arXiv:2301.00627v1 [math.AP] 2 Jan 2023

快速衰减密度下可压缩纳维–斯托克斯方程的熵的瞬时无界性与温度的一致正性

JINKAI LI 和辛周平

Abstract. 本文研究了远场密度快速衰减时，具有常黏度和热传导率的黏性导热气体的一维可压缩纳维–斯托克斯方程任意解的物理行为。首先，本文证明，只要初始密度在远场趋于真空的衰减速率不慢于 $O\left(\frac{1}{|x|^{\ell_\rho}}\right)$，且满足 $\ell_\rho > 2$，比熵就会在初始时刻之后立即变得不一致有界。此外，对于衰减更快的初始密度，即 $\ell_\rho \geq 4$，本文得到了更精确的结果：无论绝对温度初始时是否一致正，在每个正时间它都会变得一致正。因此，相应的熵在每个正时间均表现为 $O(-\log(\varrho_0(x)))$，与初始熵是否有界无关。这些现象与初始密度缓慢衰减、其衰减速率不快于 $O(\frac{1}{x^2})$ 的情形形成鲜明对比；在该情形下，我们先前的工作 [34–36] 表明，熵的一致有界性可以在所有正时间传播，因此温度在远场衰减至零。这些结果完整回答了有关导热理想气体熵的一致有界性传播的问题，并特别表明，初始密度在远场的代数衰减率 2 是熵一致有界性的临界值。证明主要结果所用的方法基于若干尺度变换（包括 Kelvin 变换），以及适用于一类系数可能无界的退化方程的 Hopf 型引理。

1. Introduction

理想黏性热传导气体的可压缩纳维–斯托克斯方程可写为

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho(\partial_t u + (u\cdot\nabla)u) - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u + \nabla p = 0, \tag{1.2}$$

日期：2023年1月2日。2010年数学主题分类：35A01、35B45、35Q86、76D03、76D09。关键词与短语：温度的一致正性；熵的瞬时无界性；整体经典解；可压缩纳维–斯托克斯方程；快速衰减密度；Kelvin 变换；Hopf 型引理。

$$c_v\rho(\partial_t\theta + u\cdot\nabla\theta) + p\mathrm{div}\, u - \kappa\Delta\theta = \mathscr{Q}(\nabla u), \tag{1.3}$$

其中，未知量 $\rho \geq 0$、 $u \in \mathbb{R}^N$（ N 为空间维数）、 $\theta \geq 0$ 和 $p = R\rho\theta$ 分别表示密度、速度、温度和压力。这里， R 和 c_v 为正常数， μ 和 λ 为黏性系数，均假设为常数并满足物理约束 $\mu > 0$ 和 $2\mu + N\lambda > 0$；κ 为热传导系数，假设为正数； $\mathscr{Q}$（∇u）是 ∇u 的二次项，定义如下：

$$\mathscr{Q}(\nabla u) = \frac{\mu}{2}|\nabla u + (\nabla u)^T|^2 + \lambda(\mathrm{div}\, u)^2.$$

根据吉布斯方程 $\theta Ds = De + pD(\frac{1}{\rho})$，其中 s为比熵，$e = c_v\theta$ 为比内能，可得 $p = Ae^{\frac{s}{c_v}}\rho^\gamma$，其中 A为某个正数，且$\gamma - 1 = \frac{R}{c_v}$。显然， $\gamma > 1$。用 ρ和 θ表示，比熵 s可写为

$$s = c_v\left(\log\frac{R}{A} + \log\theta - (\gamma-1)\log\rho\right), \tag{1.4}$$

满足

$$\rho(\partial_t s + u\cdot\nabla s) - \frac{\kappa}{c_v}\Delta s = \kappa(\gamma-1)\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right) + \frac{1}{\theta}\left(\mathcal{Q}(\nabla u) + \kappa\frac{|\nabla\theta|^2}{\theta}\right), \tag{1.5}$$

在 ρ 和 θ 均为正数的区域内。

作为气体动力学的控制系统，可压缩纳维–斯托克斯方程已得到广泛研究。可压缩纳维–斯托克斯方程数学理论中的核心概念之一是真空；若出现真空，则意味着密度在某些内部点、边界上或远场处趋于零。事实上，真空可能出现，是可压缩纳维–斯托克斯方程一般解整体适定性理论中的主要困难之一。需要注意的是，熵方程(1.5)在真空附近高度退化且奇异，因此在真空存在的情况下，分析熵的动力学行为更加困难。正因如此，现有文献中关于真空情况下可压缩纳维–斯托克斯方程的数学理论，大多针对系统(1.1)–(1.3)，而不考虑熵。

关于可压缩纳维–斯托克斯方程（1.1）–（1.3）的数学研究，已有大量文献。在一维情形，相应理论已经相当完善，尤其是整体适定性早已为人所知。在不存在真空的情况下，由（1.4）可知，熵的信息可直接由密度和温度的信息确定，Kazhikov–Shelukin [24]和 Kazhikov [25], 建立了强解的整体适定性，随后该结果被推广到弱解情形，参见例如 [2, 23, 58, 59]；具有一般初始数据的解的大时间行为则由 Li–Liang [24]

证明。在存在真空但不考虑熵的情况下，本文第一作者在 [29, 30], 中分别针对导热和非导热理想气体建立了相应的整体适定性。正如 Hoff–Smoller [17], 针对一维可压缩纳维–斯托克斯方程所证明的那样，真空不可能在有限时间内由非真空初始数据演化形成，而在多维情形下，这一结果仍是一个悬而未决的问题。

在多维情形下，可压缩纳维–斯托克斯方程的数学理论不如一维情形完善。对于具有一般初始数据且允许真空存在的等熵可压缩纳维–斯托克斯方程，Lions [37, 38]首次突破了有限能量弱解整体存在性的难题。Lions [37, 38]的结果后来由 Feireisl–Novotn´y–Petzeltov´a [12], Jiang–Zhang [22], 以及更近来的 Bresch–Jabin [1]进一步改进。对于完整可压缩纳维–斯托克斯方程，Feireisl [14], 在对状态方程作出一定假设的条件下证明了变分弱解的整体存在性。弱解的唯一性至今仍是一个具有挑战性的开放问题。如果初始数据足够正则，则可压缩纳维–斯托克斯方程存在唯一的局部强解或经典解；在无真空情形下参见 [21, 39, 46, 48, 50, 51, 53], 在存在真空的情形下参见 [5–7, 15, 18, 31, 49] 。然而，对于一般初始数据，相应的整体存在性可能并不可期待，这是由于 Merle–Rapha'el–Rodnianski–Szeftel [44, 45], 最近关于有限时爆破的结果：他们针对具有球对称性的三维等熵可压缩纳维–斯托克斯方程，构造了一类具有远场真空的初始数据，并证明了相应正则解存在有限时奇异性。事实上，迄今为止，整体强解或经典解仅在初始数据满足某些附加条件时得到建立：对于非真空平衡态附近的小扰动初始数据，Matsumura–Nishida [40–43], 取得了相关结果，之后又在许多工作中得到发展，例如参见 [3, 4, 8–11, 16, 26, 47, 52]；而对于具有小能量但允许大振荡和真空的初始数据，Huang–Li–Xin [20] 和 Li–Xin [33] 证明了等熵系统的相关结果，随后又在 [19, 28, 54]中推广到了完整系统。

值得指出的是，在真空和非真空情形下，可压缩纳维–斯托克斯方程的数学理论存在一些显著差异，并且根据真空的位置和状态，可能会出现新的现象。在非真空情形下，根据初始数据的性质，可以在齐次空间和非齐次空间中建立解，而解空间保证了熵的一致有界性。然而，在存在真空时，这些结论一般可能不再成立。事实上，在密度具有紧支撑的情况下，可以在齐次空间中建立解，参见例如 [5–7, 15, 18, 20, 31], ，但不能在非齐次空间中建立解，参见 Li–Wang–Xin [27]。此外，Xin [56] 和 Xin–Yan[57] 的爆破结果表明，如果初始时存在一个被真空区域包围的孤立质量团，则在 [19, 28, 54] 中建立的整体解必然具有无界熵。

然而，有些出人意料的是，如果初始密度仅在远场处以不超过 $O(\frac{1}{|x|^2})$ 的速率趋于零，那么与非真空情形一样，可以在齐次空间和非齐次空间中建立解，并且熵可以一致有界，参见作者近期的工作 [34–36]。

需要指出的是，由于系统 (1.1)–(1.3) 已经封闭，因此确实可以为其建立自洽的数学理论，正如上述先前工作中已经开展的那样。然而，由于这些理论未考虑热力学第二定律，因此从物理角度来看并不充分。因此，我们需要一些新理论，以提供真空存在时熵的信息，从而满足物理要求。然而，由于熵的表达式缺失，且熵的控制方程在真空区域附近具有高度奇异性和退化性，尽管熵十分重要，此前很少对真空存在时黏性可压缩流体的熵进行数学分析。我们在先前工作 [34, 35] 中开启了这一方向的数学研究，并在 [36], 中进一步推进；在初始密度以不快于 O 的速率衰减至真空这一关键条件下，我们证明了在远场存在真空时，无论是否考虑热导率，可压缩纳维–斯托克斯方程的熵一致有界性和非齐次索伯列夫正则性的传播，其中 $\frac{1}{|x|^2}$。

本文继续研究真空存在时熵的动力学行为。与 [34–36], 中所考虑的情形不同，在那些情形中，密度在远场缓慢衰减至真空；本文研究远场密度快速衰减的情形。为简便起见，本文研究一维情形，多维情形留待今后研究。本文将证明，与 [34–36], 中密度缓慢衰减的情形截然相反：对于具有常黏度和热导率的黏性导热理想气体，其可压缩纳维–斯托克斯方程无法保持熵的一致有界性；如果初始密度在远场的衰减速度快于 $O(\frac{1}{|x|^{\ell_\rho}})$ 阶，且 $\ell_\rho > 2$，便是如此。由于 [34–36] 已经证明，当衰减率低于 $O(\frac{1}{|x|^2})$ 时，熵具有一致有界性，因此本文的结果表明，初始密度在远场的衰减率 2 是熵保持一致有界性的临界值。令人惊讶的是，当初始密度的衰减速度快于 $O(\frac{1}{x^4})$ 阶时，可以得到一些更精细的结果：对于任意一般的非负（且不恒为零）初始温度，温度在初始时刻之后立即保持一致正；因此，在任意正时间，熵均以 $O(-\log(\varrho_0(x)))$ 阶趋于无穷大。

考虑黏性导热理想气体的一维可压缩纳维–斯托克斯方程的柯西问题

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{1.6}$$

$$\rho(u_t + uu_x) - \mu u_{xx} + p_x = 0, \tag{1.7}$$
$$c_v\rho(\theta_t + u\theta_x) + pu_x - \kappa\theta_{xx} = \mu(u_x)^2, \tag{1.8}$$

其中 $p = R\rho\theta$，满足初始条件

$$(\rho, u, \theta)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, \theta_0). \tag{1.9}$$

本文的主要结果将在拉格朗日坐标中陈述并证明；然而，由于本文所得解的速度关于空间变量具有 Lipschitz 正则性，因此这些结果可以转换回欧拉坐标中的相应结果。

定义拉格朗日坐标 y 与欧拉坐标 x 之间的坐标变换 $x = \eta(y,t)$，使其满足

$$\begin{cases} \partial_t\eta(y,t) = u(\eta(y,t),t), \\ \eta(y,0) = y. \end{cases}$$

Set

$$\varrho(y,t) := \rho(\eta(y,t),t), \quad v(y,t) := u(\eta(y,t),t), \quad \vartheta(y,t) := \theta(\eta(y,t),t),$$

and

$$J := J(y,t) = \eta_y(y,t).$$

于是，有

$$J_t = v_y, \quad J|_{t=0} \equiv 1, \quad J\varrho = \varrho_0,$$

其中 $\varrho_0 := \rho_0$。我们仍用 s表示拉格朗日坐标中的比熵。由 (1.4) 可得

$$s(y,t) = c_v\left(\log\frac{R}{A} + \log\vartheta(y,t) - (\gamma-1)\log\varrho_0(y) + (\gamma-1)\log J(y,t)\right), \tag{1.10}$$

对任意 $y \in \mathbb{R}$ 和 $t \in [0,\infty)$。

于是，在拉格朗日坐标下，系统 (1.6)–(1.8) 变为

$$J_t = v_y, \tag{1.11}$$
$$\varrho_0 v_t - \mu\left(\frac{v_y}{J}\right)_y + \pi_y = 0, \tag{1.12}$$
$$c_v\varrho_0\vartheta_t + v_y\pi - \kappa\left(\frac{\vartheta_y}{J}\right)_y = \mu\frac{|v_y|^2}{J}, \tag{1.13}$$

其中 $\pi = R\frac{\varrho_0}{J}\vartheta$。初始数据可取为

$$(J, v, \vartheta)|_{t=0} = (1, v_0, \vartheta_0), \tag{1.14}$$

其中 $v_0 = u_0$ 和 $\vartheta_0 = \theta_0$。

本文将始终采用以下约定。对于 $1 \le q \le \infty$ 和正整数 m，$L^q = L^q(\mathbb{R})$ 和 $W^{1,q} = W^{m,q}(\mathbb{R})$ 分别表示标准的勒贝格空间和索伯列夫空间，而 $H^m = W^{m,2}$。为简便起见，L^q 和 H^m 表示

它们的 N 乘积空间 $(L^q)^N$ 和 $(H^m)^N$。 $\|u\|_q$ 是 u的 L^q 范数，而 $\|(f_1, f_2, \cdots, f_n)\|_X$是和 $\sum_{i=1}^N \|f_i\|_X$或等价范数 $\left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}}$。

本文的主要结果是以下三个定理。第一个定理给出了在满足 (1.14) 的条件下，柯西问题 (1.11)–(1.13) 的解的整体存在性。

定理 1.1. 设初始密度 ϱ_0 满足 $0 < \varrho_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W^{2,\infty}$且

$$|\varrho_0'| + |\varrho_0''| \le K_1 \varrho_0 \quad on\ \mathbb{R}, \tag{H1}$$

其中 K_1 为正数。假设 (v_0, ϑ_0) 满足 $\vartheta_0 \ge 0$，且定义在 $\mathbb{R}$ 上，并且

$$(\sqrt{\varrho_0}v_0, \sqrt{\varrho_0}v_0^2, v_0', v_0'', \sqrt{\varrho_0}\vartheta_0, \sqrt{\varrho_0}\vartheta_0', \sqrt{\varrho_0}\vartheta_0'') \in L^2(\mathbb{R}), \qquad \frac{G_0'}{\sqrt{\varrho_0}} \in L^2(\mathbb{R}), \tag{1.15}$$

$$\varliminf_{y\to-\infty} \frac{|v_0'(y)|}{\sqrt{\varrho_0(y)}} + \varliminf_{y\to+\infty} \frac{|v_0'(y)|}{\sqrt{\varrho_0(y)}} < +\infty, \tag{1.16}$$

其中 $G_0 := \mu v_0' - R\varrho_0\vartheta_0$。

那么，对于满足（1.14）的（1.11）–（1.13），存在一个整体解（J, v, ϑ），满足 $\inf_{(y,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} J > 0$, $\theta \ge 0$，且

$$\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}, J_{yy}, J_t, J_{yt} \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})),$$

$$\sqrt{\varrho_0}v, \sqrt{\varrho_0}v^2, v_y, \frac{v_{yy}}{\sqrt{\varrho_0}}, \sqrt{\varrho_0}v_t \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})), \quad v_{yyy}, v_{yt} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R})),$$

$$\sqrt{\varrho_0}\vartheta, \sqrt{\varrho_0}\vartheta_y, \sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}, \varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})), \quad \vartheta_y \in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R})),$$

$$\varrho_0\vartheta_t, \varrho_0\vartheta_{yt} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R})), \quad G_t, \left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R})),$$

对于任意正时间 T，其中 $G := \mu\frac{v_y}{J} - R\frac{\varrho_0}{J}\vartheta$。

注 1.1. (i) 条件（H1）允许 ϱ_0 在远场具有任意代数衰减率，甚至指数衰减率。事实上，可以验证，形式为 $A(1+y^2)^{-\ell}$ 和 $e^{-(1+y^2)^{-\delta}}$ 的函数，其中 $A, \ell \in (0,\infty)$ 且 $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$,，满足（H1）。因此，定理 1.1 推广了我们先前工作 *[35],* 中的整体存在性结果；该工作假设 ϱ_0 在远场缓慢衰减。

(ii) 条件 (1.16) 仅用于为相应的初边值问题构造合适的近似初始数据（这些问题预期将收敛到柯西问题），参见定理 1.1 证明中的步骤 1。

第二个定理指出，如果初始密度的代数衰减率大于 2，比熵会立即变得无界。

T定理 1.2。除定理 1.1 中的条件外，进一步假设

$$(1+|y|)^{\ell_\rho}\varrho_0(y) \le K_2, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{H2}$$

对于某些正常数 $\ell_\rho \in (2,\infty)$ 和 K_2，且 ϑ_0 不恒为零或 v_0 不恒为常数。设 (J,v,ϑ) 是系统 (1.11)–(1.13) 的一个解，满足条件 (1.14) 以及定理 1.1 中所述的性质。则对于任意正时间 $T \in (0,\infty)$，比熵 $s \notin L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$。

注 1.2。定理 1.2 揭示了一种与 *[34–36],* 中截然不同的现象：在远场处，初始密度的衰减速度不快于 $O(\frac{1}{y^2})$，因此熵始终一致有界。而定理 1.2 表明，若初始密度在远场处的衰减速度快于 $O\left(\frac{1}{|y|^{\ell_\rho}}\right)$，且 $\ell_\rho > 2$，那么熵在初始时刻之后立即变得不再一致有界。因此，我们已经完整回答了一维理想气体熵的一致有界性传播问题：对于远场处存在真空的一维理想气体，熵的一致有界性能够传播，当且仅当初始密度的代数衰减率不大于 2。换言之，一维情形下，初始密度在远场处的衰减率 2 是熵保持一致有界的临界值。

定理 1.2 的证明主要基于以下思路：通过某种缩放变换将远场真空转化为内部真空，并对一类时间变量退化且系数可能无界的线性退化椭圆方程应用 Hopf 型引理。这里将采用的温度缩放变换为

$$f(y,t) := \vartheta(y^{-\beta},t), \quad y \in (0,\infty), t \in [0,\infty),$$

其中 $\beta > 0$ 经过适当选取。对于负的 y，也可以引入类似的变换。由连续性方程 (1.6) 以及初始密度仅在远场达到真空的假设可知，对于所有正时间，密度在任意紧区间上始终为正。因此，方程 (1.8) 可视为定义在紧区域上的 θ 一致抛物型方程。于是，由强极大值原理可知，对于任意正时间 t，温度在任意有限区间上均为正，因此 f 对任意正的 y 和 t 均为正。利用定理 1.1 中所述 ϑ 的性质，可以验证 $0 < f \in C^{2,\,1}((0,\infty)\times(0,\infty))$。反设熵一致有界，则可以在正时间轴上将 f 延拓为零，使得 $0 \le f \in C([0,\infty)\times[0,\infty))$，且它仅在正时间轴上取零值。温度方程给出

$$a_0 f_t - a f_{yy} + b f_y + \tilde{c} f \ge 0, \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty),$$

这促使我们将 Hopf 型引理应用于正时间轴上的 f 点处。通过适当选择 β，可以验证系数 a_0 和 $\tilde{c}$ 在正时间轴附近一致有界；然而，系数 b 包含一个

涉及 $\frac{1}{y}$ 的无界项。幸运的是， b 中的这一无界项具有“正确”的符号，而 b 中的其余项对于适当选择的 β是一致有界的，因此 Hopf 型引理仍然成立（见引理 4.2）。因此，将 Hopf 型引理应用于正时间轴附近的 f ，可得到远场温度的定量渐近行为。矛盾在于，由 Hopf 型引理导出的温度渐近行为与由 (H2) 和熵的一致有界性导出的渐近行为不一致。这种不一致性表明熵不可能一致有界，从而定理 1.2 得证。

第三个定理给出了温度的一致正性，从而得到熵的渐近无界性。在初始密度在远场的代数衰减率大于 4 这一更强假设下，这些结果比定理 1.2 中的结果更为精确。

定理 1.3. 除定理 1.1 中的条件外，进一步假设

$$(1+|y|)^4\varrho_0(y) \le K_3, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{H3}$$

对于某个正数 K_3，且 ϑ_0 不恒等于零或 v_0 不恒等于常数。设 (J, v, ϑ) 是系统 (1.11)–(1.13) 的一个解，满足 (1.14)，并具有定理 1.1 中所述的性质。

那么，以下结论成立：
(i) 温度 ϑ 满足

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \vartheta(y,t) > 0, \quad \forall t \in (0,\infty);$$

(ii) 比熵 s 满足

$$R \le \varliminf_{|y|\to\infty} \frac{s(y,t)}{-\log(\varrho_0(y))} \le \varlimsup_{|y|\to\infty} \frac{s(y,t)}{-\log(\varrho_0(y))} < \infty, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

特别地， s 会在初始时刻之后立即变得无界，无论其在初始时刻是否一致有界。

注1.3. 一个值得探讨的问题是：当 ϱ_0 的代数衰减率介于 2 和 4 之间时，定理 1.3 是否仍然成立。然而，正如定理 1.2 中已经证明的，在这种情况下，尽管温度的一致正性尚不明确，但比熵在任意正时间都不再一致有界。

回顾一下，对于任意正时间t，温度在任何有限区间上都为正。为了在任意正时间获得温度的正下界，只需在远场证明这一点。为此，类似于定理 1.2 的证明，我们运用一些缩放技巧，将远场真空变换为内部真空，并利用 Hopf 型引理。然而，此前引入的缩放变换

在这里不能直接奏效。相反，我们对温度 ϑ 应用 Kelvin 变换，并将变换后的温度记为 h，即

$$h(y,t)=y\vartheta\left(\frac{1}{y},t\right),\quad \forall y\neq 0, t\in[0,\infty),$$

该函数满足一个线性退化方程，且根据假设（H3），所有系数均一致有界。利用定理 1.1 中所述 ϑ 的性质，可以验证 $0\leq h\in C^{2,1}(\Omega)\cap C(\Omega)$，更重要的是，$h(0,t)=0$，其中 $\Omega=((-\infty,0)\cup(0,\infty))\times(0,\infty)$。注意，与定理 1.2 的证明不同，这里重要性质 $h(0,t)=0$ 成立，无需对熵作任何条件限制。利用 Hopf 型引理（引理 4.2）并应用强极大值原理，可以推出 h 在每个正时间下都在原点附近呈线性变化，从而得到远场附近温度的一致正下界。借助温度的正下界，由于 J 具有一致的正下界和上界，根据 (1.10) 可得熵的渐近无界性。

本文其余部分安排如下：第 2 节中，我们针对系统 (1.11)–(1.13) 考虑一个精心设计的初边值问题，并建立一系列与空间区间长度无关的解的先验估计；第 3 节中，我们证明柯西问题解的整体存在性，并通过对第 2 节所得解取极限，进而证明定理 1.1；第 4 节用于证明定理 1.2；最后，第 5 节给出定理 1.3 的证明。

本文中，C 表示一个通用的正数，其取值可能随处而变。

2. Initial-boundary value problem and a priori estimates

本节中，我们考虑系统 (1.11)–(1.13) 在 $(\alpha,\beta)\times(0,\infty)$ 上的初边值问题，其中 $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$，并满足以下初边值条件：

$$(J,v,\vartheta)|_{t=0}=(1,v_0,\vartheta_0), \tag{2.1}$$

$$(v_y,\vartheta)|_{y=\alpha,\beta}=(0,0). \tag{2.2}$$

以下整体适定性可用与 [30] 相同的方法证明。

命题 2.1. 设给定 $(\varrho_0,v_0,\vartheta_0)\in H^2((\alpha,\beta))$，使得 $\varrho_0,\vartheta_0\geq 0$ 在 (α,β) 上，且 $v_0'(\alpha)=v_0'(\beta)=\vartheta_0(\alpha)=\vartheta_0(\beta)=0.$。假设

$$\mu v_0''-R(\varrho_0\vartheta_0)'=\sqrt{\varrho_0}g_1,\quad \kappa\vartheta_0''+\mu(v_0')^2-Rv_0'\varrho_0\vartheta_0=\sqrt{\varrho_0}g_2,$$

对于两个函数 $g_1,g_2\in L^2((\alpha,\beta))$。

那么，系统 (1.11)–(1.13) 存在唯一整体解 (J, v, ϑ)，属于 $(\alpha, \beta) \times [0, \infty)$，满足条件 (2.1)–(2.2)，并且满足 $\inf_{(y,t)\in(\alpha,\beta)\times(0,T)} J > 0$, $\vartheta \geq 0$，以及

$$J \in C([0,T]; H^2((\alpha,\beta))), \quad J_t \in L^2(0,T; H^2((\alpha,\beta))),$$
$$v, \vartheta \in C([0,T]; H^2((\alpha,\beta))) \cap L^2(0,T; H^3((\alpha,\beta))), \quad v_t, \vartheta_t \in L^2(0,T; H^1((\alpha,\beta))),$$

对于任意 $T \in (0, \infty)$。

本小节其余部分旨在推导命题 2.1 中所述唯一整体解 (J, v, ϑ) 的先验估计，该估计与 α 和 β 无关。牢记这一点，在本小节其余部分中，我们始终假设 (J, v, ϑ) 是命题 2.1 中所述的解。

在本小节中，为简化记号，范数 $\|\cdot\|_q$ 和 $\|\cdot\|_{H^1}$ 均指区间 (α, β) 上的相应范数，即

$$\|\cdot\|_q := \|\cdot\|_{L^q((\alpha,\beta))} \quad \text{and} \quad \|\cdot\|_{H^1} := \|\cdot\|_{H^1((\alpha,\beta))}.$$

记

$$m_0 := \int_\alpha^\beta \varrho_0 dy, \quad \mathscr{E}_0 := \int_\alpha^\beta \varrho_0 \left(\frac{v_0^2}{2} + c_v \vartheta_0 \right) dy.$$

命题 2.2. 有

$$\int_\alpha^\beta \varrho_0 \left(\frac{v^2}{2} + c_v \vartheta \right) dy \leq \mathscr{E}_0.$$

证明。将 (1.12) 乘以 v，在 (α, β) 上积分，并利用边界条件，通过分部积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta \varrho_0 v^2 dy + \mu \int_\alpha^\beta \frac{|v_y|^2}{J} dy - \int_\alpha^\beta v_y \pi dy = 0. \tag{2.3}$$

由于 $\vartheta \geq 0$ 在 $(\alpha, \beta) \times (0, \infty)$ 中，显然，对于任意 $t \in (0, \infty)$，有 $\vartheta_y(\alpha, t) \geq 0$ 且 $\vartheta_y(\beta, t) \leq 0$。因此，在 (α, β) 上对 (1.13) 积分并进行分部积分可得

$$c_v \frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta \varrho_0 \vartheta dy + \int_\alpha^\beta v_y \pi dy \leq \mu \int_\alpha^\beta \frac{|v_y|^2}{J} dy. \tag{2.4}$$

将 (2.3) 与 (2.4) 相加，并对 t 积分，即可得出结论。 □

命题 2.3。成立：

$$e^{-\frac{2}{\mu}\sqrt{2m_0\mathscr{E}_0}} \leq J \leq e^{\frac{4}{\mu}\sqrt{2m_0\mathscr{E}_0}} \left(1 + \frac{R}{\mu}\int_0^t \varrho_0 \vartheta d\tau \right), \quad \forall t \in (0, \infty).$$

证明。由于 $v_y|_{y=\alpha} = 0$和 $J|_{t=0} = 1$，由 (1.11) 可得 $J|_{y=\alpha} = 1$。将 (1.11) 代入 (1.12) 得

$$\varrho_0 v_t - \mu (\log J)_{yt} + \pi_y = 0,$$

由此，在 $(0,t)$ 上积分并利用 $J|_{t=0}=1$，可得

$$\varrho_0(v-v_0)+\int_0^t \pi_y ds=\mu(\log J)_y.$$

对 (α,y) 积分，并注意到 $J|_{y=\alpha}=1$和 $\pi|_{y=\alpha}=R\frac{\varrho_0}{J}\vartheta|_{y=\alpha}=0$，可得

$$\int_\alpha^y \varrho_0(v-v_0)dz+\int_0^t \pi ds=\mu\log J,$$

由此可得

$$J=e^{\frac{1}{\mu}\left(\int_\alpha^y \varrho_0(v-v_0)dz+\int_0^t \pi ds\right)}. \tag{2.5}$$

由命题 2.2 和 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \varrho_0(|v|+|v_0|)dz &\le \left(\int_\alpha^\beta \varrho_0 dz\right)^{\frac12}\left[\left(\int_\alpha^\beta \varrho_0 v^2dz\right)^{\frac12}+\left(\int_\alpha^\beta \varrho_0 v_0^2dz\right)^{\frac12}\right]\\ &\le 2\sqrt{2m_0\mathscr{E}_0}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

借助 (2.6)，并且由于 $\pi\ge 0$，由 (2.5) 可得

$$J\ge e^{-\frac{1}{\mu}\int_\alpha^\beta \varrho_0(|v|+|v_0|)dz}\ge e^{-\frac{2}{\mu}\sqrt{2m_0\mathscr{E}_0}}. \tag{2.7}$$

将 (2.5) 重写为 $Je^{-\frac{1}{\mu}\int_\alpha^y \varrho_0(v-v_0)^{dz}}=e^{\frac{1}{\mu}\int_0^t \pi ds}$。因此

$$\frac{1}{\mu}J\pi\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_\alpha^y \varrho_0(v-v_0)dz\right\}=\partial_t(e^{\frac{1}{\mu}\int_0^t \pi ds}).$$

因此，注意到 $J\pi=R\varrho_0\vartheta$，可得

$$\exp\left\{\frac{1}{\mu}\int_0^t \pi ds\right\}=1+\frac{R}{\mu}\int_0^t \varrho_0\vartheta\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_\alpha^y \varrho_0(v-v_0)dz\right\}ds.$$

将其代入 (2.5)，并利用 (2.6)，可得

$$\begin{aligned}J &= e^{\frac{1}{\mu}\int_\alpha^y \varrho_0(v-v_0)dz}\left(1+\frac{R}{\mu}\int_0^t \varrho_0\vartheta\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_\alpha^y \varrho_0(v-v_0)dz\right\}ds\right)\\ &\le e^{\frac{4}{\mu}\sqrt{2m_0\mathscr{E}_0}}\left(1+\frac{R}{\mu}\int_0^t \varrho_0\vartheta ds\right).\end{aligned}$$

结合 (2.7) 即可得出结论。 □

在本小节余下部分，我们始终假设 C 是一个一般的正数，仅依赖于 R、c_v、μ、κ、K_1、T 以及 $\mathscr{N}_0$ 的上界，但与 α 和 β 无关，其中 $\beta-\alpha\ge 1$,

$$\mathscr{N}_0:=\|\varrho_0\|_\infty+m_0+\mathscr{E}_0+\left\|\left(\sqrt{\varrho_0}v_0^2,v_0',v_0'',\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0,\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0',\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0'',G_0,\frac{G_0'}{\sqrt{\varrho_0}}\right)\right\|_2. \tag{2.8}$$

命题 2.4. 有

$$\sup_{0\le t\le T}\|(\sqrt{\varrho_0}v^2,\sqrt{\varrho_0}\vartheta)\|_2^2+\int_0^T\left(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2+\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2\right)dt\le C.$$

证明。令 $E=\frac{v^2}{2}+c_v\vartheta$。由 (1.12) 和 (1.13) 可得

$$\varrho_0E_t-\kappa\left(\frac{\vartheta_y}{J}\right)_y=\left(\mu\frac{vv_y}{J}-R\frac{\varrho_0}{J}\vartheta v\right)_y.$$

注意，由于边界条件 $\vartheta|_{y=\alpha,\ \beta}=0$以及 $\vartheta\ge0$ 在 $(\alpha,\beta)\times(0,\infty)$ 中这一事实，$\vartheta_y(\alpha,t)\ge0$且 $\vartheta_y(\beta,t)\le0$。将上述方程乘以 E 并分部积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\varrho_0}E\|_2^2+\kappa c_v\int_\alpha^\beta\frac{|\vartheta_y|^2}{J}dy-\kappa E\frac{\vartheta_y}{J}\Big|_{y=\alpha}^{\beta}\\ \le\ &-\int_\alpha^\beta\left(\mu\frac{vv_y}{J}-R\frac{\varrho_0}{J}\vartheta v\right)(vv_y+c_v\vartheta_y)dy-\kappa\int_\alpha^\beta\frac{\vartheta_y}{J}vv_ydy\\ \le\ &\frac{\kappa c_v}{2}\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+C\int_\alpha^\beta\frac{1}{J}\left(|vv_y|^2+\varrho_0^2v^2\vartheta^2\right)dy,\end{aligned}$$

因此，由柯西不等式及 $-\kappa E\frac{\vartheta_y}{J}\Big|_{y=\alpha}^{\beta}\ge0$ 可得

$$\frac{d}{dt}\|\sqrt{\varrho_0}E\|_2^2+\kappa c_v\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2\le A_1\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+A_1\int_\alpha^\beta\frac{1}{J}\varrho_0^2v^2\vartheta^2dy,\tag{2.9}$$

其中 A_1 为正数，仅依赖于 κ、c_v、μ 和 R。将 (1.12) 乘以$4v^3$，利用边界条件并分部积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta\varrho_0v^4dy+12\mu\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2&=12R\int_\alpha^\beta\frac{1}{J}v^2v_y\varrho_0\vartheta dy\\ &\le6\mu\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+C\int_\alpha^\beta\frac{1}{J}\varrho_0^2v^2\vartheta^2dy,\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta\varrho_0v^4dy+6\mu\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2\le C\int_\alpha^\beta\frac{1}{J}\varrho_0^2v^2\vartheta^2dy.\tag{2.10}$$

将 (2.10) 乘以 $\frac{A_1}{3\mu}$，并与 (2.9) 相加，得到

$$\frac{d}{dt}\left(\|\sqrt{\varrho_0}E\|_2^2+\frac{A_1}{3\mu}\|\sqrt{\varrho_0}v^2\|_2^2\right)+\kappa c_v\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+A_1\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2\le C\int_\alpha^\beta\frac{1}{J}\varrho_0^2v^2\vartheta^2dy,$$

由此，利用命题 2.2 和命题 2.3，可得

$$\frac{d}{dt}\left(\|\sqrt{\varrho_0}E\|_2^2+\frac{A_1}{3\mu}\|\sqrt{\varrho_0}v^2\|_2^2\right)+\kappa c_v\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+A_1\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 \le C\|\sqrt{\varrho_0}v\|_2^2\|\sqrt{\varrho}_0\vartheta\|_\infty^2\le C\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2. \tag{2.11}$$

由于 $\vartheta|_{y=\alpha}=0$，由命题 2.3、H¨older 不等式、Young 不等式以及 (H1) 可得

$$\begin{aligned}
\varrho_0\vartheta^2 &= \int_\alpha^y(\varrho_0\vartheta^2)_y dz=\int_\alpha^y(\varrho_0'\vartheta^2+2\varrho_0\vartheta\vartheta_y)dz\\
&\le \int_\alpha^\beta\left(K_1\varrho_0\vartheta^2+2\varrho_0\vartheta\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\sqrt{J}\right)dz\\
&\le K_1\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2+2\|\varrho_0\vartheta\|_1^{\frac12}\|\varrho_0\|_\infty^{\frac14}\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^{\frac12}\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2\|J\|_\infty^{\frac12}\\
&\le K_1\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2+C\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^{\frac12}\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2\left(1+\int_0^t\|\varrho_0\vartheta\|_\infty d\tau\right)^{\frac12}\\
&\le K_1\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2+C\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^{\frac12}\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2\left[1+\left(\int_0^t\|\varrho_0\vartheta\|_\infty^2 d\tau\right)^{\frac14}\right]\\
&\le \frac12\left(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2+\epsilon\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2\right)+C\left(1+\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2+\int_0^t\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2 d\tau\right),
\end{aligned}$$

因此

$$\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2\le\epsilon\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+C_\epsilon\left(1+\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2+\int_0^t\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2 d\tau\right) \tag{2.12}$$

对于任意 $\epsilon>0$。取 ϵ 足够小，并将 (2.12) 代入 (2.11)，得到 d

$$\frac{d}{dt}\left(\|\sqrt{\varrho_0}E\|_2^2+\frac{A_1}{3\mu}\|\sqrt{\varrho_0}v^2\|_2^2\right)+A_1\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+\frac{\kappa c_v}{2}\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 \le C\left(1+\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2+\int_0^t\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2 d\tau\right). \tag{2.13}$$

结合 (2.12) 和 (2.13) 可得

$$\frac{d}{dt}\left(\|\sqrt{\varrho_0}E\|_2^2+\frac{A_1}{3\mu}\|\sqrt{\varrho_0}v^2\|_2^2+\int_0^t\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2 d\tau\right)+A_1\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+\frac{\kappa}{2}\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 \le C\left(1+\|\sqrt{\varrho_0}E\|_2^2+\int_0^t\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2 d\tau\right),$$

再结合 Gr¨onwall 不等式，可推出

$$\sup_{0\le t\le T}\|\sqrt{\varrho_0}E\|_2^2+\int_0^T\left(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_\infty^2+\left\|\frac{vv_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+\left\|\frac{\vartheta_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2\right)dt\le C.$$

至此，结论的证明完成。 □

推论 2.1. 存在两个正常数$\underline{C}$ 和 $\overline{C}$，使得

$$\underline{C}\le J\le\overline{C}\quad on\ (\alpha,\beta)\times(0,T),\quad \int_0^T\|v_y\|_2^2dt\le C.$$

证明. J 的下界直接由命题 2.3 得出，而 J 的上界则由命题 2.3 和命题 2.4 综合得出。将 v 代入 (1.12) 进行检验，并分部积分，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\varrho_0}v\|_2^2+\mu\left\|\frac{v_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 &= R\int_\alpha^\beta\frac{\varrho_0}{J}\vartheta v_ydy\\ \le C\left\|\frac{v_y}{\sqrt{J}}\right\|_2\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2 &\le \frac{\mu}{2}\left\|\frac{v_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2+C\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2,\end{aligned}$$

其中用到了 J 的下界，因此

$$\frac{d}{dt}\|\sqrt{\varrho_0}v\|_2^2+\mu\left\|\frac{v_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2\le C\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2.$$

第二个结论由此以及刚刚证明的 J 的上界和命题 2.4 得出。□

在本小节余下部分中，我们始终假设 $\beta-\alpha\ge 1$。下面将用到一个基本不等式。

引理 2.1. 有

$$\|f\|_{L^p((\alpha,\beta))}\le C(\|f\|_{L^2((\alpha,\beta))}+\|f\|_{L^2((\alpha,\beta))}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\|f'\|_{L^2((\alpha,\beta))}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}),\quad p\in[2,\infty],$$

对任意 $f\in H^1((\alpha,\beta))$，以及一个仅依赖于 p 的正数 C，

证明。将 (α,β) 上的相应不等式通过尺度变换化为 (0, 1) 上的不等式，再对 $H^1((0,1))$ 中的函数应用加利亚多-尼伦伯格不等式，并利用条件 $\beta-\alpha\ge 1$，即可证明。由于证明很直接，这里略去。□

令 G 为有效黏性通量，即

$$G:=\mu\frac{v_y}{J}-\pi=\mu\frac{v_y}{J}-R\frac{\varrho_0\vartheta}{J}.$$

那么，有

$$G_t - \frac{\mu}{J}\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y = -\frac{\kappa(\gamma-1)}{J}\left(\frac{\vartheta_y}{J}\right)_y - \gamma\frac{v_y}{J}G \tag{2.14}$$

and

$$G|_{y=\alpha,\beta} = 0. \tag{2.15}$$

命题 2.5. 有

$$\sup_{0\le t\le T}\|G\|_2^2 + \int_0^T\left(\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 + \|G\|_\infty^4\right)dt \le C(1+\|G_0\|_2^2).$$

证明. 将 (2.14) 与 JG 相乘，并利用 (1.11)、(2.15)、引理 2.1、推论 2.1 和 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{J}G\|_2^2 + \mu\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2\\
=\ & \kappa(\gamma-1)\int_\alpha^\beta\frac{\vartheta_y G_y}{J}dy + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\int_\alpha^\beta v_y G^2 dy\\
\le\ & C\left(\|\vartheta_y\|_2\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2 + \|v_y\|_2\|G\|_4^2\right)\\
\le\ & C\left[\|\vartheta_y\|_2\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2 + \|v_y\|_2\left(\|G\|_2^2 + \|G\|_2^{\frac{3}{2}}\|G_y\|_2^{\frac{1}{2}}\right)\right]\\
\le\ & \frac{\mu}{2}\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 + C[\|\vartheta_y\|_2^2 + (1+\|v_y\|_2^2)\|G\|_2^2],
\end{aligned}$$

也就是说,

$$\frac{d}{dt}\|\sqrt{J}G\|_2^2 + \mu\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 \le C[\|\vartheta_y\|_2^2 + (1+\|v_y\|_2^2)\|G\|_2^2].$$

由此结合 Gr¨onwall 不等式，根据命题 2.4 和推论 2.1 可得所需结论，但不包括关于 $\int_0^T\|G\|_\infty^4 dt$ 的估计。关于 $\int_0^T\|G\|_\infty^4 dt$ 的估计则可由推论 2.1、引理 2.1 以及刚刚证明的估计得出。□

命题 2.6. 有

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 + \|v_y\|_2^2 + \|J_t\|_2^2\right) + \int_0^T\left(\|\sqrt{\varrho_0}v_t\|_2^2 + \left\|\frac{v_{yy}}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2\right)dt \le C.$$

证明. 注意到 $v_y = \frac{1}{\mu}(JG + R\varrho_0\vartheta)$ 和 $\sqrt{\varrho_0}v_t = \frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}$。由命题 2.4、命题 2.5 和推论 2.1 可得

$$\sup_{0\le t\le T}\|v_y\|_2^2 + \int_0^T \|\sqrt{\varrho_0}v_t\|_2^2 dt \le C,$$

由 (1.11) 可得

$$\sup_{0\le t\le T}\|J_t\|_2^2 \le C.$$

直接计算可得

$$J_{yt} = \frac{1}{\mu}(JG_y + J_yG + R\varrho_0'\vartheta + R\varrho_0\vartheta_y).$$

将上述式子与 $\frac{J_y}{\varrho_0}$ 作内积，由命题 2.4、推论 2.1 和 (H1) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 &\le C\int_\alpha^\beta \left(|J|\left|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right| + \left|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right|(|G| + \sqrt{\varrho_0}\vartheta + \sqrt{\varrho_0}|\vartheta_y|)\right)\frac{|J_y|}{\sqrt{\varrho_0}}dy\\
&\le C\left(\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2 + \|G\|_\infty\left\|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2 + \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2 + \|\vartheta_y\|_2\right)\left\|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2\\
&\le C(1+\|G\|_\infty)\left\|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 + C\left(1 + \|\vartheta_y\|_2^2 + \left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2\right),
\end{aligned}$$

结合 Gr¨onwall 不等式、命题 2.4、推论 2.1 和命题 2.5，可得

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 \le C. \tag{2.16}$$

由于

$$v_{yy} = \frac{1}{\mu}(J_yG + JG_y + R\varrho_0'\vartheta + R\varrho_0\vartheta_y), \tag{2.17}$$

由此可得 由 (2.16)、推论 2.1、命题 2.4、命题 2.5 和 (H1) 可知

$$\int_0^T\left\|\frac{v_{yy}}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 dt \le C\int_0^T\left(\left\|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2\|G\|_\infty^2 + \left\|\left(\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}, \sqrt{\varrho_0}\vartheta, \vartheta_y\right)\right\|_2^2\right)dt \le C.$$

证明至此完成。 □

命题 2.7. 成立：

$$\sup_{0\le t\le T}\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_2^2 + \int_0^T(\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2 + \|\vartheta_{yy}\|_2^2)dt \le C.$$

证明. 将 (1.13) 重写为

$$c_v\varrho_0\vartheta_t-\kappa\left(\frac{\vartheta_y}{J}\right)_y=v_yG. \tag{2.18}$$

注意到$\vartheta_t|_{y=\alpha,\ \beta}=0$。将上述方程与 $\varrho_0\vartheta_t$作内积，得到

$$\kappa\int_\alpha^\beta\frac{\vartheta_y}{J}(\varrho_0\vartheta_{yt}+\varrho_0'\vartheta_t)dy+c_v\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2=\int_\alpha^\beta v_yG\varrho_0\vartheta_t dy. \tag{2.19}$$

由 (1.11) 可知

$$\int_\alpha^\beta\frac{\vartheta_y}{J}\varrho_0\vartheta_{yt}dy=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\frac{\varrho_0}{J}}\vartheta_y\right\|_2^2+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{v_y}{J^2}\varrho_0|\vartheta_y|^2dy.$$

将其代入 (2.19)，并利用 (H1) 和推论 2.1，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\kappa}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\frac{\varrho_0}{J}}\vartheta_y\right\|_2^2+c_v\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2\\
=&\int_\alpha^\beta\left(v_yG\varrho_0\vartheta_t-\frac{\kappa}{2}\frac{v_y}{J^2}\varrho_0|\vartheta_y|^2-\kappa\frac{\vartheta_y}{J}\varrho_0'\vartheta_t\right)dy\\
\le&\int_\alpha^\beta\left(|v_y||G|\varrho_0|\vartheta_t|+\frac{\kappa}{2}\frac{|v_y|}{J^2}\varrho_0|\vartheta_y|^2+\kappa K_1\frac{|\vartheta_y|}{J}\varrho_0|\vartheta_t|\right)dy\\
\le&\frac{c_v}{2}\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2+C(\|G\|_\infty^2\|v_y\|_2^2+\|v_y\|_\infty\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_2^2+\|\vartheta_y\|_2^2),
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\kappa\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\frac{\varrho_0}{J}}\vartheta_y\right\|_2^2+c_v\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2\\
\le&\ C\left[\|G\|_\infty^2\|v_y\|_2^2+(\|G\|_\infty+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty)\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_2^2+\|\vartheta_y\|_2^2\right].
\end{aligned}$$

由此、Gr¨onwall 不等式、命题 2.4–2.6 以及推论 2.1 可知

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T}\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_2^2+\int_0^T\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2dt\\
\le&\ Ce^{C\int_0^T(\|G\|_\infty+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty)dt}\left(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0'\|_2^2+\int_0^T(\|G\|_\infty^2\|v_y\|_2^2+\|\vartheta_y\|_2^2)dt\right)\le C.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

通过直接计算并利用 (2.18)，得到

$$\kappa\vartheta_{yy}=\kappa\left(\frac{\vartheta_y}{J}\right)_yJ+\kappa\frac{\vartheta_y}{J}J_y=J(c_v\varrho_0\vartheta_t-v_yG)+\kappa\frac{\vartheta_y}{J}J_y.$$

由此可得 由此以及 (2.20)、命题 2.5–2.6、推论 2.1 和引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\vartheta_{yy}\|_2^2 dt &\leq C\int_0^T \left(\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2 + \|v_y\|_2^2\|G\|_\infty^2 + \|\vartheta_y\|_\infty^2\|J_y\|_2^2\right) dt \\ &\leq C + C\int_0^T \|\vartheta_y\|_\infty^2 dt \leq C + C\int_0^T \|\vartheta_y\|_2(\|\vartheta_y\|_2 + \|\vartheta_{yy}\|_2)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \|\vartheta_{yy}\|_2^2 dt + C,\end{aligned}$$

从而 $\int_0^T \|\vartheta_{yy}\|_2^2 dt \leq C$. 证明完毕。 □

命题 2.8. 有

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 + \int_0^T \left(\|G_t\|_2^2 + \left\|\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right\|_2^2\right) dt \leq C\left(1 + \left\|\frac{G_0'}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2\right).$$

证明. 将 (2.14) 与 (2.18) 结合可得

$$G_t - \frac{\mu}{J}\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y = -\frac{R}{J}\varrho_0\vartheta_t - \frac{v_y}{J}G.$$

注意 $G_t|_{y=\alpha,\ \beta} = 0$。将上式乘以 JG_t，分部积分，并利用推论 2.1 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 + \|\sqrt{J}G_t\|_2^2 &= -\int_\alpha^\beta \left(R\varrho_0\vartheta_t + v_yG\right)G_t dy \\ &\leq \frac{1}{2}\|\sqrt{J}G_t\|_2^2 + C(\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2 + \|v_y\|_2^2\|G\|_\infty^2),\end{aligned}$$

由此，根据命题 2.5–2.7，结论得证。 □

命题 2.9. 有

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left(\left\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\right\|_2^2 + \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}\|_2^2\right) + \int_0^T \|\varrho_0\vartheta_{yt}\|_2^2 dt \leq C.$$

证明. 注意到 $v_y = \frac{1}{\mu}(JG + R\varrho_0\vartheta)$ 以及

$$v_{yt} = \frac{1}{\mu}(JG_t + v_yG + R\varrho_0\vartheta_t). \tag{2.21}$$

由（1.11）、（2.18）和直接计算可得

$$c_v\varrho_0\vartheta_{tt} - \kappa\left(\frac{\vartheta_{yt}}{J}\right)_y = -\kappa\left(\frac{v_y\vartheta_y}{J^2}\right)_y + \frac{v_y}{\mu}G^2 + \frac{1}{\mu}(2JG + R\varrho_0\vartheta)G_t + \frac{R}{\mu}\varrho_0\vartheta_tG.$$

注意，$\vartheta_t|_{y=\alpha,\ \beta}=0$。将上述方程乘以 $\varrho_0^2\vartheta_t$ 并进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{c_v}{2}\frac{d}{dt}\left\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\right\|_2^2+\kappa\int_\alpha^\beta\frac{\vartheta_{yt}}{J}(\varrho_0^2\vartheta_{yt}+2\varrho_0\varrho_0'\vartheta_t)dy\\
=\ &\frac{1}{\mu}\int_\alpha^\beta[v_yG^2+(2JG+R\varrho_0\vartheta)G_t+R\varrho_0\vartheta_tG]\varrho_0^2\vartheta_tdy\\
&+\kappa\int_\alpha^\beta\frac{v_y\vartheta_y}{J^2}(\varrho_0^2\vartheta_{yt}+2\varrho_0\varrho_0'\vartheta_t)dy.
\end{aligned}$$

于是，由推论 2.1 和 (H1)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{c_v}{2}\frac{d}{dt}\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\|_2^2+\kappa\left\|\frac{\varrho_0}{\sqrt{J}}\vartheta_{yt}\right\|_2^2\\
\le\ &C\int_\alpha^\beta[\varrho_0^2|\vartheta_t||\vartheta_{yt}|+|v_y||\vartheta_y|(\varrho_0^2|\vartheta_{yt}|+\varrho_0^2|\vartheta_t|)]dy\\
&+C\int_\alpha^\beta[|v_y|G^2+(|G|+\varrho_0\vartheta)|G_t|+\varrho_0|\vartheta_t||G|]\varrho_0^2|\vartheta_t|dy\\
\le\ &\frac{\kappa}{2}\left\|\frac{\varrho_0}{\sqrt{J}}\vartheta_{yt}\right\|_2^2+C(\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2+\|v_y\|_\infty^2\|\varrho_0\vartheta_y\|_2^2)+C\|G\|_\infty^2(\|v_y\|_2^2+\|\varrho_0^2\vartheta_t\|_2^2)\\
&+C\|G_t\|_2^2+C(\|G\|_\infty^2+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty^2)\|\varrho_0^2\vartheta_t\|_2^2+C\|G\|_\infty\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\|_2^2,
\end{aligned}$$

由此，根据命题 2.6–2.7 和 $v_y=\frac{1}{\mu}(JG+R\varrho_0\vartheta)$，可得

$$\begin{aligned}
&c_v\frac{d}{dt}\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\|_2^2+\kappa\left\|\frac{\varrho_0}{\sqrt{J}}\vartheta_{yt}\right\|_2^2\\
\le\ &C(\|G\|_\infty^2+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty^2+1)\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\|_2^2+C(\|v_y\|_\infty^2+\|G\|_\infty^2+\|G_t\|_2^2+\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2)\\
\le\ &C(\|G\|_\infty^2+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty^2+1)\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\|_2^2+C(\|G\|_\infty^2+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty^2+\|G_t\|_2^2+\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2).
\end{aligned}$$

对上述结果应用 Gr¨onwall 不等式，并利用命题 2.4–2.5 和 2.7–2.8 以及推论 2.1，可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T}\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\|_2^2+\int_0^T\|\varrho_0\vartheta_{yt}\|_2^2dt\\
\le\ &Ce^{C\int_0^T(\|G\|_\infty^2+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty^2)dt}\left\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\right\|_2^2\Big|_{t=0}\\
&+Ce^{C\int_0^T(\|G\|_\infty^2+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty^2)dt}\int_0^T(\|G\|_\infty^2+\|\varrho_0\vartheta\|_\infty^2+\|G_t\|_2^2+\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2)dt\\
\le\ &C(1+\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0''\|_2^2+\|\sqrt{\varrho_0}v_0'G_0\|_2^2),
\end{aligned}\tag{2.22}$$

其中用到了 $\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t|_{t=0} = \frac{\sqrt{\varrho_0}}{c_v}(\kappa\vartheta_0'' + v_0'G_0)$ 这一事实，该事实由 (2.18) 得出。因此，注意到引理 2.1 表明

$$\|\sqrt{\varrho_0}v_0'G_0\|_2^2 \le C\|v_0'\|_\infty^2\|G_0\|_2^2 \le C\|v_0'\|_{H^1}^2\|G_0\|_2^2,$$

由 (2.22) 可得

$$\sup_{0\le t\le T}\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\|_2^2 + \int_0^T \|\varrho_0\vartheta_{yt}\|_2^2 dt \le C(1+\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0''\|_2^2). \tag{2.23}$$

注意到

$$\vartheta_{yy} = J\left(\frac{\vartheta_y}{J}\right)_y + \frac{\vartheta_y}{J}J_y = \frac{1}{\kappa}(c_v\varrho_0\vartheta_t - v_yG)J + \frac{1}{J}\vartheta_yJ_y.$$

由此、(2.23)、命题 2.6 和推论 2.1 可得

$$\begin{aligned}\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}\|_2^2 &\le C(\|\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\|_2^2 + \|v_y\|_2^2\|G\|_\infty^2 + \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_\infty^2\|J_y\|_2^2)\\ &\le C(1+\|G\|_\infty^2 + \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_\infty^2).\end{aligned} \tag{2.24}$$

接下来估计 $\|G\|_\infty^2$ 和 $\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_\infty^2$，如下所示。注意到引理 2.1、命题 2.5 和命题 2.8 可推出

$$\|G\|_\infty^2 \le C\|G\|_2(\|G\|_2 + \|G_y\|_2) \le C. \tag{2.25}$$

由引理 2.1、(H1) 和命题 2.7，可得

$$\begin{aligned}\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_\infty^2 &\le C\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_2\left(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_2 + \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}\|_2 + \left\|\frac{\varrho_0'}{\sqrt{\varrho_0}}\vartheta_y\right\|_2\right)\\ &\le C(1+\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}\|_2).\end{aligned} \tag{2.26}$$

将 (2.25) 和 (2.26) 代入 (2.24)，并使用柯西不等式，得到

$$\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}\|_2^2 \le C(1+\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}\|_2) \le \frac{\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}\|_2^2}{2} + C,$$

由此得到 $\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy}\|_2^2 \le C$。证明至此完成。 □

命题 2.10. 有

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|\sqrt{\varrho_0}v_t\|_2^2 + \left\|\frac{v_{yy}}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2\right) + \int_0^T(\|v_{yt}\|_2^2 + \|v_{yyy}\|_2^2 + \|J_{yy}\|_2^2)dt \le C.$$

证明。$\sqrt{\varrho_0}v_t$ 的估计可由命题 2.8 直接得到，因为 $\sqrt{\varrho_0}v_t = \frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}$。由 (H1)、(2.17)、(2.21)、(2.25)、推论 2.1 以及命题 2.4–2.8 可得

$$\left\|\frac{v_{yy}}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 \le C\left(\left\|\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2\|G\|_\infty^2 + \left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2^2 + \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y\|_2^2 + \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2^2\right) \le C,$$

$$\int_0^T \|v_{yt}\|_2^2 dt \le C\int_0^T (\|v_y\|_2^2\|G\|_\infty^2 + \|G_t\|_2^2 + \|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2)dt \le C.$$

注意到

$$v_{yyy} = \frac{1}{\mu}(J_{yy}G + 2J_yG_y + JG_{yy} + R\varrho_0''\vartheta + 2R\varrho_0'\vartheta_y + R\varrho_0\vartheta_{yy}).$$

由 (H1)、(2.25)、推论 2.1 以及命题 2.4–2.5 和 2.7–2.8 可得

$$\begin{aligned}\int_0^t \|v_{yyy}\|_2^2 d\tau &\le C\int_0^t (\|J_{yy}\|_2^2\|G\|_\infty^2 + \|J_y\|_\infty^2\|G_y\|_2^2 + \|G_{yy}\|_2^2 \\ &\quad + \|\varrho_0\vartheta\|_2^2 + \|\varrho_0\vartheta_y\|_2^2 + \|\varrho_0\vartheta_{yy}\|_2^2)d\tau \\ &\le C\int_0^t (\|J_{yy}\|_2^2 + \|J_y\|_\infty^2 + \|G_{yy}\|_2^2)d\tau + C, \end{aligned} \tag{2.27}$$

其中使用了引理 2.1 保证的 $\|G\|_\infty^2 \le C(\|G\|_2^2 + \|G_y\|_2^2)$。接下来，可按如下方式估计 $\|J_y\|_\infty^2$ 和 $\|G_{yy}\|_2^2$。由引理 2.1 和命题 2.6 可得

$$\|J_y\|_\infty^2 \le C(\|J_y\|_2^2 + \|J_y\|_2\|J_{yy}\|_2) \le C(1 + \|J_{yy}\|_2^2). \tag{2.28}$$

而 (H1) 和命题 2.8 给出

$$\begin{aligned}\int_0^T \|G_{yy}\|_2^2 dt &\le \int_0^T \left(\left\|\varrho_0\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right\|_2 + \left\|\varrho_0'\frac{G_y}{\varrho_0}\right\|_2\right)^2 dt \\ &\le C\int_0^T \left(\left\|\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right\|_2^2 + \|G_y\|_2^2\right) dt \le C.\end{aligned}$$

由此以及 (2.27) 和 (2.28) 可得

$$\int_0^t \|v_{yyy}\|_2^2 d\tau \le C\left(1 + \int_0^t \|J_{yy}\|_2^2 d\tau\right). \tag{2.29}$$

由于 $J_{yy} = \int_0^t v_{yyy}d\tau$，有

$$\int_0^t \|J_{yy}\|_2^2 d\tau \le \int_0^t \left\|\int_0^\tau v_{yyy}d\tau'\right\|_2^2 d\tau \le C\int_0^t \left(\int_0^\tau \|v_{yyy}\|_2^2 d\tau'\right) d\tau. \tag{2.30}$$

将其代入 (2.29) 可得

$$\int_0^t \|v_{yyy}\|_2^2 d\tau \le C + C\int_0^t \left(\int_0^\tau \|v_{yyy}\|_2^2 d\tau'\right) d\tau,$$

由 Gr¨onwall 不等式可得 $\int_0^T \|v_{yyy}\|_2^2 dt \le Ce^T \le C$。结合（2.30），可知 $\int_0^t \|J_{yy}\|_2^2 d\tau \le C$. 证明完毕。□

命题 2.11. 有

$$\sup_{0\le t\le T}(\|J_{yy}\|_2^2+\|J_{yt}\|_2^2)\le C.$$

Proof. 由命题 2.10，利用 $J_{yy}=\int_0^t v_{yyy}d\tau$ 和 $J_{yt}=v_y$ 可得 $_y$. □

命题 2.12. 有

$$\int_0^T\|\vartheta_{yyy}\|_2^2dt\le C.$$

Proof. 根据引理 2.1 以及命题 2.5、2.6、2.8、2.10 和 2.11，可得

$$\|J_y\|_\infty+\|J_{yy}\|_2+\|v_y\|_\infty+\|G\|_\infty\le C. \tag{2.31}$$

由 (2.18) 可得

$$\begin{aligned}\vartheta_{yyy} &= \frac{c_v}{\kappa}(\varrho_0'J\vartheta_t+2\varrho_0J_y\vartheta_t+\varrho_0J\vartheta_{yt})+\frac{\vartheta_y}{J}J_{yy}\\ &\quad-\frac{1}{\kappa}(2J_yv_yG+Jv_{yy}G+Jv_yG_y).\end{aligned}$$

于是，由推论 2.1、(H1)、(2.31) 和命题 2.11，可推出

$$\begin{aligned}\int_0^T\|\vartheta_{yyy}\|_2^2dt &\le C\int_0^T(\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2+\|J_y\|_\infty^2\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2+\|\varrho_0\vartheta_{yt}\|_2^2+\|\vartheta_y\|_\infty^2\|J_{yy}\|_2^2\\ &\quad+\|J_y\|_\infty^2\|v_y\|_2^2\|G\|_\infty^2+\|v_{yy}\|_2^2\|G\|_\infty^2+\|v_y\|_\infty^2\|G_y\|_2^2)dt\\ &\le C\int_0^T(\|\varrho_0\vartheta_t\|_2^2+\|\varrho_0\vartheta_{yt}\|_2^2+\|\vartheta_y\|_2^2\\ &\quad+\|\vartheta_{yy}\|_2^2+\|v_y\|_2^2+\|v_{yy}\|_2^2+\|G_y\|_2^2)dt,\end{aligned}$$

其中用到了引理 2.1 保证的 $\|\vartheta_y\|_\infty^2\le C(\|\vartheta_y\|_2^2+\|\vartheta_{yy}\|_2^2)$。由此，根据推论 2.1 和命题 2.4–2.10，可得 $\int_0^T\|\vartheta_{yyy}\|_2^2dt\le C$。结论得证。□

由命题 2.2–2.12 和推论 2.1 可得：

推论 2.2. 设 (J,v,ϑ) 为满足 (2.1)–(2.2) 的系统 (1.11)–(1.13) 在命题 2.1 中所述的唯一整体解，且 $\mathscr{N}_0$ 由 (2.8) 给出。那么，对于任意 $T\in[0,\infty)$，有

$$\begin{aligned}&\inf_{(\alpha,\beta)\times(0,T)}J\ge\underline{C}_T,\quad \sup_{0\le t\le T}\left\|\left(\frac{J_y}{\sqrt{\varrho_0}},J_{yy},J_t,J_{yt}\right)\right\|_{L^2((\alpha,\beta))}^2\le C_T,\\ &\sup_{0\le t\le T}\left\|\left(\sqrt{\varrho_0}v,\sqrt{\varrho_0}v^2,v_y,\frac{v_{yy}}{\sqrt{\varrho_0}},\sqrt{\varrho_0}v_t\right)\right\|_{L^2((\alpha,\beta))}^2\\ &\qquad+\int_0^T\|(v_{yyy},v_{yt})\|_{L^2((\alpha,\beta))}^2dt\le C_T,\end{aligned}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|\varrho_0\vartheta\|_{L^1((\alpha,\beta))}+\left\|\left(\sqrt{\varrho_0}\vartheta,\sqrt{\varrho_0}\vartheta_y,\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{yy},\varrho_0^{\frac{3}{2}}\vartheta_t\right)\right\|^2_{L^2((\alpha,\beta))}\right)$$
$$+\int_0^T\left(\|\vartheta_y\|^2_{H^2((\alpha,\beta))}+\|(\varrho_0\vartheta_t,\varrho_0\vartheta_{yt})\|^2_{L^2((\alpha,\beta))}\right)dt\le C_T,$$
$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|^2_{L^2((\alpha,\beta))}+\int_0^T\left(\left\|\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right\|^2_{L^2((\alpha,\beta))}+\|G_t\|^2_{L^2((\alpha,\beta))}\right)dt\le C_T,$$

其中 $\underline{C}_T$ 和 C_T 是正常数，仅依赖于 R、c_v、μ、κ、K_1、T 及 $\mathscr{M}_0$ 的上界，而与满足 $\beta-\alpha\ge 1$ 的 α 和 β 无关。

3. Global existence of solutions: proof of Theorem 1.1

定理 1.1 的证明。证明分为以下三个步骤。

步骤 1. 初始数据的逼近。根据假设 (1.16)，存在两个序列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$，满足 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=-\infty$ 和 $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\infty$，以及一个正数 M_0，使得

$$\left|\frac{v_0'(\alpha_n)}{\sqrt{\varrho_0(\alpha_n)}}\right|+\left|\frac{v_0'(\beta_n)}{\sqrt{\varrho_0(\beta_n)}}\right|\le M_0,\quad\forall n\ge 1.\tag{3.1}$$

令 $I_n=(\alpha_n-1,\beta_n+1)$。对每个 n，取 $0\le\chi_n\in C_0^\infty(I_n)$，使其满足

$$\chi\equiv 1\text{ on }[\alpha_n,\beta_n],\quad 0\le\chi_n\le 1\text{ and }|\chi_n'|+|\chi_n''|\le C_0\text{ on }I_n,\tag{3.2}$$

其中 C_0 为与 n无关的正数。定义 v_{0n} 和 ϑ_{0n} 如下

$$\vartheta_{0n}=\vartheta_0\chi_n,$$

and

$$v_{0n}=\begin{cases}v_0(\alpha_n)+\frac{2}{\pi}v_0'(\alpha_n)\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-\alpha_n)\right), & y\in[\alpha_n-1,\alpha_n],\\ v_0(y), & y\in[\alpha_n,\beta_n],\\ v_0(\beta_n)+\frac{2}{\pi}v_0'(\beta_n)\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-\beta_n)\right), & y\in[\beta_n,\beta_n+1].\end{cases}$$

不难验证，

$$v_{0n}'(\alpha_n-1)=v_{0n}'(\beta_n+1)=\vartheta_{0n}(\alpha_n-1)=\vartheta_{0n}(\beta_n+1)=0.\tag{3.3}$$

注意到

$$v_{0n}(\alpha_n)=v_0(\alpha_n),\quad v_{0n}'(\alpha_n)=v_0'(\alpha_n),\quad v_{0n}(\beta_n)=v_0(\beta_n),\quad v_{0n}'(\beta_n)=v_0'(\beta_n),$$

并且由于 $v_0\in H^2_{loc}(\mathbb{R})$ 和 $0\le\vartheta_0\in H^2_{loc}(\mathbb{R})$，可得

$$v_{0n}\in H^2(I_n),\quad 0\le\vartheta_{0n}\in H^2(I_n).\tag{3.4}$$

由于 $0\le\chi_n\le 1$，显然

$$\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}\|_{L^2(I_n)}\le\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0\|_2.\tag{3.5}$$

对于任意 $y \in [\alpha_n - 1, \alpha_n)$，根据 v_{0n} 的定义可知

$$|v_{0n}(y) - v_0(y)| \le |v_0(\alpha_n) - v_0(y)| + \frac{2}{\pi}|v_0'(\alpha_n)| \le 2\|v_0'\|_\infty.$$

同样，对于任意 $y \in (\beta_n, \beta_n + 1]$，有 $|v_{0n}(y) - v_0(y)| \le 2\|v_0'\|_\infty$。因此，有

$$|v_{0n}(y) - v_0(y)| \le 2\|v_0'\|_\infty, \quad \forall y \in I_n. \tag{3.6}$$

因此

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\varrho_0} v_{0n}\|_{L^2(I_n)} &\le \|\sqrt{\varrho_0}(v_{0n} - v_0)\|_{L^2(I_n)} + \|\sqrt{\varrho_0} v_0\|_{L^2(I_n)} \\ &= 2\|v_0'\|_\infty \|\varrho_0\|_1^{\frac{1}{2}} + \|\sqrt{\varrho_0} v_0\|_2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\varrho_0}|v_{0n}|^2\|_{L^2(I_n)} &\le 2\left\|\sqrt{\varrho_0}(|v_0|^2 + |v_0 - v_{0n}|^2)\right\|_{L^2(I_n)} \\ &\le 2\|\sqrt{\varrho_0}|v_0|^2\|_2 + 8\|v_0'\|_\infty^2 \|\varrho_0\|_1^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

由 (3.2) 和直接计算可得

$$\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}'\|_{L^2(I_n)} \le \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0'\|_2 + C_0\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0\|_2, \tag{3.9}$$

$$\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}''\|_{L^2(I_n)} \le \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0''\|_2 + 2C_0(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0'\|_2 + \|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0\|_2). \tag{3.10}$$

通过直接计算，利用索伯列夫不等式可得

$$\begin{aligned} \|v_{0n}'\|_{H^1(I_n)} &\le \|v_0'\|_{H^1} + C(|v_0'(\alpha_n)| + |v_0'(\beta_n)|) \\ &\le \|v_0'\|_{H^1((\alpha_n, \beta_n))} + \|v_0'\|_{H^1((\alpha_n - 1, \alpha_n) \cup (\beta_n, \beta_n + 1))} \\ &\le C\|v_0'\|_{H^1}^2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 C 是与 n 无关的正数。

令 $G_{0n} = \mu v_{0n}' - R\varrho_0\vartheta_{0n}.$，结合 (3.5) 与 (3.11) 可得

$$\begin{aligned} \|G_{0n}\|_{L^2(I_n)} &\le \mu\|v_{0n}'\|_{L^2(I_n)} + R\|\varrho_0\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}\|_{L^2(I_n)} \\ &\le C(\|v_0'\|_{H^1} + \|\varrho_0\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0\|_2), \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 C 为与 n 无关的正数。

对于 $y \in (\beta_n, \beta_n + 1)$，有

$$\frac{\varrho_0(\beta_n)}{\varrho_0(y)} = 1 + \int_{\beta_n}^{y} k(z)\frac{\varrho_0(\beta_n)}{\varrho_0(z)}dz, \quad \text{where } k(z) = -\frac{\varrho_0'(z)}{\varrho_0(z)}. \tag{3.13}$$

由 (H1) 可知，对于任意 $z \in \mathbb{R}$，都有 $|k(z)| \le K_1$。令

$$f(y) = 1 + \int_{\beta_n}^{y} k(z)\frac{\varrho_0(\beta_n)}{\varrho_0(z)}dz, \quad \forall y \in (\beta_n, \beta_n + 1).$$

于是，由 (3.13) 可得

$$f'(y)=k(y)\frac{\varrho_0(\beta_n)}{\varrho_0(y)}=k(y)f(y),$$

因此

$$f(y)=e^{\int_{\beta_n}^{y}k(z)dz}f(\beta_n)=e^{\int_{\beta_n}^{y}k(z)dz}\le e^{K_1},\quad \forall y\in(\beta_n,\beta_n+1).$$

由此及式 (3.13) 可得

$$\frac{\varrho_0(\beta_n)}{\varrho_0(y)}=f(y)\le e^{K_1},\quad \forall y\in(\beta_n,\beta_n+1). \tag{3.14}$$

类似地，有

$$\frac{\varrho_0(\alpha_n)}{\varrho_0(y)}\le e^{K_1},\quad \forall y\in(\alpha_n-1,\alpha_n). \tag{3.15}$$

回忆一下 $G_{0n}=\mu v_{0n}'-R\varrho_0\vartheta_{0n}$. 然后，直接计算可得

$$\frac{G_{0n}'}{\sqrt{\varrho_0}}=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\mu\frac{v_0'(\alpha_n)}{\sqrt{\varrho_0}}\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-\alpha_n)\right)-R\left(\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}'+\frac{\varrho_0'}{\sqrt{\varrho_0}}\vartheta_{0n}\right), & y\in(\alpha_n-1,\alpha_n),\\ \frac{G_0'}{\sqrt{\varrho_0}}, & y\in(\alpha_n,\beta_n),\\ -\frac{\pi}{2}\mu\frac{v_0'(\beta_n)}{\sqrt{\varrho_0}}\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-\beta_n)\right)-R\left(\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}'+\frac{\varrho_0'}{\sqrt{\varrho_0}}\vartheta_{0n}\right), & y\in(\beta_n,\beta_n+1).\end{cases}$$

由式 (3.1) 和 (3.14)–(3.15) 可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{v_0'(\alpha_n)}{\sqrt{\varrho_0(y)}}\right|+\left|\frac{v_0'(\beta_n)}{\sqrt{\varrho_0(y)}}\right| &= \left|\frac{v_0'(\alpha_n)}{\sqrt{\varrho_0(\alpha_n)}}\sqrt{\frac{\varrho_0(\alpha_n)}{\varrho_0(y)}}\right|+\left|\frac{v_0'(\beta_n)}{\sqrt{\varrho_0(\beta_n)}}\sqrt{\frac{\varrho_0(\beta_n)}{\varrho_0(y)}}\right|\\ &\le 2M_0e^{\frac{K_1}{2}},\quad \forall y\in(\alpha_n-1,\alpha_n)\cup(\beta_n,\beta_n+1).\end{aligned}$$

结合 (H1)，可得

$$\left|\frac{G_{0n}'(y)}{\sqrt{\varrho_0(y)}}\right|\le\pi\mu M_0e^{\frac{K_1}{2}}+R\left(\sqrt{\varrho_0}|\vartheta_{0n}'|+K_1\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}\right),$$

对任意 $y\in(\alpha_n-1,\alpha_n)\cup(\beta_n,\beta_n+1)$。由于这一点以及 $\frac{G_{0n}'}{\sqrt{\varrho_0}}=\frac{G_0'}{\sqrt{\varrho_0}}$在 (α_n,β_n) 上，根据 (3.9) 可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{G_{0n}'}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_{L^2(I_n)} &\le \left\|\frac{G_0'}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2+2\mu\pi M_0e^{K_1/2}+R\left(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}'\|_{L^2(I_n)}+K_1\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_{0n}\|_{L^2(I_n)}\right)\\ &\le \left\|\frac{G_0'}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2+C\left(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0'\|_2+\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta_0\|_2+1\right),\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 C 是与 n 无关的正数。

Step 2. $I_n\times(0,\infty)$ 中系统的解与先验估计。

对于每个正整数 n，令 (v_{0n},ϑ_{0n}) 为如前所构造的初始数据。考虑区域 $(\alpha_n-1,\beta_n+1)\times(0,\infty)$ 上满足以下条件的系统 (1.11)–(1.13) 的初边值问题，

$$(J,v,\vartheta)|_{t=0}=(1,v_{0n},\vartheta_{0n}),\quad (v_y,\vartheta)|_{y=a_n-1,\beta_n+1}=(0,0). \tag{3.17}$$

由 (3.3) 和 (3.4)，并注意到 $\inf_{y\in I_n}\varrho_0>0$，可验证对于每个固定的$n$，初始数据 (v_{0n},ϑ_{0n}) 满足命题 2.1 中的所有假设。因此，存在 (1.11)–(1.13) 的唯一整体强解 (J_n,v_n,ϑ_n)，且满足 (3.17)。此外，由于 (3.5)、(3.7)–(3.12) 和 (3.16)，由推论 2.2 可得

$$\inf_{I_n\times(0,T)} J_n\geq \underline{C}_T,\quad \vartheta_n(y,t)\geq 0, \tag{3.18}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\left(\frac{\partial_y J_n}{\sqrt{\varrho_0}},\partial_y^2 J_n,\partial_t J_n,\partial_{yt}J_n\right)\right\|^2_{L^2(I_n)}\leq C_T, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\left(\sqrt{\varrho_0}v_n,\sqrt{\varrho_0}v_n^2,\partial_y v_n,\frac{\partial_y^2 v_n}{\sqrt{\varrho_0}},\sqrt{\varrho_0}\partial_t v_n\right)\right\|^2_{L^2(I_n)}\\&\quad+\int_0^T\|(\partial_y^3 v_n,\partial_{yt}^2 v_n)\|^2_{L^2(I_n)}dt\leq C_T,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq T}\left(\|\varrho_0\vartheta_n\|_{L^1(I_n)}+\left\|\left(\sqrt{\varrho_0}\vartheta_n,\sqrt{\varrho_0}\partial_y\vartheta_n,\sqrt{\varrho_0}\partial_y^2\vartheta_n,\varrho_0^{\frac{3}{2}}\partial_t\vartheta_n\right)\right\|^2_{L^2(I_n)}\right)\\&\quad+\int_0^T\left(\|\partial_y\vartheta_n\|^2_{H^2(I_n)}+\|(\varrho_0\partial_t\vartheta_n,\varrho_0\partial_{yt}\vartheta_n)\|^2_{L^2(I_n)}\right)dt\leq C_T,\end{aligned} \tag{3.21}$$

and

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\frac{\partial_y G_n}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|^2_{L^2(I_n)}+\int_0^T\left(\left\|\left(\frac{\partial_y G_n}{\varrho_0}\right)_y\right\|^2_{L^2(I_n)}+\|\partial_t G_n\|^2_{L^2(I_n)}\right)dt\leq C_T, \tag{3.22}$$

对于任意正时间 T，其中 $G_n=\mu\frac{\partial_y v_n}{J_n}-R\frac{\varrho_0}{J_n}\vartheta_n$，且 $\underline{C}_T$和 C_T是与 n无关的正常数。

步骤 3. 收敛与存在性。

由先验估计 (3.18)–(3.22) 以及对于任意 $k\in\mathbb{N}$ 均有 $\inf_{(-k,k)}\varrho_0(y)>0$，可得以下估计

$$\begin{aligned}&\|(J_n,v_n,\vartheta_n)\|_{L^\infty(0,T;H^2((-k,k)))}+\|(v_n,\vartheta_n)\|_{L^2(0,T;H^3((-k,k)))}+\|\partial_t J_n\|_{L^\infty(0,T;H^1((-k,k)))}\\&\quad+\|(\partial_t v_n,\partial_t\vartheta_n)\|_{L^\infty(0,T;L^2((-k,k)))\cap L^2(0,T;H^1((-k,k)))}\leq C_{k,T},\quad\forall k\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

对于与 n 无关的正数 $C_{k,T}$。由此并根据康托对角线论证，存在一个子序列，仍记为 (J_n,v_n,ϑ_n) 和 (J,v,ϑ)，使得

$$(J_n,v_n,\vartheta_n)\overset{*}{\rightharpoonup}(J,v,\vartheta),\quad \text{in } L^\infty(0,T;H^2((-k,k))), \tag{3.23}$$

$$(v_n,\vartheta_n)\rightharpoonup(v,\vartheta),\quad \text{in } L^2(0,T;H^3((-k,k))),\tag{3.24}$$

$$\partial_t J_n \overset{*}{\rightharpoonup} J_t,\quad \text{in } L^\infty(0,T;H^1((-k,k))),\tag{3.25}$$

$$(\partial_t v_n,\partial_t\vartheta_n)\overset{*}{\rightharpoonup}(v_t,\vartheta_t),\quad \text{in } L^\infty(0,T;L^2((-k,k))),\tag{3.26}$$

$$(\partial_t v_n,\partial_t\vartheta_n)\rightharpoonup(v_t,\vartheta_t),\quad \text{in } L^2(0,T;H^1((-k,k))),\tag{3.27}$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$。此外，由于 $H^3((-k,k))\hookrightarrow\hookrightarrow C^2([-k,k])$ 且 $H^2((-k,k))\hookrightarrow\hookrightarrow C^1([-k,k])$，由 Aubin–Lions 引理可得

$$(J_n,v_n,\vartheta_n)\to(J,v,\vartheta),\quad \text{in } C([0,T];C^1([-k,k])),\tag{3.28}$$

$$(v_n,\vartheta_n)\to(v,\vartheta),\quad \text{in } L^2(0,T;C^2([-k,k])),\tag{3.29}$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$。由此并根据 (3.18)，可得

$$\inf_{(y,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} J(y,t)\geq \underline{C}_T,\quad \frac{1}{J_n}\to\frac{1}{J}\text{ in } C([0,T];C^1([-k,k])),\tag{3.30}$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$。

由 (3.23)–(3.30)，并注意到在 $H^2((-L,L))$ 中，对任意 $L>0$，$(v_{0n},\vartheta_{0n})\to(v_0,\vartheta_0)$，令 $n\to\infty$ 取极限可知，(J,v,ϑ) 是满足初值 $(J,v,\vartheta)|_{t=0}=(1,v_0,\vartheta_0)$ 的系统 (1.11)–(1.13) 的柯西问题的一个解。由范数的弱下半连续性，利用先验估计 (3.18)–(3.22) 和收敛性 (3.23)–(3.29)，可得定理 1.1 中所述的 (J,v,ϑ) 的正则性。这就证明了定理 1.1。□

4. A Hopf type lemma and unboundedness of the entropy

在本节中，我们证明熵在初始时刻之后立即变得无界，即定理 1.2。正如引言中所述，这一结果基于适当的缩放变换，以及适用于一类一般线性退化方程的 Hopf 型引理。因此，我们首先在第一个小节中建立一个 Hopf 型引理，然后在第二个小节中给出定理 1.2 的证明。Hopf 型引理本身也具有独立的研究价值，并将在下一节中用于证明温度的一致正性。

4.1. Hopf 型引理。

由于本小节中的结果适用于任意维数，我们采用以下记号。分别用 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 t表示空间变量和时间变量，并用 $P=(x,t)$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个点。对于$P_0=(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$ 和 $r>0$，记

$$\mathcal{B}_r(P_0):=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\middle||x-x_0|^2+(t-t_0)^2<r^2\right\}.$$

设 $(a_{ij})_{n\times n},a_0,b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 和 c 为给定函数，满足稍后将具体说明的适当性质。考虑算子

$$\mathscr{L}\varphi=-a_{ij}\partial_{ij}\varphi+a_0\partial_t\varphi+b\cdot\nabla\varphi+c\varphi.$$

注意，此处不要求 a_0 具有固定符号，并且这个线性算子只能视为关于空间变量和时间变量的线性退化椭圆算子，其退化发生在时间方向。

引理 4.1. 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$中的一个区域。假设 a_{ij}、a_0、b和 c 是 $\mathcal{O}$ 中的有限值函数，且 $c \geq 0$，矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 在$\mathcal{O}$中半正定。那么，对于任意满足以下条件的 $\varphi \in C^{2,1}(\mathcal{O}) \cap C(\overline{\mathcal{O}})$,

$$\mathscr{L}\varphi > 0 \ in \ \mathcal{O}, \quad and \quad \varphi|_{\partial\mathcal{O}} \geq 0,$$

有 $\varphi > 0$ 属于 $\mathcal{O}$。这里， $C^{2,1}(\mathcal{O})$表示所有满足f、$\partial_t f$、∇f、$\nabla^2 f \in C(\mathcal{O})$的函数 f 所构成的空间。

证明。首先，我们断言 $\varphi \geq 0$ 属于 $\mathcal{O}$。否则，由于 $\varphi \geq 0$ 在 $\partial\mathcal{O}$ 上且 $\varphi \in C(\overline{\mathcal{O}})$，存在 $P_0 \in \mathcal{O}$，使得 $\varphi(P_0) = \min_{\overline{\mathcal{O}}}\varphi < 0.$。由于 $\varphi \in C^{2,1}(\mathcal{O})$，显然$\partial_t\varphi(P_0) = \nabla\varphi(P_0) = 0$，并且 $\nabla^2\varphi(P_0)$是半正定的。因此

$$(\mathscr{L}\varphi)(P_0) = -a_{ij}(P_0)\partial_{ij}\varphi(P_0) + c(P_0)\varphi(P_0) \leq 0,$$

这与假设矛盾。因此，该断言成立。接下来，我们证明 $\varphi > 0$ 属于 $\mathcal{O}$。否则，存在 $P_0^* \in \mathcal{O}$，使得 $\varphi(P_0^*) = 0$。于是， $\varphi(P_0^*) = \min_{\overline{\mathcal{O}}}\varphi = 0$，由此与前面类似，可得 $(\mathscr{L}\varphi)(P_0^*) \leq 0$，这与假设矛盾。因此， $\varphi > 0$ 属于 $\mathcal{O}$，结论得证。□

引理 4.2（Hopf 型引理）。给定 $P_0 = (x_0, t_0)$、$r > 0$、$P_* = (x_*, t_*) \in \partial\mathcal{B}_r(P_0)$、$x_* \neq x_0$，并令 $P_0^* = (x_0^*, t_0^*)$，其中 $x_0^* = \frac{x_0+x_*}{2}$ 和 $t_0^* = \frac{t_0+t_*}{2}$。假设存在正常数 λ、Λ、δ_*和 C_*，满足 $\delta_* < \frac{|x_0-x_*|}{4}$，使得

$$\begin{cases} \lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \\ (t-t_0^*)a_0(x,t) + (x-x_0^*)\cdot b(x,t) \geq -C_*, \qquad \forall (x,t) \in \mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(P_0^*) \cap \mathcal{B}_{\delta_*}(P_*). \\ 0 \leq c(x,t)\sqrt{|x-x_*|^2 + (t-t_*)^2} \leq C_*, \end{cases}$$

令 $\varphi \in C^{2,1}(\mathcal{B}_r(P_0)) \cap C(\overline{\mathcal{B}_r}(P_0))$ 满足

$$\mathscr{L}\varphi \geq 0, \quad \varphi > \varphi(P_*), \quad in \ \mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(P_0^*) \cap \mathcal{B}_{\delta_*}(P_*), \quad \varphi(P_*) \leq 0.$$

则有

$$\overline{\lim_{\ell\to 0^+}} \frac{\varphi(P_*) - \varphi(P_* - \ell n_*)}{\ell} < 0,$$

其中，$n_* = \frac{P_*-P_0}{r}$是 $\partial\mathcal{B}_r(P_0)$ 在 P_*处的单位外法向量。

证明。令

$$\mathscr{D} = \mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(P_0^*) \cap \mathcal{B}_{\delta_*}(P_*).$$

只需考虑 $\varphi(P_*) = 0$ 的情形。否则，可考虑 $\Phi := \varphi - \varphi(P_*)$，由于以下事实，这可归结为所考虑的情形:

$$\mathscr{L}\Phi = \mathscr{L}\varphi - \mathscr{L}(\varphi(P_*)) = \mathscr{L}\varphi - c\varphi(P_*) \geq \mathscr{L}\varphi \geq 0 \quad \text{in } \mathscr{D},$$

当 $\varphi(P_*) \le 0$且 $c \ge 0$属于 $\mathscr{D}$ 时。显然， $\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(P_0^*) \subset \mathcal{B}_r(P_0)$。根据假设，有

$$\varphi(P) > \varphi(P_*) = 0, \quad \forall P \in \overline{\mathscr{D}} \setminus \{P_*\}. \tag{4.1}$$

定义

$$\phi(x,t) = e^{-\zeta(|x-x_0^*|^2+(t-t_0^*)^2)} - e^{-\frac{r^2}{4}\zeta} = e^{-\zeta|P-P_0^*|^2} - e^{-\frac{r^2}{4}\zeta},$$

其中 $\zeta > 0$ 是一个待确定的常数。由直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\phi = &- e^{-\zeta|P-P_0^*|^2}\Big[4(x-x_0^*)^T A(x-x_0^*)\zeta^2 - 2trA\zeta \\ &+ 2((t-t_0^*)a_0 + (x-x_0^*)\cdot b)\zeta + c\left(e^{\zeta(|P-P_0^*|^2-\frac{r^2}{4})} - 1\right)\Big],\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 且 $trA = a_{ii}$。注意，假设蕴含

$$\begin{aligned}&4(x-x_0^*)^T A(x-x_0^*)\zeta^2 - 2trA\zeta + 2((t-t_0^*)a_0 + (x-x_0^*)\cdot b)\zeta \\ \ge &4\lambda|x-x_0^*|^2\zeta^2 - 2n\Lambda\zeta - 2C_*\zeta \ge \frac{\lambda}{4}|x_0-x_*|^2\zeta^2 - (2n\Lambda + 2C_*)\zeta,\end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $trA \le n\Lambda$ 和，对于任意 $(x,t) \in \mathscr{D}$,

$$|x-x_0^*| \ge |x_0^*-x_*| - |x_*-x| \ge \frac{|x_0-x_*|}{2} - \delta_* \ge \frac{|x_0-x_*|}{4}, \quad \forall (x,t) \in \mathscr{D}.$$

注意，对任意 $P \in \mathscr{D}$，均有 $|P-P_0^*| < \frac{r}{2}$。由中值定理和三角不等式可得

$$\begin{aligned}&\left|e^{\zeta(|P-P_0^*|^2-\frac{r^2}{4})} - 1\right| = e^{\tau\zeta(|P-P_0^*|^2-\frac{r^2}{4})}\left||P-P_0^*|^2 - \frac{r^2}{4}\right|\zeta \\ \le &\left||P-P_0^*| - \frac{r}{2}\right|\left||P-P_0^*| + \frac{r}{2}\right|\zeta \le r\zeta\big||P-P_0^*| - |P_0^*-P_*|\big| \le r\zeta|P-P_*|,\end{aligned}$$

for 任意 $P \in \mathscr{D}$，其中 $\tau \in (0,1)$。结合这些假设，可得

$$\left|c\left(e^{\zeta(|P-P_0^*|^2-\frac{r^2}{4})} - 1\right)\right| \le cr|P-P_*|\zeta \le C_* r\zeta, \quad \forall P \in \mathscr{D}. \tag{4.4}$$

将 (4.3) 与 (4.4) 结合，可得

$$\begin{aligned}&4(x-x_0^*)^T A(x-x_0^*)\zeta^2 - 2trA\zeta \\ &+2((t-t_0^*)a_0 + (x-x_0^*)\cdot b)\zeta + c\left(e^{\zeta(|P-P_0^*|^2-\frac{r^2}{4})} - 1\right) \\ \ge &\frac{\lambda}{4}|x_0-x_*|^2\zeta^2 - (2n\Lambda + 2C_* + rC_*)\zeta > 0, \quad \forall P \in \mathscr{D},\end{aligned} \tag{4.5}$$

若 $\zeta > \zeta_0 := \frac{8n\Lambda+8c_*+4rC_*}{\lambda|x_0-x_*|^2}$。取 $\zeta = 2\zeta_0$。则由（4.2）和（4.5）可得

$$\mathscr{L}\phi < 0 \quad \text{in } \mathscr{D}. \tag{4.6}$$

由（4.1）可得

$$\varphi \geq 0 = \phi \text{ on } \partial\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(P_0^*) \cap \mathcal{B}_{\delta_*}(P_*), \quad \inf_{\partial\mathcal{B}_{\delta_*}(P_*)\cap\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(P_0^*)} \varphi > 0.$$

因此，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，由假设和 (4.6) 可得

$$\mathscr{L}\varphi \geq 0 > \mathscr{L}(\varepsilon\phi) \text{ in } \mathscr{D}, \quad \varphi \geq \varepsilon\phi \text{ on } \partial\mathscr{D},$$

从而

$$\mathscr{L}(\varphi - \varepsilon\phi) > 0 \text{ in } \mathscr{D}, \quad \varphi - \varepsilon\phi \geq 0 \text{ on } \partial\mathscr{D}.$$

借助这一结果，注意到 $\varphi - \varepsilon\phi \in C^{2,\,1}(\mathscr{D}) \cap C(\overline{\mathscr{D}})$，并应用引理 4.1，可得

$$\varphi > \varepsilon\phi \quad \text{ in } \mathscr{D}.$$

因此，当 $\ell > 0$ 充分小时，有

$$\varphi(P_*) - \varphi(P_* - \ell n_*) = -\varphi(P_* - \ell n_*) < -\varepsilon\phi(P_* - \ell n_*) = \varepsilon(\phi(P_*) - \phi(P_* - \ell n_*))$$

从而

$$\begin{aligned} \varlimsup_{\ell\to 0^+} \frac{\varphi(P_*) - \varphi(P_* - \ell n_*)}{\ell} &\leq \varepsilon \varlimsup_{\ell\to 0^+} \frac{\phi(P_*) - \phi(P_* - \ell n_*)}{\ell} \\ &= \varepsilon\partial_{n_*}\phi(P_*) = -\varepsilon\zeta r e^{-\frac{r^2}{4}\zeta} < 0. \end{aligned}$$

这就证明了结论。 □

由引理 4.2 可直接推出以下推论。

推论 4.1. 给定 $P_0 = (x_0, t_0)$, $r > 0$, $P_* = (x_*, t_*) \in \partial\mathcal{B}_r(P_0)$, $x_* \neq x_0$。假设 a_0, b, $c \in L^\infty(\mathcal{B}_r(P_0))$, $c \geq 0$ 属于 $\mathcal{B}_r(P_0)$, 且

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, (x,t) \in \mathcal{B}_r(P_0),$$

对某些正常数 λ 和 Λ。令 $\varphi \in C^{2,1}(\mathcal{B}_r(P_0)) \cap C(\overline{\mathcal{B}_r}(P_0))$ 满足

$$\mathscr{L}\varphi \geq 0, \quad \varphi > \varphi(P_*), \quad \text{in } \mathcal{B}_r(P_0), \quad \varphi(P_*) \leq 0.$$

那么，有

$$\varlimsup_{\ell\to 0^+} \frac{\varphi(P_*) - \varphi(P_* - \ell n_*)}{\ell} < 0,$$

其中 $n_* = \frac{P_* - P_0}{r}$ 是 $\partial\mathcal{B}_r(P_0)$ 在 P_* 处的单位外法向量。

4.2. 熵的无界性。本小节旨在证明定理 1.2。我们先给出以下嵌入引理，用于验证定理 1.2 的证明所需的 J_y 的 H¨older 正则性。

引理 4.3. 设 $L > 0$ 为一个正数。则以下嵌入不等式成立

$$\|f\|_{C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}([-L,L]\times[0,T])} \le C(\|f\|_{L^\infty(0,T;H^1((-L,L)))} + \|\partial_t f\|_{L^2(0,T;L^2((-L,L)))}),$$

对于任意满足 $\partial_t f \in L^2(0,T;\ L^2((-L,L)))$ 的函数 $f \in L^\infty(0,T;\ H^1((-L,L)))$，其中 C 为一个绝对正数。

证明. 对任意 t、$\tau \in [0,T]$，由引理 2.1、闵可夫斯基不等式、H¨older 不等式和柯西不等式可得

$$\begin{aligned}
&\|f(\cdot,t) - f(\cdot,\tau)\|_{L^\infty((-L,L))} \\
\le\ & C\|f(\cdot,t) - f(\cdot,\tau)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2((-L,L))}\|f(\cdot,t) - f(\cdot,\tau)\|^{\frac{1}{2}}_{H^1((-L,L))} \\
\le\ & C\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;H^1((-L,L)))}\left\|\int_\tau^t \partial_t f(\cdot,s)ds\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2((-L,L))} \\
\le\ & C\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;H^1((-L,L)))}\left(\int_\tau^t \|\partial_t f\|_{L^2((-L,L))}ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
\le\ & C(\|f\|_{L^\infty(0,T;H^1((-L,L)))} + \|\partial_t f\|_{L^2(0,T;L^2((-L,L)))})|t-\tau|^{\frac{1}{4}},
\end{aligned}$$

其中 C 为一个绝对正数。对任意 x、$y \in [-L,L]$ 和 $t \in [0,T]$，由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
&|f(x,t) - f(y,t)| \le \left|\int_x^y \partial_x f(z,t)dz\right| \\
\le\ & \left|\int_{-L}^L |\partial_x f|^2 dx\right|^{\frac{1}{2}}|y-x|^{\frac{1}{2}} \le \|f\|_{L^\infty(0,T;H^1((-L,L)))}|y-x|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

因此，对任意 x、$y \in [-L,L]$ 和 t、$\tau \in [0,T]$，有

$$\begin{aligned}
&|f(x,t) - f(y,\tau)| \le |f(x,t) - f(y,t)| + |f(y,t) - f(y,\tau)| \\
\le\ & C(\|f\|_{L^\infty(0,T;H^1((-L,L)))} + \|\partial_t f\|_{L^2(0,T;L^2((-L,L)))})(|t-\tau|^{\frac{1}{4}} + |y-x|^{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

由此得出结论。 □

现在我们可以证明定理 1.2 了。

定理 1.2 的证明。证明分为以下五个步骤。

步骤1. ϑ的正则性和逐点正性。对于 $L > 0$，记$W^{2,\ 1\,2}((-L,L)\times(0,T))$为满足以下条件的所有函数 $f \in L^2(0,T;\ H^2((-L,L)))$所构成的空间：

$\partial_t f \in L^2(0,T;\ L^2((-L,L)))$。回顾嵌入关系： $W^{2,\ 1\,2}([-L,L]\times(0,T)) \hookrightarrow C^{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}}([-L,L]\times[0,T])$（ [55]中的定理4.1）。注意,

$$(v_y,\vartheta_y)\in W_2^{2,1}((-L,L)\times(0,T)),\quad J,J_y\in L^\infty(0,T;H^1((-L,L))),$$

以及 $J_t, J_{yt}\in L^\infty(0,T;\ L^2((-L,L)))$。因此，由索伯列夫嵌入和引理 4.3 可得

$$(J,J_y,v_y,\vartheta_y)\in C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}([-L,L]\times[0,T]),\quad \forall L>0. \tag{4.7}$$

将 (1.13) 改写为

$$c_v\varrho_0\vartheta_t-\frac{\kappa}{J}\vartheta_{yy}+\kappa\frac{J_y}{J^2}\vartheta_y+R\varrho_0\frac{v_y}{J}\vartheta=\frac{\mu}{J}|v_y|^2. \tag{4.8}$$

由于 J在 $\mathbb{R}\times(0,T)$ 上一致为正，可以验证 (4.8) 中的所有系数，即 $\varrho_0, \frac{1}{J}, \frac{J_y}{J^2}, \varrho_0\frac{v_y}{J}$ 和 $\frac{|v_y|^2}{J}$，均属于 $C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}([-L,L]\times[0,T])$。鉴于此以及对所有 $y\in\mathbb{R}$ 均有 $\varrho_0(y)>0$ 这一事实，由一致抛物方程内部正则性的经典 Schauder 理论可得 $\vartheta\in C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}((-L,L)\times(0,T))$。另一方面，由嵌入定理，根据 ϑ的正则性可得 $\vartheta\in C([-L,L]\times[0,T])$。因此，有

$$\vartheta\in C^{2,1}((-L,L)\times(0,T))\cap C([-L,L]\times[0,T]).$$

注意到 $\vartheta\not\equiv 0$在 $\mathbb{R}\times(0,T)$上。否则，注意到对于任意 $L>0$， $\vartheta\in C([0,T];\ L^2(-L,L))$，可得 $\vartheta_0\equiv 0$；此外，由 (1.13) 可知，对于任意 $L>0$， $v_y\equiv 0$在 $\mathbb{R}\times(0,T)$上，而由此可得 $v\in C([0,T];\ L^2((-L,L)))$，故有$v_0\equiv$ 常数。这与假设矛盾。因此， $\vartheta\not\equiv 0$在$\mathbb{R}\times(0,T)$上，且 $\vartheta\geq 0$。由此并根据强极大值原理，可得

$$0<\vartheta\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,T))\cap C(\mathbb{R}\times[0,T]). \tag{4.9}$$

步骤 2. J_y的渐近行为。注意到

$$J_{yt}=\frac{1}{\mu}(GJ_y+JG_y+R\varrho_0'\vartheta+R\varrho_0\vartheta_y)$$

这意味着

$$J_y=\frac{1}{\mu}\int_0^t e^{\frac{1}{\mu}\int_s^t G d\tau}(JG_y+R\varrho_0'\vartheta+R\varrho_0\vartheta_y)ds.$$

因此

$$\left|\frac{J_y(y,t)}{\varrho_0(y)}\right|\leq\frac{1}{\mu}e^{\frac{1}{\mu}\int_0^t\|G\|_\infty d\tau}\int_0^t\left(J\left|\frac{G_y}{\varrho_0}\right|+R\left|\frac{\varrho_0'}{\varrho_0}\right|\vartheta+R|\vartheta_y|\right)ds. \tag{4.10}$$

对于任意 $y\geq 0$，可得

$$\left|\frac{G_y(y,t)}{\varrho_0(y)}\right| \;=\; \left|\int_0^1\frac{G_y}{\varrho_0}dz+\int_0^1\int_z^y\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y(z',t)dz'dz\right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 \left|\frac{G_y}{\varrho_0}\right| dz + \int_0^{y+1} \left|\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right| dz \\ &\leq \left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2 (t) + \sqrt{y+1}\left\|\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right\|_2 (t) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \vartheta(y,t) &= \int_0^1 \vartheta(z,t)dz + \int_0^1 \int_z^y \vartheta_y(z',t)dz'dz \\ &\leq \int_0^1 \frac{\sqrt{\varrho_0}\vartheta}{\sqrt{\varrho_0}}dz + \int_0^{y+1} |\vartheta_y|dz \leq \frac{\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2(t)}{\sqrt{\delta_0}} + \sqrt{y+1}\|\vartheta_y\|_2(t), \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $\delta_0 := \inf_{[-1,1]} \varrho_0 > 0$. 对于 $y < 0$ 也有类似的估计，因此对于任意满足以下条件的 $y \in \mathbb{R}$，均有

$$\left|\frac{G_y(y,t)}{\varrho_0(y)}\right| \leq \left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2 (t) + \sqrt{|y|+1}\left\|\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right\|_2 (t) \tag{4.12}$$

and

$$\vartheta(y,t) \leq \frac{\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2(t)}{\sqrt{\delta_0}} + \sqrt{|y|+1}\|\vartheta_y\|_2(t). \tag{4.13}$$

将 (4.12)–(4.13) 代入 (4.10)，并利用 (H1)，通过 H¨older 不等式和 Sobolev 不等式可得

$$\begin{aligned} \left|\frac{J_y(y,t)}{\varrho_0(y)}\right| &\leq Ce^{C\int_0^t \|G\|_\infty ds} \int_0^t \left(\left\|\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}\right\|_2 + \sqrt{|y|+1}\left\|\left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right\|_2 \right) ds \\ &\quad + Ce^{C\int_0^t \|G\|_\infty ds} \int_0^t \left(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_2 + \|\vartheta_y\|_2\sqrt{|y|+1} + \|\vartheta_y\|_{H^1} \right) ds \\ &\leq C\sqrt{t}\sqrt{|y|+1}\left[\int_0^t \left(\left\|\left(\frac{G_y}{\sqrt{\varrho_0}}, \left(\frac{G_y}{\varrho_0}\right)_y\right)\right\|_2^2 + \|\vartheta_y\|_{H^1}^2 \right) ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + Ct\sqrt{|y|+1}\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \\ &\leq C_1\sqrt{|y|+1}, \end{aligned}$$

即,

$$\left|\frac{J_y(y,t)}{\varrho_0(y)}\right| \leq C_1\sqrt{|y|+1}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, t \in [0,T], \tag{4.14}$$

其中用到了 (ϑ, G) 的正则性。

步骤 3。缩放变换。设 $T > 0$ 为任意给定的常数。反设 $s \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))$。由于 $\vartheta = \frac{A}{R}e^{\frac{s}{c_v}}\left(\frac{\varrho_0}{J}\right)^{\gamma-1}$ 和 J 具有

一致的正下界和上界，因此可得

$$0 \le \vartheta(y,t) \le C_T \varrho_0^{\gamma-1}(y), \quad \forall (y,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]. \tag{4.15}$$

令 $\beta > 0$，其取值稍后确定，并引入如下缩放变换

$$f(y,t) := \vartheta(y^{-\beta},t), \quad y \in (0,\infty), t \ge 0.$$

则通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\vartheta(y,t) = f(y^{-\frac{1}{\beta}},t),\\
&\vartheta_t(y,t) = f_t(y^{-\frac{1}{\beta}},t), \quad \vartheta_y(y,t) = -\frac{1}{\beta} y^{-(1+\frac{1}{\beta})} f_y(y^{-\frac{1}{\beta}},t),\\
&\vartheta_{yy}(y,t) = \frac{1}{\beta^2} y^{-(2+\frac{2}{\beta})} f_{yy}(y^{-\frac{1}{\beta}},t) + \frac{\beta+1}{\beta^2} y^{-(2+\frac{1}{\beta})} f_y(y^{-\frac{1}{\beta}},t),
\end{aligned}$$

对于任意 $(y,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$。此外，由 (4.8) 可推出

$$\begin{aligned}
&c_v \varrho_0(y^{-\beta}) y^{-(2+2\beta)} J(y^{-\beta},t) f_t(y,t) - \frac{\kappa}{\beta^2} f_{yy}(y,t)\\
&- \left(\frac{\kappa(\beta+1)}{\beta^2} y^{-1} + \frac{\kappa}{\beta} y^{-(1+\beta)} \frac{J_y(y^{-\beta},t)}{J(y^{-\beta},t)} \right) f_y(y,t)\\
&+ R\varrho_0(y^{-\beta}) y^{-(2\beta+2)} v_y(y^{-\beta},t) f(y,t) \ge 0,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

对于所有 $(y,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$。

步骤 4. 验证 Hopf 型引理的条件。令 M_T 为正数，其取值稍后确定，并定义

$$F(y,t) = e^{-M_T t} f(y,t), \quad y \in (0,\infty), t \in [0,\infty).$$

由 (4.9) 可知

$$0 < F \in C^{2,1}((0,\infty) \times (0,\infty)) \cap C((0,\infty) \times [0,\infty)).$$

此外，由 (4.15) 和 (H2) 可得

$$\begin{aligned}
F(y,t) &= e^{-M_T t} \vartheta(y^{-\beta},t) \le C_T e^{-M_T t} \varrho_0^{\gamma-1}(y^{-\beta})\\
&\le C_T K_2^{\gamma-1} e^{-M_T t} (1+y^{-\beta})^{-(\gamma-1)\ell_\rho} \le C_T K_2^{\gamma-1} e^{-M_T t} y^{(\gamma-1)\beta\ell_\rho},
\end{aligned}$$

对于一个 $y \in (0,\infty)$ 和 $t \in [0,\infty)$。因此，可以定义 $F(0,t) = 0$ for $t \in [0,\infty)$，使得 F 在 $[0,\infty) \times [0,\infty)$ 上有定义，并满足

$$\begin{cases} F \in C^{2,1}((0,\infty) \times (0,\infty)) \cap C([0,\infty) \times [0,\infty)), \\ F > 0 \text{ in } (0,\infty) \times (0,\infty), \quad F(0,t) = 0, \quad \forall t \in [0,\infty). \end{cases} \tag{4.17}$$

由 (4.16) 可得

$$a_0(y,t) F_t(y,t) - a F_{yy}(y,t) + b(y,t) F_y(y,t) + c(y,t) F(y,t) \ge 0, \tag{4.18}$$

在 $(0,\infty) \times (0,\infty)$ 中，其中

$$a_0(y,t) = c_v \varrho_0(y^{-\beta}) y^{-(2+2\beta)} J(y^{-\beta},t), \qquad a = \frac{\kappa}{\beta^2},$$

$$\begin{aligned} b(y,t) &= -\left(\frac{\kappa(\beta+1)}{\beta^2}y^{-1}+\frac{\kappa}{\beta}y^{-(1+\beta)}\frac{J_y(y^{-\beta},t)}{J(y^{-\beta},t)}\right), \\ c(y,t) &= \varrho_0(y^{-\beta})y^{-(2+2\beta)}\Big(c_vM_TJ(y^{-\beta},t)+Rv_y(y^{-\beta},t)\Big). \end{aligned}$$

任取 $t_0\in(0,T)$、 $0<y_0<\min\{\frac{1}{2},t_0\}$, 并令

$$P_0=(y_0,t_0),\quad r=y_0,\quad P_*=(0,t_0)=:(y_*,t_*),\quad \delta_*=\frac{y_0}{8},$$
$$P_0^*=\left(\frac{y_0}{2},t_0\right)=:(y_0^*,t_0^*),\quad \mathscr{D}=\mathcal{B}_{\delta_*}(P_*)\cap\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(P_0^*).$$

那么,

$$P_*\in\partial\mathcal{B}_r(P_0),\quad \mathscr{D}=\mathcal{B}_{\frac{y_0}{8}}((0,t_0))\cap\mathcal{B}_{\frac{y_0}{2}}((\tfrac{y_0}{2},t_0)).$$

对于任意的 $(y,t)\in\mathscr{D}$, 由于 $0<y<\frac{y_0}{8}<\frac{1}{16}$和 $\frac{t_0}{2}<t<\frac{3}{2}t_0$, 可推出

$$\begin{aligned} &(t-t_0^*)a_0(y,t)+(y-y_0^*)b(y,t)\\ =\;& c_v(t-t_0)\varrho_0(y^{-\beta})y^{-(2+2\beta)}J(y^{-\beta},t)\\ &-\left(y-\frac{y_0}{2}\right)\left(\frac{\kappa(\beta+1)}{\beta^2}y^{-1}+\frac{\kappa}{\beta}y^{-(1+\beta)}\frac{J_y(y^{-\beta},t)}{J(y^{-\beta},t)}\right)\\ \geq\;& -c_vt_0\varrho_0(y^{-\beta})y^{-(2+2\beta)}J(y^{-\beta},t)-\frac{\kappa y_0}{2\beta}y^{-(1+\beta)}\frac{|J_y(y^{-\beta},t)|}{J(y^{-\beta},t)}\\ \geq\;& -c_vt_0\overline{j}_T\varrho_0(y^{-\beta})y^{-(2+2\beta)}-\frac{\kappa}{\underline{j}_T\beta}y^{-(1+\beta)}|J_y(y^{-\beta},t)|, \end{aligned}\tag{4.19}$$

其中

$$\overline{j}_T:=\sup_{(y,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]}J(y,t),\quad \underline{j}_T:=\inf_{(y,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]}J(y,t).\tag{4.20}$$

令 $M_T:=\frac{R\|v_y\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))}}{c_v\underline{j}_T}$.那么,

$$c_vM_TJ(y^{-\beta},t)+Rv_y(y^{-\beta},t)\geq c_vM_T\underline{j}_T-R\|v_y\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))}=0$$

and

$$\begin{aligned} c_vM_TJ(y^{-\beta},t)+Rv_y(y^{-\beta},t) &\leq c_vM_T\overline{j}_T+R\|v_y\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))}\\ &= c_vM_T(\overline{j}_T+\underline{j}_T). \end{aligned}$$

Th对于任意的 $(y,t)\in\mathscr{D}$, 由于 $\sqrt{|y-y_*|^2+|t-t_*|^2}\leq\delta_*\leq\frac{1}{16}$, 有

$$0\leq c(y,t)\sqrt{|y-y_*|^2+|t-t_*|^2}\leq c_vM_T(\overline{j}_T+\underline{j}_T)\varrho_0(y^{-\beta})y^{-(2+2\beta)}.\tag{4.21}$$

对于任意的 $(y,t)\in\mathscr{D}$, 由于 $0<y<1$, 由 (4.14) 和 (H2) 可得 t

$$\varrho_0(y^{-\beta})y^{-(2+2\beta)}\leq K_2(1+y^{-\beta})^{-\ell_\rho}y^{-(2+2\beta)}\leq K_2y^{(\ell_\rho-2)\beta-2}\leq K_2\tag{4.22}$$

and

$$y^{-(1+\beta)}|J_y(y^{-\beta},t)|\;\leq\; C_1y^{-(1+\beta)}\varrho_0(y^{-\beta})\sqrt{1+y^{-\beta}}\leq C_1K_2y^{-(1+\beta)}(1+y^{-\beta})^{-\ell_\rho+\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1 K_2 y^{(\ell_\rho-\frac{3}{2})\beta-1} \leq C_1 K_2, \tag{4.23}$$

只要 $\beta \geq \max\left\{\frac{2}{\ell_\rho-2}, \frac{2}{2\ell_\rho-3}\right\} = \frac{2}{\ell_\rho-2}$.

由 (4.22) 和 (4.23)，根据 (4.19) 和 (4.21) 可得

$$(t-t_0^*)a_0(y,t) + (y-y_0^*)b(y,t) \geq -(C_1+1)K_2\left(c_v t_0 \overline{j}_T + \frac{\kappa}{\underline{j}_T{}^\beta}\right), \tag{4.24}$$

$$0 \leq c(y,t)\sqrt{|y-y_*|^2+|t-t_*|^2} \leq c_v M_T(\overline{j}_T + \underline{j}_T)K_2, \tag{4.25}$$

对于任意 $(y,t) \in \mathscr{D}$，只要 $\beta \geq \frac{2}{\ell_\rho-2}$.

步骤 5. 熵的无界性。取

$$\beta = \beta_0 := \max\left\{\frac{2}{(\gamma-1)\ell_\rho}, \frac{2}{\ell_\rho-2}\right\}.$$

由 (4.17)、(4.18)、(4.24) 和 (4.25)，根据引理 4.2 可得

$$\overline{\lim_{\ell\to 0^+}} \frac{F(P_*)-F(P_*-n_*\ell)}{\ell} = -\underline{\lim_{\ell\to 0^+}} \frac{F(P_*-n_*\ell)}{\ell} = -2\varepsilon_2,$$

对于某个正数 ε_2，其中回顾 $P_* = (0,t_0)$、$n_* = \frac{P_*-P_0}{r} = (-1,0)$，因此 $P_* - n_*\ell = (\ell, t_0)$。于是，存在一个正数 ℓ_0，使得

$$F(y,t_0) = e^{-M_T t_0}\vartheta(y^{-\beta_0},t_0) \geq \varepsilon_2 y, \quad \forall y \in (0,\ell_0),$$

也就是说

$$\vartheta(y,t_0) \geq \varepsilon_2 e^{M_T t_0} y^{-\frac{1}{\beta_0}}, \quad \forall y \in \left(\ell_0^{-\frac{1}{\beta_0}}, \infty\right).$$

另一方面，由 (4.15) 和 (H2) 可得

$$\vartheta(y,t) \leq C_T K_2^{\gamma-1}(1+y)^{-\ell_\rho(\gamma-1)} \leq C_T K_2^{\gamma-1} y^{-\ell_\rho(\gamma-1)}, \quad \forall y > 0.$$

结合前两个不等式可得

$$y^{(\gamma-1)\ell_\rho-\frac{1}{\beta_0}} \leq C_T K_2^{\gamma-1}\varepsilon_2^{-1} e^{-M_T t_0}, \quad \forall y \in (\ell_0^{-\frac{1}{\beta_0}}, \infty),$$

当 $y \to \infty$ 时，这是不可能的，因为 $(\gamma-1)\ell_\rho - \frac{1}{\beta_0} \geq \frac{\gamma-1}{2}\ell_\rho > 0$。这一矛盾得出所需结论：$s \notin L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$。□

5. Uniform positivity of ϑ and asymptotic unboundedness of s

本小节中，在初始密度于远场的衰减速度不慢于 $O(\frac{1}{x^4})$ 的条件下，我们证明温度的一致正性和熵的渐近无界性，从而完成定理 1.3 的证明。

定理 1.3 的证明。我们只需证明 (i)，而结论 (ii) 可由 (i)、(1.10) 和 (4.13) 得出，因为 J 在每个时刻 $t \in (0,\infty)$ 都有一致的正下界和上界。

令 h 为 ϑ 的 Kelvin 变换，定义为

$$h(y,t) = y\vartheta\left(\frac{1}{y},t\right), \quad \forall y \neq 0, t \in [0,T]. \tag{5.1}$$

于是，(4.9) 推出

$$h \in C^{2,1}((\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-) \times (0,T)) \cap C((\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-) \times [0,T]). \tag{5.2}$$

注意，

$$\vartheta(y,t) = yh\left(\frac{1}{y},t\right), \quad \vartheta_t(y,t) = yh_t\left(\frac{1}{y},t\right),$$
$$\vartheta_y(y,t) = h\left(\frac{1}{y},t\right) - \frac{1}{y}h_y\left(\frac{1}{y},t\right), \quad \vartheta_{yy}(y,t) = \frac{1}{y^3}h_{yy}\left(\frac{1}{y},t\right),$$

对于任意 $y \neq 0$ 和 $t \in (0,T)$。由这些结果及 (4.8) 可得

$$c_v\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^4}h_t(y,t) - \frac{\kappa}{J\left(\frac{1}{y},t\right)}h_{yy}(y,t) - \kappa\frac{J_y\left(\frac{1}{y},t\right)}{J^2\left(\frac{1}{y},t\right)}\frac{1}{y^2}h_y(y,t)$$
$$+\left(R\frac{v_y\left(\frac{1}{y},t\right)}{J\left(\frac{1}{y},t\right)}\frac{\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)}{y^4} + \kappa\frac{J_y\left(\frac{1}{y},t\right)}{J^2\left(\frac{1}{y},t\right)}\frac{1}{y^3}\right)h(y,t) = \mu\frac{\left|v_y\left(\frac{1}{y},t\right)\right|^2}{y^3J\left(\frac{1}{y},t\right)},$$

对于 $y \neq 0$。定义 a_0、a、b 和 $\tilde{c}$ 如下

$$a_0 := c_v\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^4}, \quad a := \frac{\kappa}{J\left(\frac{1}{y},t\right)}, \quad b := -\kappa\frac{J_y\left(\frac{1}{y},t\right)}{J^2\left(\frac{1}{y},t\right)}\frac{1}{y^2},$$
$$\tilde{c} := R\frac{v_y\left(\frac{1}{y},t\right)}{J\left(\frac{1}{y},t\right)}\frac{\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)}{y^4} + \kappa\frac{J_y\left(\frac{1}{y},t\right)}{J^2\left(\frac{1}{y},t\right)}\frac{1}{y^3}, \quad \forall y \neq 0, t \in [0,T].$$

那么，有

$$\begin{cases} a_0h_t - ah_{yy} + bh_y + \tilde{c}h \geq 0, & \text{in } Q_T^+, \\ a_0h_t - ah_{yy} + bh_y + \tilde{c}h \leq 0, & \text{in } Q_T^-, \end{cases} \tag{5.3}$$

其中

$$Q_T^+ := \mathbb{R}_+ \times (0,T), \quad Q_T^- := \mathbb{R}_- \times (0,T).$$

对 a_0、a、b 和 $\tilde{c}$ 的性质分析如下。由 (4.7) 以及 ϱ_0 和 J 的正则性可得

$$a_0 \in C(\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}_-), \quad a,b,\tilde{c} \in C(Q_T^+ \cup Q_T^-). \tag{5.4}$$

对于 a_0，由 (H3) 可得

$$0 \le a_0(y) \le \frac{c_v K_3}{(|y|+1)^4} \le c_v K_3, \quad \forall y \neq 0. \tag{5.5}$$

对于 a，有

$$\lambda_T \le a(y,t) \le \Lambda_T, \quad \forall y \neq 0, t \in [0,T], \tag{5.6}$$

其中 $\lambda_T = \frac{\kappa}{\overline{j}_T}$ 和 $\Lambda_T = \frac{\kappa}{\underline{j}_T}$，$\underline{j}_T$ 和 $\overline{j}_T$ 由 (4.20) 给出。

由 (4.14) 和 (H3) 可得

$$|J_y(y,t)| \le C_1 \varrho_0(y)\sqrt{|y|+1} \le C_1 K_3 (|y|+1)^{-\frac{7}{2}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, t \in [0,T]. \tag{5.7}$$

这意味着

$$|b(y,t)| \le \frac{\kappa}{\underline{j}_T^2}\frac{1}{y^2}\left|J_y\left(\frac{1}{y},t\right)\right| \le \frac{\kappa}{\underline{j}_T^2}\frac{1}{y^2} C_1 K_3 \left(\frac{1}{|y|}+1\right)^{-\frac{7}{2}} \le \frac{C_1 K_3 \kappa}{\underline{j}_T^2}, \tag{5.8}$$

对于任意 $y \neq 0$ 和 $t \in [0,T]$。由 (H3) 和 (5.7) 可推得

$$\begin{aligned} |\tilde{c}(y,t)| &\le \frac{R}{\underline{j}_T}\frac{1}{y^4}\frac{K_3}{\left(1+\frac{1}{|y|}\right)^4}\|v_y\|_\infty(t) + \frac{\kappa}{\underline{j}_T^2}\frac{1}{|y|^3} C_1 K_3 \left(1+\frac{1}{|y|}\right)^{-\frac{7}{2}} \\ &\le \frac{RK_3}{\underline{j}_T}\|v_y\|_\infty(t) + \frac{\kappa}{\underline{j}_T^2} C_1 K_3 \le C(\|v_y\|_{L^\infty(0,T;H^1)} + 1), \end{aligned} \tag{5.9}$$

对任意 $y \neq 0$ 和 $t \in [0,T]$。

Set

$$N_T = \frac{2}{c_v}\left(\frac{R}{\underline{j}_T}\|v_y\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))} + \frac{\sqrt{2}\kappa C_1}{\underline{j}_T^2}\right)$$

并定义

$$H(y,t) = e^{-N_T t} h(y,t), \quad \forall y \neq 0, t \in [0,T]. \tag{5.10}$$

由 (5.2) 可知,

$$H \in C^{2,1}((\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-) \times (0,T)) \cap C((\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-) \times [0,T]). \tag{5.11}$$

由于 $\vartheta > 0$，由 (5.1) 和 (5.10) 可得

$$H > 0 \text{ in } Q_T^+ \quad \text{and} \quad H < 0 \text{ in } Q_T^-. \tag{5.12}$$

由 (4.13) 并结合 h 和 H 的定义，可得

$$\begin{aligned} |H(y,t)| &\le |y|\vartheta\left(\frac{1}{y},t\right) \le C(\|\sqrt{\varrho_0}\vartheta\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\vartheta_y\|_{L^\infty(0,T;L^2)})|y|\sqrt{1+\frac{1}{|y|}} \\ &\le C\sqrt{y^2+|y|}, \quad \forall y \neq 0, t \in [0,T]. \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{(y,\tau)\to(0,t)} H(y,t)=0,\quad \forall t\in[0,T]. \tag{5.13}$$

由直接计算和 (5.3) 可得

$$\begin{cases} a_0H_t-aH_{yy}+bH_y+cH\geq 0, & \text{in } Q_T^+,\\ a_0H_t-aH_{yy}+bH_y+cH\leq 0, & \text{in } Q_T^-, \end{cases} \tag{5.14}$$

其中

$$\begin{aligned} c(y,t) &:= \tilde{c}(y,t)+N_Ta_0(y,t)\\ &= \left(c_vN_T+R\frac{v_y\left(\frac{1}{y},t\right)}{J\left(\frac{1}{y},t\right)}+\frac{\kappa}{J^2\left(\frac{1}{y},t\right)}\frac{J_y\left(\frac{1}{y},t\right)}{\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)}y\right)\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^4}. \end{aligned}$$

对于任意 $y\in[-1,0)\cap(0,1]$ 和 $t\in[0,T]$, 由 (4.14) 可得

$$\begin{aligned} c(y,t) &\geq \left(c_vN_T-\frac{R}{\underline{j}_T}\|v_y\|_\infty(t)-\frac{\kappa}{\underline{j}_T^2}|y|C_1\sqrt{1+\frac{1}{|y|}}\right)\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^4}\\ &= \left(c_vN_T-\frac{R}{\underline{j}_T}\|v_y\|_\infty(t)-\frac{\kappa}{\underline{j}_T^2}C_1\sqrt{|y|^2+|y|}\right)\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^4}\\ &\geq \left(c_vN_T-\frac{R}{\underline{j}_T}\|v_y\|_\infty(t)-\frac{\sqrt{2}\kappa C_1}{\underline{j}_T^2}\right)\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^4}\\ &\geq \left(\frac{R}{\underline{j}_T}\|v_y\|_\infty(t)+\frac{\sqrt{2}\kappa C_1}{\underline{j}_T^2}\right)\varrho_0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^4} \end{aligned}$$

因此

$$c(y,t)\geq 0,\quad \forall y\in[-1,0)\cup(0,1],t\in[0,T]. \tag{5.15}$$

定义

$$\widetilde{H}(y,t)=\begin{cases} H(y,t), & \text{if } y>0,\\ 0, & \text{if } y=0,\\ -H(y,t), & \text{if } y<0, \end{cases} \tag{5.16}$$

对所有 $t\in[0,T]$。记

$$\Omega_-:=(-1,0)\times(0,T),\quad \Omega_+:=(0,1)\times(0,T),$$
$$\Omega:=\Omega_+\cup\Omega_-,\quad \Gamma:=\{0\}\times[0,T].$$

于是, 由 (5.11)–(5.14) 可得

$$\widetilde{H}\in C^{2,1}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}),\quad \widetilde{H}>0 \text{ in } \Omega,\quad \widetilde{H}|_\Gamma=0, \tag{5.17}$$

$$\mathscr{L}\widetilde{H}=a_0\widetilde{H}_t-a\widetilde{H}_{yy}+b\widetilde{H}_y+c\widetilde{H}\geq 0\quad \text{in } \Omega, \tag{5.18}$$

其中 a_0、a、b 和 c 满足

$$\begin{cases} a_0 \in C((-1,1)\setminus\{0\}) \cap L^\infty((-1,1)\setminus\{0\}), \\ a, b, c \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \lambda_T \le a \le \Lambda_T, \quad c \ge 0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{5.19}$$

这由 (5.4)–(5.6)、(5.8)–(5.9) 和 (5.15) 得出。

对于任意的 $t_0 \in (0,T)$，令

$$P_* = (0,t_0), \quad P_0 = (y_0,t_0), \quad r = y_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, t_0, T-t_0\right\}.$$

于是，显然 $n_* := \frac{P_*-P_0}{r} = (-1,0)$。令 $\mathcal{B}_r$ 为半径为 r 且以 P_0 为中心的时空球。由 (5.17)、(5.18) 和 (5.19) 可知，显然 H 满足推论 4.1 中的所有条件，因此推论 4.1 得出

$$\overline{\lim_{\ell\to 0^+}} \frac{\widetilde{H}(P_*) - \widetilde{H}(P_* - \ell n_*)}{\ell} = \overline{\lim_{\ell\to 0^+}} \frac{-\widetilde{H}(\ell, t_0)}{\ell} = -2\varepsilon_0,$$

，其中 ε_0 为某个正数。因此，$\lim_{\ell\to 0^+} \frac{H(\ell,\ t_0)}{\ell} = 2\varepsilon_0$，这表明

$$\widetilde{H}(y,t_0) \ge \varepsilon_0 y, \quad \forall y \in (0,\ell_0), \tag{5.20}$$

，其中 ℓ_0 为某个正数。于是，根据 H 的定义，可得

$$\widetilde{H}(y,t_0) = e^{-N_T t_0} h(y,t_0) = e^{-N_T t_0} y \vartheta\left(\frac{1}{y}, t_0\right) \ge \varepsilon_0 y, \quad \forall y \in (0,\ell_0) \tag{5.21}$$

因此，

$$\vartheta(y,t_0) \ge \varepsilon_0 e^{N_T t_0} \ge \varepsilon_0, \quad \forall y \in \left(\frac{1}{\ell_0}, \infty\right). \tag{5.22}$$

类似地，存在正常数 ε_1 和 ℓ_1，使得

$$\vartheta(y,t_0) \ge \varepsilon_1, \quad \forall y \in \left(-\infty, -\frac{1}{\ell_1}\right).$$

Com将此与 (5.22) 结合，并回想 $0 < \vartheta \in C(\mathbb{R}\times[0,T])$，我们有 as

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \vartheta(y,t_0) = \min\left\{\varepsilon_0, \vartheta_1, \inf_{y\in\left[-\frac{1}{\ell_1}, \frac{1}{\ell_0}\right]} \vartheta(y,t_0)\right\} > 0.$$

This 由此得到所需结论，定理 1.3 的证明也就完成了。 □

Acknowledgments

本研究得到国家自然科学基金重点项目（项目编号：12131010）和广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2020B1515310002）的资助。J. L. 的研究还得到国家自然科学基金（项目编号：11971009 和 11871005）以及广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2019A1515011621 和 2020B1515310005）的资助。Z.X. 的研究还得到郑格如基金会和香港研究资助局优配研究金（项目编号：CUHK-14301421、CUHK-14300917、CUHK-14300819 和 CUHK-14302819）的资助。

References

[1]Bresch, D.；Jabin, P.-E.：可压缩纳维–斯托克斯方程弱解的整体存在性：热力学不稳定压力与各向异性黏性应力张量，《数学年刊》，第2辑，188（2018），第2期，577–684。[2] Chen, G.-Q.；Hoff, D.；Trivisa, K.：具有大不连续初始数据的可压缩纳维–斯托克斯方程的整体解，《偏微分方程通讯》，25（2000），2233–2257。[3] Chen, Q.；Miao, C.；Zhang, Z.：具有高度振荡初速度的可压缩纳维–斯托克斯方程的整体适定性，《纯粹与应用数学通讯》，63（2010），1173–1224。[4]Chikami, N.；Danchin, R.：关于临界贝索夫空间中全可压缩纳维–斯托克斯系统的适定性，《微分方程杂志》，258（2015），3435–3467。[5] Cho, Y.；Choe, H. J.；Kim, H.：可压缩黏性流体初边值问题的唯一可解性，《纯粹与应用数学杂志》，83（2004），243–275。[6]Cho, Y.；Kim, H.：关于具有非负初始密度的可压缩纳维–斯托克斯方程的经典解，《数学手稿》，120（2006），91–129。[7] Cho, Y.；Kim, H.：带真空的黏性多方流体的存在性结果，《微分方程杂志》，228（2006），377–411。[8] Danchin, R.：可压缩黏性导热气体流动在临界空间中的整体存在性，《理性力学与分析文献》，160（2001），1–39。[9] Danchin, R.；Xu, J.：临界 Lp 框架下可压缩黏性导热气体流动的最优衰减估计，《数学流体力学杂志》，20（2018），第4期，1641–1665。[10] Deckelnick, K.：无界区域中可压缩纳维–斯托克斯方程的衰减估计，《数学杂志》，209（1992），115–130。

[11]Fang, D.；Zhang, T.；Zi, R.：具有一类大初始数据的等熵可压缩纳维–斯托克斯方程的整体解，《SIAM数学分析杂志》，50（2018），第5期，4983–5026。[12] Feireisl, E.；Novotn´y, A.；Petzeltov´a, H.：纳维–斯托克斯方程全局定义弱解的存在性，《数学流体力学杂志》，3（2001），358–392。[13] Feireisl, E.：关于黏性可压缩导热流体的运动，《印第安纳大学数学杂志》，53（2004），1705–1738。[14] Feireisl, E.：黏性可压缩流体动力学，《牛津数学及其应用讲座系列》，26。牛津大学出版社，牛津，2004年。xii+212 页。[15] Gong, H.；Li, J.；Liu, X.；Zhang, X.：带真空的等熵可压缩纳维–斯托克斯方程的局部适定性，《数学科学通讯》，18（2020），第7期，1891–1909。[16]Hoff, D.：多维导热流体流动的纳维–斯托克斯方程间断解，《理性力学与分析文献》，139（1997），303–354。[17] Hoff, D.；Smoller, J.：可压缩纳维–斯托克斯方程的真空态不形成，《数学物理通讯》，216（2001），255–276。[18]Huang, X.：带真空的三维正压可压缩纳维–斯托克斯方程的局部强解与经典解，《中国科学：数学》，64（2021），第8期，1771–1788。[19] Huang, X.；Li, J.：带真空和大振荡的三维全可压缩纳维–斯托克斯系统的整体经典解与弱解，《理性力学与分析文献》，227（2018），第3期，995–1059。[20]Huang, X.；Li, J.；Xin, Z.：具有大振荡和真空的三维等熵可压缩纳维–斯托克斯方程经典解的整体适定性，《纯粹与应用数学通讯》，65（2012），549–585。[21]Itaya, N.：关于描述可压缩黏性流体运动的基本方程组的柯西问题，《高代数学研讨会报告》，23（1971），60–120。[22] Jiang, S.；Zhang, P.：可压缩等熵流体三维纳维–斯托克斯方程的轴对称解，《纯粹与应用数学杂志》，82（2003），949–973。[23] Jiang, S.；Zlotnik, A.：具有勒贝格初始数据的一维黏性导热气体方程柯西问题的整体适定性，《爱丁堡皇家学会会刊 A辑》，134（2004），939–960。[24] Kazhikhov, A. V.：黏性气体方程的柯西问题，《西伯利亚数学杂志》，23（1982），44–49。[25] Kazhikhov, A. V.；Shelukhin, V. V.：一维黏性气体方程初边值问题关于时间的唯一整体解，《应用数学与力学杂志》，41（1977），273–282。

[26] Kobayashi, T.; Shibata, Y.：外部区域中 $\mathbb{R}^3$可压缩黏性热传导气体运动方程解的衰减估计，《数学物理通讯》，200（1999），621–659。[27] Li, H.; Wang, Y.; Xin, Z.：可压缩纳维–斯托克斯方程柯西问题不存在具有有限能量的经典解，《理性力学与分析文献》，232（2019），557–590[28]Li, J.：具有真空的热传导可压缩纳维－斯托克斯方程的整体小解：尺度不变量的充分小性，《理性力学与分析文献》237（2020），第2期，899–919。[29] Li, J.：具有常数热传导率和非负密度的一维可压缩纳维－斯托克斯方程的整体适定性，《SIAM数学分析杂志》51（2019），第5期，3666–3693。[30] Li, J.：一维非热传导可压缩纳维－斯托克斯方程的整体适定性，《非线性》33（2020），第5期，2181–2210。[31] Li, J.; Zheng, Y.：存在真空且无初始相容条件时热传导可压缩纳维－斯托克斯方程的局部存在性与唯一性，arXiv:2108.10783[32] Li, J.; Liang, Z.：无界区域中大初值一维可压缩纳维－斯托克斯系统解的一些一致估计与大时间行为，《理性力学与分析文献》220（2016），1195–1208。[33] Li, J.; Xin, Z.：具有真空的可压缩纳维－斯托克斯方程经典解的整体适定性与大时间渐近行为，《偏微分方程年刊》（2019）5：7。[34] Li, J.; Xin, Z.：具有零热传导和远场真空的一维可压缩纳维－斯托克斯方程的熵有界解，《数学进展》361（2020），106923，50页。[35] Li, J.; Xin, Z.：具有远场真空的一维热传导可压缩纳维－斯托克斯方程的熵有界解，《纯粹与应用数学通讯》75（2022），2393–2445。[36] Li, J.; Xin, Z.：三维具有远场真空的黏性热传导气体中熵的一致有界性与非齐次正则性的传播，《中国科学：数学》65（2022），https://doi.org/10.1007/s11425-022-2047-0[37] Lions, P. L.：等熵可压缩 ´纳维－斯托克斯方程解的整体存在性，《巴黎科学院报告》S´er. I Math.，316（1993），1335–1340。[38] Lions, P. L.：《流体力学中的数学专题》，第2卷，克拉伦登出版社，牛津，1998。[39] Lukaszewicz, G.：可压缩黏性热传导流体的一个存在性定理，《数学方法与应用科学》6（1984），234–247。[40] Matsumura, A.; Nishida, T.：黏性热传导气体运动方程的初值问题，《京都大学数学杂志》20（1980），

67–104。[41] Matsumura, A.; Nishida, T.：可压缩黏性热传导流体运动方程的初边值问题，威斯康星大学预印本，MRC技术摘要报告第2237号（1981）。[42] Matsumura, A.; Nishida, T.：一般流体运动方程的初边值问题，《应用科学中的计算方法与工程》，V（凡尔赛，1981），389–406，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1982。[43] Matsumura, A.; Nishida, T.：可压缩黏性热传导流体运动方程的初边值问题，《数学物理通讯》89（1983），445–464。[44]Merle, F.; Rapha'el, P.; Rodnianski, I.; Szeftel, J.：可压缩流体的内爆I：光滑自相似无黏剖面，《数学年刊》，（2）196（2022），567–778。[45]Merle, F.; Rapha'el, P.; Rodnianski, I.; Szeftel, J.：可压缩流体的内爆II：奇点形成，《数学年刊》，（2）196（2022），779–889。[46] Nash, J.：一般流体的 `柯西问题，《法国数学会通报》90（1962），487–497。[47] Ponce, G.：一类非线性演化方程小解的整体存在性，《非线性分析》9（1985），399–418。[48]Serrin, J.：关于可压缩流体运动的唯一性，《理性力学与分析文献》3（1959），271–288。[49] Salvi, R.; Straˇskraba, I.：黏性可压缩流体的整体存在性及其当 $t \to \infty$时的行为，《东京大学理学部杂志IA数学》40（1993），17–51。[50]Tani, A.：可压缩黏性流体运动的第一初边值问题，《数理科学研究所报告》13（1977），193–253。[51] Valli, A.：可压缩黏性流体的一个存在性定理，《纯粹与应用数学年刊》130（1982），197–213；132（1982），399–400。[52] Valli, A.; Zajaczkowski, W. M.：可压缩流体的纳维–斯托克斯方程：一般情形下解的整体存在性与定性性质，《数学物理通讯》103（1986），259–296。[53] Vol'pert, A. I., Hudjaev, S. I.：非线性微分方程复合系统的柯西问题，《苏联数学文集》16（1972），517–544 [此前发表于《数学文集》（新辑）87（1972），504–528（俄文）]。[54] Wen, H.; Zhu, C.：某些大初值类中无穷远真空的三维全可压缩纳维–斯托克斯方程的整体解，《SIAM数学分析杂志》49（2017），162–221。[55] Wu, Z.; Yin, J.; Wang, C.：《椭圆方程与抛物方程》，世界科学出版社有限公司，哈肯萨克，新泽西州，2006年。xvi+408 页。[56] Xin, Z.：具有紧支撑密度的可压缩纳维–斯托克斯方程光滑解的爆破，《纯粹与应用数学通讯》51（1998），229–240。

[57] Xin, Z.; Yan, W：可压缩 Navier–Stokes 方程经典解的爆破，《数学物理通讯》，**321** (2013),529–541.[58]Zlotnik, A. A.; Amosov, A. A：一维黏性导热气体运动方程广义解的稳定性，《西伯利亚数学杂志》，**38** (1997),663–684.[59] Zlotnik, A. A.; Amosov, A. A：一维黏性导热气体运动方程广义解的稳定性，《数学札记》，**63**(1998), 736–746.(Jinkai Li)

South China Research Center for Applied Mathematics and Interdisciplinary Studies, School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China电子邮箱：jklimath@m.scnu.edu.cn；jklimath@gmail.com (ZhoupingXin) The Institute of Mathematical Sciences, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China电子邮箱：zpxin@ims.cuhk.edu.hk