，则 $\partial_2 f$表示对 u的导数， $\partial_3 f$表示导数

对 v的导数，而 $\partial_4 f$ 表示对 w的导数。此外，我们记（对于 $t \in \mathbb{R}$、x、 $y \in [0,1]$ 和 $u \in C([0,1] \times \mathbb{R}^2)$）

$$\alpha(x,y) := \int_x^y \frac{dz}{a(z)},$$

$$b_+(t,x,u) := \partial_3 f(x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)) + \frac{\partial_4 f(x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x))}{a(x)},$$

$$b_-(t,x,u) := \partial_3 f(x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)) - \frac{\partial_4 f(x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x))}{a(x)}.$$

二阶问题 (1.5) 的弱形式（见定理 1.1 (i)）将会用到，它比一阶问题 (1.1) 的弱形式稍复杂；事实上，它只是一种技术工具。因此，我们不在下面的定理 1.2 中给出问题 (1.5) 的弱解的正则性结果，而只给出问题 (1.5) 的经典解的正则性结果。

定理 1.2 假设 (1.6) 成立。设 $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ 是问题 (1.5) 的一个经典解，并假设它满足下列条件之一

$$\int_0^1 \frac{b_+(t+\alpha(x,1),x,u) - b_-(t-\alpha(x,1),x,u)}{a(x)}\,dx \neq 0 \ \textit{for all}\ t \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

and

$$\int_0^1 \frac{b_+(t-\alpha(0,x),x,u) - b_-(t+\alpha(0,x),x,u)}{a(x)}\,dx \neq 0 \ \textit{for all}\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

则下述结论成立：

(i) 所有偏导数 $\partial_t^k u$, $k \in \mathbb{N}$ 均存在，且属于 $C(\mathbb{R} \times [0,1])$。(ii) 若函数 a 和 f 是 C^∞-光滑的，则 u也同样是 C^∞-光滑的。

注 1.3 在大多数应用中，问题 (1.1) 和 (1.5) 的解是通过从平稳解 [7, 8, 12] 发生 Hopf 分岔，并对这类解关于参数 [9]进行延拓而得到的。

注 1.4 J. K. Hale 和 J. Scheurle 的论文 [3] 研究了抽象自治半线性演化方程的解关于时间的光滑性，前提是这些解有界且随时间变化不大。他们将研究结果应用于具有常系数的一维弱阻尼非线性波动方程，即

$$\partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) + \delta \partial_t u(t,x) - u(t,x) - \lambda u(t,x) = f(u(t,x)), \tag{1.9}$$

该方程满足齐次狄利克雷边界条件。函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是光滑的，且阶为 $o(|u|)$，其中 $u \to 0$, λ 较小， δ 为正且较小。文中证明，充分小的有界解关于时间是光滑的。

我们将此与定理 1.2 进行比较：一方面，我们的问题 (1.5) 中的方程比方程 (1.9) 更一般。此外，在定理 1.2 中，我们不假设解随时间变化不大。另一方面，我们的定理 1.2 只涉及时间周期解，而非一般的有界解。尽管如此，若将函数 b_+ 和 b_- 的定义应用于方程 (1.9)，则

$$b_+(t,x,u) = b_-(t,x,u) = -\delta.$$

因此， [3] 的假设 $\delta > 0$ 意味着定理 1.2 的假设均已满足。

注 1.5 考虑定理 1.2 在非线性波动方程这一特殊情形下的表述，该方程比 (1.9) 稍具一般性，即

$$\partial_t^2 u(t,x) - a(x)^2 \partial_x^2 u(t,x) = \beta_1(x)\partial_t u(t,x) + \beta_2(x)\partial_x u(t,x) + f(x,u(t,x)).$$

如果将 b_+ 和 b_- 的定义应用于这个方程，则

$$b_+(t,x,u) = \beta_1(x) + \frac{\beta_2(x)}{a(x)},\ b_-(t,x,u) = \beta_1(x) - \frac{\beta_2(x)}{a(x)}.$$

因此，条件 (1.7) 和 (1.8) 完全相同，并且它们对任意 u都成立，当且仅当

$$\int_0^1 \frac{\beta_1(x)}{a(x)}\,dx \neq 0.$$

注 1.6 我们不知道定理 1.1 和 1.2 能否推广到空间维数大于一的情形。原因在于，空间维数为一的线性自治双曲偏微分算子与空间维数大于一的此类算子本质上有所不同：它们在 L^p-空间 [16] 中满足谱映射性质，而且更重要的是，对于非线性问题的应用而言，它们在 C-空间 [14]中也满足谱映射性质。此外，它们生成里斯基（参见例如 [2, 15]）。空间维数大于一时，通常并非如此（参见 M. Renardy 在 [17]中的反例）。因此，在适当的时间周期函数空间中讨论这些算子的弗雷德霍姆性，是一个非常困难的问题。

注 1.7 定理 1.1 可推广到如下类型的一阶双曲型系统问题（其中 $m < n$ 为自然数） $n \times n$

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_j(t,x) + a_j(x)\partial_x u_j(t,x) = f_j(x,u(t,x)),\ j \le n,\\
&u_j(t,0) = \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk} u_k(t,0),\ j \le m,\\
&u_j(t,1) = \sum_{k=1}^{m} r_{jk} u_k(t,1),\ m < j \le n.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

这里，考虑以下充分条件来替代非共振条件 (1.3) 和 (1.4)

$$\max_{s,t\in[0,1]} \max_{j\le m} \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |r_{jk} r_{kl}| \exp \int_0^1 \left(\frac{\partial_{u_k} f_k(x,u(t,x))}{a_k(x)} - \frac{\partial_{u_j} f_j(x,u(s,x))}{a_j(x)} \right) dx < 1$$

and

$$\max_{s,t\in[0,1]} \max_{m<j\le n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=m+1}^{n} |r_{jk} r_{kl}| \exp \int_0^1 \left(\frac{\partial_{u_k} f_k(x,u(t,x))}{a_k(x)} - \frac{\partial_{u_j} f_j(x,u(s,x))}{a_j(x)} \right) dx < 1.$$

如果函数 u 满足这两个条件之一，那么问题 (1.10) 在 u 中的线性化具有 Fredholm可解性（参见 [9]）。

在 [5], 采用不同方法，讨论一般线性非自治一阶双曲方程组，即如下方程组的时间周期解的更高正则性问题

$$(\partial_t + a(x,t)\partial_x + b(x,t))u = f(x,t), \tag{1.11}$$

其满足如下类型的非线性反射边界条件

$$\begin{aligned} u_j(0,t) &= h_j(z(t)), \quad 1 \le j \le m, \\ u_j(1,t) &= h_j(z(t)), \quad m < j \le n, \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中

$$z(t) = (u_1(1,t), \dots, u_m(1,t), u_{m+1}(0,t), \dots, u_n(0,t)) \tag{1.13}$$

得到了探讨。结果表明，只要满足形如 l 的条件，连续解就是 C^l-正则的

$$\exp\left\{\int_x^{x_j} \left(\frac{b_{jj}}{a_j} - r\frac{\partial_t a_j}{a_j^2}\right)(\eta, \omega_j(\eta; x, t))\, d\eta\right\} \sum_{k=1}^{n} \left|\partial_k h_j'(z)\right| < 1 \tag{1.14}$$

对所有 $j \le n$、 $x \in [0,1]$、 $t \in \mathbb{R}$、 $z \in \mathbb{R}^n$和 $r = 0$，1，.....，l，这些条件均成立。事实证明，非自治情形本质上将解的正则性与形如（1.14）的条件数量联系起来（见 [6, 注 1.4] 和 [11, 第 3.6]小节）。

注 1.8 在 [9] 中，我们探讨非自治半线性问题的周期解关于时间的光滑性，其形式如下：

$$\partial_t u_j(t,x) + a_j(x)\partial_x u_j(t,x) = f_j(t,x,u(t,x)),\ j = 1,2,$$

and

$$\partial_t^2 u(t,x) - a(x)^2 \partial_x^2 u(t,x) = f(t,x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)).$$

在 [9] 中，假设线性化问题（即对非线性问题的解进行线性化）没有非平凡解。这与自治情形本质上不同，因为在自治情形下，非线性问题的解 u 的线性化问题以 $\partial_t u$ 为解。另一方面，在非自治情形下，关于线性化问题的这一假设不仅意味着非线性问题的解关于时间具有正则性，还意味着该解具有局部唯一性，并且对参数具有光滑依赖性。

在 [10] 中，我们研究了非自治线性问题的时间周期解的更高正则性，该问题对应于方程

$$\partial_t^2 u - a(t,x)^2 \partial_x^2 u + a_1(t,x)\partial_t u + a_2(t,x)\partial_x u + a_3(t,x)u = f(t,x).$$

我们证明，正则性每提高一个阶次，都需要增加额外的非共振条件。

本文其余部分安排如下：

第 2 节讨论一阶系统的问题 (1.1)，第 3 节讨论二阶方程的问题 (1.5)。

在第 2.1 小节中，我们引入问题 (1.1) 的一种恰当弱形式，使推论 4.2 可应用于该问题。在第 2.2 小节中，我们证明，只要条件 (1.3) 和 (1.4) 中有一个成立，推论 4.2 的主要假设 —— 线性化问题具有弗雷德霍姆性——便得到满足。基于这一点，我们在第 2.3 小节中证明定理 1.1。

在第 3.1 小节中，我们证明，二阶问题 (1.5) 等价于一种一阶问题 (1.1)，但其方程和边界条件中包含额外的非局部积分项。

最后，我们在附录中给出抽象非线性分析中的定理 4.1 和推论 4.2。

2 一阶系统的证明

本节将证明定理 1.1。因此，我们将假设假设 (1.2) 成立。

我们将使用函数空间

$$\mathcal{C} := \{u \in C(\mathbb{R} \times [0,1]; \mathbb{R}^2) : \ u(t+1,x) = u(t,x) \text{ for all } t \in \mathbb{R}, \ x \in [0,1]\},$$

该空间配备最大范数，且是完备的

$$\|u\|_\infty := \max\{|u_j(t,x)| : \ t \in \mathbb{R}, \ x \in [0,1], \ j = 1,2\},$$

以及函数空间 $\mathcal{C}^1 := \{u \in \mathcal{C} : \ u \text{ is } C^1\text{-光滑}\}$，该空间配备范数 $\|u\|_\infty + \|\partial_t u\|_\infty + \|\partial_x u\|_\infty$，且是完备的。此外，我们将使用闭子空间

$$\mathcal{C}_{\rm bc} := \{u \in \mathcal{C} : \ u_1(t,0) = r_1 u_2(t,0), u_2(t,1) = r_2 u_1(t,1) \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \ \mathcal{C}^1_{\rm bc} := \mathcal{C}_{\rm bc} \cap \mathcal{C}^1$$

分别位于 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^1$中。最后，我们考虑线性有界算子

$$A : \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C} : \ Au := (\partial_t u_1 + a_1 \partial_x u_1, \partial_t u_2 + a_2 \partial_x u_2)$$

以及非线性的 C^∞-光滑叠加算子

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C} : \ [F(u)](t,x) := (f_1(x, u(t,x)), f_2(x, u(t,x))).$$

显然，函数 u 是问题 (1.1) 的经典解，当且仅当它是下列问题的解

$$u \in \mathcal{C}^1_{\rm bc} : \ Au = F(u). \tag{2.1}$$

现在我们旨在将推论 4.2 应用于问题 (2.1)。为此，我们引入单参数群 $S_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$、$\varphi \in \mathbb{R}$，其定义如下

$$[S_\varphi u](t,x) := u(t+\varphi, x).$$

容易验证， S_φ 在 $\mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{C}^1$ 上均强连续，即映射 $\varphi \mapsto S_\varphi u$ 对所有 $u \in \mathcal{C}$ 都是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{C}$ 的连续映射，并且该映射对所有 $u \in \mathcal{C}^1$ 都是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{C}^1$ 的连续映射。此外，我们有

$$S_\varphi A u = A S_\varphi u, \ S_\varphi F(u) = F(S_\varphi u).$$

因此，对于所有满足 $A - F'(u)$ 是从 $\mathcal{C}^1_{\rm bc}$ 到 $\mathcal{C}$ 的弗雷德霍姆指标为零算子的 (2.1) 的解，推论 4.2 均适用（其中 $U = \mathcal{C}^1_{\rm bc}$、 $V = \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{F}(u) = Au - F(u)$）。但遗憾的是，无论 u 是否满足条件 (1.3) 或 (1.4) 之一， $A - F'(u)$ 都不是从 $\mathcal{C}^1_{\rm bc}$ 到 $\mathcal{C}$ 的弗雷德霍姆指标为零算子。粗略地说，原因如下：定义域 $\mathcal{C}^1_{\rm bc}$ 略显过小。应当对其作适当扩充，或者换言之，我们应采用 (1.1) 的恰当弱形式。

2.1 弱形式

令 $\bar{A} : \mathcal{D}(\bar{A}) \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 表示线性算子 A 的闭包。(1.1) 的适当弱形式为

$$u \in \mathcal{D}(\bar{A}) \cap \mathcal{C}_{\rm bc} : \ \bar{A}u = F(u). \tag{2.2}$$

引理 2.1 算子 A 在 $\mathcal{C}$ 中是可闭的。

证明。取序列 $u^1, u^2, \ldots \in \mathcal{C}^1$ 和 $v \in \mathcal{C}$，使得对于$n \to \infty$， $\|u^n\|_\infty + \|Au^n - v\|_\infty \to 0$。我们需要证明 $v = 0$。

由 $\partial_y \alpha_1(x, y) = 1/a_1(y)$ 可得

$$u_1^n(t,x) - u_1^n(t + \alpha_1(x,0), 0) = \int_0^x \frac{d}{dy} u_1^n(t + \alpha_1(x,y), y)\, dy$$
$$= \int_0^x (\partial_t u_1^n(t + \alpha_1(x,y), y) + a_1(y)\partial_x u_1^n(t + \alpha_1(x,y), y)) \frac{dy}{a_1(y)}.$$

令 $n \to \infty$ 趋于极限，得到 $\int_0^x v_1(t,y)/a_1(y)\, dy = 0$。因此 $v_1(t,x)/a_1(x) = 0$，即 $v_1 = 0$。这里我们用到了如下假设：对所有 $x \in [0,1]$， $a_1(x) \neq 0$ （参见 (1.2)）。

类似地可证明 $v_2 = 0$。 ■

按照定义， A 的闭包 $\bar{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 中 A 的最小闭扩张。 $\bar{A}$ 的定义域 $\mathcal{D}(\bar{A})$ 是所有满足以下条件的 $u \in \mathcal{C}$ 的集合：存在序列 $u^1, u^2, \ldots \in \mathcal{C}^1$ 以及元素 $v \in \mathcal{C}$， 使得

$$\|u^n - u\|_\infty + \|Au^n - v\|_\infty \to 0 \text{ for } n \to \infty, \tag{2.3}$$

和 A 在 $u \in \mathcal{D}(A)$ 上作为 $Au := v$ 起作用。根据引理 2.1，该定义是正确的，即与 u^1、 u^2、.....以及满足 (2.3) 的 v 的选择无关。

注 2.2 对于 1-周期连续函数 $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $y \in [0,1]$，定义 $u_{\phi,\, y} \in \mathcal{C}$ 如下：

$$u_{\phi,y}(t,x) := (\phi(t + \alpha_1(x,y)), \phi(t + \alpha_2(x,y))).$$

于是 $u_{\phi,\, y} \in \mathcal{D}(\bar{A})$：事实上，取一个 1-周期 C^1-函数序列 ϕ^1、 ϕ^2、.....： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对于 $n \to \infty$， 关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致地有 $\phi^n(t) \to \phi(t)$。于是 $u_{\phi^n,\, y} \in \mathcal{C}^1$ 以及 $Au_{\phi^n,\, y} = 0$。因此，(2.3) 在 $u = u_{\phi,\, y}$、 $u^n = u_{\phi^n,\, y}$ 和 $v = 0$ 下成立。但是，如果 ϕ 不是 C^1- 光滑的，则 $u_{\phi,\, y} \notin \mathcal{C}^1$。因此， $\mathcal{D}(\bar{A})$ 大于 $\mathcal{C}^1$，即 $\bar{A}$ 是 A 的真扩张。

注 2.3 考虑问题 (1.1)，其中 $a_1(x) \equiv 4$， $a_2(x) \equiv -4$， $f_1(x,u) \equiv f_2(x,u) \equiv 0$以及 $r_1 = -r_2 = 1$，即

$$\begin{aligned} &\partial_t u_1(t,x) + 4\partial_x u_1(t,x) = \partial_t u_2(t,x) - 4\partial_x u_2(t,x) = 0, \\ &u_1(t,0) = u_2(t,0),\ u_2(t,1) = -u_1(t,1), \\ &u(t+1,x) = u(t,x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于满足对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均有 $\phi(t + 1/2) = -\phi(t)$ 的连续函数 $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，定义 $u_\phi \in \mathcal{C}$ 为

$$u_\phi(t,x) := (\phi(t - x/4), \phi(t + x/4)).$$

于是 $u_\phi \in \mathcal{D}(\bar{A}) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$。因此，如果 ϕ 不是 C^1-光滑的，那么 u_ϕ 是 (2.2) 的解，但不是 (2.1) 的解。类似地，如果 ϕ 是 C^1-光滑的，但不是 C^2-光滑的，那么 u_ϕ 是 (2.4) 的经典解，但 $u_\phi(\cdot, x)$ 不是 C^2- 光滑的。这是可能的，因为 u_ϕ 既不满足 (1.3)，也不满足 (1.4)。

众所周知，闭线性算子的定义域赋予图范数后是完备的。因此，函数空间 $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$ 赋予范数$\|u\|_\infty + \|Au\|_\infty$后，是一个巴拿赫空间。此外，移位算子 S_φ 构成了该巴拿赫空间上的一个 C_0-群线性有界算子。因此，问题 (2.2) 是应用推论 4.2 的 候选（其中 $U = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$、 $V = \mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{F}(u) = Au - F(u)$）。以下引理更进一步说明了这一点。

引理 2.4 设函数 $u \in \mathcal{C}$ 满足条件 (1.3) 和 (1.4) 中的一个。则 $\bar{}$ $\bar{}$算子 $A - F'(u)$ 从 $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$（赋予图范数）到 $\mathcal{C}$ 是指标为零的弗雷德霍姆算子。

现在我们为引理 2.4 的证明做准备，该证明将在第 2.2 小节中完成。与引理 2.1 的证明一样，我们将使用沿特征线积分。

对于任意给定的 $u \in \mathcal{C}$，我们引入线性有界算子 $B(u)$ $C(u)$ $D(u) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，定义如下

$$[B(u)v](t,x) := \begin{bmatrix} \partial_{u_1} f_1(x, u(t,x)) v_1(t,x) \\ \partial_{u_2} f_2(x, u(t,x)) v_2(t,x) \end{bmatrix},$$

$$[C(u)v](t,x) := \begin{bmatrix} r_2 v_2(t + \alpha_1(x,0), 0) \exp\left(\displaystyle\int_0^x \frac{\partial_{u_1} f_1(z, u(t+\alpha_1(x,z),z))}{a_1(z)}\, dz \right) \\ r_1 v_1(t + \alpha_2(x,1), 1) \exp\left(-\displaystyle\int_x^1 \frac{\partial_{u_2} f_2(z, u(t+\alpha_2(x,z),z))}{a_2(z)}\, dz \right) \end{bmatrix},$$

and

$$[D(u)v](t,x) := \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^x \frac{v_1(t+\alpha_1(x,y),y)}{a_1(y)} \exp\left(\int_y^x \frac{\partial_{u_1} f_1(z, u(t+\alpha_1(x,z),z))}{a_1(z)}\, dz \right) dy, \\ -\displaystyle\int_x^1 \frac{v_2(t+\alpha_2(x,y),y)}{a_2(y)} \exp\left(\int_y^x \frac{\partial_{u_2} f_2(z, u(t+\alpha_2(x,z),z))}{a_2(z)}\, dz \right) dy \end{bmatrix}$$

$\bar{}$ $\bar{}$引理 2.5 (i) 对所有 $u, v \in \mathcal{C}$，有 $C(u)v \in \mathcal{D}(A)$，且 $(A - B(u))C(u)v = 0$。

(ii) 对所有 $u, v \in \mathcal{C}$，有 $D(u)v \in \mathcal{D}(\bar{A})$ 和 $(\bar{A} - B(u))D(u)v = v$。

(i $\bar{}$ $\bar{}$ii) 对所有 $u \in \mathcal{C}$ 和 $v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$，都有 $D(u)(A - B(u))v = v - C(u)v$。

(iv) 如果函数 u、$v \in \mathcal{C}$ 的偏导数 $\partial_t u$ 和 $\partial_t v$ 存在且连续，那么函数 $C(u)v$ 和 $D(u)v$ 是 C^1-光滑的。

(v) 如果函数 a_j 和 f_j、$j = 1$、2 是 C^∞-光滑的，那么对任意 $k \in \mathbb{N}$，以下结论成立：如果函数 u、$v \in \mathcal{C}$ 的所有偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m u$ 和 $\partial_t^l \partial_x^m v$（其中 $l \in \mathbb{N}$ 和 $m \le k$）存在且连续，那么偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m C(u)v$ 和 $\partial_t^l \partial_x^m D(u)v$（其中 $l \in \mathbb{N}$和 $m \le k+1$）存在且连续。

证明。(i) 设给定 $u, v \in \mathcal{C}$。我们需要证明存在序列 $w^1, w^2, \ldots \in \mathcal{C}$，使得

$$\|w^n - C(u)v\|_\infty \to 0 \text{ for } n \to \infty \tag{2.5}$$

and

$$\|Aw^n - B(u)C(u)v\|_\infty \to 0 \text{ for } n \to \infty. \tag{2.6}$$

我们按如下方式构造该序列：由于 $\mathcal{C}^1$ 在 $\mathcal{C}$ 中稠密，因此存在序列 $u^1, u^2, \ldots \in \mathcal{C}^1$ 和 $v^1, v^2, \ldots \in \mathcal{C}^1$，使得

$$\|u^n - u\|_\infty + \|v^n - v\|_\infty \to 0 \text{ for } n \to \infty. \tag{2.7}$$

因此，我们可以选取 $w^n := C(u^n)v^n$。于是 (2.5) 得以满足。还需证明 (2.6)。为此，我们计算

$$\begin{aligned}
&[A_1 w^n](t,x) \\
&= (\partial_t + a_1(x)\partial_x) \left(r_2 v_2^n(t + \alpha_1(x,0), 0) \exp\left(\int_0^x \frac{\partial_{u_1} f_1(z, u^n(t+\alpha_1(x,z),z))}{a_1(z)}\, dz \right) \right) \\
&= r_2 v_2^n(t + \alpha_1(x,0), 0) \exp\left(\int_0^x \frac{\partial_{u_1} f_1(z, u^n(t+\alpha_1(x,z),z))}{a_1(z)}\, dz \right) \partial_{u_1} f_1(x, u^n(t,x)) \\
&= \left[B_1(u^n) C(u^n) v^n \right](t,x).
\end{aligned}$$

类似地，可以证明 $A_2 w^n = B_2(u^n)C(u^n)v^n$，即 $Aw^n = B(u^n)C(u^n)v^n$。这就蕴含了 (2.6)。

(*ii*) 类似于（*i*），取满足（2.7）的序列 u^1、u^2、$\ldots \in \mathcal{C}^1$ 和 v^1、v^2、$\ldots \in \mathcal{C}^1$，并设 $w^n := D(u^n)v^n$。则

$$
\begin{aligned}
&[A_1 w^n](t,x)\\
&= (\partial_t + a_1(x)\partial_x)\int_0^x \frac{v_1^n(t+\alpha_1(x,y),y)}{a_1(y)} \exp\left(-\int_x^y \frac{\partial_{u_1} f_1(z,u^n(t+\alpha_1(x,z),z))}{a_1(z)}\,dz\right) dy\\
&= v_1^n(t,x) + [B_1(u^n)D(u^n)v^n](t,x).
\end{aligned}
$$

同理可证明，$A_2 w^n = B_2(u^n)D(u^n)v^n$，即 $Aw^n = B(u^n)D(u^n)v^n$。因此，

$$\|Aw^n - B(u)D(u)v\|_\infty \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

(*iii*) 给定 $u \in \mathcal{C}$ 和 $v \in \mathcal{D}(\bar{A}) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$。取序列 v^1、v^2、$\ldots \in \mathcal{C}^1$，使得对于 $n \to \infty$ 有 $\|v^n - v\|_\infty + \|Av^n - Av\|_\infty \to 0$。则

$$
\begin{aligned}
&v_1^n(t,x) - [C_1(u)v^n](t,x)\\
&= (v_1^n(t+\alpha_1(x,0),0) - r_2 v_2^n(t+\alpha_1(x,0),0)) \exp\left(\int_0^x \frac{\partial_{u_1} f_1(z,u(t+\alpha_1(x,z),z))}{a_1(z)}\,dz\right)\\
&= \int_0^x \partial_y \left(v_1^n(t+\alpha_1(x,y),y) \exp\left(\int_y^x \frac{\partial_{u_1} f_1(z,u(t+\alpha_1(x,z),z))}{a_1(z)}\,dz\right)\right) dy\\
&= [D_1(A - B(u))v^n](t,x).
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$ 取极限，并在 $x = 0$ 中利用 v 的边界条件，可得 $v_1 - C_1(u)v = D_1(A - B(u))v$。同理可证明，$v_2 - C_2(u)v = D_2(A - B(u))v$。

(*iv*) 这一断言可直接由算子 $C(u)$ 和 $D(u)$ 的定义得出。

(*v*) 假设函数 a_j 和 f_j（其中 $j = 1, 2$）是 C^∞ 光滑的。取一个整数 $k \in \mathbb{N}$ 以及函数 u、$v \in \mathcal{C}$，使得对于 $l \in \mathbb{N}$ 和 $m \le k$，所有偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m u$ 和 $\partial_t^l \partial_x^m v$ 均存在且连续。

为了证明对于 $l \in \mathbb{N}$ 和 $m \le k+1$，所有偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m C_1(u)v$ 均存在且连续（对于所有偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m C_2(u)v$，结论也类似），只需证明对于 $l \in \mathbb{N}$ 和 $m \le k+1$，以下函数的所有偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m$

$$(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,1] \mapsto v_2(t+\alpha_1(x,0),0) \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

and

$$(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,1] \mapsto \int_0^x \frac{\partial_{u_1} f_1(z,u(t+\alpha_1(x,z),z))}{a_1(z)}\,dz \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

均存在且连续。对于 (2.8)，这是显然的；对于 (2.9)，则可由以下事实得出：对于 $l \in \mathbb{N}$ 和 $m \le k$，以下函数的所有偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m$

$$(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,1] \mapsto \frac{\partial_{u_1} f_1(x,u(t,x))}{a_1(z)}\,dz \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

存在且连续。

所有偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m D_1(u)v$（其中 $l \in \mathbb{N}$ 和 $m \le k+1$）均存在且连续这一结论（$\partial_t^l \partial_x^m D_2(u)v$ 的情况类似），可由 (2.10) 以及以下显而易见的事实得出：这些函数的所有偏导数 $\partial_t^l \partial_x^m$（其中 $l \in \mathbb{N}$ 和 $m \le k$）

$$(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,1] \mapsto \frac{v_1(t,x)}{a_1(x)} \in \mathbb{R}$$

存在且连续。

■

引理 2.6 设函数 $u \in \mathcal{C}$ 满足条件 (1.3) 和 (1.4) 之一。则算子 $I - C(u)$ 是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}$ 的双射。

证明。设 u、$f \in \mathcal{C}$。假设 u 满足条件 (1.3) 和 (1.4) 之一。我们要证明，方程存在唯一解 $v \in \mathcal{C}$：

$$v = C(u)v + f. \tag{2.11}$$

对于 $t \in \mathbb{R}$、x、$y \in [0,1]$和 $j = 1$，令 2 为:

$$c_j(t,x,y) := \exp\left(\int_y^x \frac{\partial_{u_j} f_j(z, u(t+\alpha_j(x,z),z))}{a_j(z)}\, dz\right). \tag{2.12}$$

方程 (2.11) 成立，当且仅当对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x \in [0,1]$，有:

$$\begin{aligned} v_1(t,x) &= r_1 c_1(t,x,0) v_2(t+\alpha_1(x,0),0) + f_1(t,x), & (2.13)\\ v_2(t,x) &= r_2 c_2(t,x,1) v_1(t+\alpha_2(x,1),1) + f_2(t,x). & (2.14) \end{aligned}$$

方程组 (2.13)–(2.14) 成立，当且仅当 (2.13) 成立，且

$$\begin{aligned} v_2(t,x) &= r_1 r_2 c_1(t+\alpha_2(x,1),1,0) c_2(t,x,1) v_2(t+\alpha_1(1,0)+\alpha_2(x,1),0)\\ &\quad + r_2 c_2(t,x,1) f_1(t+\alpha_2(x,1),1) + f_2(t,x). \end{aligned} \tag{2.15}$$

将 $x = 0$ 代入 (2.15)，得到:

$$\begin{aligned} v_2(t,0) &= r_1 r_2 c_1(t+\alpha_2(0,1),1,0) c_2(t,0,1) u_2(t+\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1),0)\\ &\quad + r_2 c_2(t,0,1) f_1(t+\alpha_2(0,1),1) + f_2(t,0). \end{aligned} \tag{2.16}$$

同理，方程组 (2.13)–(2.14) 成立，当且仅当 (2.14) 成立，且

$$\begin{aligned} v_1(t,x) &= r_1 r_2 c_2(t+\alpha_1(x,0),0,1) c_1(t,x,0) v_1(t+\alpha_2(0,1)+\alpha_1(x,0),0)\\ &\quad + r_2 c_2(t+\alpha_1(x,0),0,1) f_2(t+\alpha_1(x,0),0) + f_1(t,x), \end{aligned} \tag{2.17}$$

即，当且仅当 (2.14) 和 (2.17) 成立，并且

$$\begin{aligned} v_1(t,1) &= r_1 r_2 c_2(t+\alpha_1(1,0),0,1) c_1(t,1,0) v_1(t+\alpha_2(0,1)+\alpha_1(1,0),0)\\ &\quad + r_2 c_2(t+\alpha_1(1,0),0,1) f_2(t+\alpha_1(1,0),0) + f_1(t,1). \end{aligned} \tag{2.18}$$

考虑方程 (2.16)。这是关于未知函数 $v_2(\cdot,0)$ 的函数方程。为了解出它，记 $C_{per}(\mathbb{R})$ 为所有 1-周期连续函数 $\tilde{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$所构成的巴拿赫空间，其范数为 $\|\tilde{v}\|_\infty := \max\{|\tilde{v}(t)| : t \in \mathbb{R}\}$。方程 (2.16) 是 $C_{per}(\mathbb{R})$ 中的一个方程，其形式为

$$(I - \widetilde{C})\tilde{v} = \tilde{f} \tag{2.19}$$

其中 $\tilde{v}, f \in C_{per}(\mathbb{R})$ 由 $\tilde{v}(t) := v_2(t,0)$ 定义，并且

$$\tilde{f}(t) := r_2 c_2(t,0,1) f_1(t+\alpha_2(0,1),1) + f_2(t,0)$$

且 $C \in \mathcal{L}(C_{per}(\mathbb{R}))$ 定义为

$$[\widetilde{C}\tilde{v}](t) := r_1 r_2 c_1(t+\alpha_2(0,1),1,0) c_2(t,0,1) \tilde{v}(t+\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)).$$

根据函数 c_1 和 c_2 的定义可知

$$\begin{aligned}&c_1(t+\alpha_2(0,1),1,0)c_2(t,0,1)\\&=\exp\int_0^1\left(\frac{\partial_{u_1}f_1(t+\alpha_1(1,x)+\alpha_2(0,1),x)}{a_1(x)}-\frac{\partial_{u_2}f_2(t+\alpha_2(0,x),x)}{a_2(x)}\right)dx\end{aligned}$$

并且，因此，

$$\begin{aligned}&c_1(s+\alpha_2(0,1),1,0)c_2(s,0,1)|_{s=t-\alpha_2(0,1)}\\&=\exp\int_0^1\left(\frac{\partial_{u_1}f_1(t-\alpha_1(x,1),x)}{a_1(x)}-\frac{\partial_{u_2}f_2(t-\alpha_2(x,1),x)}{a_2(x)}\right)dx,\end{aligned}$$

因此，若满足假设 (1.3)，则对所有 $t\in\mathbb{R}$， $|r_1r_2c_1(t+\alpha_2(0,1),1,0)c_2(t,0,1)|\neq 1$。

首先，考虑以下情形:

$$c_+:=\max\{|r_1r_2c_1(t+\alpha_2(0,1),1,0)c_2(t,0,1)|:\ t\in\mathbb{R}\}<1.$$

Then

$$\|\widetilde{C}\|_{\mathcal{L}(C_{per}(\mathbb{R}))}\leq\frac{1+c_+}{2}<1.$$

因此，算子 $I-C$ 是从 $C_{per}(\mathbb{R})$ 到其自身的同构。因此，存在唯一的解 $v_2(\cdot,0)\in C_{per}(\mathbb{R})$。将此解代入 (2.15) 和 (2.13) 的右端项，得到 (2.13)–(2.14) 的唯一解 $v=(v_1,v_2)\in\mathcal{C}$。

现在，考虑以下情形:

$$c_-:=\min\{|r_1r_2c_1(t+\alpha_2(0,1),1,0)c_2(t,0,1)|:\ t\in\mathbb{R}\}>1.$$

Then

$$|r_1r_2c_1(t+\alpha_2(0,1),1,0)c_2(t,0,1)|\geq\frac{1+c_-}{2}\geq 1.$$

方程 (2.16) 等价于

$$\begin{aligned}v_2(t,0)\ =\ &\frac{v_2(t-\alpha_1(1,0)-\alpha_2(0,1),0)}{r_1r_2c_1(t-\alpha_1(1,0),1,0)c_2(t-\alpha_1(1,0)-\alpha_2(0,1),0,1)}\\&-\frac{f_1(t-\alpha_1(1,0),0)}{r_1c_1(t-\alpha_1(1,0)-\alpha_2(0,1),1,0)}\\&-\frac{f_2(t-\alpha_1(1,0)-\alpha_2(0,1),0)}{r_1r_2c_1(t-\alpha_1(1,0),1,0)c_2(t-\alpha_1(1,0)-\alpha_2(0,1),0,1)}.\end{aligned}$$

这个方程又属于（2.19）那种类型，但现在

$$\|\widetilde{C}\|_{\mathcal{L}(C_{per}(\mathbb{R}))}\leq\frac{2}{1+c_-}<1.$$

因此，我们可以像上面那样继续。

如果条件 (1.4) 成立，情况也可类似处理。此时，方程 (2.18) 有唯一解，方程 (2.17) 也有唯一解，因此方程组 (2.13)–(2.14) 也有唯一解。 ■

推论 2.7 设 $u \in \mathcal{C}$ 满足条件 (1.3) 或 (1.4) 之一。则算子 $\bar{A} - B(u)$ 从 $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$ （赋予算子范数）到 $\mathcal{C}$ 是双射，且

$$(\bar{A} - B(u))^{-1} v = (I - C(u))^{-1} D(u) v \text{ for all } v \in \mathcal{C}. \tag{2.20}$$

证明。为证明单射性，假设对于某个 $v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$, 有 $(A - B(u))v = 0$。那么，引理 2.5 意味着 $(I - C(u))v = 0$, 而引理 2.6 得出 $v = 0$。

为证明满射性并得到求逆公式 (2.20)，取 $f \in \mathcal{C}$。根据引理 2.6，存在 $v \in \mathcal{C}$，使得

$$v = C(u)v + D(u)f.$$

特别地，$v \in \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$ （参见算子 $C(u)$ 和 $D(u)$ 的定义）。此外，引理 2.5 (i) 和 (ii) 得出 $v \in \mathcal{D}(A)$，并且

$$(\bar{A} - B(u))v = (\bar{A} - B(u))(C(u)v + D(u)f) = f.$$

■

注释 2.8 下面解释“非共振条件”这一名称的由来。

推论 2.7 声称，若 $u \in \mathcal{C}$ 满足条件 (1.3) 和 (1.4) 之一，则对于任意 $g \in \mathcal{C}$，问题有且仅有一个解 v

$$\begin{aligned} &\partial_t v_j(t,x) + a_j(x)\partial_x v_j(t,x) - \partial_{u_j} f_j(x, u(t,x)) v_j(t,x) = g_j(t,x),\ j = 1,2, \\ &v_1(t,0) = r_1 v_2(t,0),\ v_2(t,1) = r_2 v_1(t,1), \\ &v(t+1,x) = v(t,x). \end{aligned} \tag{2.21}$$

假设函数 u 与时间无关，即 $u(t,x) = u(x)$，并令 $b_j(x) := \partial_{u_j} f_j(x, u(x))$。容易计算得出，特征值问题的特征值为

$$\begin{aligned} &a_j(x) v_j'(x) - b_j(x) v_j(x) = \lambda v_j(x),\ j = 1,2, \\ &v_1(0) = r_1 v_2(0),\ v_2(1) = r_2 v_1(1) \end{aligned}$$

are

$$\lambda_k = \frac{\ln|r_1 r_2| - \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{b_2(x)}{a_2(x)} - \frac{b_1(x)}{a_1(x)} \right) dx}{\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{a_2(x)} - \frac{1}{a_1(x)} \right) dx} + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

因此，当且仅当以下条件成立时，所有特征值的实部均不为零

$$\ln|r_1 r_2| \neq \int_0^1 \left(\frac{b_2(x)}{a_2(x)} - \frac{b_1(x)}{a_1(x)} \right) dx,$$

而这正是条件 (1.3) 或条件 (1.4)（如果系数 $\partial_{u_j} f_j(x, u(t,x))$ 与时间无关，则 (1.3) 和 (1.4) 相同）。在这种情况下，方程组 (2.21) 的所有“内部频率”$\lambda_k / 2\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$ 都不同于右端项 g_j 的所有“外部频率” $k \in \mathbb{Z}$，因此称外部频率与内部频率不共振。

2.2 引理 2.4 的证明

假设 $u \in \mathcal{C}$ 满足条件 (1.3) 和 (1.4) 中的一个。记

$$\widetilde{B}(u) := F'(u) - B(u).$$

我们需要证明，算子 $\bar{A} - F'(u) = \bar{A} - B(u) - \widetilde{B}(u)$ 是指标为零的弗雷德霍姆算子，其作用空间为从 $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{bc}}$（赋予图范数）到 $\mathcal{C}$。根据推论 2.7，当且仅当算子

$$(\bar{A} - B(u))^{-1}(\bar{A} - F'(u)) = I - (\bar{A} - B(u))^{-1}\widetilde{B}(u) = I - (I - C(u))^{-1}D(u)\widetilde{B}(u)$$

是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}$ 的指标为零的弗雷德霍姆算子。因此，只需证明

$$\left[(I - C(u))^{-1}D(u)\widetilde{B}(u)\right]^2 \text{ is compact from } \mathcal{C} \text{ into } \mathcal{C}.$$

这是 S. M. Nikolskii 的以下弗雷德霍姆性判据的推论（参见例如 [4,定理 XIII.5.2]）：若 U 是巴拿赫空间，且 $K\colon U \to U$ 是线性有界算子，使得 K^2 是紧的，则算子 $I - K$ 是指标为零的弗雷德霍姆算子。

由于 u 固定，在本小节接下来的内容中，我们不再提及算子 $B(u)$、$\widetilde{B}(u)$、$C(u)$ 和 $D(u)$ 对 $\widetilde{\ }$ 的依赖，即 $B := B(u)$、$\widetilde{B} := \widetilde{B}(u)$、$C := C(u)$ 以及 $D := D(u)$。直接计算可得

$$\left[(I - C)^{-1}D\widetilde{B}\right]^2 = (I - C)^{-1}\left[(D\widetilde{B})^2 + D\widetilde{B}C(I - C)^{-1}D\widetilde{B}\right]. \tag{2.22}$$

然后，根据引理 2.6，只需证明算子 DBD 和 DBC 从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}$ 是紧的。

我们来证明 $D_1\widetilde{B}D$（$D_2\widetilde{B}D$ 同理）从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}$ 是紧的。取 $v \in \mathcal{C}$。根据定义，B 和 $\widetilde{B}$ 是 $F'(u)$ 的“对角”部分和“非对角”部分。因此，

$$[\widetilde{B}v](t,x) = \Big(\partial_{u_2} f_1(x, u(t,x))v_2(t,x), \partial_{u_1} f_2(x, u(t,x))v_1(t,x)\Big).$$

因此，$[DBv](t,x)$ 的第一分量为

$$[D_1\widetilde{B}v](t,x) = \int_0^x \frac{c_1(t,x,y)}{a_1(y)}\partial_{u_2} f_1(y, u(t + \alpha_1(x,y), y))v_2(t + \alpha_1(x,y), y)\, dy.$$

因此，

$$[D_1\widetilde{B}Dv](t,x) = \int_0^x \int_y^1 d(t,x,y,z)v_2(t + \alpha_1(x,y) + \alpha_2(y,z), z)\, dzdy \tag{2.23}$$

with

$$d(t,x,y,z) := -\frac{c_1(t,x,y)c_2(t + \alpha_1(x,y), x, z)}{a_1(y)a_2(z)}\partial_{u_2} f_1(y, u(t + \alpha_1(x,y), y)).$$

我们根据下式改变（2.23）中的积分次序

$$\int_0^x dy \int_y^1 dz = \int_0^x dz \int_0^z dy + \int_x^1 dz \int_0^x dy. \tag{2.24}$$

考虑（2.24）右端的第一项。它是线性算子

$$[\mathcal{K}v](t,x) := \int_0^x \int_0^z d(t,x,y,z)v(t+\alpha_1(x,y)+\alpha_2(y,z),z)\,dydz. \tag{2.25}$$

我们必须证明 $\mathcal{K}$ 从 $C([0,1]^2)$（赋予最大范数）到其自身是紧的。因此，我们将 (2.25) 中内层积分的积分变量 y 替换为新的积分变量 η，如下所示：

$$\eta = \widehat{\eta}(t,x,y,z) := t+\alpha_1(x,y)+\alpha_2(y,z) = t+\int_x^y \frac{d\xi}{a_1(\xi)} + \int_y^z \frac{d\xi}{a_2(\xi)}.$$

由于假设对所有 $x\in[0,1]$ 都有 $a_1(x) \neq a_2(x)$（参见 (1.2)），我们有

$$\partial_y \widehat{\eta}(t,x,y,z) = \frac{1}{a_1(y)} - \frac{1}{a_2(y)} \neq 0 \text{ for all } y\in[0,1],$$

也就是说，函数 $y\mapsto \widehat{\eta}(t,x,y,z)$ 严格单调。记其反函数为$\eta\mapsto \widehat{y}(t,x,\eta,z)$。那么

$$[\mathcal{K}v_2](t,x) = \int_0^x \int_{\widehat{\eta}(t,x,0,z)}^{\widehat{\eta}(t,x,z,z)} \tilde{d}(t,x,\eta,z)v_2(\eta,z)\,d\eta dz \tag{2.26}$$

with

$$\tilde{d}(t,x,\eta,z) := \frac{d(t,x,\widehat{y}(t,x,\eta,z),z)}{\dfrac{1}{a_1(\widehat{y}(t,x,\eta,z))} - \dfrac{1}{a_2(\widehat{y}(t,x,\eta,z))}}.$$

根据假设 (1.2)，函数 $\tilde{d}$ 是连续的，而函数 $\widehat{\eta}$ 是 C^1-光滑的。因此，阿尔泽拉-阿斯科利定理推出线性算子 $\mathcal{K}$ 从 $C([0,1]^2)$（赋予最大范数）到其自身是紧的。

类似地，可以证明右侧 (2.24) 中的第二项也具有紧性，该项为

$$\int_x^1 \int_0^x d(t,x,y,z)v_2(t+\alpha_1(x,y)+\alpha_2(y,z),z)\,dydz,$$

从 $C([0,1]^2)$ 映射到其自身，并生成一个紧算子。

最后，我们来证明算子 $\widetilde{BC}$ 从 $\mathcal{X}$ 映射到其自身的紧算子。我们有（$\widetilde{\ }$ 对 D_2BC 也有类似结论）

$$[D_1\widetilde{B}Cv](t,x) = \int_0^x d(t,x,y)v_1(t+\alpha_1(x,y)+\alpha_2(y,1),1)\,dy$$

with

$$d(t,x,y) := r_2\frac{c_1(t,x,y)c_2(t+\alpha_1(x,y),x,y)}{a_1(y)}\partial_{u_1}f_2(y,u(t+\alpha_1(x,y),y)).$$

在此，我们将积分变量 y 改为 $\eta = t+\alpha_1(x,y)+\alpha_2(y,1)$，然后按照上述步骤继续。

2.3 定理 1.1 的证明

取一个函数 $u \in C(\mathbb{R}\times[0,1];\mathbb{R}^2)$，其满足 (1.1) 中的边界条件和周期性条件，并且存在一个序列 $u^1, u^2, \ldots \in C^1(\mathbb{R}\times[0,1];\ \mathbb{R}^2)$，使得对于 $j = 1, 2$，满足以下收敛性:

$$|u_j^n(t,x) - u_j(t,x)| + |\partial_t u_j^n(t,x) + a_j(x)\partial_x u_j^n(t,x) - f_j(x,u(t,x))| \to 0 \text{ for } n \to \infty,$$

一致地　　在 $x \in [0,1]$ 和 $t \in \mathbb{R}$中。于是， u 是方程 (2.2) 的一个解，由引理 2.5（iii）可得

$$u = C(u)u + D(u)(F(u) - B(u)u). \tag{2.27}$$

此外，我们假设 u 满足条件 (1.3) 和 (1.4) 之一。于是，由引理 2.4 和推论 4.2 可知，所有偏导数 $\partial_t^k u$、 $k \in \mathbb{N}$都存在且连续。因此，函数 $F(u)$ 和 $B(u)u$ 的所有偏导数 ∂_t^k、 $k \in \mathbb{N}$也都存在且连续。因此，由引理 2.5（iv）和 (2.27) 可得 $u \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{bc}}$ 和 $\bar{A}u = Au$，即 u 是方程 (1.1) 的一个经典解。由此证明了定理 1.1 的断言（i）。

同样，如果函数 a_j 、 f_j、 $j = 1,2$ 是 C^∞-光滑的，那么由引理 2.5（v）和 (2.27) 可得， u 是 C^∞- 光滑的，即定理 1.1 的断言（ ii ）也得证。

3 二阶方程的证明

本节将证明定理 1.2。因此，我们假设假设 (1.6) 成立。

3.1 将二阶方程转化为一阶系统

在本小节中，我们说明，对于二阶方程问题 (1.5) 的任意解 u，都可以构造出一个解

$$v_1(t,x) := \partial_t u(t,x) + a(x)\partial_x u(t,x), \quad v_2(t,x) := \partial_t u(t,x) - a(x)\partial_x u(t,x) \tag{3.1}$$

t关于以下一阶系统积分微分方程问题的解　　:

$$\begin{aligned}
&\partial_t v_1(t,x) - a(x)\partial_x v_1(t,x) = \partial_t v_2(t,x) + a(x)\partial_x v_2(t,x)\\
&= f(x,[Jv](t,x),[Kv](t,x),[Lv](t,x)) + \frac{a'(x)}{2}(v_1(t,x) - v_2(t,x)),\\
&v_1(t,0) + v_2(t,0) = v_1(t,1) - v_2(t,1) = 0,\\
&v(t+1,x) = v(t,x),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

反之亦然。这里偏积分算子 J 定义为

$$[Jv](t,x) := \frac{1}{2}\int_0^x \frac{v_1(t,y) - v_2(t,y)}{a(y)}dy,$$

而"局部"算子 K 和 L 定义为

$$[Kv](t,x) := \frac{v_1(t,x) + v_2(t,x)}{2}, \quad [Lv](t,x) := \frac{v_1(t,x) - v_2(t,x)}{2a(x)}.$$

引理 3.1 (i) 如果 $u \in C^2(\mathbb{R}\times[0,1])$ 是方程 (1.5) 的一个解，那么由 (3.1) 定义的函数 $v \in C^1(\mathbb{R}\times[0,1];\mathbb{R}^2)$ 是方程 (3.2) 的一个解。

(ii) 设 $v \in C^1(\mathbb{R}\times[0,1];\ \mathbb{R}^2)$ 是方程 (3.2) 的一个解。则函数 $u := Jv$ 是 C^2-光滑的，并且是方程 (1.5) 的一个解。

证明。(*i*) 设给定 $u \in C^2(\mathbb{R}\times[0,1];\mathbb{R}^2)$，并令 $v \in C^1_{per}(\mathbb{R}\times[0,1];\mathbb{R}^2)$ 由 (3.1) 定义。则

$$\partial_t u = \frac{v_1+v_2}{2} = Kv, \quad \partial_x u = \frac{v_1-v_2}{2a} = Lv \tag{3.3}$$

以及 $\partial_t v_1 = \partial_t^2 u + a\partial_t\partial_x u$、$\partial_x v_1 = \partial_t\partial_x u + a'\partial_x u + a\partial_x^2 u$、$\partial_t v_2 = \partial_t^2 u - a\partial_t\partial_x u$ 和 $\partial_x v_2 = \partial_t\partial_x u - a'\partial_x u - a\partial_x^2 u$。因此，

$$\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u - aa'\partial_x u = \partial_t v_1 - a\partial_x v_1 = \partial_t v_2 + a\partial_x v_2. \tag{3.4}$$

进一步，设 u 是问题 (1.5) 的一个解。那么，(3.3) 和边界条件 $u(t,0)=0$ 以及 $\partial_x u(t,1) + \gamma u(t,1) = 0$ 表明，$v_1(t,0) + v_2(t,0) = 0$，且 $v_1(t,1) - v_2(t,1) + \gamma a(1)[Lv](t,1) = 0$，即为 (3.2) 中的边界条件。此外，由 $u(t,0)=0$ 和 (3.3) 可得 $u(t,x) = [Jv](t,x)$。因此，(3.3)、(3.4) 以及 (1.5) 中的微分方程给出了 (3.2) 中的微分方程。

(*ii*) 令 $v \in C^1(\mathbb{R}\times[0,1];\,\mathbb{R}^2)$ 为 (3.2) 的一个解。设 $u := Jv$。则

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\partial_t v_1(t,y) - \partial_t v_2(t,y)}{a(y)}\,dy \\ &= \int_0^x (\partial_y v_1(t,y) + \partial_y v_2(t,y))\,dy = v_1(t,x) + v_2(t,x).\end{aligned}$$

这里我们用到了第一个边界条件以及 (3.2) 中的微分方程。由此可知，$\partial_t u$ 是 C^1-光滑的，并且

$$\partial_t^2 u = \partial_t v_1 + \partial_t v_2. \tag{3.5}$$

此外，关系式 $u = Jv$ 可推出 $\partial_x u = \partial_x Jv = Lv$，即 $\partial_x u$ 也是 C^1-光滑的，因此 u 是 C^2-光滑的。此外，$2(a'\partial_x u + a\partial_x^2 u) = \partial_x v_1 - \partial_x v_2$，即

$$a^2\partial_x^2 u = \frac{a}{2}(\partial_x v_1 - \partial_x v_2) - \frac{a'}{2}(v_1 - v_2). \tag{3.6}$$

但是，(3.2)、(3.5) 和 (3.6) 推出如 (1.5) 中的微分方程。

(1.5) 中的第一个边界条件由 $u = Jv$ 得出，而 (1.5) 中的第二个边界条件由 $\partial_x u = Lv$ 以及 (3.2) 中的第二个边界条件得出。

■

遗憾的是，我们无法将定理 1.1 直接应用于方程组 (3.2)，因为方程组 (3.2) 的方程中含有非局部项。因此，我们将第 2 节的内容调整到方程组 (3.2) 的情形。

3.2 方程 (3.2) 的弱形式

我们使用第 1 节中引入的记号 $\alpha(x,y)$、$b_+(t,x,u)$ 和 $b_-(t,x,u)$，以及第 2 节中引入的函数空间 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^1$。此外，我们引入一个线性有界算子 $A\colon\ \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}$，其定义为

$$Av := (\partial_t v_1 - \partial_x v_1, \partial_t v_2 + \partial_x v_2)$$

以及一个非线性 C^∞-光滑叠加算子 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 由

$$[F_j(v)](t,x) := f\,(x,[Jv](t,x),[Kv](t,x),[Lv](t,x)) + \frac{a'(x)}{2}(v_1(t,x) - v_2(t,x)), \quad j=1,2.$$

(3.2) 的任何经典解都是问题 $Av = F(v)$ 的解，因此也是问题

$$v \in \mathcal{D}(\bar{A}) \cap \mathcal{C}_{\rm bc} : \ \bar{A}v = F(v). \tag{3.7}$$

为了将推论 4.2 应用于问题 (3.7)（其中 $U = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\rm bc}$、 $V = \mathcal{C}$，且 $\mathcal{F}(v) = Av - F(v)$），我们按照第 2 节中的方法进行。我们写为（对于 $t \in \mathbb{R}$、 $x \in [0,1]$、 $v \in \mathcal{C}$）

$$\begin{aligned}
c_+(t,x,v) &:= b_+(t,x,Jv) \\
&= \partial_3 f(x,[Jv](t,x),[Kv](t,x),[Lv](t,x)) + \frac{\partial_4 f(x,[Jv](t,x),[Kv](t,x),[Lv](t,x))}{a(x)}, \\
c_-(t,x,v) &:= b_-(t,x,Jv) \\
&= \partial_3 f(x,[Jv](t,x),[Kv](t,x),[Lv](t,x)) - \frac{\partial_4 f(x,[Jv](t,x),[Kv](t,x),[Lv](t,x))}{a(x)}.
\end{aligned}$$

注意，如果函数 $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,1])$ 满足条件 (1.7)，那么由 (3.1) 定义的函数 $v \in C(\mathbb{R} \times [0,1]; \mathbb{R}^2)$ 满足条件

$$\int_0^1 \frac{c_+(t+\alpha(x,1),x,v) - c_-(t-\alpha(x,1),x,v)}{a(x)}\, dx \neq 0 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

类似地，如果 u 满足 (1.8)，那么 v 满足条件

$$\int_0^1 \frac{c_+(t-\alpha(0,x),x,u) - c_-(t+\alpha(0,x),x,u)}{a(x)}\, dx \neq 0 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

我们将线性化 $F'(v)$ 分为三部分：一部分是“对角”项，一部分是“非对角”项，另一部分是“积分”项，如下所示:

$$F'(v) = B(v) + \widetilde{B}(v) + \mathcal{J}(v) \tag{3.10}$$

with

$$\begin{aligned}
[B(v)w](t,x) &:= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (c_+(t,x,v) + a'(x))w_1(t,x) \\ (c_-(t,x,v) - a'(x))w_2(t,x) \end{bmatrix}, \\
[\widetilde{B}(v)w](t,x) &:= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (c_-(t,x,v) - a'(x))w_2(t,x) \\ (c_+(t,x,v) + a'(x))w_1(t,x) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

and

$$[\mathcal{J}_1(v)w](t,x) = [\mathcal{J}_2(v)w](t,x) := \partial_2 f(x,[Jv](t,x),[Kv](t,x),[Lv](t,x))[Jw](t,x).$$

与第 2.1 小节一样，对于给定的 $v \in \mathcal{C}$，我们引入线性有界算子 $C(v)$ $D(v) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，定义如下

$$[C(v)w](t,x) := \begin{bmatrix} -w_2(t-\alpha(x,0),0)\sqrt{\dfrac{a(0)}{a(x)}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{c_+(t-\alpha(x,z),z,v)}{a(z)}\, dz\right) \\ w_1(t+\alpha(x,1),1)\sqrt{\dfrac{a(1)}{a(x)}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^1 \frac{c_-(t+\alpha(x,z),z,v)}{a(z)}\, dz\right) \end{bmatrix}$$

and

$$[D(v)w](t,x) := \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{a(x)}}\displaystyle\int_0^x \frac{w_1(t-\alpha(x,y),y)}{\sqrt{a(y)}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_x^y \frac{c_+(t-\alpha(x,z),z,v)}{a(z)}\, dz\right) dy, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{a(x)}}\displaystyle\int_x^1 \frac{w_2(t+\alpha(x,y),y)}{\sqrt{a(y)}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_y^x \frac{c_-(t+\alpha(x,z),z,v)}{a(z)}\, dz\right) dy \end{bmatrix}.$$

这里我们对第 2.1 小节中 $C(u)v$ 和 $D(u)v$ 的定义作了如下调整：将 u 替换为 v，将 v 替换为 w，将 a_1 替换为 $-a$，将 a_2 替换为 a，将 r_1 替换为负一，将 r_2 替换为一，将 $\partial_{u_1} f_1(x,u(t,x))$ 替换为$_{1\,2}(c_+(t,x,v) + a'(x))$，并将 $\partial_{u_2} f_2(x,u(t,x))$ 替换为 $_{1\,2}(c_-(t,x,v) - a'(x))$。我们还使用了恒等式

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_x^y \frac{a'(z)}{a(z)}\,dz\right) = \sqrt{\frac{a(y)}{a(x)}}.$$

注意，若在 (1.3) 和 (1.4) 中将 a_1 替换为 $-a$，将 a_2 替换为 a，将 r_1 替换为负一，将 r_2 替换为一，将 $\partial_{u_1} f_1(x,u(t,x))$ 替换为 $_{1\,2}(c_+(t,x,v) + a'(x))$，并将 $\partial_{u_2} f_2(x,u(t,x))$ 替换为 $_{1\,2}(c_-(t,x,v) - a'(x))$，便可立即得到 (3.8) 和 (3.9)。

最后，所有满足 (3.2) 中边界条件的函数构成的子空间为$\mathcal{C}_{\rm bc} := \{v \in \mathcal{C}:\ v_1(t,0) + v_2(t,0) = v_1(t,1) - v_2(t,1) = 0\}$.

类似于引理 2.5 和引理 2.6 以及推论 2.7，我们得到以下结论：

引理 3.2 若 $v \in \mathcal{C}$ 满足条件 (3.8) 和 (3.9) 之一，则 $I - C(v)$ 是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}$的双射，$\bar{A} - B(v)$ 是从 $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{C}_{\rm bc}$ 到 $\mathcal{C}$的双射，并且

$$(\bar{A} - B(v))^{-1} w = (I - C(v))^{-1} D(v) w \quad \textit{for all } w \in \mathcal{C}.$$

3.3 弗雷德霍姆性

引理 3.3 设函数 $v \in \mathcal{C}$ 满足条件 (3.8) 和 (3.9) 之一。则算子 $I - C(v) - D(v)(B(v) + \mathcal{J}(v))$ 是从 $\mathcal{C}$ 到其自身的弗雷德霍姆算子，且指标为零。

证明。我们按照引理 2.4 的证明进行。我们需要证明算子 $I - (I - C(v))^{-1}\left[D(v)(\widetilde{B}(v) + \mathcal{J}(v))\right]$ 是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}$的弗雷德霍姆算子，且指标为零。Nikolskii 的紧性判据表明，只需证明

$$\left((I - C(v))^{-1}\left[D(v)(\widetilde{B}(v) + \mathcal{J}(v))\right]\right)^2 \text{ is compact from } \mathcal{C} \text{ into } \mathcal{C}. \tag{3.11}$$

由于 v 固定，我们将省略算子 $B(v)$、$B(v)$、$C(v)$、$D(u)$、$E(v)$、和 $\mathcal{J}(v)$ 对 v 的依赖，即 $B := B(v)$、$B := B(v)$、$C := C(v)$、$D := D(v)$ 和 $\mathcal{J} = \mathcal{J}(v)$。与第 2.2 小节中一样，我们使用公式

$$\left((I - C)^{-1}(D(\widetilde{B} + \mathcal{J}))\right)^2 = (I - C)^{-1}\left((D(\widetilde{B} + \mathcal{J}))^2 + D(\widetilde{B} + \mathcal{J})C(I - C)^{-1}D(\widetilde{B} + \mathcal{J})\right).$$

与 引理 2.2 的证明类似，要证明 (3.11)，只需证明这些算子

$$\left(D(\widetilde{B} + \mathcal{J})\right)^2 = D\widetilde{B}D\widetilde{B} + D\mathcal{J}D\mathcal{J} + D\widetilde{B}D\mathcal{J} + D\mathcal{J}D\widetilde{B}$$

和 $D(B + \mathcal{J})C = DBC + D\mathcal{J}C$ 是从 $\mathcal{C}$ 到其自身的紧算子。由于在引理 2.4 的证明中，我们已经证明算子 DBD 和 DBC 是从 $\mathcal{C}$到其自身的紧算子，因此只需证明算子 $D\mathcal{J}$ 是从 $\mathcal{C}$ 到其自身的紧算子。该算子的第一分量（第二分量类似）可表示为

$$[D_1\mathcal{J}w](t,x) = \int_0^x c(t,x,y)\int_0^y \frac{w_1(t-\alpha(x,y),z) - w_2(t-\alpha(x,y),z)}{a(z)}\,dzdy$$

with

$$c(t,x,y) := -\left[\frac{\partial_2 f(y,[Jv](s,y),[Kv](s,y),[Lv](s,y))}{2\sqrt{a(x)a(y)}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_x^y \frac{c_+(z,v(s,z))}{a(z)}\,dz\right)\right]_{s=t-\alpha(x,y)}.$$

我们将积分变量 y 替换为 $\eta = \widehat{\eta}(t,y,z) := t-\alpha(x,y)$，因此 $d\eta = -dy/a(y)$。若 $y = \widehat{y}(t,\eta,z)$ 是逆变换，则有

$$[D_1\mathcal{J}w](t,x) = \int_t^{t-\alpha(0,x)}\int_0^{\widehat{y}(t,x,\eta)} c(t,x,\widehat{y}(t,x,\eta))a(\widehat{y}(t,x,\eta))\frac{w_1(\eta,z)-w_2(\eta,z)}{a(z)}\,dzd\eta.$$

因此，由于阿尔泽拉-阿斯科利定理，线性算子 $w\in\mathcal{C}\mapsto D_1\mathcal{J}w\in C([0,1]^2)$ 是紧的。

■

3.4 定理 1.2 的证明

设 $u\in C^2(\mathbb{R}\times[0,1])$ 是方程 (1.5) 的一个经典解。那么，根据引理 3.1（i），由 (3.1) 定义的函数 $v\in C^1(\mathbb{R}\times[0,1];\mathbb{R}^2)$ 是方程组 (3.2) 的一个经典解，因此也是抽象方程 (3.7) 的一个解。此外，如果 u 满足条件 (1.7) 和 (1.8) 中的一个，那么 v 满足条件 (3.8) 和 (3.9) 中的一个。由于引理 3.3，推论 4.2 可应用于抽象方程 (3.7) 的解 v。因此，所有偏导数 $\partial_t^k v$、$k\in\mathbb{N}$ 都存在且连续。由于 $u=Jv$，所有偏导数 $\partial_t^k u$、$k\in\mathbb{N}$ 也都存在且连续。因此，定理 1.2 的断言 (*i*) 得证。

为了证明定理 1.2 的断言（ii），假设函数 a 和 f 是 C^∞-光滑的。然后，与第 2.3 小节一样，我们使用引理 2.5（v），并证明 v 是 C^∞-光滑的。同样，由于 $u=Jv$，u 是 C^∞-光滑的，正如所需。

4 附录

给定巴拿赫空间 U 和 V，设 $S_\varphi\in\mathcal{L}(U)$ 和 $T_\varphi\in\mathcal{L}(V)$ 分别是定义在 U 和 V 上的单参数 C_0-群，其中 $\varphi\in\mathbb{R}$，即

$$\begin{aligned} &S_\varphi\circ S_\psi = S_{\varphi+\psi} \text{ for all } \varphi,\psi\in\mathbb{R},\ S_0 = I,\\ &\varphi\in\mathbb{R}\mapsto S_\varphi u\in U \text{ is continuous for all } u\in U,\end{aligned}$$

并且对 T_φ 也有类似结论。此外，设 $\mathcal{F}\colon U\to V$ 是一个映射，使得

$$\mathcal{F}(S_\varphi u) = T_\varphi\mathcal{F}(u) \text{ for all } \varphi\in\mathbb{R} \text{ and } u\in U. \tag{4.1}$$

以下定理归功于 E. N. Dancer（参见 [1, 定理 1]）。粗略地说，它断言如下：一般而言，映射 $\gamma\in\mathbb{R}\mapsto S_\gamma u\in U$ 并非 C^1-光滑，但如果 u 满足一个等变方程 $\mathcal{F}(u)=0$，且该方程包含一个 C^1-弗雷德霍姆映射 $\mathcal{F}$，那么它就是光滑的。

定理 4.1 设 U 和 V 是巴拿赫空间。设 $\mathcal{F}$ 是 C^1-光滑的，并给定 $u^0\in U$，使得

$$\mathcal{F}(u^0)=0,\ \textit{and } \mathcal{F}'(u^0) \textit{ is Fredholm of index zero from } U \textit{ into } V. \tag{4.2}$$

如果满足条件 (4.1)，那么映射 $\gamma\in\mathbb{R}\mapsto S_\gamma u^0\in U$ 是 C^1-光滑的。

这个定理可以很容易地推广到 C^∞ 情形，如下所示:

推论 4.2 设 U 和 V 为巴拿赫空间。设 $\mathcal{F}$ 为 C^∞-光滑，且给定 $u^0 \in U$ 使得 (4.2) 成立。若条件 (4.1) 满足，则映射 $\gamma \in \mathbb{R} \mapsto S_\gamma u^0 \in U$ 是C^∞-光滑的。

证明。我们需要证明，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，映射 $\varphi \in \mathbb{R} \mapsto S_\varphi u^0 \in U$ 都是 C^k-光滑的。为此，我们对 k使用归纳法。

由于定理 4.1，关于 $k = 1$ 的断言成立。

进行归纳步骤时，我们假设对于固定的 $k \in \mathbb{N}$，映射 $\varphi \in \mathbb{R} \mapsto S_\varphi u^0 \in U$是 C^k-光滑的，并证明该映射是 C^{k+1}-光滑的。

我们定义 $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq U \to U$ 为 C_0-群 S_φ的无穷小生成元，即

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{u \in U : \ \varphi \in \mathbb{R} \mapsto S_\varphi u \in U \text{ is } C^1\text{-smooth}\}, \ \mathcal{A}u := \frac{d}{d\varphi} S_\varphi u|_{\varphi=0} \text{ for } u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

类似地，我们定义 $\mathcal{D}(\mathcal{A}^l)$ 和 $\mathcal{A}^l$，其中 $l \geq 2$。特别地，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varphi}\mathcal{F}(S_\varphi u)|_{\varphi=0} = \mathcal{F}'(u)\mathcal{A}u \text{ for } u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\\
&\frac{d^2}{d\varphi^2}\mathcal{F}(S_\varphi u)|_{\varphi=0} = \mathcal{F}'(u)\mathcal{A}^2 u + \mathcal{F}''(u)(\mathcal{A}u, \mathcal{A}u) = 0 \quad \text{for } u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^2)
\end{aligned}$$

更确切地说，存在 C^∞-映射 $\mathcal{F}_l \colon U^l \to V$, $l \in \mathbb{N}$，使得

$$\frac{d^l}{d\varphi^l}\mathcal{F}(S_\varphi u)|_{\varphi=0} = \mathcal{F}'(u)\mathcal{A}^l u + \mathcal{F}_l(u, \mathcal{A}u, \mathcal{A}^2 u, \ldots, \mathcal{A}^{l-1}u) \quad \text{for } u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^l).$$

根据 (4.1)，对于所有 $\varphi \in \mathbb{R}$ 和 $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^l)$，都有

$$\mathcal{F}_l(S_\varphi u, S_\varphi \mathcal{A}u, S_\varphi \mathcal{A}^2 u, \ldots, S_\varphi \mathcal{A}^{l-1}u) = T_\varphi \mathcal{F}_l(u, \mathcal{A}u, \mathcal{A}^2 u, \ldots, \mathcal{A}^{l-1}u).$$

因此，$\mathcal{F}(S_\varphi u^0) \equiv 0$ 得出

$$\mathcal{F}'(u^0)\mathcal{A}^l u^0 + \mathcal{F}_l(u^0, \mathcal{A}u^0, \mathcal{A}^2 u^0, \ldots, \mathcal{A}^{l-1}u^0) = 0 \quad \text{for } l \leq k.$$

现在，考虑由下式定义的 C^∞-映射 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k) \colon U^{k+1} \to V^{k+1}$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_0(u_0, u_1, \ldots, u_k) := \mathcal{F}(u_0),\\
&\mathcal{G}_j(u_0, u_1, \ldots, u_k) := \mathcal{F}'(u_0)u_j + \mathcal{F}_j(u_0, u_1, \ldots, u_{j-1}) \quad \text{for } j \leq k.
\end{aligned}$$

为了将定理 4.1 应用于方程 $\mathcal{G}(u_0, u_1, \ldots, u_k) = 0$ 在其解中

$$(u_0, u_1, \ldots, u_k) = (u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^k u^0),$$

我们必须证明，导数 $\mathcal{G}'(u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^k u^0)$ 是一个从 U^{k+1} 到 V^{k+1} 的指标为零的弗雷德霍姆算子。我们有

$$\mathcal{G}_0'(u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^k u^0)(u_0, u_1, \ldots, u_k) = \mathcal{F}'(u^0)u_0$$

并且，对于 $j \leq k$,

$$\mathcal{G}_j'(u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^k u^0)(u_0, u_1, \ldots, u_k) := \mathcal{F}'(u^0)u_j + \sum_{i=0}^{j-1} \partial_i \mathcal{F}_j(u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^{j-1}u^0)u_i.$$

因此， $\mathcal{G}'(u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^k u^0)$ 是一种三角算子，其形式为

$$\mathcal{G}'(u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^k u^0) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}'(u^0) & 0 & 0 & \ldots \\ \partial_0 \mathcal{F}_1(u^0) & \mathcal{F}'(u^0) & 0 & \ldots \\ \partial_0 \mathcal{F}_2(u^0, \mathcal{A}u^0) & \partial_1 \mathcal{F}_2(u^0, \mathcal{A}u^0) & \mathcal{F}'(u^0) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

根据假设， $\mathcal{F}'(u^0)$ 是从 U 到 V 的指标为零的弗雷德霍姆算子。因此，存在如下线性有界算子 $\mathcal{J}, \mathcal{K}: U \to V$，使得 $\mathcal{F}'(u^0) = \mathcal{J} + \mathcal{K}$，其中 $\mathcal{J}$ 是双射，且 $\mathcal{K}$ 是紧算子。因此

$$\mathcal{G}'(u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^k u^0) = \widetilde{\mathcal{J}} + \widetilde{\mathcal{K}}$$

with

$$\widetilde{\mathcal{J}} := \begin{bmatrix} \mathcal{J} & 0 & 0 & \ldots \\ \partial_0 \mathcal{F}_1(u^0) & \mathcal{J} & 0 & \ldots \\ \partial_0 \mathcal{F}_2(u^0, \mathcal{A}u^0) & \partial_1 \mathcal{F}_2(u^0, \mathcal{A}u^0) & \mathcal{J} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \ \widetilde{\mathcal{K}} := \begin{bmatrix} \mathcal{K} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \mathcal{K} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \mathcal{K} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

其中， $\widetilde{\mathcal{J}}$ 是从 U^{k+1} 到 V^{k+1} 的双射算子，而 $\widetilde{\mathcal{K}}$ 是从 U^{k+1} 到 V^{k+1} 的紧算子。因此， $\mathcal{G}'(u^0, \mathcal{A}u^0, \ldots, \mathcal{A}^k u^0)$ a 是从 U^{k+1} 到 V^{k+1} 的指标为零的弗雷德霍姆算子。现在，由定理 4.1 可得

$$\varphi \in \mathbb{R} \mapsto (S_\varphi u^0, S_\varphi \mathcal{A}u^0, \ldots, S_\varphi \mathcal{A}^k u^0) \in U^{k+1} \text{ is } C^1\text{-smooth},$$

这意味着 $\varphi \in \mathbb{R} \mapsto S_\varphi u^0 \in U$ 是 C^{k+1}-光滑的。 ■

致谢

Irina Kmit 获得了大众汽车基金会项目“从建模与分析到逼近”的资助。

参考文献

[1] E. N. Dancer，《无限维空间中的 G-不变隐函数定理》，Proc. Royal Soc. Edinburgh 92A (1982), 13–30。[2] Bao-Zhu Guo 和 Jun-Min Wang，《波动与梁偏微分方程控制：Riesz基方法》，控制工程通信，施普林格，2019。[3] J. K. Hale 和 J. Scheurle，《非线性演化方程有界解的光滑性》，微分方程杂志 56 (1985), 142-163。[4] L. V. Kantorovich和 G. P. Akilov，《泛函分析》，第2版，Pergamon Press，1982；Appl. Math. Sciences 156，施普林格，2004。[5] I. Kmit，《一阶双曲型偏微分方程的平滑效应与Fredholm性质》，算子理论：进展与应用 231，Birkh¨auser，2013，219–238。

[6] I. Kmit 和 L. Recke, 《时间周期双曲系统的Fredholm择一定理与解的正则性》, 微分与积分方程 29(11/12) (2016): 1049–1070。[7] I. Kmit 和 L. Recke, 《半线性耗散双曲系统的Hopf分岔》, 微分方程杂志 257 (2014), 246-309。[8] I. Kmit 和 L. Recke, 《一般一维半线性波动方程的Hopf分岔》, 动力系统与微分方程杂志 (2021)。[9] I. Kmit 和 L. Recke, 《抽象方程的解正则性与光滑依赖性及其在双曲型偏微分方程中的应用》, 微分方程杂志 259 (2015), 6287-6337。[10] I. Kmit 和 L. Recke, 《时间周期二阶双曲方程: Fredholm可解性、正则性与光滑依赖性》, 载于: 伪微分算子与广义函数, 算子理论: 进展与应用 245, Birkh¨auser, 2015, 147-181。[11] I. Kmit、 L. Recke、 V. Tkachenko, 《非自治拟线性双曲系统的有界解与几乎周期可解性》, J. Evol. Eq. 21(2021), 4171–4212。[12] N. Kosovalić和 B. Pigott, 《阻尼与时滞一维波动方程的自激振动》, 动力系统与微分方程杂志 31 (2019), 129-152。[13] N. Kosovalić 和 B. Pigott, 《阻尼与时滞高维波动方程的自激振动》, 离散与连续动力系统 39 (2019), 2413-2435。[14] M. Lichtner, 《线性双曲系统的谱映射定理》, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (6) (2008), 2091–2101。[15] Z.-H. Luo、 B.-Z. Guo 和 O. Mogul, 《无限维系统的稳定性与稳定化及其应用》, 施普林格, 1999。[16] A. F. Neves、 H. de Souza Ribeiro 和 O. Lopes, 《关于双曲系统生成的演化算子谱》, 泛函分析杂志 670 (1986), 320-344。[17] M. Renardy, 《双曲型偏微分方程与黏弹性流动的线性稳定性》, 应用数学与物理杂志 (ZAMP) 45 (1994), 854-865。