arXiv:2301.00617v1 [math.FA] 2 Jan 2023

关于凸体支配的几点注记

TUOMAS P. HYTÖNEN

Ded谨以此文献给乌克兰人民，表达崇敬之情。民。

摘要。凸体支配是稀疏支配技术的重要发展，过去十年间取得了显著进展并得到广泛应用。本文提出一个凸体支配的抽象框架，该框架也适用于取值于巴拿赫空间的函数，并在这一情形下推出矩阵加权范数不等式。我们探讨其在"广义交换子"中的应用，并在线性组合中发现了新的有界算子示例，这些组合由形如 $a_i T b_i$ 的复合算子构成，其中a_i、 b_i 是逐点乘子，而 T 是奇异积分算子。

1. 引言

稀疏支配技术由 Lerner [23], 提出，旨在为 Calderón–Zygmund 算子的尖锐加权范数不等式"A_2 猜想"提供一种更简单的方法；该猜想此前由作者 [16]借助另一套工具首次证明。然而，稀疏支配的作用并不止于这一最初目标，它很快便带来了许多重要的进一步成果，如今已被应用于各种新问题， [1, 2, 3, 7, 11] 只是其中一例。该方法包含两个主要步骤，这两步在很大程度上彼此独立，实质上将算子与需要对其进行估计的空间或范数解耦：

(1) 用合适的稀疏算子/形式支配所关注的算子。
(2) 根据所关注的相关范数估计该稀疏形式。

虽然稀疏支配能非常有效地刻画所研究对象的局部大小，而这正是许多应用所需要的，但它会丢失方向信息；在处理向量值函数时，这类信息有时至关重要，尤其是在涉及矩阵值权重时。为将这一方法拓展到此类问题，Nazarov 等人 [27] 提出了所谓的凸体支配：将稀疏支配中的数值平均值替换为 $\mathbb{R}^n$ 的凸子集，从而包含不同方向上不同行为的信息。自从凸体支配被引入 Calderón–Zygmund 算子与矩阵 A_2 权重的研究中以来， [27] （另见 [10] ，其采用了另一种方法，但基于相同的核心思想），它已被 Cruz-Uribe 等人 [8], 应用于矩阵 A_p权重和双权估计，并由 Isralowitz 等人 [20, 21]拓展至 Calderón–Zygmund 算子的交换子，以及由 Di Plinio 等人 [13] 和 Muller 与 Rivera-Ríos [26]拓展至粗糙奇异积分算子。在一项近期的突破性进展中，Bownik 和 Cruz-Uribe [6] 拓展了 Rubio

日期：2023年1月3日。2010 数学学科分类。42B20, 46E40。作者获得芬兰科学院资助，资助通过芬兰随机性与结构卓越中心"FiRST"（项目编号 346314）提供。

de Francia 算法及其在加权外推中的关键应用，将其推广到矩阵值权重，并进一步发展了凸体思想。

本文旨在进一步探讨这一技巧，提出扩展和新的应用，并希望能加深我们对其抽象底层机制的理解。我们首先构建一个较为一般的框架，但对于这一方面的原创性主张，我们相对谨慎，因为现有文献中的先前研究至少隐含了大部分相关思想。观察到这一框架几乎可以原封不动地应用于巴拿赫空间值函数的情形，为该框架提供了一定的依据。具体而言，给定一个巴拿赫空间 E，我们考虑取值于 E^n 的函数，并建立一种凸体支配理论，用于涉及矩阵权 $W:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 的加权范数不等式，其中矩阵权以自然方式作用于 E^n 。也就是说，我们并未试图建立无穷维情形下完备的算子值加权范数不等式理论，但即便在这一较为有限的推广中，所得结果仍然是新的。特别地，若 E 是具有 UMD 性质的巴拿赫空间，则经典希尔伯特变换可有界地扩张到 E^n 值函数的矩阵加权空间$L^2(W;E^n)$；结果见推论 6.3，相关定义和背景知识见第 6 节。这一扩张的关键在于观察到，在这一一般性情形下，我们框架中出现的凸体仍然是 $\mathbb{R}^n$ 值的，而不是例如 E^n 值的——后者或许是人们（至少作者本人起初确实如此）可能预期的。因此，强大的欧几里得工具，尤其是 John椭球定理，在这一情形下仍然适用。

关于该理论的新应用，我们基于 Isralowitz 等人近期的一项观察 [20, 21]：算子的凸体支配 T 可以进一步导出其与逐点乘子的交换子 $[b,T]=bT-Tb$ 的支配。正如我们将在第 7 节中探讨的那样，这一现象的适用范围要广泛得多，可用于估计任何如下形式的算子

$$f\mapsto\sum_{i=1}^n a_iT(b_if),$$

其中，满足凸体支配的算子 T 与逐点乘子 a_i、b_i分别进行前复合和后复合。根据这一一般原理，我们尤其可以重新得到并强化一项近期提出的充分条件 [17]：该条件通过对函数对（b^1，b^2）施加联合条件，保证迭代混合交换子 $[b^1,[b^2,T]]$ 的有界性；此外，我们还可以得到新的例子。

与论文前半部分对抽象框架的构建不同，在后续章节的应用方面，我们并未力求达到最一般的程度。在许多情况下，有经验的读者会清楚地看到，还可以得到若干变体和推广；其中一些很可能会由本文作者及其他人于后续工作中进一步研究。除了本文所包含的具体结果外，我们还希望借此展现该理论未来发展的诸多丰富方向。

2. 范数与凸体

设 X 为一个实赋范空间。我们用

$$\bar{B}_X:=\{x\in X:\|x\|_X\le 1\}$$

表示它的闭单位球，用 X^* 表示其赋范对偶空间，后者是一个巴拿赫空间。对于 $x^* \in X^*$，我们按通常方式定义：

$$\|x^*\|_{X^*} := \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x \in \bar{B}_X\}.$$

根据 Hahn–Banach 定理，我们有

$$\|x\|_X = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x^* \in \bar{B}_{X^*}\} = \max\{\langle x, x^*\rangle : x^* \in \bar{B}_{X^*}\}; \tag{2.1}$$

特别地，上确界可以取到，即为最大值，并且对于某个 $x^* \in B_{X^*}$，我们有 $\|x\|_X = \langle x, x^*\rangle$¯。

对于 $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^n \in X^n$ 和 $x^* \in X^*$，我们定义取值于 $\mathbb{R}^n$ 的配对 $\langle \vec{x}, x^*\rangle$:=($\langle x_i, x^*\rangle)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ，以及集合值“范数”

$$\langle\!\langle \vec{x} \rangle\!\rangle_X := \{\langle \vec{x}, x^*\rangle : x^* \in \bar{B}_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

2.2. 注。 此处采用的记号改编自 Nazarov 等人 [27], ，他们引入了带有 $X = L^1(Q)$ 的版本，即配备归一化范数 $\frac{1}{|Q|}\| \ \|_1$ 的空间 $L^1(Q)$。将其推广到 $X = L^p(Q)$（即配备归一化范数 $\frac{1}{|Q|^{1/p}}\| \ \|_p$ 的 $L^p(Q)$）则归功于 Di Plinio 等人 [13]。尽管我们的主要应用将涉及定义在立方体 Q 上的函数空间，但我们认为，在完全抽象的层面上阐述该理论的基础也很有启发性。除此之外，这种观点还将清楚地表明，讨论任意巴拿赫空间 E 上取值于 E 的函数所构成的空间 $X = L^p(Q; E)$，本质上并无不同；对于 $\vec{f} \in X^n$，相应的 $\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_X$ 仍将是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，而不是例如 E^n 的子集。这使我们能够轻松运用强大的欧几里得几何中的 John椭球定理，即使所处理的是取值于无限维巴拿赫空间的函数！在其他应用中，诸如 $X = L \log L(Q)$ 这样的选择或许也有意义。

对于 $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\vec{x} \in X^n$，我们定义取值于 X的点积

$$\vec{a} \cdot \vec{x} := \vec{x} \cdot \vec{a} := \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

我们注意到以下显然的恒等式

$$\vec{a} \cdot \langle \vec{x}, x^*\rangle = \langle \vec{a} \cdot \vec{x}, x^*\rangle, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{x} \in X^n, \ x^* \in X^*,$$

and

$$\operatorname{span}_X(\vec{x}) := \operatorname{span}\{x_i\}_{i=1}^n = \{\vec{a} \cdot \vec{x} : a \in \mathbb{R}^n\} \subset X.$$

2.3.**引理**。 对于每个 $\vec{x} \in X^n$，集合 $\langle\!\langle \vec{x} \rangle\!\rangle_X \subset \mathbb{R}^n$ 是凸的、紧的，并且关于原点对称。

证明。 由B_{X^*} 具有这些性质可立即得出对称性、凸性和有界性。要证明其在 $\mathbb{R}^n$ 中是紧的，只需证明它是闭集，¯因此假设 $\langle \vec{x}, x_k^*\rangle \to \vec{e} \in \mathbb{R}^n$ 当 $k \to \infty$时，其中每个 $x_k^* \in B_{X^*}$；我们需要证明 $\vec{e} \in \langle\!\langle x \rangle\!\rangle_X$。对于每个 $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$，可得

$$|\vec{a} \cdot \vec{e}| = \lim_{k\to\infty} |\vec{a} \cdot \langle \vec{x}, x_k^*\rangle| = \lim_{k\to\infty} |\langle \vec{a} \cdot \vec{x}, x_k^*\rangle| \le \|\vec{a} \cdot \vec{x}\|_X.$$

这进而意味着

$$\Lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) := \vec{a} \cdot \vec{e}, \quad \forall \vec{a} \cdot \vec{x} \in \operatorname{span}_X(\vec{x}),$$

在子空间 span$_X(\vec{x}) \subset X$上定义了一个良定义的范数为 1 的线性泛函。根据 Hahn–Banach 定理，Λ 是某个 $x^* \in B_{X^*}$的限制。因此

$$\vec{a}\cdot\vec{e} = \Lambda(\vec{a}\cdot\vec{x}) = \langle \vec{a}\cdot\vec{x}, x^*\rangle = \vec{a}\cdot\langle \vec{x}, x^*\rangle \quad \forall \vec{a}\in\mathbb{R}^n,$$

因此，$\lim_{k\to\infty}\langle \vec{x}, x_k\rangle = \vec{e} = \langle \vec{x}, x^*\rangle \in \langle\!\langle \vec{x}\rangle\!\rangle_X$，正如我们想要证明的那样。 □

对于 $A, B \subset \mathbb{R}^n$，我们定义闵可夫斯基点积

$$A\cdot B := \{\vec{a}\cdot\vec{b} : \vec{a}\in A, \vec{b}\in B\} \subset \mathbb{R}.$$

如果 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 是凸、紧且对称的，那么 $A\cdot B \subset \mathbb{R}$也如此。在 $\mathbb{R}$上，这样的集合恰好是形如 $[-c, c]$的区间。因此，我们可以（有时也会）将 $A\cdot B = [-c, c] \subset \mathbb{R}$ 与其右端点 $c \in [0,\infty)$ 视为同一对象。特别是，对于$\vec{x}\in X^n$ 和 $\vec{y}\in Y^n$，在处理.....时我们会采用这种对应关系

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \vec{x}\rangle\!\rangle_X \cdot \langle\!\langle \vec{y}\rangle\!\rangle_Y &= \{\langle \vec{x}, x^*\rangle\cdot\langle \vec{y}, y^*\rangle : x^*\in \bar{B}_{X^*}, y^*\in \bar{B}_{Y^*}\}\\ &= \Big\{\sum_{i=1}^n \langle x_i, x^*\rangle\langle y_i, y^*\rangle : x^*\in \bar{B}_{X^*}, y^*\in \bar{B}_{Y^*}\Big\}.\end{aligned}$$

3. 双线性形式

设 X, Y 是实赋范空间，并假设有一个双线性映射t：$X\times Y\to\mathbb{R}$。我们定义它在向量对（$\vec{x}, \vec{y}$）$\in X^n\times Y^n$上的扩张如下。如果 $\vec{e}\in\mathbb{R}^n$ 和 $x\in X^n$，根据先前关于 X值点积的约定，我们有 $\vec{x}\cdot\vec{e}\in F$。若（e_i）$_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$的一组固定标准正交基，则定义

$$t(\vec{f}, \vec{g}) := \sum_{i=1}^n t(\vec{f}\cdot\vec{e}_i, \vec{g}\cdot\vec{e}_i),$$

对于 $x\in X$、$y\in Y$ 和 $\vec{e}$、$\vec{u}\in\mathbb{R}^n$，可得

$$t(x\vec{e}, y\vec{u}) := \sum_{i=1}^n t(x\vec{e}\cdot\vec{e}_i, y\vec{u}\cdot\vec{e}_i) = t(x,y)\sum_{i=1}^n (\vec{e}\cdot\vec{e}_i)(\vec{u}\cdot\vec{e}_i) = t(x,y)\vec{e}\cdot\vec{u}.$$

如果 $(\vec{u}_i)_{i=1}^n$ 是另一个标准正交基，那么

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n t(\vec{x}\cdot\vec{u}_i, \vec{y}\cdot\vec{u}_i) &= \sum_{i,j,k=1}^n t(\vec{x}\cdot\vec{e}_j, \vec{y}\cdot\vec{e}_k)(\vec{e}_j\cdot\vec{u}_i)(\vec{e}_k\cdot\vec{u}_i)\\ &= \sum_{j,k=1}^n t(\vec{x}\cdot\vec{e}_j, \vec{y}\cdot\vec{e}_k)(\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k) = \sum_{j=1}^n t(\vec{x}\cdot\vec{e}_j, \vec{y}\cdot\vec{e}_j) =: t(\vec{x}, \vec{y}),\end{aligned}$$

因此，$t(\vec{f}, \vec{g})$ 的定义与所选标准正交基无关。

如果 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换，并以自然方式作用于 F^n，那么

$$\begin{aligned}t(A\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{i=1}^n t(A\vec{f}\cdot\vec{e}_i, \vec{g}\cdot\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n t(\vec{f}\cdot A^t\vec{e}_i, \vec{g}\cdot\vec{e}_i)\\ &= \sum_{i,j=1}^n t(\vec{f}\cdot\vec{e}_j, \vec{g}\cdot\vec{e}_i)(\vec{e}_j\cdot A^t\vec{e}_i)\\ &= \sum_{i,j=1}^n t(\vec{f}\cdot\vec{e}_j, \vec{g}\cdot\vec{e}_i)(A\vec{e}_j\cdot\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^n t(\vec{f}\cdot\vec{e}_j, \vec{g}\cdot A\vec{e}_j) = t(\vec{f}, A^t\vec{g}).\end{aligned}$$

4. 从范数界到凸体界

以下引理的思想是许多现有凸体支配结果的基础。为了提炼出关键点，我们在此给出一个无算子版本，其中仅涉及函数及其范数。

4.1. **引理**。设 X, Y 是赋范空间，且 $f \in X^n, \vec{g} \in Y^n$。

设 $\mathcal{E}_K$ 是 K 的约翰椭球：$= \langle\!\langle f \rangle\!\rangle_X$ 使得

$$\mathcal{E}_K \subset K \subset \sqrt{n}\mathcal{E}_K,$$

并假设 $\mathcal{E}_K$ 非退化（即满维）。设 R_K 是一个线性变换，使得 $R_K\mathcal{E}_K = B_{\mathbb{R}^n}$是 $\mathbb{R}^n$的闭单位球，并且 $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$是 $\mathbb{R}^n$的一组标准正交基。如果

$$f_i := R_K\vec{f} \cdot \vec{e}_i, \quad g_i := R_K^{-t}\vec{g} \cdot e_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

then

$$\sum_{i=1}^n \|f_i\|_X \|g_i\|_Y \le n^{3/2} \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_X \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y.$$

证明。若 $\phi \in B_{X^*}$，则

$$\begin{aligned}\langle \phi, R_K\vec{f} \cdot \vec{e}_i \rangle &= R_K\langle \phi, \vec{f} \rangle \cdot \vec{e}_i \\ &\in R_K \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_X \cdot \vec{e}_i \subset R_K\sqrt{n}\mathcal{E}_K \cdot \vec{e}_i = \sqrt{n}\bar{B}_{\mathbb{R}^n} \cdot \vec{e}_i = \sqrt{n}[-1, 1],\end{aligned}$$

因此

$$\|f_i\|_X = \|R_K\vec{f} \cdot \vec{e}_i\|_X \le \sqrt{n}.$$

若 $\psi \in B_{Y^*}$，则

$$\begin{aligned}\langle \psi, R_K^{-t}\vec{g} \cdot \vec{e}_i \rangle &= R_K^{-t}\langle \psi, \vec{g} \rangle \cdot \vec{e}_i \\ &\in R_K^{-t}\langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y \cdot \vec{e}_i \subset [-M, M], \quad M := \max\{|\vec{y}| : \vec{y} \in R_K^{-t}\langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y\}.\end{aligned}$$

由此可得 $|\langle \psi、\ R_K^{-t}\vec{g} \cdot \vec{e}_i \rangle| \le M$，因此

$$\|g_i\|_Y = \|R_K^{-t}\vec{g} \cdot \vec{e}_i\|_Y \le M.$$

综合这些估计，我们得到

$$\sum_{i=1}^n \|f_i\|_X \|g_i\|_Y \le \sum_{i=1}^n \sqrt{n}M = n^{3/2}M.$$

另一方面，

$$\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_X \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y \supset \mathcal{E}_K \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y = R_K\mathcal{E}_K \cdot R_K^{-t}\langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y = \bar{B}_{\mathbb{R}^n} \cdot R_K^{-t}\langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y = [-M, M],$$

因此

$$M \le \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_X \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y,$$

在最后一步中，我们将对称区间 $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_X \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y$等同于其右端点。代回后，证明即告完成。□

下面的命题包含了将范数界逐步提升为凸体界的基本思想。遗憾的是，它对于大多数实际应用来说有些过于简单，但我们仍将其列出，作为随后要介绍的更重要结果的说明性玩具模型。

4.2. **命题**。设 X，Y 是赋范空间，分别含有子空间 $F \subset X$ 和 $G \subset Y$，并设 $t : F \times G \to \mathbb{R}$ 是一个双线性形式。考虑以下条件：

(1) 对于所有 $(f,\ g)\ \in F\times G,$ 均有

$$|t(f,g)|\le C\|f\|_X\|g\|_Y.$$

(2) 对所有 $(f,\vec{g})\ \in F^n\times G^n,$ 我们有

$$|t(\vec{f},\vec{g})|\le C_n\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_X\cdot\langle\!\langle\vec{g}\rangle\!\rangle_Y.$$

对于每个 $n\in\mathbb{Z}_+,$ 条件 (1) 都蕴含条件 (2)，其中 $C_n=Cn^{3/2}$。

证明。给定 $f,$ 考虑紧凸对称集

$$K:=\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_X,$$

并将其约翰椭球记为 $\mathcal{E}_K$，使得

$$\mathcal{E}_K\subset K\subset\sqrt{n}\mathcal{E}_K.$$

情形： $\mathcal{E}_K$ 是非退化的。设 R_K 是一个线性变换，使得 $R_K\mathcal{E}_K=B_{\mathbb{R}^n}$，即 $\mathbb{R}^n$ 的闭单位球。设 $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的某个标准正交基。于是我们写作

$$\begin{aligned}t(\vec{f},\vec{g})&=t(R_K^{-1}R_K\vec{f},\vec{g})=t(R_K\vec{f},R_K^{-t}\vec{g})\\&=\sum_{i=1}^n t(R_K\vec{f}\cdot\vec{e}_i,R_K^{-t}\vec{g}\cdot\vec{e}_i)=:\sum_{i=1}^n t(f_i,g_i),\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中 f_i 和 g_i 如引理 4.1 所述。

根据假设 (1) 和引理 4.1，可得

$$|t(\vec{f},\vec{g})|\le\sum_{i=1}^n|t(f_i,g_i)|\le\sum_{i=1}^n C\|f_i\|_X\|g_i\|_Y\le Cn^{3/2}\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_X\cdot\langle\!\langle\vec{g}\rangle\!\rangle Y,$$

由此，在 $\mathcal{E}_K$ 非退化的情况下，证明完毕。

情形： $\mathcal{E}_K$ <style id='4'}退化。于是，假设 $\mathcal{E}_K$ 退化；因此 $H:=$ 张成的 K是 $\mathbb{R}^n$的真子空间。令 P 表示 $\mathbb{R}^n$ 在 H上的正交投影。对于每个 $x^*\in B_{X^*},$ 都有 $\langle f、\ x^*\rangle\in K\subset H,$ 因此

$$\langle\vec{f},x^*\rangle=P\langle\vec{f},x^*\rangle=\langle P\vec{f},x^*\rangle,$$

，从而 $f=Pf$。可得

$$t(\vec{f},\vec{g})=t(P\vec{f},\vec{g})=t(\vec{f},P^t\vec{g})=t(\vec{f},P\vec{g}),\tag{4.4}$$

类似地

$$\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_X\cdot\langle\!\langle\vec{g}\rangle\!\rangle_Y=P\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_X\cdot\langle\!\langle\vec{g}\rangle\!\rangle_Y=\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_X\cdot P^t\langle\!\langle\vec{g}\rangle\!\rangle_Y=\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_X\cdot\langle\!\langle P\vec{g}\rangle\!\rangle_Y.\tag{4.5}$$

因此，只需证明将 $\vec{g}$ 换成 $P\vec{g}$ 时的命题即可，从而不妨设也有 $\vec{g}=P\vec{g}$。但随后，我们可以重复非退化情形中的论证，只需将 $\mathbb{R}^n$ 全程替换为其子空间 H；在该子空间内， $\mathcal{E}_K\subset H$ 是非退化的，因此前一种情形适用，从而得到所需结果。□

在下面的命题中，条件 (1) 是证明某个算子的稀疏支配结果时通常会确立的一个中间步骤，而条件 (2) 则是其凸体类比。该命题指出，(1) 实际上蕴含 (2)。这本质上是将 L^1 平均值推广到一般支配范数的一种抽象，相关思想已见于 [27, 引理 3.2]。

4.6. **命题**。 设 X, Y为赋范空间，其子空间为 $F \subset X$和 $G \subset Y$。设 $Q_0 \in \mathscr{D}$，并假设存在双线性形式 $t_Q : F \times G \to \mathbb{R}$，由所有 $Q \in \mathscr{D}(Q_0)$索引。考虑以下条件：

(1) 对于所有 $(f、 g) \in F \times G$，存在互不相交的 $\hat{} Q_k \subset Q_0$，满足 $\sum_k |\hat{} Q_k| \leq \varepsilon |Q_0|$，并且具有如下性质：每当 $Q_j \subset Q_0$ 互不相交、不严格包含于$\hat{}\ \hat{}$ 任意 Q_k 中，并覆盖所有 Q_k 时，则

$$|t_{Q_0}(f, g) - \sum_j t_{Q_j}(f, g)| \leq C\|f\|_X \|g\|_Y.$$

$\vec{}$(2) 对于所有 $(f、 \vec{g}) \in F^n \times G^n$，存在互不相交的 $Q_k \subset Q_0$，满足 $\sum_k |Q_k| \leq \varepsilon_n |Q_0|$，并且

$$|t_{Q_0}(\vec{f}, \vec{g}) - \sum_k t_{Q_k}(\vec{f}, \vec{g})| \leq C_n \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_X \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_Y.$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，条件 (1) 蕴含带有 $\varepsilon_n = n\varepsilon$ 和 $C_n = Cn^{3/2}$的条件 (2)。

当然，条件 $\sum_k |Q_k| \leq \varepsilon_n |Q_0|$ 仅对 $\varepsilon_n < 1$有用。对于固定的ε 和 $\varepsilon_n = n\varepsilon$，我们只能据此断定，对于 n的有界多个取值，(2) 成立；因此，为了使 (2) 对所有 $n \in \mathbb{N}$成立，我们需要 (1) 对任意小的 $\varepsilon > 0$都成立。在具体情形中，这很少会成为问题。

$\vec{}$证明。 与命题 4.2 的证明一样，给定 f，我们考虑紧凸对称集

$$K := \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_X,$$

并将其约翰椭球记为 $\mathcal{E}_K$，使得

$$\mathcal{E}_K \subset K \subset \sqrt{n}\mathcal{E}_K.$$

情形： $\mathcal{E}_K$ 非退化。 设 R_K 是一个线性变换，使得 $R_K \mathcal{E}_K = B_{\mathbb{R}^n}$是 $\mathbb{R}^n$的闭单位球。设 $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$的一组标准正交基。与 (4.3) 中一样，我们于是写成

$$\begin{aligned} t_{Q_0}(\vec{f}, \vec{g}) &= t_{Q_0}(R_K^{-1} R_K \vec{f}, \vec{g}) = t_{Q_0}(R_K \vec{f}, R_K^{-t} \vec{g}) \\ &= \sum_{i=1}^n t_{Q_0}(R_K \vec{f} \cdot \vec{e}_i, R_K^{-t} \vec{g} \cdot \vec{e}_i) =: \sum_{i=1}^n t_{Q_0}(f_i, g_i), \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 f_i 和 g_i 与引理 4.1 中的相同。

从这里开始，与命题 4.2 的证明相比，本证明需要作一些展开。根据假设 (1)，对于每一对函数 $f_i := R_K \vec{f} \cdot \vec{e}_i$ 和 $g_i := R_K^{-t} \vec{g} \cdot \vec{e}_i$，我们都能找到互不相交的 $\hat{} Q_{i,k} \subset Q_0\hat{}$，使得 $\sum_k |Q_{i,k}| \leq \varepsilon |Q_0|$ 并且满足：每当 $Q_j \subset Q_0$ 互不相交、未被严格包含于任何一个 $Q_{i,k}$中，且覆盖所有 $Q_{i,k}$时，便有

$$|t_{Q_0}(f_i, g_i) - \sum_j t_{Q_j}(f_i, g_i)| \leq C\|f_i\|_X \|g_i\|_Y. \tag{4.8}$$

我们对立方体 Q_j作如下具体选择：令 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ 为 $\{\hat{} Q_{i,k}\}_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq k < \infty}$ 中的极大立方体。于是

$$\sum_j |Q_j| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^\infty |\hat{Q}_{i,k}| \leq \sum_{k=1}^n \varepsilon |Q_0| = n\varepsilon |Q_0|,$$

并且对于每个 $i=1,\dots,n$，(4.8) 对这些立方体 Q_j 成立。利用 (4.7)，并注意到将 Q_0 替换为 Q_j 后该式仍然成立，可得

$$|t_{Q_0}(\vec f,\vec g)-\sum_j t_{Q_j}(\vec f,\vec g)|\le\sum_{i=1}^n|t_{Q_0}(f_i,g_i)-\sum_j t_{Q_j}(f_i,g_i)|$$
$$\le C\sum_{i=1}^n\|f_i\|_X\|g_i\|_Y\le Cn^{3/2}\langle\!\langle\vec f\rangle\!\rangle_X\cdot\langle\!\langle\vec g\rangle\!\rangle_Y,$$

在最后一步使用引理 4.1。由此完成了在 $\mathcal{E}_K$ 非退化这一假设下的证明。

情形： $\mathcal{E}_K$ 是退化的。这几乎可以逐字照搬命题 4.2 证明中的相应情形。与那里一样，设 $H:=$ 张成K，并令 P 表示 $\mathbb{R}^n$ 在 H上的正交投影。于是，对每个 $t=t_Q$，我们都有 (4.4)，以及 (4.5)。因此，只需证明将 $\vec g$替换为 $P\vec g$ 后的结论即可，所以不失一般性，可以假设 $\vec g=P\vec g$也成立。但这样一来，我们便可以重复非退化情形中的论证，只需始终将 $\mathbb{R}^n$ 替换为其子空间 H；在这个子空间中，$\mathcal{E}_K\subset H$ 是非退化的，因此前一种情形适用，从而得到所需结果。□

5. 从单尺度界到全局界

这部分内容如今已是理论中相对常规的一环，但为求完整，我们仍列出一些细节。下面的引理再次以无算子、甚至无函数的形式陈述，单纯作为一个判据，用于通过对一个稀疏族求和来支配一个实数。随后将介绍应用这一判据的一个更具体情形。

5.1. **引理**。 考虑由二进立方体$Q\in\mathscr{D}$索引的数 $a\in\mathbb{R}$ 和 a_Q， $c_Q\in\mathbb{R}$ ，它们具有以下性质：

(1) 存在一个由互不相交的二进立方体组成的族 $\mathscr{Q}$ ，使得

$$a=\sum_{Q\in\mathscr{Q}}a_Q.$$

(2) 对于某个 $\delta\in(0,1)$ ，以及每个包含于某个 $P\in\mathscr{Q}$中的 $Q\in\mathscr{D}$ ，都存在一个由互不相交的 $Q_k\in\mathscr{D}(Q)$ 组成的族，使得

$$\sum_k|Q_k|\le\delta|Q|,\qquad\Big|a_Q-\sum_k a_{Q_k}\Big|\le c_Q.$$

(3) 对于某个 $\alpha,C\in[1,\infty)$，以及每个包含于某个 $P\in\mathscr{Q}$中的 $Q\in\mathscr{D}$，都有 $|a_Q|\le C|Q|^\alpha$。

那么存在一个$(1-\delta)$-稀疏的二进立方体族 $\mathscr{S}$，使得

$$\mathscr{S}\subset\bigcup_{Q\in\mathscr{Q}}\mathscr{D}(Q),\qquad|a|\le\sum_{S\in\mathscr{S}}c_S.$$

5.2.注。 如果 $\mathscr{Q}=\{Q_0\}$ 仅由一个立方体组成，那么条件 (1) 对于 $a=a_{Q_0}$ 自动成立。

证明。 设 $\mathscr{Q} \subset \mathscr{D}$ 是由假设 (1) 给出的不相交集合。对于每个$P \in \mathscr{Q}$，记 $\mathscr{S}_0(P) := \{P\}$。假设不相交的 $\mathscr{S}_j(P) \subset \mathscr{D}(P)$ 已经构造完成，对于每个 $Q \in \mathscr{S}_j(P)$，令 $\mathscr{S}'(Q) := \{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为由假设 (2) 给出的集合，并令 $\mathscr{S}_{j+1}(P) := \bigcup_{Q\in\mathscr{S}_j(P)} \mathscr{S}'(Q)$。再令 $\mathscr{S}(P) := \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathscr{S}_j(P)$，以及 $\mathscr{S} := \bigcup_{P\in\mathscr{Q}} \mathscr{S}(P)$。

对于 $Q \in \mathscr{S}$，令 $E(Q) := Q \setminus \bigcup_{R\in\mathscr{S}'(Q)} R$。根据构造可知，这些集合 $E(Q)$ 两两不相交，并且由假设 (2) 可得 $|E(Q)| \geq (1-\delta)|Q|$。

通过望远镜求和，对于每个 $P \in \mathscr{Q}$，我们有

$$a_P = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j(P)} \Big(a_Q - \sum_{R\in\mathscr{S}'(Q)} a_R\Big) + \sum_{S\in\mathscr{S}_k(P)} a_S.$$

因此，利用假设 (2) 和 (3)，

$$|a_P| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j(P)} c_Q + \sum_{S\in\mathscr{S}_k(P)} C|S|^{\alpha}$$

通过一个初等不等式和归纳法，我们有

$$\sum_{S\in\mathscr{S}_k(P)} |S|^{\alpha} \leq \Big(\sum_{S\in\mathscr{S}_k(P)} |S|\Big)^{\alpha} \leq (\delta^k|P|)^{\alpha},$$

因此

$$|a_P| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j(P)} c_Q = \sum_{Q\in\mathscr{S}(P)} c_Q.$$

将其代入假设 (1)，即可得到所述结论。 □

5.3. 引理。设 t 是定义在 $L_c^{\infty}(\mathbb{R}^d; E) \times L_c^{\infty}(\mathbb{R}^d; H)$ 上的双线性形式，并且关于 $L^p(\mathbb{R}^d; E) \times L^q(\mathbb{R}^d; H)$ 的范数有界，其中指数满足 $1/p+1/q \geq 1$。对于 $(\vec{f}, \vec{g}) \in L_c^{\infty}(\mathbb{R}^d; E)^n \times L_c^{\infty}(\mathbb{R}^d; H)^n$，以下数值

$$a = t(\vec{f}, \vec{g}), \quad a_Q = t(1_{3Q}\vec{f}, 1_Q\vec{g})$$

满足引理 *5.1* 的假设 (1) 和 (3)，条件是 $\mathscr{D}$ 是一个不含象限的二进系统。

证明。 由于 $\mathscr{D}$ 不含象限，每个 $Q \in \mathscr{D}$ 都包含在某个足够大的 $R \in \mathscr{D}$ 中，而该 $R \in \mathscr{D}$ 包含 supp $\vec{f}$。因此，不包含 supp $\vec{f}$ 的极大立方体 $\mathscr{Q}$ 构成了 $\mathbb{R}^d$的一个覆盖。由极大性可知，$\vec{\ }$ $\vec{\ }$ $\vec{\ }$supp $f \subset 3Q$，从而对每个 $Q \in \mathscr{Q}$都有 $f = 1_{3Q}f$。另一方面，任何满足 $\ell(Q) <$diam(supp $\vec{f}$) 的Q都不可能包含 supp $\vec{f}$；因此，任何满足 $\ell(Q) <_{1\ 2}$ diam(supp $\vec{f}$) 的 Q都不可能属于极大立方体 $\bar{\ }\mathscr{Q}$，所以每个 $Q \in \mathscr{Q}$都必须满足 $\ell(Q) \geq \frac{1}{2}$diam $\vec{f}$。由于 $\vec{g} \in L_c^{\infty}(\mathbb{R}^d; F)^n$，满足 $1_Q\vec{g} \neq 0$ 的 $Q \in \mathscr{Q}$ 只有有限多个。因此，不必担心收敛问题，我们可以写出

$$t(\vec{f}, \vec{g}) = t\Big(\vec{f}, \sum_{Q\in\mathscr{Q}} 1_Q\vec{g}\Big) = \sum_{Q\in\mathscr{Q}} t(\vec{f}, 1_Q\vec{g}) = \sum_{Q\in\mathscr{Q}} t(1_{3Q}\vec{f}, 1_Q\vec{g}),$$

这就是条件 (1)。

若 $n = 1$，假设的有界性直接推出

$$|t(1_{3Q}f, 1_Qg)| \leq C\|1_{3Q}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d;E)}\|1_Qg\|_{L^q(\mathbb{R}^d;F)} \leq C3^{d/p}\|f\|_{\infty}\|g\|_{\infty}|Q|^{1/p+1/q},$$

其中 $\alpha := 1/p + 1/q \geq 1$，这是条件 (3) 所要求的。一般而言，若 $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\vec{f} = \sum_{i=1}^n f_i \vec{e}_i$ 的标准正交基，且 $\vec{g}$ 也类似，则有

$$|t(1_{3Q}\vec{f}, 1_Q\vec{g})| \leq \sum_{i=1}^n |t(1_{3Q}f_i, 1_Q g_i)| \leq Cn3^{d/p}\|\vec{f}\|_\infty \|\vec{g}\|_\infty |Q|^{1/p+1/q},$$

在每个分量中使用前面的界以及诸如 $\|f_i\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ 这样的平凡界。□

我们终于可以陈述一个半一般凸体控制原理了。下文的条件 (1) 是许多针对不同算子的稀疏支配证明中常见的中间估计。其结论是，该条件已经足以推出凸体支配。

5.4.**推论**。设 E 和 H 是巴拿赫空间，并假设 t 是定义在 $F \times G := L_c^\infty(\mathbb{R}^d; E) \times L_c^\infty(\mathbb{R}^d; H)$ 上的双线性形式，且关于 $L^p(\mathbb{R}^d; E) \times L^q(\mathbb{R}^d; H)$ 的范数有界，其中指数满足 $1/p + 1/q \geq 1$；并假设

(1) 对于所有 $(f, g) \in F \times G$ 以及所有 $Q \in \mathscr{D}$，都存在互不相交的 $Q_k \subset Q$，满足 $\sum_k |Q_k| \leq \varepsilon|Q|$，且具有如下性质：只要 $Q_j \subset Q$ 互不相交，且不严格包含于任何一个 Q_k 中，并覆盖所有 Q_k，那么

$$|t(1_{3Q}f, 1_Q g) - \sum_j t(1_{3Q_j}f, 1_{Q_j}g)| \leq c\|f\|_{X(Q)}\|g\|_{Y(Q)}|Q| \tag{5.5}$$

对于某些范数 $\|\ \|_{X(Q)}$，定义在 $L_c^\infty(\mathbb{R}^d; E)$ 上，以及 $\|\ \|_{Y(Q)}$，定义在 $L_c^\infty(\mathbb{R}^d; H)$上。

那么，对于所有$(f, \vec{g}) \in F^n \times G^n$，存在一个$(1-\varepsilon_n)$-稀疏族 $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}$，使得

$$|t(\vec{f}, \vec{g})| \leq c_n \sum_{S \in \mathscr{S}} \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{X(S)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{Y(S)} |S|,$$

其中 $\varepsilon_n = n\varepsilon$ 且 $c_n = cn^{3/2}$。

证明。先考虑一个固定的立方体 $Q = Q_0 \in \mathscr{D}$。我们注意到，本推论的假设 (1) 与命题 4.6 的条件 (1) 一致，其中

$$t_Q(f, g) := t(1_{3Q}f, 1_Q g), \qquad C = c|Q|, \qquad X = X(Q), \qquad Y = Y(Q).$$

因此，对每个固定的 $Q = Q_0 \in \mathscr{D}$ 逐一应用上述命题，可得：

(2) 对所有 $(\vec{f}, \vec{g}) \in L_c^\infty(\mathbb{R}^d; E)^n \times L_c^\infty(\mathbb{R}^d; H)^n$ 以及所有 $Q \in \mathscr{D}$，存在两两不交的$Q_k \subset Q$，满足 $\sum_k |Q_k| \leq \varepsilon_n|Q|$，并且使得

$$|t(1_{3Q}\vec{f}, 1_Q\vec{g}) - \sum_j t(1_{3Q_j}\vec{f}, 1_{Q_j}\vec{g})| \leq c_n \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{X(Q)} \cdot \langle\!\langle g \rangle\!\rangle_{Y(Q)} |Q|,$$

其中 $\varepsilon_n = n\varepsilon$ 和 $c_n = cn^{3/2}$。

接下来考虑一组固定的配对 $(\vec{f}, \vec{g}) \in L_c^\infty(\mathbb{R}^d; E)^n \times L_c^\infty(\mathbb{R}^d; H)^n$。我们注意到，上述条件 (2) 与引理 5.1 中的条件 (2) 一致，其中取值为

$$a_Q = t(1_{3Q}\vec{f}, 1_Q\vec{g}), \qquad c_Q = c_n \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{X(Q)} \cdot \langle\!\langle g \rangle\!\rangle_{Y(Q)} |Q|, \qquad \delta = \varepsilon_n.$$

另一方面，引理 5.3 表明，这些相同的 a_Q 连同 $a := t(\vec{f}, \vec{g})$，也满足引理 5.1 的条件 (1) 和 (3)。因此，引理 5.1 的所有假设及其结论对上述量均成立，而这些

结论与我们正在证明的结果中的断言一致。证明至此完成。□

为便于讨论推论 5.4 的推论，我们给出

5.6. **定义**。 假设对每个二进立方体 $Q \in \mathscr{D}$，都关联着一对赋范空间 $(X(Q)\ Y(Q))$。若双线性形式 $t\colon F\times G\to\mathbb{R}$ 满足 $(X(Q)\ Y(Q))$ 阶为 $n\in\mathbb{N}$ 的凸体支配，即对每个 $Q\in\mathscr{D}$，都有 $F\subseteq X(Q)$ 和 $G\subseteq Y(Q)$，并且对每个 $(f,g)\in F^n\times G^n$，都存在一个 δ_n-稀疏族$\mathscr{S}\subset\mathscr{D}$，使得

$$|t(\vec{f},\vec{g})|\le C_n\sum_{Q\in\mathscr{S}}|Q|\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_{X(Q)}\cdot\langle\!\langle\vec{g}\rangle\!\rangle_{Y(Q)}.$$

若 $t\colon F\times G\to\mathbb{R}$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都满足 $(X(Q)\ Y(Q))$ 凸体支配，我们就称其满足凸体支配。若算子 $T\colon F\to G^*$ 的关联双线性形式 $t(f,g):=\langle Tf,g\rangle$ 满足这些性质，我们就称该算子满足这些性质。

现在来看看一些例子:

5.7. 例子 (Calderón–Zygmund 算子)。 设 T 是一个 Dini–Calderón–Zygmund 算子，即 T 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 有界的，且具有如下表示

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y,\qquad x\notin\operatorname{supp}f,$$

其中 $|K(x,y)|\le c|x-y|^{-d}$，并且当 $|x-x'|\le\frac12|x-y|$ 时，

$$|K(x,y)-K(x',y)|+|K(y,x)-K(y,x')|\le\omega\Big(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\Big)\frac{1}{|x-y|^d},\tag{5.8}$$

其中 $\omega\colon[0,\frac12]\to[0,\infty)$ 是递增的、次可加的，并满足 Dini 条件

$$\int_0^{1/2}\omega(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}<\infty.$$

那么，对于 $t(f,g)=\langle Tf、\ g\rangle$ 和 $E=H=\mathbb{R}$，以及 $X(Q)=Ł^1(3Q)$、$Y(Q)=Ł^1(Q)$，推论 5.4 的 (1) 式成立，甚至有更强的形式。具体而言，在 (5.5) 的左侧，我们有

$$\begin{aligned}&\Big|\Big\langle T(1_{3Q}f),1_Qg\Big\rangle-\sum_j\langle T(1_{3Q_j}f),1_{Q_j}g\rangle\Big|\\&\le\Big\|1_QT(1_{3Q}f)-\sum_j1_{Q_j}T(1_{3Q_j}f)\Big\|_{L^\infty(Q)}\|g\|_{L^1(Q)},\end{aligned}\tag{5.9}$$

而且这里的 L^∞ 范数也受$\|f\|_{Ł^1\ (3Q)}$ 控制，这一点实质上已在 [24,(3.4)] 中得到证明。（严格来说， [24, (3.4)] 的形式略弱，但如 [27,定理 3 的证明.4] 中所述，只需对论证稍作直接修改，即可得到所需版本。）因此，推论 5.4 表明，Dini–Calderón–Zygmund 算子满足 $(Ł^1(3Q),Ł^1(Q))$ 凸体支配，不过这当然已由 [27] 通过实质上相同的论证得知。

5.10. 例 （巴拿赫空间值 Calderón–Zygmund 算子）。 设 T 如例 5.7 所述，但现在作用于巴拿赫空间 E 值函数构成的博赫纳空间 $L^2(\mathbb{R}^d;E)$，并具有算子值核 $K(x,y)\in\mathscr{L}(E)$，其满足与上文相同的估计，只是以算子范数代替绝对值，例如 $\|K(x,y)\|_{\mathscr{L}(E)}\le c|x-y|^{-d}$。一般而言，验证该

$L^2(\mathbb{R}^d;E)$ 有界性是一个困难的问题，但我们现在将其作为一个假设。对于 $g\in L^2(\mathbb{R}^d;E^*)$，以 $L^\infty(Q;E)$ 和 $L^1(Q;E^*)$ 分别代替 $L^\infty(Q)$ 和 $L^1(Q)$，可得 (5.9)；而 [27, 定理 3.4] 的证明中指出的相同修改应用于 [24, (3.4)] 的证明后，表明 $L^\infty(Q;E)$ 范数受 $\|f\|_{L^1(3Q;E)}$ 控制。因此，我们发现，推论 5.4 的 (1) 对 $X(Q)=L^1(3Q;E)$ 和 $Y(Q)=L^1(Q;E^*)$ 同样成立。由此得到的稀疏支配（即推论 5.4 结论的 $n=1$ 情形）此前已为人所知：最初在 [15] 中针对略小的一类核得到，后来在本一般性下见于本书 [22, 页的讨论。然而，在这种巴拿赫空间值情形下的凸体支配则完全是新的。

5.11.例 （具有大极大函数控制的算子）。设 $1\le q\le r$ 和 $s\ge 1$。假设 T 是一个线性算子

$$T:L^\infty_c(\mathbb{R}^d)\to L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \tag{5.12}$$

其 T 具有弱型 (q,q)，且双次线性极大算子

$$\mathcal{M}_T(f,g)(x):=\sup_{Q\ni x}\fint_Q |T(1_{(3Q)^c}f)|\cdot|g|$$

有界映射 $\mathcal{M}_T\colon\ L^r\times L^s\to L^{\nu,\infty}$，其中 $1/\nu=1/r+1/s$。那么，对于 $t(f,g)=\langle Tf,\ g\rangle$ 和 $E=H=\mathbb{R}$ 以及 $X(Q)=L^r(3Q)$、$Y(Q)=L^s(Q)$，推论 5.4 的条件（1）成立。该结果实质上已包含在 [25, 定理 3.1], 的证明中，在那里它作为针对这类算子建立稀疏支配（即推论 5.4 结论中的 $n=1$ 情形）的一项中间步骤出现。对凸体支配的推广最近在 [26], 中实现，因此推论 5.4 在这里仅重现了一个已知结果。满足这些假设的具体算子的一个关键例子是粗糙齐次奇异积分

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\Omega(y)}{|y|^d}f(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\Omega(y)=\Omega(y/|y|)$ 是一个有界函数，在单位球面上的平均值为零。

与例 5.10 一样，上述涉及 T 和 $\mathcal{M}_T$ 的先验界的抽象结果可以直接推广到巴拿赫空间值情形；然而，在这种一般性下，为具体算子（如粗糙齐次奇异积分算子）验证这些界可能会遇到困难，因为标量值版本依赖于 Seeger [30], 的深刻结果，而迄今尚无这些结果的巴拿赫空间值推广。

6. 巴拿赫空间值算子的矩阵加权不等式

矩阵权是一个局部可积函数 $W:\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{n\times n}$，其值几乎处处为正定。空间 $L^p(W)$ 由所有满足 $W^{1/p}\vec f\in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$ 的可测 $\vec f\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ 构成，并且 $\|\vec f\|_{L^p(W)}:=\|W^{1/p}\vec f\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)}$。

对于巴拿赫空间 E，我们以一种自然的方式扩展这个定义：空间 $L^p(W;E^n)$ 由所有满足 $W^{1/p}\vec f\in L^p(\mathbb{R}^d;E^n)$ 且 $\|\vec f\|_{L^p(W;E^n)}:=\|W^{1/p}\vec f\|_{L^p(\mathbb{R}^d;E^n)}$ 的可测 $\vec f\colon\ \mathbb{R}^d\to E^n$ 组成。这里，对每个 $x\in\mathbb{R}^d$，我们将 $(W^{1/p}\vec f)(x)\in E^n$ 定义为分量为 $(W^{1/p}\vec f)_i(x):=\sum_{j=1}^n(W^{1/p}(x))_{ij}f_j(x)$ 的向量；也就是说，将 $\mathbb{R}^n$ 上的矩阵乘法以自然的方式扩展到 E^n 上。

现在我们将重点放在 $p=2$上。对于两个矩阵权 $W,V\colon \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{n\times n}$，我们定义

$$[W,V]_{A_2}:=\sup_Q|\langle W\rangle_Q^{1/2}\langle V\rangle_Q^{1/2}|^2,\qquad [W]_{A_2}:=[W,W^{-1}]_{A_2},$$

其中，我们将 $\mathbb{R}^{n\times n}\simeq\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 中的算子范数简单记为 $|\,|$。我们用 $A_2(\mathbb{R}^d;\,\mathbb{R}^n)$ 表示矩阵权 W 的类：对于满足 $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 的 $[W]_{A_2}<\infty$。我们还定义

$$[W]_{A_\infty}:=\sup_{\vec e\in\mathbb{R}^n}[x\mapsto\vec e\cdot W(x)\vec e]_{A_\infty},$$

其中右侧是某些标量权的 A_∞ “范数”，按通常方式定义为

$$[w]_{A_\infty}:=\sup_Q\frac{1}{w(Q)}\int_Q M(1_Q w).$$

根据 [27, 注 4.4]，我们有

$$[W]_{A_\infty}\le 4[W]_{A_2}. \tag{6.1}$$

由例 5.10 中的巴拿赫空间值凸体支配可得：

6.2. **定理**。设 E 是一个巴拿赫空间，且 $T\in\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^d;\,E))$ 是一个具有 $\mathscr{L}(E)$ 值核的 *Dini–Calderón–Zygmund* 算子。对于任意 $W\in A_2(\mathbb{R}^d;\,\mathbb{R}^n)$，算子 T 可有界延拓至 $L^2(W;\,E^n)$，并满足

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^2(W;E^n))}\le c_{n,T}([W]_{A_2}[W]_{A_\infty}[W^{-1}]_{A_\infty})^{1/2}\le c_{n,T}[W]_{A_2}^{3/2}.$$

请注意，定理 6.2 适用于一般的巴拿赫空间 E，但包含一个（困难的）先验有界性假设，即 $T\in\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^d;E))$。UMD 空间这一类中有具体例子，[18]对此作了详细讨论。

6.3. **推论**。设 E 是一个 *UMD* 空间，且 $T\in\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 是一个标量值 *Calderón–Zygmund* 算子，其连续模为 *Hölder* 型，$\omega(t)=ct^\delta$,$\delta\in(0,1]$ 满足 (5.8)。对于任意 $W\in A_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$，算子 T 可有界延拓至$L^2(W;\,E^n)$，并满足

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^2(W;E^n))}\le c_{n,E,T}([W]_{A_2}[W]_{A_\infty}[W^{-1}]_{A_\infty})^{1/2}\le c_{n,E,T}[W]_{A_2}^{3/2}.$$

特别地，当 T 是经典希尔伯特变换时，此估计也成立。

证明。借助 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理 [12], 及 Figiel [14]将其推广至 UMD 空间的结果，我们将推论 6.3 归约为定理 6.2。根据 David–Journé 定理（较容易的一半），关于 T的假设意味着 T满足所谓的弱有界性以及 $T(1)$ $T^*(1)\in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^d)$。接着，根据 Figiel 定理，满足这些条件及 Calderón–Zygmund 核假设的算子可有界延拓至 $L^2(\mathbb{R}^d;E)$，其中 E为任意 UMD 空间。因此，T 满足定理 6.2 的假设，进而满足其结论，证明完毕。□

即使仅针对希尔伯特变换，甚至采用其定性形式（即仅得出 T 的有界性，而不为范数指定任何具体界），这些结果在矩阵权和巴拿赫空间的结合情形下也完全是全新的。对于 $E=\mathbb{R}$ 和希尔伯特变换 T，推论 6.3 的定性形式归功于 Treil 和 Volberg [31]。$E=\mathbb{R}$ 的定量形式由 Nazarov 等人 [27], 得到，这在本文撰写时仍是已知的最佳结果。对于标量权重，幂 $3/2$ 可以替换为 1 [16], ，而

$[W]_{A_\infty}$ 与 $[W^{-1}]_{A_\infty}$ 的乘积可以替换为它们的和 [19], ，但将这些结果推广到一般矩阵情形，涉及尚未解决的"矩阵 A_2 猜想"。

下面开始证明定理 6.2：

6.4. 注 （不失一般性，假设 E 是自反的）。由于定理 6.2 讨论的是某个算子的有界延拓，只需在函数 f 的一个稠密子空间上证明一个先验估计。特别地，我们可以假设每个分量 f_i 的取值都在 E 的某个有限维子空间中。由于任何有限维空间都是自反的，不失一般性地，我们作如下常设假设：E 是自反的。（注意，在推论 6.3 中这一点无论如何都自动成立，因为 UMD 空间是自反的 [18, 定理 4.3.3]。）在此假设下，我们有 $L^1(Q;E)^* = L^\infty(Q;E^*)$（见 [18, 定理 1.3.10 和 1.3.21]），这对于涉及凸体 $\langle\!\langle\ \rangle\!\rangle_{L^1(Q;E)}$ 的计算很方便。

6.5. **引理**。

$$
\begin{aligned}
&|Q|\langle\!\langle W^{1/2}\vec{f}\rangle\!\rangle_{L^1(3Q;E)}\cdot\langle\!\langle V^{1/2}\vec{g}\rangle\!\rangle_{L^1(Q;E^*)}\\
&\quad\le\int\Big(1_Q(x)\fint_{3Q}|V^{1/2}(x)W^{1/2}(y)|\|\vec{f}(y)\|_{E^n}\,\mathrm{d}y\Big)\|\vec{g}(x)\|_{\vec{E}^{*n}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

证明。在注6.4中的既定假设下，我们考察左侧凸体中的一个"一般元素，其形式为$\phi\in B_{L^\infty(Q;E^*)}$ 和 $\psi\in B_{L^\infty(Q;E)}$：

$$
\begin{aligned}
&|Q|\Big|\fint_{3Q}W^{1/2}(y)\langle\vec{f}(y),\phi(y)\rangle\,\mathrm{d}y\cdot\fint_Q V^{1/2}(x)\langle\vec{g}(x),\psi(x)\rangle\,\mathrm{d}x\Big|\\
&=|Q|\Big|\fint_Q\fint_{3Q}V^{1/2}(x)W^{1/2}(y)\langle\vec{f}(y),\phi(y)\rangle\cdot\langle\vec{g}(x),\psi(x)\rangle\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big|\\
&\le\int_Q\fint_{3Q}|V^{1/2}(x)W^{1/2}(y)|\|\vec{f}(y)\|_{E^n}\|\vec{g}(x)\|_{\vec{E}^{*n}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

对一个稀疏族求和，得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathscr{S}}|Q|\langle\!\langle W^{1/2}\vec{f}\rangle\!\rangle_{L^1(3Q;E)}\cdot\langle\!\langle V^{1/2}\vec{g}\rangle\!\rangle_{L^1(Q;E^*)}\\
&\le\int\Big(\sum_{Q\in\mathscr{S}}1_Q(x)\fint_{3Q}|V^{1/2}(x)W^{1/2}(y)|\|\vec{f}(y)\|_{E^n}\,\mathrm{d}y\Big)\|\vec{g}(x)\|_{\vec{E}^{*n}}\,\mathrm{d}x\qquad(6.6)\\
&=:\int\tilde{L}(\|\vec{f}\|_{E^n})(x)\|\vec{g}(x)\|_{\vec{E}^{*n}}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

~ ¯其中 L在标量值函数 $y\mapsto\|f(y)\|_{E^n}$上作用时，是 [27, (5.8)]中用相同符号表示的算子。由 [27, 引理5.6]，我们有

$$
\|\tilde{L}\|_{\mathscr{L}(L^2)}\le C([W,V]_{A_2}[W]_{A_\infty}[V]_{A_\infty})^{1/2}.\qquad(6.7)
$$

利用对偶性和标准变量替换（在巴拿赫空间值情形下，这些操作并无本质区别），可得到如下形式的估计

$$
\|T\vec{f}\|_{L^2(V;E^n)}\le N\|\vec{f}\|_{L^2(V;E^n)}
$$

等价于

$$
\langle T(W^{1/2}\vec{f}),V^{1/2}\vec{g}\rangle\le N\|\vec{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;E^n)}\|\vec{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;E^{*n})}.\qquad(6.8)
$$

若定理 6.2 中的 T 是一个，那么根据例 5.10，它满足（$Ł^1(3Q;E)$，$Ł^1(Q;E^*)$）凸体支配，这意味着（6.8）的左边受（6.6）的左边支配，因此由（6.6）和（6.7）可得

$$N \le c_{n,T}([W,V]_{A_2}[W]_{A_\infty}[V]_{A_\infty})^{1/2}.$$

这就是所需的界，并由此完成定理 6.2 的证明。

7. 凸控制与广义交换子

对于一个算子 T以及两个向量值函数 $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ 和 $b=(b_1,\ldots,b_n)$，我们来考虑算子

$$\vec{a}\cdot T\vec{b}: f \mapsto \vec{a}\cdot T(\vec{b}f) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(b_i f).$$

我们主要关注其在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上的有界性，或在加权 $L^p(w)$ 上的有界性，或两个此类空间之间的有界性，以及 T 是空间上的有界奇异积分算子的情形。然而，我们并不要求 a_i、$b_i \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$，因而逐点乘子 $f \mapsto b_i f$ 和 $g \mapsto a_i g$ 以及复合算子 $f \mapsto a_i T(b_i f)$、$\vec{\ }$ 是有界算子。尽管如此，由于不同项之间的抵消，它们的和 $\vec{a}\cdot Tb$ 仍可能是有界的。

文献中受到广泛研究的一种情形是 $\vec{\ }$ 在这种情况下

$$\vec{a}\cdot T(\vec{b}f) = bTf - T(bf) = [b,T]f$$

是 b 和 T的交换子，其 $L^p(\mathbb{R}^d)$-有界性由 $b \in$BMO$(\mathbb{R}^d)$刻画；后者是有界平均振荡函数构成的空间，严格大于 $L^\infty(\mathbb{R}^d)$，并且特别包含诸如 $b(x) = \log|x|$这样的函数。

通过用函数 g进行对偶化，并记 $t(f,g) = \langle Tf, g\rangle$ 为 T的双线性形式，我们得到

$$\langle \vec{a}\cdot T(\vec{b}f), g\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T(b_i f), a_i g\rangle = t(\vec{b}f, \vec{a}g),$$

如前所述，双线性形式的作用可扩展至向量值函数。具体而言，若 t 定义在 $F\times G$上，现在应要求

$$f \in F_{\vec{b}} := \{f \in F : b_i f \in F \text{ for all } i = 1,\ldots,n\},$$

以及类似定义的 $g \in G_{\vec{a}}$。若 $F \supseteq L_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，那么显然 $F_{\vec{b}}$ 特别包含所有满足 supp $f \subseteq E_N$: $= \{|\vec{b}| \le N\}$ 的 $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，其中任意 $N \in \mathbb{N}$均成立。对于几乎处处取有限值的 b_i，并集 $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} E_N$ 除一个零测集外覆盖 $\mathbb{R}^d$，因此显然 $F_{\vec{b}}$在任意具有有限 p的 $L^p(w)$中稠密。

7.1. **引理**。 假设 T满足$(X(Q)\ Y(Q))$ 凸体支配。则对于所有相关函数，我们有

$$|\langle \vec{a}\cdot T(\vec{b}f), g\rangle| \le C \sum_{Q\in\mathscr{S}} |Q| \langle\!\langle \vec{b}f\rangle\!\rangle_{X(Q)} \cdot \langle\!\langle \vec{a}g\rangle\!\rangle_{Y(Q)}. \tag{7.2}$$

$\vec{\ }$ $\vec{\ }$证明。 直接将定义应用于 $f = bf$ 和 $\vec{g} = \vec{a}g$即可得出。 □

我们进一步考察 $X(Q) = Y(Q) = Ł^1(\gamma Q)$ 的情形。

7.3. **引理**。 对于所有 $s,t\in(1,\infty)$ 以及相关空间中的所有函数，我们有

$$\langle\!\langle \vec{b}f\rangle\!\rangle_{L^1(Q)}\cdot\langle\!\langle \vec{a}g\rangle\!\rangle_{L^1(Q)}\le \|(x,y)\mapsto \vec{a}(x)\cdot\vec{b}(y)\|_{L^{(s,t)}_{\min}(Q\times Q)}\|f\|_{L^{t'}(Q)}\|g\|_{L^{s'}(Q)},$$

其中

$$\|F\|_{L^{(s,t)}_{\min}(Q\times Q)}:=\begin{cases}\Big(⨍_Q\Big[⨍_Q|F(x,y)|^s\,\mathrm{d}x\Big]^{t/s}\mathrm{d}y\Big)^{1/t}, & \text{if } s\le t,\\ \Big(⨍_Q\Big[⨍_Q|F(x,y)|^t\,\mathrm{d}y\Big]^{s/t}\mathrm{d}x\Big)^{1/s}, & \text{if } t\le s.\end{cases}$$

证明。$\langle\!\langle bf\rangle\!\rangle_{X(Q)}\cdot\langle\!\langle \vec{a}g\rangle\!\rangle_{Y(Q)}$ 的泛型元素具有以下形式，其中 $\phi,\psi\in B_{L^\infty(Q)}$：

$$\begin{aligned}&⨍_Q\vec{b}(y)f(y)\phi(y)\,\mathrm{d}y\cdot⨍_Q\vec{a}(x)g(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\\&=⨍_Q⨍_Q(\vec{a}(x)\cdot\vec{b}(y))f(y)g(x)\phi(y)\psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle \vec{b}f\rangle\!\rangle_{X(Q)}\cdot\langle\!\langle \vec{a}g\rangle\!\rangle_{Y(Q)}\le⨍_Q⨍_Q|\vec{a}(x)\cdot\vec{b}(y)||f(y)||g(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\le\|(x,y)\mapsto a(x)\cdot b(y)\|_Z\|(x,y)\mapsto f(y)g(x)\|_{Z^*},\end{aligned}$$

对于任意一种选择

$$(Z,Z^*)\in\{(L^s_x(Q;L^t_y(Q)),L^{s'}_x(Q;L^{t'}_y(Q))),(L^t_y(Q;L^s_x(Q)),L^{t'}_y(Q;L^{s'}_x(Q)))\},$$

由混合范数 L^p 空间中的霍尔德不等式可得。根据富比尼定理，我们有

$$\|(x,y)\mapsto f(x)g(y)\|_{Z^*}=\|f\|_{L^{t'}(Q)}\|g\|_{L^{s'}(Q)}$$

在任一种情况下，因此，对 Z 的两种选择取最小值后，我们得到因子

$$\min_Z\|(x,y)\mapsto b(x)\cdot a(y)\|_Z=\|(x,y)\mapsto\vec{b}(x)\cdot\vec{a}(y)\|_{L^{(s,t)}_{\min}(Q\times Q)}.$$

□

7.4. **命题**。 设 T 是满足 $(L^1(\gamma Q),L^1(\gamma Q))$ 凸体支配的算子。设 $\vec{a},\vec{b}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^n$ 是函数，使得

$$A_{s,t}:=\sup_Q\|(x,y)\mapsto\vec{a}(x)\cdot\vec{b}(y)\|_{L^{(s,t)}_{\min}(Q\times Q)}<\infty.$$

那么，$\vec{a}\cdot T\vec{b}$ 可延拓为作用在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上的有界算子，对所有 $p\in(t',s)$均成立。特别地，如果 $A_s:=A_{s,s}<\infty$ 对某个 $s\in(2,\infty)$成立，那么 $\vec{a}\cdot T\vec{b}$ 可有界地延拓到 $L^2(\mathbb{R}^d)$。

证明。结合引理 7.1 和 7.3，我们得到

$$\begin{aligned}
|\langle \vec{a}T(\vec{b}f), g\rangle| &\le C\sum_{Q\in\mathscr{S}} |Q| \langle\!\langle \vec{b}f\rangle\!\rangle_{L^1(\gamma Q)} \cdot \langle\!\langle \vec{a}g\rangle\!\rangle_{L^1(\gamma Q)} \\
&\le C\sum_{Q\in\mathscr{S}} |Q| \|(x,y)\mapsto a(x)\cdot b(y)\|_{L^{(s,t)}_{\min}(Q\times Q)} \|f\|_{L^{t'}(Q)} \|g\|_{L^{s'}(Q)} \\
&\le C\sum_{Q\in\mathscr{S}} \frac{|E(Q)|}{\delta} A_{s,t} \inf_Q M_{t'}f \inf_Q M_{s'}g \\
&\le \frac{CA_{s,t}}{\delta}\sum_{Q\in\mathscr{S}} \int_{E(Q)} M_{t'}f M_{s'}g \le \frac{CA_{s,t}}{\delta}\int_{\mathbb{R}^d} M_{t'}f M_{s'}g \\
&\le \frac{CA_{s,t}}{\delta} \|M_{t'}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|M_{s'}g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

其中

$$\|M_{t'}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{t,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \qquad \|M_{s'}g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{s,p} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}$$

对于 $p > t'$ 和 $p' > s'$，其中后者等价于 $p < s$。 □

我们来看一些例子：

7.5. 例 （经典交换子）。正如我们已经观察到的，$\vec{a} = (b, -1)$ 和 $\vec{b} = (1, b)$ 会产生通常的交换子 $[b, T]$。在这种情况下

$$\vec{a}(x)\cdot\vec{b}(y) = b(x) - b(y)$$

并且每个 $A_{s,\ t}$ 根据初等推导和约翰–尼伦伯格不等式，都等价于 $\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}$。因此，命题 7.4 重现了交换子有界性的著名充分条件。

7.6. 例子 （迭代交换子）。更一般地，选择 $\vec{a}, b$ 使得

$$\vec{a}(x)\cdot\vec{b}(y) = (b(x)-b(y))^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} b(x)^{k-i}(-b(y))^i,$$

因此，例如 $a_i(x) = \binom{k}{i} b(x)^{k-i}$ 和 $b_i(y) = (-b(y))^i$，我们得到 k 阶交换子

$$\vec{a}\cdot T\vec{b} = T_{k,b} := [b, T_{k-1,b}], \qquad T_{0,b} := T,$$

并且 $A_{s,\ t}$ 根据约翰–尼伦伯格不等式，等价于 $\|b\|^k_{\text{有界平均振荡}(\mathbb{R}^d)}$。

7.7. 例子 （具有不同乘子的迭代交换子）。接下来选择 $\vec{a}, b$ 使得

$$\vec{a}(x)\cdot\vec{b}(y) = (b^1(x)-b^1(y))(b^2(x)-b^2(y));$$

无需明确指定 $a_i(x)$ 和 $b_i(y)$的具体取法，显然，如有需要，很容易写出这样的选取。（我们特意对上文的 b^i 使用上标，因为这些指标未必与 $\vec{b}$ 的分量 b_i 相同。）这就得到了由两个不同函数构成的二阶迭代交换子，

$$\vec{a}\cdot T\vec{b} = [b^1, [b^2, T]].$$

众所周知且经典的是，对于 $i = 1,\ 2,\ b^i \in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^d)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 有界性的充分条件；然而，正如最近在 [17], much 中所观察到的

对于数对 (b^1,b^2)，可以给出更弱的充分条件。也就是说，在 [17, (1.1)], 中，证明了以下两个条件的组合

$$S_s := \sup_Q \Big(\fint_Q |b^1(x)-\langle b^1\rangle_Q|^s \,\mathrm{d}x\Big)^{1/s} \Big(\fint_Q |b^2(y)-\langle b^2\rangle_Q|^s \,\mathrm{d}y\Big)^{1/s} < \infty,$$

$$T_s := \sup_Q \Big(\fint_Q |b^1(x)-\langle b^1\rangle_Q|^s |b^2(x)-\langle b^2\rangle_Q|^s \,\mathrm{d}x\Big)^{1/s} < \infty,$$

足以保证 $[b^1,[b^2,T]]$ 对 $s>2$ 的 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 有界性。另一方面，根据命题 7.4，得出相同结论的另一个充分条件是 $A_s<\infty$。

让我们比较这两者。通过添加和减去各项并展开乘积，我们得到

$$\begin{aligned}
&(b^1(x)-b^1(y))(b^2(x)-b^2(y))\\
&=[(b^1(x)-\langle b^1\rangle_Q)-(b^1(y)-\langle b^1\rangle_Q)][(b^2(x)-\langle b^2\rangle_Q)-(b^2(y)-\langle b^2\rangle_Q)]\\
&=(b^1(x)-\langle b^1\rangle_Q)(b^2(x)-\langle b^2\rangle_Q)+(b^1(y)-\langle b^1\rangle_Q)(b^2(y)-\langle b^2\rangle_Q)\\
&\qquad -(b^1(x)-\langle b^1\rangle_Q)(b^2(y)-\langle b^2\rangle_Q)-(b^1(y)-\langle b^1\rangle_Q)(b^2(x)-\langle b^2\rangle_Q).
\end{aligned}$$

对两边取 $L^s(Q\times Q)$，然后对 Q 取上确界，我们推得

$$A_s \le 2(T_s+S_s),$$

因此，命题 7.4 提出的新判据至少与 [17, (1.1)], 的判据同样精确，而要估计另一个方向似乎并不明显。或许更重要的是，新条件 $A_s<\infty$ 更“自然”地作为一般原理的一个实例出现。

（我们注意到，还有一个更一般的判据 [17, 定理 3.10], , 其中 S_s 和 T_t 中的L^s 范数被更一般的 Orlicz 范数所替代。另一方面，显然也可以对命题 7.4 做类似的推广：我们所使用的是重缩放极大算子 $M_{t'}$ 在$L^p(\mathbb{R}^d)$上的有界性（对 $p>t'$ 而言），而这可以替换为具有相同映射性质的 Orlicz 极大算子M_A 。根据 Orlicz 函数 A 满足所谓的 B_p 条件来刻画这一性质，是 Pérez[29] 的一个经典结果；这一结果正用于 [17]; 参见 [17, 命题 3.8]。）

最后，我们来考察一个“奇特”的例子，在现有文献中显然找不到先例。我们先给出一个引理：

7.8. **引理**。 假设 $0\le b\in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^d)$。如果 $0\le\alpha,\beta$ 且 $\alpha+\beta\le 1$，那么

$$B(x,y) := b(x)^\alpha b(y)^\beta - b(x)^\beta b(y)^\alpha$$

满足

$$\Big(\fint_Q \fint_Q |B(x,y)|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p} \le (2\|b\|_{\mathrm{BMO}^p(\mathbb{R}^d)})^{\alpha+\beta}.$$

证明。 令 $\gamma:=\min(\alpha,\beta)\in[0,\frac12]$ 且 $\delta:=\max(\alpha,\beta)-\gamma\in[0,1]$。那么

$$|B(x,y)| = b(x)^\gamma b(y)^\gamma |b(x)^\delta - b(y)^\delta|.$$

我们注意到以下基本不等式：

$$|u^\delta - v^\delta| \le \frac{|u-v|}{\max(u,v)^{1-\delta}}, \qquad \forall u,v\ge 0,\ \delta\in[0,1]. \tag{7.9}$$

事实上，由对称性和齐次性，只需考虑 $u=1$ 和 $v\in[0,1]$，此时问题可归结为证明

$$1-v^{\delta}\le 1-v,$$

这直接由以下事实得出：对于 v，$\delta\in[0,1]$，$v\le v^{\delta}$。

利用 (7.9)，并注意到 $\delta+2\gamma=\alpha+\beta\in[0,1]$，可得

$$\begin{aligned}|B(x,y)|&\le b(x)^{\gamma}b(y)^{\gamma}\frac{|b(x)-b(y)|}{\max(b(x),b(y))^{1-\delta}}\le\frac{|b(x)-b(y)|}{\max(b(x),b(y))^{1-\delta-2\gamma}}\\&=\Big(\frac{|b(x)-b(y)|}{\max(b(x),b(y))}\Big)^{1-\delta-2\gamma}|b(x)-b(y)|^{\delta+2\gamma}\le|b(x)-b(y)|^{\alpha+\beta},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\Big(⨍_Q⨍_Q|B(x,y)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p}&\le\Big(⨍_Q⨍_Q|b(x)-b(y)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{(\alpha+\beta)/p}\\&\le\Big[\Big(⨍_Q|b(x)-c|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}+\Big(⨍_Q|b(y)-c|^p\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p}\Big]^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

对所有常数 c均成立。 □

7.10. **推论**。 设 T 是满足 $(Ł^1(\gamma Q),Ł^1(\gamma Q))$ 凸体支配的算子，设 $0\le b\in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^d)$，且 $0\le\alpha,\beta$ 满足 $\alpha+\beta\le1$。则

$$\|b^{\alpha}T(b^{\beta}f)-b^{\beta}T(b^{\alpha}f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\lesssim_p\|b\|^{\alpha+\beta}_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

证明。 根据命题 7.4 和 $s=t$，$f\mapsto b^{\alpha}T(b^{\beta}f)$–$b^{\beta}T(b^{\alpha}f)$ 的 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 算子范数受以下量控制

$$A_s:=\sup_Q\|(x.y)\mapsto b(x)^{\alpha}b(y)^{\beta}-b(x)^{\beta}b(y)^{\alpha}\|_{L^s(Q\times Q)}$$

若 $p\in(s',s)$，即若 $s>\max(p,p')$。根据引理 7.8 和 John–Nirenberg 不等式，我们有

$$A_s\le(2\|b\|_{\mathrm{BMO}^s(\mathbb{R}^d)})^{\alpha+\beta}\lesssim_s\|b\|^{\alpha+\beta}_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)},$$

并固定（例如） $s=2\max(p,p')$，我们得到仅依赖于 p 的结果。 □

7.11. 注。 除了已经讨论过的例子外，广义交换子 $\vec{a}\cdot T\vec{b}$ 也出现在 Bloom [4, 5] 研究的以下问题中。设给定一个矩阵权 W，其对角化形式为 $W=U^*\Lambda U$，其中 U 是酉矩阵，Λ 是对角矩阵，而 Λ 的对角元 λ_k 是标量权重 A_2。为了得出 $W\in A_2$，我们需要了解关于 U 的哪些信息？（根据 [5, 定理 4.2], ，若再假设 U 连续，则 $\lambda_k\in A_2$ 是 $W\in A_2$ 的必要条件。）

设 T 为希尔伯特变换，或其他在矩阵加权 $L^2(W)$ 上的有界性能够刻画 $W\in A_2$ 的算子。通过将 T 在 $L^2(W)$ 上的有界性与经典交换子 $[T,\bar{u}_{ij}]$ 在加权空间 $L^2(\lambda_i)$ 和 $L^2(\lambda_k)$ 之间的有界性联系起来（原文如此：该条件涉及指标三元组 (i,j,k)），[4, 定理 5.1] 表明，$u_{ij}\in$ 有界平均振荡$\sqrt{\lambda_i/\lambda_k}$（一种加权BMO空间，如今通常称为 Bloom 型有界平均振荡空间）是一个充分条件。对于 2×2 矩阵的特殊情形，根据 [5, 定理 4.3]，它也是必要条件；但自这些成果问世 30 多年以来，一般情形似乎仍未解决。（作者感谢 Amalia Culiuc 提请他注意这个问题 [9]。）

下面给出一种可能的解决思路。众所周知， T 在 $L^2(W)$ 上的有界性等价于（非加权） L^2 有界性

$$W^{1/2}TW^{-1/2} = U^*\Lambda^{1/2}UTU^*\Lambda^{-1/2}U.$$

乘以 U 和 U^* 在 L^2上是等距的，而且算子矩阵的 L^2 有界性等价于其各分量的 L^2 有界性

$$(\Lambda^{1/2}UTU^*\Lambda^{-1/2})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i^{1/2} u_{ik} T\bar{u}_{jk} \lambda_j^{-1/2} = \lambda_i^{1/2} \vec{u}_i \cdot T\bar{\vec{u}}_j \lambda_j^{-1/2},$$

其中 i、 $j = 1$、……、 n 和 $\vec{u}_i = (u_{ik})_{k=1}^{n}$。这些都是我们在此研究过的 $\vec{a}\cdot Tb$形式的算子；到目前为止，我们始终与原问题保持精确等价。因此，接下来的问题是：能否给出这些算子有界性的有用条件？另一个等价条件当然是双权有界性

$$\vec{u}_i \cdot T\bar{\vec{u}}_j : L^2(\lambda_j) \to L^2(\lambda_i), \qquad i,j = 1,\dots,n,$$

其中空间较为复杂，但乘子只是酉矩阵 U的各行。

7.12.注。 本节重点讨论凸体支配在广义交换子问题中的应用——凸体支配本质上属于向量值理论，而这里的广义交换子作用于标量值函数。我们这样选择有两个原因：一是说明这种向量值理论即使在标量值应用中也很有用；二是不想让过多的符号技术细节掩盖其相对简单的基本思想。尽管如此，显然，所提出的思想可以立即推广到向量值函数 f 和 $\vec{g}$ （取代标量 f 和 g）以及矩阵值乘子 A 和B （取代向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$）的情形。对于经典型交换子 $[T,B]$ 与矩阵值函数的情形，这一思想已在[21]中得到发展。

8. 涉及凸体的停时与极大函数

本节的目标有两方面。具体而言，我们建立了凸体版本的 Nieraeth [28], 的一项结果；该结果表明，对通常的稀疏支配中出现的稀疏族上的和进行估计，等价于对某些极大函数进行估计。在实现这一目标的过程中，我们还发展了涉及标量值函数平均值的典型停时论证的若干凸体版本；这些结果在其他场合或许也有独立的价值。

我们先给出一个关于互不相交子集上凸体“范数”之和的估计。

8.1. **引理**。 设 $p,q \in [1,\infty)$ 和 $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$。设 $Q_i \in \mathscr{D}(Q_0)$ 为互不相交的立方体。则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \big(\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{L^p(Q_i)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{L^q(Q_i)}\big)^r \le n^{\max(r,1)+r/2} \big(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{L^p(Q)} \cdot \langle\!\langle g \rangle\!\rangle_{L^q(Q)}\big)^r.$$

注意，对于 $p,q \in [1,\infty)$，我们有 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1 + 1 = 2$，因此

$$n^{\max(r,1)+r/2} = \big(n^{\max(1,1/r)+1/2}\big)^r \le \big(n^{5/2}\big)^r.$$

证明。为便于说明，我们先证明 $n=1$ 的情形，即始终用 $\|\,\|$ 替代 $\langle\!\langle\,\rangle\!\rangle$。根据 $1=\frac{r}{p}+\frac{r}{q}$ 的霍尔德不等式，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\big(\|f\|_{L^p(Q_i)}\|g\|_{L^q(Q_i)}\big)^r &= \sum_{i=1}^{\infty}\big(\|f\|^p_{L^p(Q_i)}\big)^{r/p}\big(\|g\|^q_{L^q(Q_i)}\big)^{r/q}\\ &\le \Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|f\|^p_{L^p(Q_i)}\Big)^{r/p}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|g\|^q_{L^q(Q_i)}\Big)^{r/q}\\ &\le \Big(\|f\|^p_{L^p(Q_0)}\Big)^{r/p}\Big(\|g\|^q_{L^q(Q_0)}\Big)^{r/q}=\Big(\|f\|_{L^p(Q_0)}\|g\|_{L^q(Q_0)}\Big)^r.\end{aligned}$$

在引理的一般情形下，令

$$A_i:=\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_{L^p(Q_i)}=\Big\{\int_{Q_i}\phi_i\vec{f}:\|\phi_i\|_{L^{p'}(Q_i)}\le 1\Big\},\quad B_i:=\langle\!\langle\vec{g}\rangle\!\rangle_{L^q(Q_i)}.$$

接着我们注意到

$$\begin{aligned}\langle\!\langle\vec{f}\rangle\!\rangle_{L^p(Q)} &= \Big\{\int_Q\phi\vec{f}:\|\phi\|_{L^{p'}(Q)}\le 1\Big\}\\ &\supseteq \Big\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i\int_{Q_i}\phi_i\vec{f}:\|\phi_i\|_{L^{p'}(Q_i)}\le 1,\|(a_i)\|_{\ell^{p'}}\le 1\Big\}\\ &= \Big\{\sum_{i=1}^{\infty}a_iA_i:\|(a_i)\|_{\ell^{p'}}\le 1\Big\}=:\bigoplus_{\ell^p}A_i=:A,\end{aligned}$$

类似地

$$\langle\!\langle\vec{g}\rangle\!\rangle_{L^q(Q)}\supseteq\bigoplus_{\ell^q}B_i=:B.$$

因此，引理归结为证明

$$\sum_{i=1}^{\infty}\big(A_i\cdot B_i\big)^r\le n^{\max(r,1)+r/2}\big(A\cdot B\big)^r,\quad A:=\bigoplus_{\ell^p}A_i,\quad B:=\bigoplus_{\ell^q}B_i.$$

令 $\mathcal{E}_A$ 为 A的约翰椭球，并令 $R_A\mathcal{E}_A=B_{\mathbb{R}^n}$。由于 $A_i\cdot B_i=R_AA_i\cdot R_A^{-t}B_i$，上述结论等价于这样一个版本：将每个 A_i 替换为 R_AA_i，并将每个 B_i 替换为 $R_A^{-t}B_i$。因此，不失一般性，我们不妨一开始就假设 $\mathcal{E}_A=B_{\mathbb{R}^n}$，于是 $B_{\mathbb{R}^n}\subseteq A\subseteq\sqrt{n}B_{\mathbb{R}^n}$。故

$$A\cdot B\supset\bar{B}_{\mathbb{R}^n}\cdot B=[-M,M],\quad\text{where}\quad M:=\max\{|\vec{b}|:\vec{b}\in B\}.$$

另一方面，如果 $(\vec{e}_j)_{j=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的某个标准正交基，那么

$$\begin{aligned}A_i\cdot B_i &= \{\vec{a}\cdot\vec{b}:\vec{a}\in A_i,\vec{b}\in B_i\}\\ &= \Big\{\sum_{j=1}^{n}(\vec{a}\cdot\vec{e}_j)(\vec{b}\cdot\vec{e}_j):\vec{a}\in A_i,\vec{b}\in B_i\Big\}\subseteq\sum_{j=1}^{n}(A_i\cdot\vec{e}_j)(B_i\cdot\vec{e}_j),\end{aligned}$$

或者，利用 $[-s,s]$ 与 s 的对应关系，

$$A_i\cdot B_i\le\sum_{j=1}^{n}(A_i\cdot\vec{e}_j)(B_i\cdot\vec{e}_j).$$

Thus

$$(A_i\cdot B_i)^r\le\sum_{j=1}^n\big((A_i\cdot\vec e_j)(B_i\cdot\vec e_j)\big)^r,\quad r\in(0,1],$$

and

$$\Big(\sum_{i=1}^\infty(A_i\cdot B_i)^r\Big)^{1/r}\le\sum_{j=1}^n\Big(\sum_{i=1}^\infty\big((A_i\cdot\vec e_j)(B_i\cdot\vec e_j)\big)^r\Big)^{1/r},\quad r\in[1,\infty).$$

在对 i 求和时，我们像开头的玩具模型中那样使用霍尔德不等式：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^\infty\big((A_i\cdot\vec e_j)(B_i\cdot\vec e_j)\big)^r&=\sum_{i=1}^\infty\big((A_i\cdot\vec e_j)^p\big)^{r/p}\big((B_i\cdot\vec e_j)^q\big)^{r/q}\\&\le\Big(\sum_{i=1}^\infty(A_i\cdot\vec e_j)^p\Big)^{r/p}\Big(\sum_{i=1}^\infty(B_i\cdot\vec e_j)^q\Big)^{r/q}\\&=\sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^\infty a_iA_i\cdot\vec e_j\Big)^{1/r}\Big(\sum_{i=1}^\infty b_iB_i\cdot\vec e_j\Big)^{1/r}:\|(a_i)\|_{\ell^{p'}}\le1,\|(b_i)\|_{\ell^{q'}}\le1\Big\}\\&=(A\cdot\vec e_j)^r(B\cdot\vec e_j)^r\end{aligned}$$

Here

$$A\cdot\vec e_j\subseteq\sqrt n\bar B_{\mathbb{R}^n}\cdot\vec e_j=[-\sqrt n,\sqrt n],\quad A\cdot\vec e_j\le\sqrt n,$$

并且显然

$$B\cdot\vec e_j\le M.$$

总之，记 $s:=\max(r,1)$，我们有

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^\infty(A_i\cdot B_i)^r\Big)^{1/s}&\le\sum_{j=1}^n\Big[\sum_{i=1}^\infty(A_i\cdot\vec e_j)^r(B_i\cdot\vec e_j)^r\Big]^{1/s}\\&\le\sum_{j=1}^n\Big[(A\cdot\vec e_j)^r(B\cdot\vec e_j)^r\Big]^{1/s}\le n[n^{r/2}M^r]^{1/s},\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^\infty(A_i\cdot B_i)^r\le n^sn^{r/2}M^r=n^{\max(1,r)+r/2}(A\cdot B)^r,$$

这就完成了证明。 □

下面的引理是最简单的停时构造所依据的基本原理的凸体类比：对于立方体 Q_0 上的一个函数，若子立方体上的函数平均值远大于整个 Q_0 上的平均值，则这些子立方体的测度总和至多占 Q_0 测度的一部分。

8.2. **引理**。 设 $A,p,q\in[1,\infty)$，且设 $Q_i\in\mathscr D(Q_0)$ 为互不相交的立方体，使得

$$\langle\!\langle\vec f\rangle\!\rangle_{L^p(Q_i)}\cdot\langle\!\langle\vec g\rangle\!\rangle_{L^q(Q_i)}\ge A\langle\!\langle\vec f\rangle\!\rangle_{L^p(Q_0)}\cdot\langle\!\langle\vec g\rangle\!\rangle_{L^q(Q_0)}.$$

Then

$$\sum_{i=1}^\infty|Q_i|\le\frac{n^{\max(r,1)+r/2}}{A^r}|Q_0|,\qquad\frac1r:=\frac1p+\frac1q.$$

证明。 由定义可知，容易将基本恒等式$\|f\|_{L^p(Q)} \eqsim |Q|^{-1/p}\|f\|_{L^p(Q)}$ 推广到凸体，得到

$$\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{L^p(Q)} = |Q|^{-1/p}\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{L^p(Q)}. \tag{8.3}$$

由此，引理中的假设可改写为

$$|Q_i|^{-1/p-1/q}\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{L^p(Q_i)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{L^q(Q_i)} \geq A|Q_0|^{-1/p-1/q}\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{p(Q_0)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{q(Q_0)},$$

或者，重新整理后，

$$|Q_i| \leq \frac{A^{-r}|Q_0|}{\big(\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{p(Q_0)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{q(Q_0)}\big)^r}\big(\langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{L^p(Q_i)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{L^q(Q_i)}\big)^r.$$

对 i 求和并应用引理 8.1，即得所需结论。 □

现在我们得到以下命题，它是 Nieraeth 的一个结果的凸体类比 [28, 命题 2.7；特别是其中关于 $m = 1$] 的式 (2.7)。该命题说明，对稀疏集族上的和进行估计（例如凸体支配中出现的这类和），等价于对相关的双次线性极大算子进行估计。在[28, 命题 2.7], 中，该结果被表述为关于一组权重的若干等价条件。下面的表述本身并未提及权重，但只要开始探讨两侧在诸如$L^s(W) \times L^{s'}(W')$这样的空间上的有界性，命题便保证我们也可以同样研究等价关系另一侧的有界性。

8.4. **命题**。 对于所有 $\delta \in (0,1)$，所有维数 $d, n \geq 1$，指数 $p, q \in [1,\infty)$，以及函数 $\vec{f} \in L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^n$、 $\vec{g} \in L^q{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^n$，我们有以下双边估计

$$\sup_{\mathscr{S}} \sum_{Q\in\mathscr{S}} \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{L^p(Q)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{L^q(Q)}|Q| \eqsim \Big\| \sup_{Q\in\mathscr{D}} 1_Q \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{L^p(Q)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{L^q(Q)} \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中所有由二进立方体构成的 δ-稀疏族，隐含常数仅依赖于 n, p, q 和 δ。

证明。 固定 $\vec{f} \in L^p{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^n$ 和 $\vec{g} \in L^q{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^n$，记

$$a_Q := \langle\!\langle \vec{f} \rangle\!\rangle_{L^p(Q)} \cdot \langle\!\langle \vec{g} \rangle\!\rangle_{L^q(Q)}.$$

估计式 . 是显然的：由 δ-稀疏性可知，$|Q| \leq \delta^{-1}|E(Q)|$，其中某些集合 $E(Q)$ 两两不相交，因此

$$\sum_{Q\in\mathscr{S}} a_Q|Q| \leq \frac{1}{\delta}\sum_{Q\in\mathscr{S}} a_Q|E(Q)| = \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{Q\in\mathscr{S}} a_Q 1_{E(Q)} \leq \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^d}\sup_{Q\in\mathscr{D}} a_Q 1_Q.$$

估计式 $\gtrsim$ 需要更多论证。由单调收敛，只需考虑以 $\mathscr{D}(Q_0)$ 替代 $\mathscr{D}$。令 $\mathscr{S}_0 := \{Q_0\}$。取适当的 $A > 1$，并令$Q \in \mathscr{D}(Q_0)$，使 $\mathscr{S}'(Q)$ 由所有满足 $a_{Q'} > Aa_Q$ 的极大 $Q' \in \mathscr{D}(Q)$ 构成。由极大性，立方体 $Q' \in \mathscr{S}'(Q)$ 两两不相交。由引理 8.2，我们有

$$\sum_{Q'\in\mathscr{S}'(Q)} |Q'| \leq \frac{n^{\max(1,r)+r/2}}{A^r}|Q| \leq (1-\delta)|Q|, \qquad \frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

只要将 A 取得足够大，使其取决于 n、p、q 和 δ 即可。因此，归纳定义 $\mathscr{S}_{j+1} := \bigcup_{Q\in\mathscr{S}_j} \mathscr{S}'(Q)$ 和 $\mathscr{S} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathscr{S}_j$，我们便得到 $\mathscr{S}$ 是 δ-稀疏的。

若 $Q \in \mathscr{D}(Q_0)$，且 $S \in \mathscr{S}$ 是包含 Q 的极小停止立方体，那么根据立方体 $S \in \mathscr{S}$ 的选取方式，$a_Q \le A a_S$，因此

$$\sup_{Q\in\mathscr{D}(Q_0)} 1_Q a_Q \le \sup_{S\in\mathscr{S}} 1_S A a_S \le A \sum_{S\in\mathscr{S}} 1_S a_S,$$

因此

$$\Big\| \sup_{Q\in\mathscr{D}(Q_0)} 1_Q a_Q \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le A \Big\| \sum_{S\in\mathscr{S}} 1_S a_S \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = A \sum_{S\in\mathscr{S}} a_S |S|. \qquad \square$$

参考文献

[1] S. Bagchi、S. Hait、L. Roncal 和 S. Thangavelu。海森堡群上与球面平均相关的极大函数。《纽约数学杂志》，27:631–675，2021年。[2] D. Beltran、J. Roos 和 A. Seeger。多尺度稀疏控制，2020年。预印本，arXiv:2009.00227。[3] F. Bernicot、D. Frey 和 S. Petermichl。超越 Calderón-Zygmund 理论的尖锐加权范数估计。分析偏微分方程，9(5):1079–1113，2016年。[4] S. Bloom。交换子定理与加权BMO。美国数学会汇刊，292(1):103–122，1985年。[5] S. Bloom。交换子理论在加权BMO及 A_2的矩阵类比中的应用。伊利诺伊数学杂志，33(3):464–487，1989年。[6] M. Bownik 和 D. Cruz-Uribe。矩阵权的外推与分解，2022年。预印本，arXiv:2210.09443。[7] J. M. Conde-Alonso、A. Culiuc、F. Di Plinio 和 Y. Ou。粗糙奇异积分的稀疏控制原理。分析偏微分方程，10(5):1255–1284，2017年。[8] D. Cruz-Uribe、J. Isralowitz 和 K. Moen。矩阵权的双权重凸起条件。积分方程与算子理论，90(3):第36号论文，31页，2018年。[9] A. Culiuc。个人通信，2022年。第11届国际调和分析与偏微分方程会议，西班牙埃尔埃斯科里亚尔。[10] A. Culiuc、F. Di Plinio 和 Y. Ou。通过二进移位算子对奇异积分进行一致稀疏控制。数学研究快报，25(1):21–42，2018年。[11] G. David 和 J.-L. Journé。广义 Calderón-Zygmund 算子的有界性判据。数学年刊（第2辑），120(2):371–397，1984年。[12] F. Di Plinio、T. Hytönen 和 K. Li。通过傅里叶变换得到极大粗糙奇异积分的稀疏界。傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔），70(5):1871–1902，2020年。[13] T. Figiel。奇异积分算子：鞅方法。载于《Banach空间几何》（Strobl，1989），伦敦数学会讲义丛书第158卷，第95–110页。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[14] T. S. Hänninen 和 T. Hytönen。[15] 定理与Banach空间值函数的局部振荡分解。算子理论杂志，72(1):193–218，2014年。 A_2 T. Hytönen。一般 Calderón-Zygmund 算子的尖锐加权界。数学年刊（第2辑），175(3):1473–1506，2012年。[16] T. Hytönen、K. Li 和 T. Oikari。满足乘法函数组联合条件的迭代交换子。美国数学会会刊，148(11):4797–4815，2020年。[17] T. Hytönen、J. v. Neerven、M. Veraar 和 L. Weis。《Banach 空间分析》。第一卷：鞅与Littlewood-Paley理论，数学及其边界领域成果丛书第63卷，第三辑：现代数学综述丛书[18] 数学及相关领域成果丛书，第三辑：现代数学综述丛书 /。施普林格出版社，Cham，2016年。/T. Hytönen 和 C. Pérez。涉及[19] 的尖锐加权界。分析偏微分方程，( ): –。

A_∞ 6 4 777 818, J. 2013

Isralowitz、S. Pott 和 I. P. Rivera-Ríos。向量值算子的尖锐[20] 加权估计。几何分析杂志，31(3):3085–3116，2021年。 A_1 J. Isralowitz、S. Pott 和 S. Treil。双标量和矩阵加权框架中的交换子。伦敦数学会杂志（第2辑），106(1):1–26，2022年。

[22] M. T. Lacey。 A_2 界的初等证明。《以色列数学杂志》，217(1):181–195，2017年。[23] A. K. Lerner。 A_2 猜想的一个简单证明。《国际数学研究通知》*IMRN*，(14):3159–3170，2013年。[24] A. K. Lerner。涉及稀疏算子的逐点估计。《纽约数学杂志》，22:341–349，2016年。[25] A. K. Lerner。粗糙奇异积分的弱型估计。《伊比利亚美洲数学评论》，35(5):1583–1602，2019年。[26] P. A. Muller 和 I. P. Rivera-Ríos。某些奇异积分算子的定量矩阵加权估计。《数学分析及其应用杂志》，509(1):第125939号论文，38页，2022年。[27] F. Nazarov、S. Petermichl、S. Treil 和 A. Volberg。凸体支配与矩阵权的加权估计。《数学进展》，318:279–306，2017年。[28] Z. Nieraeth。多线性权类的定量估计与外推。《数学年刊》，375(1-2):453–507，2019年。[29] C. Pérez。关于不同权重的加权 L^p空间之间 Hardy-Littlewood 极大算子有界性的充分条件。《伦敦数学学会会刊》（第*3*辑），71(1):135–157，1995年。[30] A. Seeger。具有粗糙卷积核的奇异积分算子。《美国数学学会杂志》，9(1):95–105，1996年。[31] S. Treil 和 A. Volberg。小波与过去和未来之间的角度。《泛函分析杂志》，143(2):269–308，1997年。

数学与统计学系，邮政信箱 68（Pietari Kalmin katu 5），FI-00014 赫尔辛基大学，芬兰电子邮件地址：tuomas.hytonen@helsinki.fi