arXiv:2301.00644v1 [math.HO] 28 Dec 2022

Beatty 数列第 n项为偶数的等价条件

Sela Fried*
friedsela@gmail.com

摘要

我们给出了 nBeatty 数列$B_{\sqrt{2}}$ 第项为偶数的等价条件。特别地，我们证明，在线整数数列百科全书中的整数数列A090892 与A120752本质上相同。

1 引言

Beatty 数列是通过对正无理数的正倍数取下整而得到的整数数列。也就是说，若 $r > 0$ 是无理数，则相应的 Beatty 数列 B_r 定义为

$$B_r = (\lfloor nr \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Beatty 数列以 Samuel Beatty 命名。他曾在《美国数学月刊》上提出一个问题，使这类数列引起数学界的关注。 [1], 该刊读者受邀证明，若 $r > 1$ 是无理数，且 $s = r/(r-1)$，那么 B_r 和 B_s 是互补数列，也就是说，每个自然数恰好属于这两个数列中的一个。

据我们所知，人们对 Beatty 数列各项的奇偶性关注甚少。下图展示了 10^5 项 $B_{\sqrt{2}}$ 的奇偶序列（参见A083035 在线整数数列百科全书（OEIS） [2]）。该图采用一种简单却巧妙的方法，可用于可视化任意二进制序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$：从

*作者是以色列拉马特甘以色列学术学院计算机科学系的教学研究员。

位于 (0，0)，面朝向量 (1，0) 所指的方向。现在，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，执行以下两个动作：(a) 如果 $a_n = 0$，则右转，否则左转。(b) 向前走一步，步长为单位长度。

这一过程的结果是平面上的一条行走，我们将其称为的 *Cloitre* 行走(a_n)$_{n\in\mathbb{N}}$，因为 Benoit Cloitre 似乎是第一个使用这种方法的人。

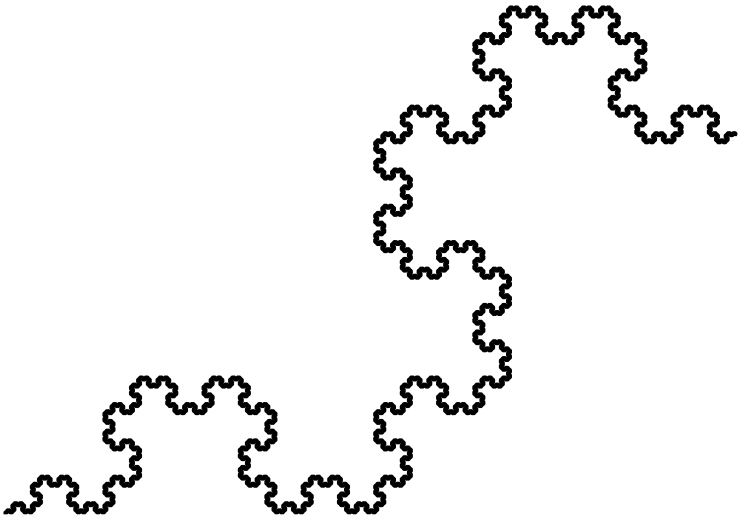

图1：与以下奇偶性序列相对应的 A083035的 Cloitre 行走：$B_{\sqrt{2}}$。

在这篇简短的说明中，我们给出 n 个 Beatty 数列 $B_{\sqrt{2}}$ 的元素为偶数的若干等价条件。在此过程中，我们证明了 A090892 和 A120752 本质上完全相同，因为删除前一个数列的前两个元素后便得到后一个数列（参见 [3]）。

2 主要结果

我们用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集合，用 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分。本文旨在证明以下定理。

定理 2.1。 设 $2 \le n \in \mathbb{N}$。以下条件等价：

(a) $\lfloor \sqrt{2}n \rfloor$ 是偶数，即 *Beatty* 数列 $B_{\sqrt{2}}$ 的第 n 项是偶数。

(b) $\left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\} \le \frac{1}{2}$。 *(c)* $\left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\} < \frac{1}{2}$。 *(d)* $\left\lfloor \sqrt{2n} \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \left\lfloor \sqrt{2}n \right\rfloor \right\rfloor$。 *(e)* $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n^2 - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2} \right\rfloor$。 *(f)* $\left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\} < \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \frac{1}{2}} - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor$。

注 2.2. 条件（b）和（d）分别对应于 A120752和 A090892的定义。Cloitre 曾对A090892 作出评论，指出条件（a）和（d）等价。

我们将用到以下不等式。

引理 2.3. 设 x 为一个非负实数。则

$$\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} - x > \frac{1}{2}.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} - x &= \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} + x} \\
&> \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2}} + x} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}}{2x + \frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}}{2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right)} \\
&> \frac{x + \frac{1}{2}}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

定理 *2.1* 的证明。“(e) $\iff$ (f)”：我们有

$$\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n^2 - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2} \right\rfloor \iff \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor \le \sqrt{n^2 - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2} < \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + 1$$

$$\iff 2\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 \le n^2 < 2\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + 2\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + 1. \tag{1}$$

现在，由于

$$2\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 \le 2\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2 = n^2,$$

我们有

$$(1) \iff n^2 < 2\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + 2\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + 1. \tag{2}$$

记 $\left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\}$ 为 $\sigma_\circ$。因此，$\sigma \in [0,1)$ 且 $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor = \frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma_\circ$。于是

$$(2) \iff n^2 < 2\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma\right)^2 + 2\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma\right) + 1$$

$$\iff \sqrt{2}n(2\sigma - 1) < \overbrace{2\sigma^2 - 2\sigma + 1}^{>0 \text{ for every } \sigma}$$

$$\iff \left(\sigma \le \frac{1}{2}\right) \text{ or } \left(\sigma > \frac{1}{2} \text{ and } n < \frac{2\sigma^2 - 2\sigma + 1}{\sqrt{2}(2\sigma - 1)}\right). \tag{3}$$

Now,

$$\sigma > \frac{1}{2} \text{ and } n < \frac{2\sigma^2 - 2\sigma + 1}{\sqrt{2}(2\sigma - 1)} \iff \sigma > \frac{1}{2} \text{ and } \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor < \frac{1 - 2\sigma^2}{2(2\sigma - 1)}$$

$$\iff \sigma > \frac{1}{2} \text{ and } 2\sigma^2 + 4\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor \sigma - 1 - 2\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor < 0$$

$$\iff \frac{1}{2} < \sigma < \overbrace{\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \frac{1}{2}} - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor}^{> \frac{1}{2}, \text{ by Lemma } 2.3}.$$

因此，

$$(3) \iff \sigma < \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \frac{1}{2}} - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor.$$

“(b) $\iff$ (c)”：这很清楚。“(c) $\iff$ (d)”：记 $\left\{\sqrt{2}n\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\right\}$ 为 σ。因此，

$$\left\lfloor\sqrt{2}n\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\right\rfloor=\sqrt{2}n\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor-\sigma.$$

于是，

$$\begin{aligned}&\left\lfloor\sqrt{2}n\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\left\lfloor\sqrt{2}n\right\rfloor\right\rfloor\iff\\&\left\lfloor\sqrt{2}n\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\right\rfloor\le\frac{n}{\sqrt{2}}\left\lfloor\sqrt{2}n\right\rfloor<\left\lfloor\sqrt{2}n\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\right\rfloor+1\iff\\&n\left(2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor-\left\lfloor\sqrt{2}n\right\rfloor\right)\le\sqrt{2}\sigma\ \text{ and }\ \frac{n}{\sqrt{2}}\left(\left\lfloor\sqrt{2}n\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\right)<1-\sigma.\end{aligned}\tag{4}$$

容易看出，对于任意非负实数 x 和 $m\in\mathbb{N}$，都有

$$\lfloor x\rfloor-m\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\in\{0,1,\ldots,m-1\}.$$

特别地，

$$\left\lfloor\sqrt{2}n\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\in\{0,1\}.\tag{5}$$

(4) 中的第一个不等式显然成立。此外，由于$n\ge2$，若 $\left\lfloor\sqrt{2}n\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor=1$，则 (4) 中的第二个不等式不可能成立。因此我们得出

$$\begin{aligned}(4)&\iff\left\lfloor\sqrt{2}n\right\rfloor=2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\\&\iff2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\le\sqrt{2}n<2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor+1.\end{aligned}\tag{6}$$

不等式 $2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor\le\sqrt{2}n$ 显然成立。因此，

$$\begin{aligned}(6)&\iff\sqrt{2}n<2\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor+1.\\&\iff\frac{n}{\sqrt{2}}<\left\lfloor\frac{n}{\sqrt{2}}\right\rfloor+\frac{1}{2}\\&\iff\left\{\frac{n}{\sqrt{2}}\right\}<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

“(c) $\iff$ (f)”: 根据引理 2.3,

$$\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \frac{1}{2}} - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor > \frac{1}{2}$$

这样就证明了“$\Longrightarrow$”这一方向。对于另一个方向，我们需要证明不存在满足下式的 $2 \le n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} \le \left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\} < \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \frac{1}{2}} - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor. \tag{7}$$

令 $\sigma = \left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\}$，则有

$$\begin{aligned}
(7) &\iff \frac{1}{2} \le \sigma < \sqrt{\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma \right)^2 + \frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma + \frac{1}{2}} - \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma \right) \\
&\iff \frac{1}{2} + \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma \right) \le \sigma + \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma \right) < \sqrt{\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma \right)^2 + \frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma + \frac{1}{2}} \\
&\iff \left(\frac{n}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \sigma \right)^2 \le \frac{n^2}{2} < \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma \right)^2 + \frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma + \frac{1}{2} \\
&\iff 0 < \sigma^2 - \sqrt{2} n \sigma + \frac{n}{\sqrt{2}} - \sigma + \frac{1}{2} \le \frac{1}{4} \\
&\iff 0 < -\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right) \left(\frac{n}{\sqrt{2}} + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \frac{1}{2} \le \frac{1}{4} \\
&\iff 0 < \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \frac{1}{2}(1 - n^2) \le \frac{1}{4}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

现在，$\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor$ 和 $1 - n^2$ 都是整数。因此，(8) 中的两个不等式不可能同时成立。

“(a) $\iff$ (c)”：有

$$\left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\} < \frac{1}{2} \iff \frac{n}{\sqrt{2}} - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor < \frac{1}{2} \iff \sqrt{2} n - 2 \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor < 1.$$

由于

$$\left\lfloor \sqrt{2} n \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor \le \sqrt{2} n - 2 \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor,$$

利用（5），我们得出

$$\sqrt{2} n - 2 \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor < 1 \iff \left\lfloor \sqrt{2} n \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor = 0 \iff \left\lfloor \sqrt{2} n \right\rfloor \text{ is even.} \quad \square$$

参考文献

[1] S. Beatty，问题 3173，《美国数学月刊》，**3**（1926），159。

[2] N. J. A. Sloane，在线整数数列百科全书，OEIS 基金会 https://oeis.org。

[3] N. J. A. Sloane，本质相同数列族，https://oeis.org/A115004/a115004.txt，2021。