紧初始数据集的若干刚性结果

˜GREGORY J. GALLOWAY 和 ABRAAO MENDES

摘要。本文针对有边界和无边界两种情形，证明了若干关于紧致初始数据集的刚性结果。特别是，在自然的能量、边界和拓扑条件下，我们得到了 [15] 中主要结果的一个全局版本。我们还对 [12] 中的结果作了一些推广。文中给出若干例子，以阐明本文介绍的一些结果。

arXiv:2301.00639v2 [gr-qc] 1 Feb 2023

1. 引言

边际外俘获面的理论在数学广义相对论的若干领域中发挥着重要作用，例如，在时空正质量定理的证明中（例如 [13, 20]），以及关于黑洞拓扑的结果中（例如 [14, 16]）。在 [14], 中，得到了一个局部MOTS刚性结果；该结果意味着，满足主导能量条件（$\mu \geq |J|$）的初始数据集中，最外层MOTS（例如 黑洞的曲面）具有正Yamabe型，即 存在正标量曲率度量。由此可得关于三维最外层MOTS拓扑的若干著名限制。这些结果将有关非负标量曲率黎曼流形的著名结论推广到了时空情形。

在 [12], 中，作者与 M. Eichmair 合作，除其他结果外，获得了局部边际外陷俘获面刚性结果的一个全局版本；该结果尤其不要求弱最外层条件，参见 [12, 定理 1.2]。这一结果部分受 J. Lohkamp 在 [21]中对时空正质量定理的研究方法启发。它意味着，在 $3 \leq n \leq 7$维中，Lohkamp 关于“$\mu - |J| > 0$ 岛屿”不存在性的结果成立，参见 [21, 定理 2]。 [12] 中的定理 1.2 还被用于获得带边界的渐近双曲流形的正质量定理；参见 [9]。这一结果也将成为本文中的一个有用工具。

本文针对有边界和无边界两种情形，给出了紧致初始数据集的若干进一步的初始数据刚性结果。在 [15], 中，作者研究了包含球面 MOTS 的三维初始数据集。粗略地说，研究表明，在充满物质的时空中（可能具有正宇宙学常数），稳定的边际外俘获 2-球面必须满足某个面积不等式；也就是说，其面积必须不超过 $4\pi/c$, 其中 $c > 0$ 是自然能量-动量项的一个下界。随后，我们针对达到这一界的稳定或弱最外层边际外俘获 2-球面，建立了刚性结果。特别是，我们证明了一个局部分裂结果， [15, 定理 3.2],，将 H. Bray、S. Brendle 和

A. Neves [8] 关于正标量曲率黎曼 3-流形中面积极小化 2-球面的结果推广到了时空情形。这些时空结果与 Vaidya 时空和 Nariai 时空 [15]有着有趣的联系。

本工作的主要目标之一是获得 [15,定理 3.2] 的一个全局版本；相关陈述见第 3 节中的定理 3.1。证明中用到了 [12] 中引入的某些技巧。在本工作中，我们还考虑了 [12, 定理 5.2] 的某些变体；参见第 3 节中的定理 3.2 和定理 3.3。在这里，考虑所谓的“膜作用量”以及面积泛函会很有帮助。随后，我们在第 4 节运用这些结果考察闭（紧致且无边界）初始数据集上边际外陷俘获面的存在性问题。本文还讨论了这些结果与已知时空的关系。

本文的组织结构如下：第 2 节回顾有关边际外陷俘获面的一些背景知识；第 3 节陈述并证明若干关于紧致带边界初始数据集的全局刚性结果；第 4 节则将第 3 节所得结果用于证明若干关于闭初始数据集的整体刚性陈述。第 4 节还给出了多个示例，以说明本文所述结果。

致谢。GJG 的研究部分得到西蒙斯基金会资助，资助编号为 850541。AM 的研究部分得到巴西国家科学技术发展委员会（Conselho Nacional de Desenvolvimento Cient´ıfico e Tecnol´ogico - CNPq）资助（项目编号：305710/2020-6）、巴西高等教育人员提升协调机构（Coordena¸c˜ao de Aperfei¸coamento de Pessoal de N´ıvel Superior - CAPES）资助（CAPES-COFECUB 88887.143161/2017-0），以及巴西阿拉戈斯州研究支持基金会（Funda¸c˜ao de Amparo `a Pesquisa do Estado de Alagoas - FAPEAL）资助（项目编号：E:60030.0000002254/2022）。作者感谢 Ken Baker 和 Da Rong Cheng 提供的宝贵意见，并感谢 Christina Sormani 提出的一条评论，该评论促成了第 4 节中的研究结果。

2. 预备知识

除非另有说明，本文中的所有流形均假设为连通且可定向。

一个初始数据集 $(M,\ g,\ K)$由一个带边界 ∂M（可能 $\partial M = \varnothing$）的黎曼流形$(M,\ g)$以及定义在 M上的对称$(0,\ 2)$阶张量 K组成。

设$(M,\ g,\ K)$为一个初始数据集。

（ μ和 J）(,,)的局部能量密度与局部流密度分别定义为

$$\mu = \frac{1}{2}(S - |K|^2 + (\operatorname{tr} K)^2) \quad \text{and} \quad J = \operatorname{div}(K - (\operatorname{tr} K)g),$$

其中 S是（$M,\ g$）的标量曲率。若（$M,\ g,\ K$）满足主导能量条件（简称 DEC），则称

$$\mu \geq |J| \quad \text{on} \quad M.$$

考虑一个闭嵌入超曲面 $\Sigma \subset M$。由于假设 Σ 和M 均为可定向的，我们可以在 Σ上选取一个单位法向量场 ν。若 Σ 将 M分隔开，按照惯例，我们称 ν 指向 Σ的外侧。

相对于 ν，(M, g, K)中 Σ 的零类第二基本形式 χ^+, χ^- 为

$$\chi^+ = K|_\Sigma + A \quad \text{and} \quad \chi^- = K|_\Sigma - A,$$

其中，A 是相对于 ν的(M, g)中 Σ 的第二基本形式。更确切地说，

$$A(X, Y) = g(\nabla_X \nu, Y) \quad \text{for} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

其中，∇ 是(M, g)的列维-奇维塔联络。

T相对于 ν，(M, g, K)中 Σ 的零类膨胀标量 θ^+, θ^- 为 y

$$\theta^+ = \mathrm{tr}_\Sigma(K) + H \quad \text{and} \quad \theta^- = \mathrm{tr}_\Sigma(K) - H, \tag{2.1}$$

其中，$H = \mathrm{tr}\, A$是相对于 ν的(M, g)中 Σ的平均曲率。注意，$\theta^\pm = \mathrm{tr}\, \chi^\pm$。

R. Penrose 提出了如今广为人知的俘获面概念：此时θ^+ 和 θ^- 均为负值。将讨论限制在一侧，我们称 Σ 为外俘获，若$\theta^+ < 0$；称为弱外俘获，若 $\theta^+ \leq 0$；称为边际外俘获，若 $\theta^+ = 0$。在后一种情况下，我们将 Σ 称为边际外俘获面（简称 MOTS）。

现在假设 Σ是 $(M,\ g,\ K)$ 中的一个 MOTS，关于单位法向量 ν，且它是 M 中的边界。更准确地说，假设 ν 指向一个顶维子流形 $M^+ \subset M$，使得 $\partial M^+ = \Sigma \sqcup S$，其中 S（可能$S = \varnothing$）是 ∂M 的若干连通分支的并（特别地，若 Σ 分隔 M）。我们将 M^+ 视为 Σ外部的区域。于是，若 M^+ 中不存在与 Σ同调等价且不同于 Σ的闭嵌入超曲面，其满足 $\theta^+ \leq 0$ （分别满足$\theta^+ < 0$），则称 Σ 为最外层（分别为弱最外层）。局部弱外侧最外和局部外侧最外 MOTS 的概念也可以类似地定义。

注记2.1。需要特别指出的是，初始数据集在广义相对论中自然出现。事实上，设 M 是时空中的一个类空超曲面，即一个¯ ¯时间定向洛伦兹流形（$N,\ h$）。设 g为 M ¯ ¯ ¯上由 h诱导的黎曼度量，K为 M在（$N,\ h$）中的第二基本形式，其相对于 M上的指向未来的类时单位法向量 u 定义。那么（$M,\ g,\ K$）就是一个初始数据集。和之前一样，设 Σ 是 M中的一个闭嵌入超曲面。在这种情形下，¯ ¯χ^+和 χ^- 是 Σ在（$N,\ h$）中的零类第二基本形式，其相对于零类法向量场

$$\ell^+ = u|_\Sigma + \nu \quad \text{and} \quad \ell^- = u|_\Sigma - \nu,$$

分别地。注意，$\theta^\pm = \mathrm{div}_\Sigma\, \ell^\pm$。在物理上，$\theta^+$ （分别为 θ^-）表示从 Σ 发出的向外（分别向内）传播的光线的散度。

如果初始数据集（M， g， K）满足 $K = 0$，则称其为时间对称的或黎曼的。在这种情况下，（M， g， K）中的边际外陷俘获面不过是（M， g）中的极小超曲面。此外，对于某个常数 c，能量条件 $\mu - |J| \geq c$ 可归结为对标量曲率 $S \geq 2c$ 的要求。一般而言，边缘外陷获曲面与极小超曲面具有许多共同性质；前者是后者的推广。参见例如综述文章 [1]。

与极小超曲面的情形一样，边际外陷俘获面理论中的一个重要概念是稳定性。L. Andersson、M. Mars 和 W. Simon 在边际外陷俘获面的背景下引入了这一概念 [2, 3], ，现回顾如下。

设 Σ 是 (M, g, K) 中相对于 ν 的一个边际外陷俘获面。考虑 Σ 在 M 中的法向变分，即 一个变分 $t \to \Sigma_t$，其中 $\Sigma = \Sigma_0$ 的变分向量场为 $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} = \phi\nu$，$\phi \in C^\infty(\Sigma)$。令 $\theta^\pm(t)$ 表示 Σ_t 相对于 ν_t、$\nu = \nu_t|_{t=0}$ 的零类膨胀标量。根据 [2, 第 2] 页或 [3, 第 861] 页中的计算，可得：

$$\left.\frac{\partial\theta^+}{\partial t}\right|_{t=0} = L\phi, \tag{2.2}$$

其中

$$L\phi = -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi\rangle + (Q + \operatorname{div} X - |X|^2)\phi$$

and

$$Q = \frac{1}{2}S_\Sigma - (\mu + J(\nu)) - \frac{1}{2}|\chi^+|^2.$$

这里， Δ 是负半定的拉普拉斯–贝尔特拉米算子， ∇ 是梯度，div 是散度，而 S_Σ 是 Σ 关于诱导度量$\langle\cdot, \cdot\rangle$的标量曲率。此外， X 是 Σ 上与 1-形式 $K(\nu, \cdot)|_\Sigma$ 对偶的切向量场。

可以证明（见 [3, 引理 4.1]）， L 有一个实特征值 $\lambda_1 = \lambda_1(L)$，称为 L的主特征值，并且对任意其他复特征值 λ，都有 $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_1$ 。此外，相应的特征函数 ϕ_1，$L\phi_1 = \lambda_1\phi_1$除相差一个乘法常数外是唯一的，且可以选为实值并处处为正。

若一个边际外陷俘获面 Σ 满足 $\lambda_1(L) \geq 0$，则称其为稳定。这等价于存在一个正函数 $\phi \in C^\infty(\Sigma)$，使得 $L\phi \geq 0$。由 (2.2) 取 $\phi = \phi_1$ ，可直接推出每个局部弱外侧最外的（尤其是局部外侧最外的）边际外陷俘获面都是稳定的。

注意，在黎曼情形下， L 退化为极小超曲面的经典稳定性算子，也称为雅可比算子。因此，在文献中， L 称为边际外陷俘获面稳定性算子或边际外陷俘获面的稳定性算子。

对于具有标量曲率下界的黎曼流形中的极小曲面的刚性结果的研究一直是，并且仍然是，一个活跃的研究领域。从初始数据集的角度来看，正如上文所述，这些属于时间对称结果。将其中一些结果推广到一般初始数据集一直备受关注。在广义相对论的背景下，黑洞视界在

初始数据集中通常由边际外陷俘获面建模；特别是在时间对称情形下，则由极小曲面建模。正如引言中所述，这些刚性结果往往有助于揭示含有黑洞的时空的性质。

下述命题和定理将 Bray、Brendle 和 Neves [8] 的一些结果推广到一般的非时间对称情形。

命题 2.2 (无穷小刚性, [15])。设 Σ 是一个三维初始数据集 (M, g, K) 中的稳定边际外陷俘获面，其对应的单位法向量场为 ν。假设存在常数 $c > 0$，使得 $\mu + J(\nu) \geq c$ 在 Σ 上成立。那么，Σ 的面积满足：

$$\mathcal{A}(\Sigma) \leq \frac{4\pi}{c}.$$

此外，若 $\mathcal{A}(\Sigma) = 4\pi/c$，则有以下结论：

(a) Σ 是一个高斯曲率为 $\kappa_\Sigma = c$ 的圆 2-球，(b) Σ 关于 ν 的第二基本形式 χ^+ 消失，并且(c) $\mu + J(\nu) = c$ 在 Σ 上成立。

上述命题用于证明下述局部分裂定理。不过，在陈述下一个结果之前（该结果也用于定理 3.1 的证明），我们先回顾一下“面积极小曲面”的概念。

关于三维流形 M上的固定黎曼度量 g，若闭嵌入曲面 $\Sigma \subset M$ 在其于 M 中的同调类里面积最小，则称其为面积极小，即对于 M中任何与 Σ 同调等价的闭嵌入曲面 Σ'，都有$\mathcal{A}(\Sigma) \leq \mathcal{A}(\Sigma')$。在这种情况下，也称 Σ 面积最小。类似地，若对于 M中 Σ 的某个邻域内的任何此类曲面 Σ'，都有$\mathcal{A}(\Sigma) \leq \mathcal{A}(\Sigma')$，则称 Σ 为局部面积极小。

定理 2.3 （局部分裂, [15]）。设（M, g, K）是带边界的三维初始数据集。假设（M, g, K）对于某个常数 $c > 0$满足能量条件 $\mu - |J| \geq c$。设 Σ_0 是 ∂M 的一个闭连通分支，满足以下条件：

(1) Σ_0 是一个边际外陷俘获面，其法向量指向 M，并且(2) Σ_0 局部弱外侧最外且局部面积极小。

那么，Σ_0 在拓扑上是 S^2，且其面积满足：

$$\mathcal{A}(\Sigma_0) \leq \frac{4\pi}{c}.$$

*Fur*此外，如果 $\mathcal{A}(\Sigma_0) = 4\pi/c$，那么 Σ 在 M 中的一个领形邻域 U 满足 *t:*

(a) (U, g) 与$([0, \delta) \times \Sigma_0, dt^2 + g_0)$ 等距，其中 $\delta > 0$，且 g_0—— Σ_0 上的诱导度量——具有常数高斯曲率 $\kappa_{\Sigma_0} = c$；(b) $K = a\, dt^2$在 U上，其中 $a \in C^\infty(U)$ 仅依赖于 $t \in [0, \delta)$；以及(c) $\mu = c$ 和 $J = 0$ 在 U上。

该定理将 [8]中的局部刚性结论推广到了一般的非时间对称情形。随后利用 [8] 中得到的局部刚性来获得全局刚性结果；参见 [8, 命题 11]。在下一节的定理 3.1 中，我们将得到

定理 2.3 的全局版本。这一全局刚性结果的一项重要改进是，它不再要求满足“弱最外层”假设，因此与 [8]中的全局结果更为接近。

现在，我们回顾两个对本文而言很重要的拓扑概念；另请参见 [12]。

我们称 M 满足关于 $\Sigma \subset M$ 的同伦条件，如果存在一个连续映射 $\rho\colon M \to \Sigma$，使得 $\rho\circ\, i\colon \Sigma \to \Sigma$ 与 id_Σ同伦，其中 $i\colon \Sigma \hookrightarrow M$ 是包含映射（例如，若 Σ 是 M的收缩）。

另一方面，若一个维数为 m的闭且不一定连通的流形 N 存在 m 个上同调类 $\omega_1, \ldots, \omega_m$，它们属于第一上同调群 $H^1(N)$且取整数系数，并且它们的杯积

$$\omega_1 \smile \cdots \smile \omega_m \in H^m(N)$$

非平凡。例如， m维环面 $T^m = S^1 \times \cdots \times S^1$ 满足上同调条件。更一般地，对于任意闭 m维流形 Q，连通和 $T^m \sharp\, Q$ 满足上同调条件。定理 5.2]讨论了这一条件的一个变体。此处，我们采用定理 2.28]中所述的条件形式。满足这一上同调条件的流形 N 有一个分支不承载正标量曲率度量；参见 [19]中的讨论。

我们将在若干情形中用到以下定理（引言中已提及）。

定理 2.4 ([12, 定理 1。2])。 设(M, g, K) 是一个 n 维、 $3 \le n \le 7$ 的紧致带边界初始数据集。假设(M, g, K) 满足支配能量条件， $\mu \ge |J|$。还假设边界可表示为不交并 $\partial M = \Sigma_0 \cup S$，其中每一项均为非空的连通分支并，且满足以下条件：

(1) $\theta^+ \le 0$ 在 Σ_0 上，关于指向 M 内部的法向量，(2) $\theta^+ \ge 0$ 在 S 上，关于指向 M 外部的法向量，(3) M 满足关于 Σ_0的同伦条件，且(4) Σ_0 满足上同调条件。

于是有以下结论：

(a) $M \cong [0, \ell] \times \Sigma_0$，其中某个 $\ell > 0$。令 $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma_0$，其沿叶状结构方向的单位法向量为 ν_t。(b) 对每个 $t \in [0, \ell]$， $\chi^+ = 0$ 在 Σ_t 上。(c) 对每个 $t \in [0, \ell]$， Σ_t 关于诱导度量是平坦的$(n-1)$环面。(d) $\mu + J(\nu_t) = 0$在 Σ_t 上，对每个 $t \in [0, \ell]$。特别地， $\mu = |J|$ 在 M 上。

以下是 L. Andersson 和 J. Metzger 在 3维中，以及 M. Eichmair 在 $3 \le n \le 7$ 维中关于边际外陷俘获面的基本存在性结果。该结果用于定理 3.1 的证明，也是本文讨论的若干结果中出现维数限制的来源。

定理 2.5 （边际外陷俘获面存在性， [4, 10, 11]）。 设（M、 g、 K）是一个 n 维、$3 \le n \le 7$、紧致带边界初始数据集。假设其边界可以

表示为不交并 $\partial M = \Sigma_{\text{in}} \cup \Sigma_{\text{out}}$，其中 Σ_{in} 和 Σ_{out} 是 ∂M 的连通分支的非空并集，在关于指向 M 的法向量下具有 $\theta^+ \leq 0$，而在关于指向 M 的法向量下具有 $\theta^+ > 0$。那么在（M、g、K）中存在一个与 Σ_{out} 同调等价的最外层*MOTS*。

3. 紧致带边界情形

本节将得到若干全局初始数据结果。接下来一节将把这些结果应用于初始数据流形为闭流形的情形。首先给出定理 2.3 的一个全局版本；参见上文定理 2.3 陈述之后的评论。

定理 3.1. 设 (M, g, K) 是一个3维紧致带边界初始数据集。假设(M, g, K) 满足能量条件 $\mu - |J| \geq c$，其中 $c > 0$为某个常数。另假设边界可表示为若干非空连通分支并的互不相交并$\partial M = \Sigma_0 \cup S$，且满足以下条件：

(1) $\theta^+ \leq 0$ 相对于指向 M内部的法向量定义在 Σ_0 上，(2) $\theta^+ \geq 0$ 相对于指向 M外部的法向量定义在 S 上，(3) M 相对于 Σ_0满足同伦条件，(4) 相对同调群 $H_2(M, \Sigma_0)$ 为零，并且 (5) Σ_0 使面积最小。

那么 Σ_0 在拓扑上是 S^2，且其面积满足：

$$\mathcal{A}(\Sigma_0) \leq \frac{4\pi}{c}.$$

此外，如果 $\mathcal{A}(\Sigma_0) = 4\pi/c$，则有以下结论：

（a）（M、g）与（$[0, \ell] \times \Sigma_0$、$dt^2 + g_0$）等距，其中某个 $\ell > 0$ 满足：g_0 在 Σ_0 上的诱导度量具有常高斯曲率；（b）$K = a\, dt^2$ 在 M上，其中 $a \in C^\infty$（M）仅取决于 $t \in [0, \ell]$；以及（c）$\mu = c$ 和 $J = 0$ 在 M上。

证明。首先注意到，Σ_0 是连通的，因为 M 是连通的，并且满足关于 Σ_0的同伦条件。

如果 Σ_0 不同胚于 S^2，那么 Σ_0 与某个闭定向曲面 Q同胚。特别地，Σ_0 满足上同调条件，因此定理 2.4 适用于（M、g、K）。因此，$0 = \mu - |J| \geq c$在 M 上，这与假设矛盾。于是 Σ_0 在拓扑上是 S^2。

断言： Σ_0 是（M，g，K）中的弱外极大 MOTS，其面积为$\mathcal{A}(\Sigma_0) = 4\pi/c$，除非$\mathcal{A}(\Sigma_0) < 4\pi/c$。

假设$\mathcal{A}(\Sigma_0) \geq 4\pi/c$。

若 $\theta^+_K \leq 0$ 在 Σ_0 上不恒为零，则由 [4, 引理 5.2] 可知，存在一个曲面 $\Sigma \subset M$，它是将 Σ_0 小扰动至 M 后得到的，并且相对于背离 Σ_0 的法向量，$\theta^+_K < 0$ 在 Σ 上成立。令 W 为 M 中由 Σ 和 S 围成的连通紧区域。注意，相对于指向 W 的法向量，$\theta^+_{-K} \leq 0$ 在 S 上成立；相对于

背离 W 的法向量， Σ' 在 上成立。应用 MOTS 存在定理（定理 2.5），我们得到 $(W, g, -K)$ 中一个与 Σ 同调等价且不相交的最外层MOTS Σ'。显然， Σ' 在 M 中与 Σ_0 同调等价。

不失一般性，我们可以假设 Σ'的每个连通分支在 M中都是同调非平凡的。此外，由于 $H_2(M, \Sigma_0) = 0$， Σ' 是连通的。

由于我们假设 Σ_0 在其同调类中使面积达到最小，因此有

$$\frac{4\pi}{c} \leq \mathcal{A}(\Sigma_0) \leq \mathcal{A}(\Sigma').$$

另一方面，由于 Σ' 是 $(W, g, -K)$中的最外层MOTS，特别是稳定的，无穷小刚性（命题 2.2）表明 $\mathcal{A}(\Sigma') = 4\pi/c$。因此， Σ' 是 $(W, g, -K)$中面积为 $\mathcal{A}(\Sigma') = 4\pi/c$的面积极小的最外层MOTS，接着局部分裂定理（定理 2.3）适用，因此 Σ' 在 W 中的一个外邻域被MOTS叶状分解，这就产生了矛盾。

这证明了 Σ_0 是（M, g, K）中的边际外陷俘获面。

现在，我们声称 Σ_0 是（M, g, K）中的弱最外层曲面。若非如此，则存在一个曲面Σ，它在 M 中与 Σ_0 同调等价，并且在其上满足 $\theta_K^+ < 0$。稍微扰动一下 Σ，我们可以假设 $\Sigma \cap \Sigma_0 = \varnothing$。此外，根据强最大值原理（例如例如[4, 命题 2.4] 或 [5, 命题 3.1]）， $\Sigma \cap S = \varnothing$。

与前面一样，不失一般性，我们可以假设 Σ 的每个连通分支在 M 中都是同调非平凡的，特别是 Σ 是连通的。设W为 M中由 Σ和 S围成的区域。像上文那样对（$W, g, -K$）进行论证，可得矛盾。因此 Σ_0 是弱最外层的。

于是我们证明了，若$\mathcal{A}(\Sigma_0) \geq 4\pi/c$，则 Σ_0 是(M, g, K)中的弱最外层MOTS。在这种情况下，根据无穷小刚性，$\mathcal{A}(\Sigma_0) = 4\pi/c$。

这就完成了该断言的证明。

于是我们得到， Σ_0 与 S^2 同胚，且其面积满足$\mathcal{A}(\Sigma_0) \leq 4\pi/c$。此外，若 $\mathcal{A}(\Sigma_0) = 4\pi/c$，则 Σ_0 是(M, g, K)中的面积极小的弱最外层MOTS。在这种情况下，根据局部分裂定理，存在 Σ_0 在 M 中的一个领形邻域 $U \cong [0, \delta) \times \Sigma_0$，使得定理的结论(a)、(b)和(c)在 U上成立。显然，当 $t \nearrow \delta$时， $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma_0$ 收敛到一个面积为 $4\pi/c$ 的闭嵌入MOTS Σ_δ。若 $\Sigma_\delta \cap S \neq \varnothing$，则由强最大值原理，$\Sigma_\delta = S$。若 $\Sigma_\delta \cap S = \varnothing$，我们可以用 Σ_δ 替换 Σ_0，并用 U 的补集替换 M，然后再次进行这一过程。由连续性论证即可得到所需结果。□

接下来的两个定理运用了对称 (0，2) 张量的 $(n-1)$-凸性 这一概念。施加这种凸性会带来更强的刚性。

我们称 (M, g) 上的对称 (0，2) 张量 P 为 $(n-1)$-凸，若对每一点 $p \in M$，P 关于 g 的最小 $(n-1)$ 个特征值之和非负（特别地，若 P 半正定）。这等价于：对每个 $p \in M$， P 关于 T_pM 中任意 $(n-1)$ 维线性子空间的迹均非负。特别地，若 P 是 $(n-1)$-凸的，则对每个超曲面 $\Sigma \subset M$，$\mathrm{tr}_\Sigma P \geq 0$。这一凸性条件已被

第二位作者在 [22] 中使用过，作者们也与 M. Eichmair 一同在相关语境下于 [12] 中使用过。

设 (M, g, K) 如定理 2.4 中所述，并设 Σ 是与 Σ_0 同调等价的闭嵌入超曲面。下面的定理用到泛函，

$$\mathcal{B}_\epsilon(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma) - (n-1)\,\epsilon\,\mathcal{V}(\Sigma), \quad \epsilon = 0, 1,$$

其中 $\mathcal{A}(\Sigma)$ 是 Σ 的面积，而 $\mathcal{V}(\Sigma)$ 是由 Σ 和 Σ_0 围成区域的体积。在 $\epsilon = 0$ 的情形下，我们讨论的就是面积泛函。在 $\epsilon = 1$ 的情形下，我们讨论的是与平均曲率为常数 $n-1$ 的超曲面相关的泛函，有时称为 膜作用量，记作 $\mathcal{B}$。

以下定理从几个方面推广了 [12] 中的定理 5.2。

定理 3.2. 设 (M, g, K) 如定理 *2.4* 中所述。假设

(i) $K + \epsilon\, g$ 是$(n-1)$-凸的，其中 $\epsilon = 0$ 或 $\epsilon = 1$,

并且(ii) Σ_0 和 S 满足 $B_\epsilon(\Sigma_0) \le B_\epsilon(S)$。

则有以下结论：

(a) Σ_0 相对于诱导度量 g_0是一个平坦的$(n-1)$环面，(b) (M, g) 与$([0, \ell] \times \Sigma_0,$ $dt^2 + e^{2\epsilon t} g_0)$ 等距，其中 $\ell > 0$为某个值，(c) $K = (1-\epsilon)a - \epsilon\, g$ 在 M上，其中 $a \in C^\infty(M)$ 仅依赖于 $t \in [0, \ell]$，以及(d) $\mu = 0$ 和 $J = 0$ 在 M上。

特别地，若 K 满足 $K \ge -\epsilon\, g$，则凸性假设成立。在 $\epsilon = 0$的情形下，这适用于未来（所有方向）均在膨胀的宇宙学模型。

证明。 根据定理 2.4，

- 对某个 $\ell > 0$， $M \cong [0, \ell] \times \Sigma_0$ 成立；且 - 每个叶 $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma_0$ 相对于沿叶状结构方向的单位法向量 ν_t 都是边际外陷俘获面。

另一方面，由于 $K + \epsilon\, g$ 是 $(n-1)$-凸的，我们有

$$H(t) - (n-1)\,\epsilon \le H(t) + \operatorname{tr}_{\Sigma_t} K = 0, \tag{3.1}$$

其中 $H(t) = \operatorname{div}_{\Sigma_t} \nu_t$ 是 Σ_t的平均曲率。

现在，对$\mathcal{B}_\epsilon$ 作一阶变分，得到

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}_\epsilon(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \phi\,(H(t) - (n-1)\,\epsilon)\, d\Sigma_t \le 0, \tag{3.2}$$

其中 $\phi = \langle \nu_t, \partial_t \rangle$ 是该叶状结构的塌缩函数。因此，$\mathcal{B}_\epsilon(t) = \mathcal{B}_\epsilon(\Sigma_t)$ 是 $[0, \ell]$ 上的一个非增函数，且满足 $\mathcal{B}_\epsilon(0) \le \mathcal{B}_\epsilon(\ell)$。因此，$\mathcal{B}_\epsilon(t) = \mathcal{B}_\epsilon(\Sigma_t)$ 为常数。不等式 (3.1) 和 (3.2) 表明，对于所有$t \in [0, \ell]$， $H(t) = (n-1)\,\epsilon = -\operatorname{tr}_{\Sigma_t} K$。特别地， $\theta^- = -2\,(n-1)\,\epsilon$ 在 $\Sigma_\ell = S$上。

于是可直接由 [12, 定理 1.3]得到该结果（请注意，我们在本工作中定义 θ^- 时采用的符号约定与 [12]中的符号约定相反）。□

在下一个定理中，我们在修正的凸性条件下考虑 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$。

定理 3.3. 设 (M, g, K) 如定理 *2.4* 所述。假设 $-(K+g)$ 是$(n-1)$-凸的。那么 $B(\Sigma_0) \leq B(S)$。此外，若等式成立，则有如下结论：

(a) (M, g) 与某个 $([0,\ell]\times\Sigma_0, dt^2+g_t)$ 等距，其中 g_t 是 $\Sigma_t \cong \{t\}\times\Sigma_0$上的诱导度量，$\ell > 0$。*(b)* 每个 Σ_t 相对于 g_t 都是平坦的$(n-1)$维环面，并具有常平均曲率 $H(t) = n-1$。*(c)* (M, g)的标量曲率满足 $S \leq -n(n-1)$。若等式成立，则(M, g)与$([0,\ell]\times\Sigma_0, dt^2+e^{2t}g_0)$等距。*(d)* 对每个 $t\in[0,\ell]$，在 Σ_t上 $\mu + J(\nu_t) = 0$。特别地，在 M上 $\mu = |J|$。*(e)* 在 M上 $\mathrm{tr}\ K \leq -n$。若等式成立，则 $K = -g$、$S = -n(n-1)$、$\mu = 0$，且在 M上$J = 0$。

凸性假设尤其在 K 满足 $K \leq -g$时成立。若将 K 视为相对于指向过去的单位法向量定义的，这将适用于向过去强烈收缩的宇宙学模型，例如始于“大爆炸”的模型。

证明。 根据定理 2.4，

- $M \cong [0,\ell]\times\Sigma_0$ 其中

$$g = \phi^2 dt^2 + g_t, \tag{3.3}$$

其中 g_t 是 $\Sigma_t \cong \{t\}\times\Sigma_0$上的诱导度量。

- 每个 $(\Sigma_t,\ g_t)$ 都是一个平坦的 $(n-1)$-环面。
- 每个叶 Σ_t 都是 $(M,\ g,\ K)$ 中的边际外陷俘获面。事实上，

$$0 = \chi^+(t) = A(t) + K|_{\Sigma_t},$$

其中，$A(t)$ 是 Σ_t 的第二基本形式，它是相对于沿叶状结构方向的单位法向量 ν_t 计算的。

- 对每个 $t\in[0,\ell]$，$\mu + J(\nu_t) = 0$ 在 Σ_t 上。特别地，$\mu = |J|$ 在 M 上。

现在，由于 $-(K+g)$ 是 $(n-1)$-凸的，我们有

$$H(t) - (n-1) \geq H(t) + \mathrm{tr}_{\Sigma_t} K = 0, \tag{3.4}$$

其中，$H(t) = \mathrm{tr}\, A(t)$ 是 Σ_t 的平均曲率。然后，对 $\mathcal{B}$ 求一阶变分可得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \phi\,(H(t) - (n-1))\, d\Sigma_t \geq 0. \tag{3.5}$$

因此，$\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(\Sigma_t)$ 是定义在 $[0,\ell]$ 上的非递减函数。特别地，$\mathcal{B}(0) \leq \mathcal{B}(\ell)$，也就是说，$\mathcal{B}(\Sigma_0) \leq \mathcal{B}(S)$。

如果 $\mathcal{B}(\Sigma_0) = \mathcal{B}(S)$，那么 $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(\Sigma_t)$ 是常数。因此，不等式和 (3.4) (3.5) 表明，对所有 $t\in[0,\ell]$，$H(t) = n-1 = -\mathrm{tr}_{\Sigma_t} K$。

现在，固定 $t\in[0,\ell]$、$p\in\Sigma_t$，并设 $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ 为 $T_p\Sigma_t$ 的标准正交基。定义

$$\eta(s) = \cos s\cdot e_{n-1} + \sin s\cdot \nu_t, \quad s\in\mathbb{R},$$

并设 $\pi(s)$ 为由以下元素生成的 T_pM 的 $(n-1)$ 维线性子空间：

$$\{e_1, \dots, e_{n-2}, \eta(s)\}.$$

由于 $-(K+g)$ 是 $(n-1)$-凸的，且 $\mathrm{tr}_{\Sigma_t} K = -(n-1)$，我们有

$$f(s) \coloneqq \mathrm{tr}_{\pi(s)} K \le -(n-1) \quad \text{and} \quad f(0) = \mathrm{tr}_{\Sigma_t} K = -(n-1).$$

因此， $s=0$ 是 $f(s)$ 的临界点。注意到

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n-2} K(e_i, e_i) + K(\eta(s), \eta(s)),$$

我们得到，

$$0 = f'(0) = 2K(\eta'(0), \eta(0)) = 2K(\nu_t, e_{n-1}).$$

类似地，对于 $i=1$，……，$n-2$，有 $K(\nu_t, e_i) = 0$。由此可得，对于所有 $t \in [0, \ell]$，$X^\flat = K(\nu_t, \cdot)|_{\Sigma_t} = 0$。

另一方面， $\theta^+(t)$ 的一阶变分可写为

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial t} = -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi\rangle + (Q + \operatorname{div} X - |X|^2)\phi = -\Delta\phi + Q\phi,$$

其中

$$Q = \frac{1}{2} S_{\Sigma_t} - (\mu + J(\nu_t)) - \frac{1}{2}|\chi^+(t)|^2 = 0.$$

因此， $\Delta\phi = 0$ 在 Σ_t 上，于是 $\phi = \phi(t)$在每个 $t \in [0, \ell]$的 Σ_t 上为常数。因此，通过对(3.3)作简单的变量替换，我们得到

$$g = dt^2 + g_t. \tag{3.6}$$

特别地， t线是测地线。因此，沿着每个叶 $\Sigma = \Sigma_t$， $H = H(t)$满足标量黎卡提方程，

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{Ric}(\partial_t, \partial_t) - |A|^2,$$

由于 $H(t) = n-1$，这意味着，

$$\operatorname{Ric}(\partial_t, \partial_t) + |A|^2 = 0.$$

根据高斯方程，上述方程左端可作如下标准改写，

$$\operatorname{Ric}(\partial_t, \partial_t) + |A|^2 = \frac{1}{2}(S - S_\Sigma + |A|^2 + H^2).$$

因此，由于 $S_\Sigma = 0$，我们有，

$$S = -|A|^2 - H^2 \le -\frac{H^2}{n-1} - H^2 = -n(n-1), \tag{3.7}$$

这就证明了（c）中的不等式部分。若等式成立，则 $|A(t)|^2 = n-1$；结合 $H(t) = n-1$，可知每个 Σ_t 都是脐的；事实上， $A(t) = g_t$。将此代入 (3.6)，即可轻易推出（c）中的等距部分。

由于 $-(K+g)$ 是 $(n-1)$-凸的，不难看出 $\operatorname{tr} K \leq -n$。事实上，若 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 是 T_pM, $p \in M$ 的标准正交基，则

$$(n-1)\operatorname{tr} K = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} K(e_j,e_j) \leq -\sum_{i=1}^{n}(n-1) = -n(n-1), \tag{3.8}$$

也就是说，$\operatorname{tr} K \leq -n$。若 $\operatorname{tr} K = -n$，则由 (3.8) 可得

$$\sum_{j\neq i} K(e_j,e_j) = -(n-1) \quad \text{for each} \quad i = 1,\dots,n.$$

因此，

$$-n = \operatorname{tr} K = K(e_i,e_i) + \sum_{j\neq i} K(e_j,e_j) = K(e_i,e_i) - (n-1),$$

也就是说，对每个 $i = 1,\dots,n$，$K(e_i,e_i) = -1$。由于 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 是任意的，我们有$K = -g$。因此，利用 (3.7) 中的 $A(t) = -K|_{\Sigma_t} = g|_{\Sigma_t}$，可得

$$S = -|A(t)|^2 - |H(t)|^2 = -n(n-1).$$

最后，

$$\mu = \frac{1}{2}(S - |K|^2 + (\operatorname{tr} K)^2) = 0 \quad \text{and} \quad J = \operatorname{div}(K - (\operatorname{tr} K)g) = 0.$$

□

4. 应用：闭情形

本节中，我们希望将上一节的结果应用于闭的（紧致且无边界的）初始数据流形。这些结果自然与宇宙学（即空间闭合的）时空相关。我们将通过若干示例来说明这些结果。

4.1. 球面情形。本节中，我们希望将定理 3.1 应用于 M 是闭的情形。

设 M 是一个 n 维闭流形。假设第 $(n-1)$ 个同调群 $H_{n-1}(M)$ 非平凡。$H_{n-1}(M)$ 中的任一非平凡元素都会导出一个光滑闭嵌入非分离可定向超曲面 $\Sigma \subset M$。特别地，Σ 在 M 中是双侧的，即存在一个嵌入 $F\colon [-1,1]\times\Sigma \to M$，使得对每个 $p \in \Sigma$，$F(0,p) = p$。令 U 表示开集 $F((-1,1)\times\Sigma) \subset M$。如果 $M\setminus U$ 收缩到 ∂U 的某个连通分支上，我们就称 M 关于 Σ 可缩回。若考虑 M 上的黎曼度量 g，并给定关于 g、定义在 Σ 上的单位法向量场 ν，如果 $M\setminus U$ 收缩到 ∂U 中 ν 所指向的连通分支上，我们就称 M 关于 Σ 朝向 ν 可缩回。

一个显然的情形是，M 具有 $M = S^1 \times Q$的形式，且 Q 是闭的。此时，M 相对于 $\Sigma = \{x\} \times Q$, $x \in S^1$ 是可缩回的。另一种值得关注的情形是，M具有 $M = T^n \sharp Q$的形式。将 T^n 视为一个n维立方体，并将相对的边界面识别起来。为得到 M，我们可以假设连通和是在立方体内的一个有界开集 U 中进行的。令Σ 为一个与某个面平行、且远离集合 U的（$n-1$）维环面。于是 M 是

相对于 Σ可缩回。更一般地，若 M 相对于 Σ可缩回，则 $M \sharp Q$也如此；只要 Q 是闭的，且连通和是在远离 Σ处进行的。

定理 4.1. 设(M, g, K) 是满足能量条件 $\mu - |J| \geq c$（其中 $c > 0$为某个常数）的三维闭初始数据组。假设(M, g, K)存在一个相对于单位法向量场 ν的边际外陷俘获面 Σ，且满足以下条件：

(I) M 相对于 Σ 可沿朝向 ν的方向收缩回去，(II) 同调群 $H_2(M)$ 由 Σ的同调类生成，且(III) Σ 使面积达到最小。

则 Σ 在拓扑上是 S^2，且其面积满足：

$$\mathcal{A}(\Sigma) \leq \frac{4\pi}{c}. \tag{4.1}$$

此外，若 $\mathcal{A}(\Sigma) = 4\pi/c$，则有以下结论：

(a') (M, g) 与赋予乘积$([0, \ell] \times \Sigma, dt^2 + h)$诱导度量的 $[0, \ell] \times \Sigma/\sim$ 等距，其中“$\sim$”表示 $\{0\} \times \Sigma$ 和 $\{\ell\} \times \Sigma$ 经过适当的等同，且 h —— Σ 上的诱导度量——具有常高斯曲率 $\kappa_\Sigma = c$，(b') $K = a\, dt^2$在 M上，其中 $a \in C^\infty(M)$ 仅取决于 t，且(c') $\mu = c$ 和 $J = 0$ 在 M上。

证明。 首先注意，沿着 Σ进行“切割”后，我们得到一个具有两个边界分支的三维紧流形 M'，记为 Σ_0 和 S。此外， M 上的初始数据（g， K）以自然方式给出 M' 上的数据（g'， K'）。相对于相应的诱导度量，边界分支 Σ_0 和 S 都与 Σ 等距。

现在，考虑初始数据集（M'， g'， K'）。注意，可以适当选取 M' 的边界分支 Σ_0 和 S，使其满足定理 3.1 的条件（1）—（5）。事实上，

（1）相对于指向 M'的法向量， Σ_0 是一个边际外陷俘获面；（2）相对于指向 M'外部的法向量， S 是一个边际外陷俘获面；（3） M' 满足关于 Σ_0的同伦条件，因为 M 相对于 Σ可朝 ν收缩；（4）相对同调群 $H_2(M'$， $\Sigma_0)$消失，因为 $H_2(M)$由 Σ的同调类生成；（5） Σ_0 在（M'， g'）中使面积最小，因为 Σ在（M， g）中使面积最小。

上述条件 (1) 和 (2) 源于 Σ 是相对于 ν 的 (M, g, K) 中的边际外陷俘获面，以及 Σ_0 和 S 的选取。因此，根据定理 3.1， Σ_0 在拓扑上是 S^2，且其面积满足 $\mathcal{A}(\Sigma_0) \leq 4\pi/c$。 Σ 也有相同的结论。此外，若 $\mathcal{A}(\Sigma) = 4\pi/c$，即 $\mathcal{A}(\Sigma_0) = 4\pi/c$，那么定理 3.1 的结论 (a)-(c) 对 (M', g', K') 成立，因此 (M, g, K) 满足 (a')-(c')。□

注记 4.2。 满足定理 4.1 假设的初始数据集自然地出现在 Nariai 时空中。Nariai 时空是真空

带正宇宙学常数的爱因斯坦方程，$\Lambda > 0$。它是二维德西特空间 dS_2 与 S^2 的度量乘积，

$$\bar{N} = (\mathbb{R} \times S^1) \times S^2, \quad \bar{h} = -dt^2 + a^2 \cosh^2(t/a)\, d\chi^2 + a^2 d\Omega^2,$$

其中 $a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ 如 [6, 7]，所述，随着黑洞尺寸增大且其面积趋近于 (4.1) 中的上界，Nariai 时空是史瓦西-德西特时空的一个有趣极限，其中 $c = \Lambda$。

在变换 $\cosh(t/a) = \sec \tau$ 下，度量 $\bar{h}$ 变为，

$$\bar{h} = \frac{a^2}{\cos^2(\tau)} \left(-d\tau^2 + d\chi^2\right) + a^2 d\Omega^2,$$

其中 τ 的取值范围为 $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$。通过这一时间坐标变换可见，$dS_2$ 局部共形于闵可夫斯基平面。图 1 描绘了 (N, h) 的彭罗斯型图。图中每个点代表半径为 a 的圆形二球面。在图中，$M = \Gamma \times S^2$，其中 Γ 是圆上的光滑类空图：$\tau = 0$，$0 \le \chi \le 2\pi$ 位于 dS_2 中。取 Σ 为 M 与全测地零超曲面 H 的二球面交集，容易验证 (M, g, K) 满足定理 4.1 的假设，且 (4.1) 中取等号；其中 g 和 K 分别是 M 的诱导度量和第二基本形式。我们注意到，空间闭合的史瓦西-德西特时空中存在一些初始数据集，它们满足定理 4.1 的所有假设，但 (4.1) 中不取等号。

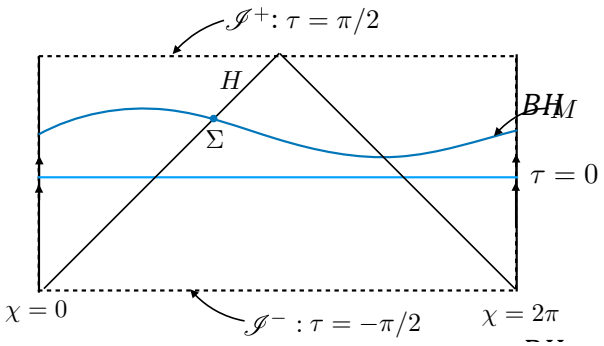

图 1. Nariai 时空。

4.2. 非球对称情形。 现在我们考虑定理 2.4、3.2 和 3.3 在满足主导能量条件的闭初始数据集上的应用。由此，我们得到关于宇宙学背景中具有非平凡（例如 环面）拓扑的边际外陷俘获面的存在性与刚性的结果。

我们先看一个例子。设 (N, h) 为 FLRW时空，

$$\bar{N} = (0, a) \times M, \quad \bar{h} = -dt^2 + g_t,$$

其中 $g_t = G^2(t)\, d\Omega^2$ 和 $(M, d\Omega^2)$ 是单位三维球面。对于每个 $t \in (0, a)$，考虑初始数据 $(M_t = \{t\} \times M, g_t, K_t)$，其中 K_t（第二基本形式）由

给出

$$K_t = \frac{\dot{G}(t)}{G(t)}\, g_t.$$

特别地，根据 $G(t)$ 的符号， K_t 或 $-K_t$ 是 2-凸的。容易验证，对于任意尺度因子 $G(t)$，主导能量条件都严格成立。

对于每个 $t \in (0, a)$，容易看出 (M_t, g_t, K_t) 含有一个球面 MOTS。事实上，纬线 2-球面可取遍 $-\infty$ 与 $+\infty$ 之间的所有平均曲率值。选取纬线 2-球面 Σ_t，使其平均曲率满足

$$H_t = -\operatorname{tr}_{\Sigma_t} K_t = -2\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}. \tag{4.2}$$

于是，由 (2.1)， Σ_t 是一个 MOTS， $\theta_t^+ = 0$。

事实上，(M_t, g_t, K_t) 也含有一个环面 MOTS。这里，我们利用单位三维球面 S^3 中的一参数克利福德环面族 T_r。将 S^3 与 $\mathbb{R}^4$ 中以原点为中心的单位球面对应起来， T_r, $0 < r < 1$ 定义为

$$T_r = \left\{(x, y, u, v) \in S^3 : x^2 + y^2 = r^2,\, u^2 + v^2 = 1 - r^2\right\}.$$

通过令 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$，即可得到“标准”克利福德环面。一个简单的计算表明，每个 T_r 都具有常平均曲率（见 [18]），

$$H_r = \frac{1 - 2r^2}{r\sqrt{1 - r^2}}.$$

特别地，克利福德环面的平均曲率可取遍 $-\infty$与 $+\infty$之间的所有值。因此，仿照球面的情形进行上述论证，可知存在一个嵌入环面 Σ_t，它位于 $(M_t,\ g_t,\ K_t)$ 中，并满足 (4.2)，因而是一个边际外陷俘获面。

可以通过在环面 Σ_t 的一侧与另一侧之间添加一个柄，以 Gromov-Lawson [17], 的方式修改初始数据集 $(M_t,\ g_t,\ K_t)$，使得 Σ_t 不再是同调平凡的，并且主导能量条件仍然成立。然而，由下一个定理可知，所得的初始数据流形无法相对于 Σ_t收缩。

定理 4.3。 设 (M, g, K) 是一个满足主导能量条件的 n维 $3 \le n \le 7$闭初始数据集， $\mu \ge |J|$。假设 (M, g, K) 存在一个边际外陷俘获面 Σ，相对于单位法向量场 ν，且满足以下条件：

（I） M 相对于 Σ 朝向 ν 是可缩回的，且

（II） Σ满足上同调条件。

那么， $\chi^+ = 0$ 在 Σ 上且 Σ 是关于诱导度量的平坦（$n-1$）环面。此外，以下结论成立：

(a') 对于某个 $\ell > 0$， $M \setminus \Sigma \cong (0, \ell) \times \Sigma$。令 $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma$，其单位法向量 ν_t 指向叶状结构的方向。*(b')* 对每个 $t \in (0, \ell)$， $\chi^+ = 0$ 于 Σ_t。*(c')* 对每个 $t \in (0, \ell)$，关于诱导度量， Σ_t 是一个平坦的（$n-1$）环面。*(d')* 对每个 $t \in (0, \ell)$， $\mu + J(\nu_t) = 0$ 于 Σ_t。特别地， $\mu = |J|$ 于 M。

如果进一步假设 K 是$(n-1)$-凸的，我们还有：

(e') (M, g) 与赋予乘积 $([0,\ell]\times\Sigma, dt^2+h)$诱导度量的 $[0,\ell]\times\Sigma/\sim$ 等距，其中 h 是 Σ 上的诱导度量。特别地，(M, g) 是平坦的。(f') $K = a\,dt^2$，其中 $a \in C^\infty(M)$ 仅取决于 t。(g') $\mu = 0$ 和 $J = 0$ 在 M 上。

证明。 如定理 4.1 的证明中所述，令 (M', g', K') 为由 (M, g, K) 得到的初始数据集——沿 Σ 进行“切割”——其边界有两个连通分支 Σ_0 和 S，二者均与 Σ 等距；其中 Σ_0 是相对于指向 M' 内部的法向量而言的边际外陷俘获面（MOTS），而 S 是相对于指向 M' 外部的法向量而言的边际外陷俘获面（MOTS）。

不难看出，$(M',\ g',\ K')$ 满足定理 2.4 的所有假设，因而也满足其所有结论。因此，Σ 是一个平坦的 $(n-1)$ 环面，其上有 $\chi^+ = 0$，并且该定理的结论 (a')-(d') 成立。

若 K 是 $(n-1)$-凸的，由于 $\mathcal{A}(\Sigma_0) = \mathcal{A}(S)$，可知 $(M',\ g',\ K')$ 满足定理 3.2 关于 $\epsilon = 0$ 的所有假设。由此可得结论 (e')-(g')。□

注 4.4。 例如，由此可知，在一个严格满足主导能量条件且具有环面柯西曲面的四维时空中，任何柯西曲面上都不存在同调非平凡的环面边际外陷俘获面。这尤其适用于环面 $(k = 0)$ FLRW时空中的时间切片；这些时空满足以尘埃（零压理想流体）为源的爱因斯坦方程。

鉴于性质 (g')，若要找到满足定理 4.3 假设的初始数据集，或许应考虑真空时空。一类著名的例子是环面 Kasner 时空，

$$\bar{N} = (0,\infty)\times M, \quad \bar{h} = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2,$$

其中 x、y、z 应理解为周期坐标，且 $p_1 \le p_2 \le p_3$必须满足，

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad \text{and} \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

令 M_0 为 $t = 1$ 时间切片，其度量为 g，第二基本形式为 K^{-} $^{-}$，二者均由 $(N、h)$ 诱导。容易证明，要使 K 为 2-凸，$^{-}$必须满足 $p_1 = p_2 = 0$ 和 $p_3 = 1$，因此 h 变为，

$$\bar{h} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + t^2dz^2.$$

这是一个特殊的 Kasner 时空，称为“平坦Kasner”。它在局部与闵可夫斯基时空等距。取 Σ 为环面 $t = 1, z = z_0$，可见 M_0满足定理 4.3 的假设，包括 2-凸性假设。

我们再举一个例子，以说明满足 (I) 和 (II) 但不满足凸性条件的初始数据集具有某种灵活性。这是对 [12] 中例4.2 的小幅修改。

令 $\mathbb{R}^3_1$为闵可夫斯基时空，其标准坐标为 $t,\ x,\ y,\ z$。考虑 $t = 0$ 切片中的长方体 $\mathcal{B} = \{(x,\ y,\ z) :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$。设 $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$是一个光滑函数，在$\mathcal{B}$ 的边界附近为零，且其图像是

在 $\mathbb{R}^3_1$中类空。将长方体的相对边识别起来，我们得到一个初始数据集 (M, g, K)，其中 $M \cong T^3$，M由 f的图像给出，而 g和 K 则由 f的图像诱导得到。设 Σ 为 M 与零超平面 $t = z - \frac{1}{2}$ 的交；见图 2。由于该零超平面是全测地的，Σ必然是一个边际外陷俘获面。因此，(M, g, K) 满足关于 Σ的 (I) 和 (II)。还要注意，(M, g, K) 满足主导能量条件；事实上，由于它本质上位于闵可夫斯基时空中，因此是一个真空初始数据组，$\mu = 0$、$J = 0$。因此，(M, g, K) 满足定理 4.3 的所有假设，但通常不满足关于 K的凸性条件。由性质 (a')-(d') 保证的边际外陷俘获面叶状结构，是通过将 M与零超曲面 $t = z + c$相交得到的。这些性质成立的原因，可以从全测地零超曲面的特殊性质来理解。

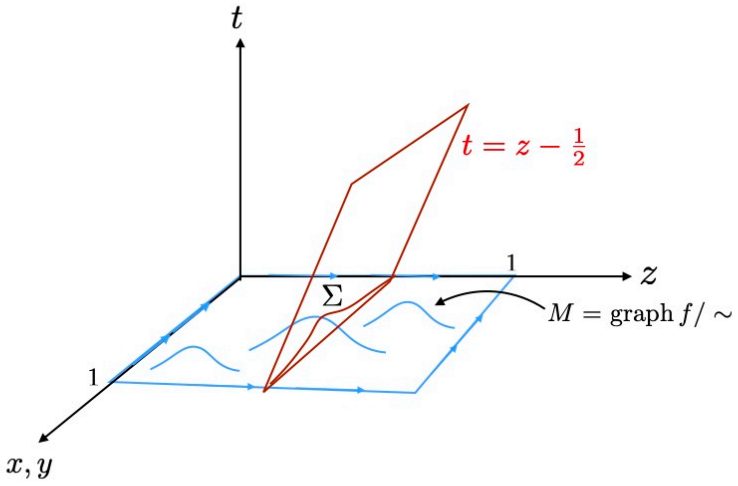

图 2. 满足定理 4.3 的 (I) 和 (II) 的初始数据集。

备注 4.5。 最后，我们提及这与时空正质量定理的一种联系，具体而言，是 Lohkamp 从略有不同于文献 [12]讨论的视角所采用的方法 [21], 。Lohkamp 将证明归结为一个独立结果，即“$\mu - |J| > 0$ 孤岛”的不存在性，见 [21, 定理 2]。通过标准的紧化（Lohkamp 也对此进行了考察），定理 2 的设定立即给出一个满足主导能量条件的初始数据集，其初始数据流形为$M \cong T^n \sharp Q$, Q 闭合，并带有一个环面 MOTS Σ，使得 M相对于 Σ 可缩回（参见第 4.1 节开头的讨论）。于是，定理 4.3 得出 $\mu = |J|$（以及其他结论），这意味着 Lohkamp 关于维数为 $3 \leq n \leq 7$时不存在 $\mu - |J| > 0$孤岛的结果。

最后，我们考虑定理 3.3 的以下推论。

推论 4.6。 设(M, g, K) 是一个 n 维、$3 \leq n \leq 7$、满足主导能量条件（*DEC*）的闭初始数据组，$\mu \geq |J|$。假设 $-(K + g)$ 是$(n-1)$-凸的。那么(M, g, K) 不可能满足定理 *4.3* 的条件(I)-(II) 。

第4.2节开头所讨论的例子表明，虽然条件 (I) 和 (II) 不能同时满足，但其中任一条件都可以满足。

证明。 设 (M', g', K') 如定理 4.3 的证明中所述。若 $-(K+g)$ 是 $(n-1)$-凸的，特别是 $-(K'+g')$ 是 $(n-1)$-凸的，则由定理 3.3 的第一部分可知 $\mathcal{B}(\Sigma_0) \leq \mathcal{B}(S)$，这与下述事实矛盾，因为

$$\mathcal{B}(\Sigma_0) = \mathcal{A}(\Sigma_0) = \mathcal{A}(S) > \mathcal{B}(S).$$

□

参考文献

1. Lars Andersson、Michael Eichmair 和 Jan Metzger，*Jang*方程及其在边缘陷获曲面中的应用，《复分析与动力系统IV》第二部分，《当代数学》，第554卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2011年，第13–45页。MR 2884392 2. Lars Andersson、Marc Mars 和 Walter Simon，动力学视界与陷获视界的局部存在性，《物理评论快报》**95** （2005），111102。3. ，边缘外俘获曲面的稳定性与边缘外俘获管的存在性，《理论与数学物理进展》**12** （2008），第4期，853–888。MR 2420905 4. Lars Andersson 和 Jan Metzger，视界面积与陷获区域，《数学物理通讯》**290** （2009），第3期，941–972。MR 2525646 5. Abhay Ashtekar 和 Gregory J. Galloway，动力学视界的一些唯一性结果，《理论与数学物理进展》**9** （2005），第1期，1–30。MR 2193368 6. Raphael Bousso，德西特空间的增殖，《物理评论D》（第3辑）**58** （1998），第8期，083511，7。MR 1682080 7. Raphael Bousso 和 Stephen W. Hawking，暴胀期间的黑洞成对产生，《物理评论D》（第3辑）**54** （1996），第10期，6312–6322。MR 1423578 8. Hubert Bray、Simon Brendle 和 Andre Neves，三维流形中面积极小化二球面的刚性，《分析与几何通讯》**18** （2010），第4期，821–830。MR 2765731 9. Piotr T. Chru´sciel 和 Gregory J. Galloway，带边界的渐近双曲黎曼流形的正质量定理，《经典与量子引力》**38** （2021），第23期，论文编号237001，6。MR 4353388 10. Michael Eichmair，边际外俘获曲面的普拉托问题，《微分几何杂志》**83** （2009），第3期，551–583。MR 2581357 11. ，广义表观视界的存在性、正则性与性质，《数学物理通讯》**294** （2010），第3期，745–760。MR 2585986 12. Michael Eichmair、Gregory J. Galloway 和 Abra˜ao Mendes，初始数据刚性结果，《数学物理通讯》**386** （2021），第1期，253–268。MR 4287186 13. Michael Eichmair、Lan-Hsuan Huang、Dan A. Lee 和 Richard Schoen，低于八维中的时空正质量定理，《欧洲数学学会杂志》（JEMS）**18** （2016），第1期，83–121。MR 3438380 14. Gregory J. Galloway，最外层*MOTS*的刚性：初始数据版本，《广义相对论与引力》**50** （2018），第3期，论文编号32，7。MR 3768955 15. Gregory J. Galloway 和 Abra˜ao Mendes，边际外俘获二球面的刚性，《分析与几何通讯》**26** （2018），第1期，63–83。MR 3761653 16. Gregory J. Galloway 和 Richard Schoen，将霍金黑洞拓扑定理推广到高维，《数学物理通讯》**266** （2006），第2期，571–576。MR 2238889 17. Mikhael Gromov 和 H. Blaine Lawson, Jr.，正标量曲率单连通流形的分类，《数学年刊》（第 2 辑） **111** （ 1980 ），第3期，423–434。MR 577131 18. Yoshihisa Kitagawa，单位3球面中的嵌入的平坦环面，《日本数学会杂志》**47** （1995），第2期，275–296。MR 1317283

19. Dan A. Lee，几何相对论，《数学研究生教材》，第201卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2019年。MR 3970261 20. Dan A. Lee、Martin Lesourd 和 Ryan Unger，带边界初始数据集的密度定理与正质量定理，《数学物理通讯》**395** （2022），第2期，643–677。MR 4487523 21. Joachim Lohkamp，高维正质量定理 *II*，预印本， https://arxiv.org/abs/1612.07505 （2016）。22. Abra˜ao Mendes，负 σ常数下边际外俘获（超）曲面的刚性，《美国数学学会汇刊》**372** （2019），第8期，5851–5868。MR 4014296 23. Richard Schoen 和 丘成桐，正标量曲率与极小超曲面奇点，预印本，https://arxiv.org/abs/1704.05490 （2017）。

美国佛罗里达州科勒尔盖布尔斯，迈阿密大学数学系。电子邮箱地址：galloway@math.miami.edu

巴西阿拉戈阿斯州马塞约，阿拉戈阿斯联邦大学数学研究所。电子邮箱地址：abraao.mendes@im.ufal.br