arXiv:2301.00649v1 [math.OC] 2 Jan 2023

关于一般 s-凸函数的若干刻画

Musavvir Ali[a], * 和 Ehtesham Akhter[b]

[a], [b] 印度阿里格尔阿里格尔穆斯林大学数学系，邮编 202002

[1] 电子邮箱：musavvir.alig@gmail.com（M. Ali），ehteshamakhter111@gmail.com（E. Akhter）。

摘要

已证明，一般 s-凸函数是一类新的广义凸函数。类似地，本文引入了一类新的一般 s-凸集，它是 s-凸集的推广。此外，本文讨论了一般情形和可微情形下的一般 s-凸函数的一些基本性质。除此之外，本文运用一般 s-凸性，为无约束规划和不等式约束规划定义并证明了最优性的充分判据。

关键词：一般 s-凸集，一般 s-凸函数，不等式，可微性，优化。

1 引言

鉴于凸性和广义凸性在研究数学规划最优性问题中的重要意义，研究人员对广义凸函数进行了广泛研究。例如，H. Hudzik 等人早期的研究 [9]提出了两种 s-凸性 $\{s \in (0,1)\}$，并证明当$\{s \in (0,1)\}$时，第二种概念在本质上强于第一种意义下的 s-凸性。Youness 提出的 E-凸集和 E-凸函数分别是一类集合和一类函数，[6]其定义放宽了凸集和凸函数的定义。X.M. Yang [22] 给出了 Youness 论文中的若干实例 [6] 并对其进行了改进。有关广义 E-凸函数的更多研究成果，参见[5, 3] 及其中直接相关的参考文献。

近年来，这类广义凸函数引起了研究人员的广泛关注，尤其是对 b-预不变函数的研究。X.J. Long 等人[21] 讨论了一类函数。半预不变凸函数和 b-凸函数的一种推广称为半-b-预不变凸函数。Yu-Ru Syau 等人[23]提出了一类称为 E-b-凸函数的函数，它是 b-凸函数和 E-凸函数的推广。Emam[20], 研究了一类新的函数，称为近似 b-预不变函数，探讨了它的一些性质，并得出了利用这类函数进行非线性规划的适当最优性条件。M.T. Chao 等人2012 [16], 研究了一族次-b-凸集和新型广义次 b-凸函数，并给出了无约束和不等式约束次-b-凸规划最优性的必要条件。关于广义凸函数的更多详情，参见[18, 4]。通过相关研究，诸如 b-预不变函数等广义凸函数得以发展。通过相关研究，诸如 b-预不变函数等广义凸函数得以发展。与此同时，我们发现了一类比这两种广义凸函数更广泛的广义凸函数；它并非次-b-凸函数，却具有它们的一些性质。由于次-b-凸性和 s-凸性是凸性的推广，它们引发了我们对新研究的兴趣，因此我们将重点研究这一问题。

本文旨在引入一类称为一般 s-凸函数的广义凸函数，并探讨满足一般 s-凸性的函数类的一些特征。本文受到研究成果 [9, 16, 10] 的启发。此外，我们为在一般 s- 凸性下得到的最优性规划提供了充分的指导，该规划既包括无约束情形，也包括不等式约束情形。

本文其余部分安排如下。第 2 节进一步阐述一般 s-凸性的概念，并介绍一类称为一般 s-凸函数的新函数类。随后，我们引入一类称为一般 s-凸集的新集合类，并讨论所构建的一般 s-凸函数的一些特征，包括一般 s-凸集。第 3 节介绍新的广义 s-凸规划，并建立一般 s-凸性下最优性的充分条件。

2 基本结果

本节开头回顾了函数的次-b-凸性、 s-凸性和次-b-s-凸性的定义。根据 M.T. Chao 等人 [16], 的

次-b-凸函数类如下。设 $\aleph$ 是 $\mathrm{R^m}$ 中的一个凸集，且在全文中均非空。

.

定义2.1。 [16]实值函数 $\hbar$在 $\aleph$ 相对于（简称 W.R.T.）映射 $b:\ \aleph\times\aleph\times[0,1]\to \mathrm{R}$ 称为 次-b-凸，如果

$$\hbar(\sigma b_1+(1-\sigma)b_2)\leq \sigma\hbar(b_1)+(1-\sigma)\hbar(b_2)+b(b_1,b_2,\sigma)$$

成立 $\forall\ b_1,b_2\in P$且 $\sigma\in[0,1]$.

定义2.2。[9]实值函数 $\hbar$在 $\aleph$ 称为 s-凸的第二意义，如果

$$\hbar(\sigma b_1+(1-\sigma)b_2)<\sigma^s\hbar(b_1)+(1-\sigma)^s\hbar(b_2)$$

成立 $\forall\ b_1,b_2\in P,\sigma\in[0,1]$，且对某个固定的 $s\in(0,1]$.

定义2.3。 [11]实值函数 $\hbar$ 在 $\aleph$ 相对于映射 $b:\aleph\times\aleph\times[0,1]\to$R，称为第二意义下的次-$b$-$s$-凸函数，如果

$$\hbar(\sigma b_1+(1-\sigma)b_2)<\sigma^s\hbar(b_1)+(1-\sigma)^s\hbar(b_2)+b(b_1,b_2,\sigma)$$

成立 $\forall\ b_1,b_2\in P,\sigma\in[0,1]$，且对某个固定的 $s\in(0,1]$.

受定义 2.1、2.2 和2.3的启发，我们给出了以下一般s-凸函数的新概念。

定义2.4. 关于函数 $\vartheta:\aleph\times[0,1]\to \mathrm{R}$，定义在 $\aleph$ W 上的实值函数 $\hbar$，若满足以下条件，则称为一般 s-凸函数:

$$\hbar(\sigma b_1+(1-\sigma)b_2)\leq\sigma^s[\hbar(b_1)+\vartheta(b_1,\sigma)]+(1-\sigma)^s[\hbar(b_2)+\vartheta(b_2,\sigma)]+\vartheta(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma)\quad(2.1)$$

成立，其中 $\forall\ b_1$、 $b_2\in P$、 $\sigma\in[0,1]$，且对于某个固定的 $s\in(0,1]$.

注2.1. 若取 $\vartheta(b_1,\sigma)=0$，则一般 s-凸函数变为第二意义下的 s-凸函数。另一方面，若取 $\vartheta(b_1,\sigma)=0$ 和 $s=1$，则一般 s-凸函数变为凸函数。

定理2.5. 假设 $\hbar_1,\hbar_2:\aleph\to \mathrm{R}$ 是关于相同映射 $\vartheta:\aleph\times[0,1]\to \mathrm{R}$ 的一般 s-凸函数，则 $\hbar_1+\hbar_2$ 和 $\alpha\hbar_1(\alpha\geq 0)$ 是关于相同映射的一般 s-凸函数。

推论 2.5.1. 假设 $\hbar_k$: $\aleph \to$ R, ($k = 1, 2, ..., n$) 分别是关于相同映射 ϑ_k: $\aleph \times [0,1] \to$ R, ($k = 1, 2, ..., n$) 的一般 s-凸函数，则函数

$$\hbar = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \hbar_k, (\alpha_k \geq 0), (k = 1, 2, ..., n)$$

是关于映射 $\vartheta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \vartheta_k$ 的一般 s-凸函数，($k = 1, 2, ..., n$)。

命题 2.6. 假设 $\hbar_k$: $\aleph \to$ R, ($k = 1, 2, 3, ..., n$) 分别是关于同一映射 ϑ_k: $\aleph \times [0,1] \to$ R, ($k = 1, 2, ..., n$) 的一般 s-凸函数，则函数 $\hbar = \max\{\hbar_i, k = 1, 2, ..., n\}$ 是关于映射 $\vartheta = \max\{\vartheta_k, k = 1, 2, ..., n\}$ 的一般 s-凸函数。

定理 2.7. 假设 $\hbar_1 : \aleph \to$R 是关于映射 $\vartheta : \aleph \times [0,1] \to$ R 的一般 s-凸函数，且另一个函数 $\hbar_2 :$ R $\to$ R 既是线性的又是非递减的，则 $\hbar_2 \circ \hbar_1$ 是关于映射$\hbar_2 \circ \vartheta.$ 的一般 s-凸函数

现在，我们介绍如下的一般 s-凸集理论。

定义 2.8. 设 $\aleph_1$ 是 $\mathbf{R^{m+1}}$ 的一个非空子集。那么，集合 $\aleph$ 关于映射 $\vartheta :$ R $^{\mathbf{m}} \times [0,1] \to$ R 是一般 s-凸集，当

$$(\sigma b_1 + (1-\sigma)b_2,\ \sigma^s[\alpha + \vartheta(b_1, \sigma)] + (1-\sigma)^s[\beta + \vartheta(b_2, \sigma)] + \vartheta(\frac{b_1 + b_2}{2}, \sigma)) \in \aleph$$

对 $\forall$ (b_1, α)、(b_2, β) $\in \aleph_1, b_1, b_2 \in \mathbf{R^m}, \sigma \in [0,1]$ 成立，并且对某个固定的 $s \in (0,1]$。

这里，我们用其上图集$E(\aleph)$刻画一般 s-凸函数，具体如下:

$$E(\hbar) = \{(b, \beta) : b \in \aleph, \beta \in \mathbf{R}, \hbar(b) \leq \beta\}$$

定理 2.9. 函数 $\hbar : \aleph \to$ R 关于映射$\vartheta : \aleph \times [0,1] \to$ R 是一般 s-凸的，当且仅当 $\iff$ $E(\hbar)$ 关于 ϑ 是一般 s-凸集。

命题 2.10. 假设 $\aleph_i$ 是关于同一映射 ϑ 的一族一般 s-凸集，那么 $\cap_{i \in I} \aleph_i$ 也是关于映射 ϑ 的一般 s-凸集。

证明。取 (b_1, β_1)、(b_2, β_2) $\in \cap_{i \in I} \aleph_i$，那么对于任意 $i \in I$，(b_1, β_1)、(b_2, β_2) $\in \aleph_i$。由于$\aleph_i$ 是关于映射 ϑ 的一般 s-凸集，因此对于某个 $s \in (0,1]$ 和 $\forall \sigma \in [0,1]$，可得

$$(\sigma b_1 + (1-\sigma)b_2,\ \sigma^s[\beta_1 + \vartheta(b_1, \sigma)] + (1-\sigma)^s[\beta_2 + \vartheta(b_2, \sigma)] + \vartheta(\frac{b_1 + b_2}{2}, \sigma)) \in \aleph_i,$$

对于任意 $i \in I.$。因此,

$$(\sigma b_1 + (1-\sigma)b_2,\ \sigma^s[\beta_1 + \vartheta(b_1,\sigma)] + (1-\sigma)^s[\beta_2 + \vartheta(b_2,\sigma)] + \vartheta(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma)) \in \cap_{i\in I}\aleph_i.$$

因此, $\cap_{i\in I}\aleph_i$ 是关于映射 ϑ 的一般 s-凸集, 证明完成。

□

命题 2.11. 若 $\{\hbar_i : i \in K\}$是一族任意函数, 且所有 $\hbar_i$ 都是关于共同映射 ϑ的一般 s-凸函数, 则任意函数$\hbar = \sup_{i\in K} \hbar_i(b_1)$ 是关于共同映射 ϑ的一般 s-凸函数。

3 主要结果

在本节中, 我们假设 $\hbar$ 是关于映射 ϑ可微且为一般 s-凸的函数。此外, 我们取映射 $\vartheta(b,\sigma)$, 使得 $\vartheta(b,\sigma)\,\sigma$ 有定义。

此外, 我们假设极限 $\lim_{\sigma\to 0^+}$ $\vartheta(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma)\,\sigma$ 存在, 且该极限是 $\vartheta\left(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma\right) - \vartheta(b_2,\sigma) - o(h)$

σ $\forall\sigma \in (0,1]$ 与固定的 $b_1, b_2 \in \aleph$ 的最大值

定理 3.1. 假设非负可微函数 $\hbar : \aleph \to \mathbb{R}$ 关于映射 ϑ 是一般 s-凸的。则

$$\begin{aligned}
(a)\nabla\hbar(b_2)^T(b_1-b_2) &\le \sigma^{s-1}[\hbar(b_1)+\hbar(b_2)+\vartheta(b_1,\sigma)+\vartheta(b_2,\sigma)] + \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma)}{\sigma}\\
(b)\nabla\hbar(b_2)^T(b_1-b_2) &\le \sigma^{s-1}[\hbar(b_1)-\hbar(b_2)+\vartheta(b_1,\sigma)-\vartheta(b_2,\sigma)]\\
&\quad + \frac{\hbar(b_2)}{\sigma} + \frac{\vartheta(b_2,\sigma)}{\sigma} + \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta\left(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma\right)}{\sigma}
\end{aligned}$$

定理 3.2. 假设非负可微函数 $\hbar : \aleph \to \mathbb{R}$ 关于非正映射 ϑ 是一般 s-凸的。那么

$$\nabla\hbar(b_2)^T(b_1-b_2) \le \sigma^{s-1}[\hbar(b_1)-\hbar(b_2)+\vartheta(b_1,\sigma)-\vartheta(b_2,\sigma)] + \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma)}{\sigma}$$

推论 3.2.1. 假设非负可微函数 $\hbar:\aleph\to \mathrm{R}$ 关于映射 ϑ 是一般 s-凸的。那么

$$\begin{aligned}\nabla(\hbar(b_2)-\hbar(b_1))^T(b_1-b_2) \;\leq\; & \frac{\hbar(b_1)}{\sigma}+\frac{\hbar(b_2)}{\sigma}+\frac{\vartheta(b_2,\sigma)}{\sigma}+\frac{\vartheta(b_2,\sigma)}{\sigma}\\ & +2\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma)}{\sigma}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

如果 $\hbar$ 是负函数且 ϑ 是非正映射，那么

$$\nabla(\hbar(b_2)-\hbar(b_1))^T(b_1-b_2) \;\leq\; 2\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma)}{\sigma}.\tag{3.2}$$

现在我们将上述相关结论应用于非线性规划。首先，考虑无约束问题 (S)。

$$(S):\min\{\hbar(b),b\in\aleph\}\tag{3.3}$$

定理 3.3. 设 $\hbar$ 是定义在$\aleph$ 上的实值非负可微函数，并且是与映射 ϑ相关联的一般 s-凸函数。若 $b_2\in\aleph$ 且不等式

$$\nabla\hbar(b_2)^T(b_1-b_2)-\frac{\hbar(b_2)}{\sigma}-\frac{\vartheta(b_2,\sigma)}{\sigma}-\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta\left(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma\right)}{\sigma} \;\geq\; \sigma^{s-1}[\vartheta(b_1,\sigma)-\vartheta(b_2,\sigma)]\tag{3.4}$$

成立，其中 $\forall b_1\in\aleph$、 $\sigma\in[0,1]$ 以及某个固定的 $s\in(0,1],$，那么 b_2是与 $\hbar$ 在 $\aleph$上的最优化问题 (S) 的最优解。

现在来看下一个一般 s-凸规划无约束问题

$$S:\min\{\hbar(b),b\in[1,\infty)\}\tag{3.5}$$

其中 $\hbar(b)=[(b-1)^2+(b-1)]^s$，其中 s 是 (0, 1) 内的一个固定数，且 $\vartheta(b,\sigma)=\sigma(2b+6)$。设 $\hbar$ 为与映射 ϑ 相关联的非负可微一般 s-凸函数，并且对于固定的 b_1, $b_2\in[1,\infty)$ 和 $\sigma\in(0,1]$，极限 $\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta\left(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma\right)}{\sigma}$ 存在。经过计算，我们得到

$$\nabla\hbar(b^*)^T(b_1-b^*)=s[(b^*-1)^2+(b^*-1)]^{s-1}(2(b^*-1)+1)(b_1-b^*)$$

$$\frac{\hbar(b_1)}{\sigma}=\frac{[(b-1)^2+(b-1)]^s}{\sigma}$$

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta\left(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma\right)}{\sigma}=b_1-b^*$$

容易看出，在 $b^*=1$ 处，不等式

$$\nabla\hbar(b_2)^T(b_1-b_2)-\frac{\hbar(b_2)}{\sigma}-\frac{\vartheta(b_2,\sigma)}{\sigma}-\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta\left(\frac{b_1+b_2}{2},\sigma\right)}{\sigma}\quad\geq\quad\sigma^{s-1}[\vartheta(b_1,\sigma)-\vartheta(b_2,\sigma)]$$

成立 $\forall b_1\in[1,\infty)$ $\sigma\in(0,1]$ 以及某个固定数 $s\in(0,$ **1)**。因此，根据定理 3.3，在 $b_1=1$处， $\hbar(b_1)$ 取得最小值。

推论 3.3.1。 假设 $\hbar$ 是定义在 $\aleph$ 上的一个实值非负可微函数，并且是与映射 ϑ相关联的严格一般 s-凸函数。如果条件 *3.4* 满足且 $b_2\in\aleph$，那么 b_2 是唯一的最优解。

所得结果随后以下列方式应用于带有不等式约束的非线性规划:

$$(S_p):\min\{\hbar(b)|b\in\mathbf{R^m},\ b\in\aleph,f_i(b)\leq 0,i\in I\},I=\{1,2,3,....,n\}\tag{3.6}$$

令 $E=\{b\in\mathbf{R^m}:\ f_i(b)\leq 0,i\in I\}$。为便于说明，我们假设 $\hbar$和 f_i 均可微，并且 E 是 $\mathbf{R^m}$中的非空集合。

定理 3.4。 { Karush-Kuhn-Tucker 充分条件} 令 $\hbar:\mathbf{R^m}\to\mathbf{R}$ 是一个非负可微一般 s-凸函数，并且与映射$\vartheta:\mathbf{R^m}\times(\mathbf{0},1]\to\mathbf{R}$ 相关联； $f_i:\mathbf{R^m}\to\mathbf{R}$ $(i\in I)$ 是与映射 $\vartheta_i:\mathbf{R^m}\times(\mathbf{0},1]\to\mathbf{R}$ $(i\in I)$ 相关联的可微一般 s-凸函数。令 $b^*\in E$是（S_p）的 KKT 点，即存在 $\exists$ 乘子 $v_i\geq 0$ $(i\in I)$ 使得

$$\nabla\hbar(b^*)+\sum_{i\in I}v_i\nabla f_i(b^*)=0,\quad v_if_i(b^*)=0.\tag{3.7}$$

假设不等式

$$\begin{aligned}\frac{\phi(b^*)}{\sigma}+\frac{\vartheta(b^*,\sigma)}{\sigma}+\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta\left(\frac{t_1+b^*}{2},\sigma\right)}{\sigma}\quad\leq\quad&-\sum_{i\in I}v_i\lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\vartheta\left(\frac{t_1+b^*}{2},\sigma\right)}{\sigma}\\&-2\sigma^{s-1}[\vartheta(t_1,\sigma)-\vartheta(b^*,\sigma)],\end{aligned}\tag{3.8}$$

hol对于所有 b、$b^*\in\mathcal{R}^m$，若 ds 成立，则 b^* 是问题（S_p）的一个最优解。

参考文献

[1] A. Iqbal 和 A. Hussain，强 E-不变凸集和强 E-预不变凸函数的非线性规划问题。RAIRO-运筹学，56(3)，(2022)，第1397–1410页。[2] A. Kashuri、R.P. Agarwal、P.O. Mohammed、K. Nonlaopon、K.M. Abualnaja 和 Y.S. Hamed，新的广义凸函数类及一些相关积分不等式。Symmetry，14(4)，(2022)，第722页。[3] C. Fulga 和 V. Preda，具有 E-预不变凸函数和局部 E-预不变凸函数的非线性规划。《欧洲运筹学杂志》，192(3)，(2009)，第737–743页。[4] C. Z˘alinescu，不变凸性的批判性审视。《优化理论与应用杂志》，162(3)，(2014)，第695–704页。[5] D.I. Duca 和 L. Lup¸sa，关于 E-凸函数的 E-上图。《优化理论与应用杂志》，129(2)，(2006)，第341–348页。[6] E.A. Youness，E-凸集、E-凸函数和 E-凸规划。《优化理论与应用杂志》，102(2)，(1999)，第439–450页。[7] F. Shi、G. Ye、W. Liu 和 D. Zhao，cr-h-凸性及 cr-h-凸函数的一些不等式。Filomat，(2022)。[8] G. Wang 和 Y. He，反双曲余弦函数的广义凸性。Miskolc Mathematical Notes，19(2)，(2018)，第873–881页。[9] H. Hudzik 和 L. Maligranda，关于 s-凸函数的一些评述。Aequationes mathematicae，48(1)，(1994)，第100–111页。[10] I.M. Stancu-Minasian，涉及半局部 B-预不变凸函数及相关函数的非线性规划中的最优性与对偶性。《欧洲运筹学杂志》，173(1)，(2006)，第47–58页。[11] J. Liao 和 T. Du，关于次 b-s-凸函数的若干刻画。Filomat，30(14)，(2016)，第3885–3895页。[12] K. Mahreen 和 H. Budak，基于 h-凸性的广义中点分数阶积分不等式。Filomat，35(11)，(2021)，第3821–3832页。[13] M. Alomari、M. Darus 和 S.S. Dragomir，带有应用的 s-凸函数 Simpson 型新不等式。Research report collection，(2009)，12(4)。[14] M. Fakhar、M.R. Mahyarinia 和 J. Zafarani，广义凸性下非光滑稳健多目标优化及其在投资组合中的应用

优化。《欧洲运筹学杂志》，265(1)，(2018)，第39–48页。[15] M.H. Alizadeh 和 J. Mak´o，论 e-凸性。Miskolc Mathematical Notes，23(1)，(2022)，第51–60页。[16] M.T. Chao、J.B. Jian、D.Y. Liang，次b-凸函数与次b-凸规划。《运筹学学报（中国）》，16，(2012)，第1–8页。[17] O. Almutairi 和 A. Kili¸cman，分形集上的广义 (h-m)-凸性所导出的广义 Fej´ér–Hermite–Hadamard 型不等式及其应用。《混沌、孤子与分形》，(2021)，147，文章编号110938。[18]S.K. Mishra、R.N. Mohapatra 和 E.A. Youness，半E–b-vex函数的一些性质。《应用数学与计算》，217(12)，(2011)，第5525–5530页。[19] T. Du、H. Wang、M.A. Khan 和 Y. Zhang，. 关于分形集上广义 m-凸性的一些积分不等式及其应用。《分形》，27(07)，(2019)，文章编号1950117。[20] T. Emam，粗略B-invex规划问题。《Calcolo》，48(2)，(2011)，第173–188页。[21] X.J. Long 和 J.W. Peng，半B-preinvex函数。《优化理论与应用杂志》，131(2)，(2006)，第301–305页。[22] X.M. Yang，论E-凸集、E-凸函数和E-凸规划。《优化理论与应用杂志》，109(3)，(2001)，第699页。[23] Y.R. Syau、L. Jia 和 E.S. Lee，E-凸函数与B-vex函数的推广。《计算机与数学及其应用》，58(4)，(2009)，第711–716页。[24] Y.X. Zhao、S.Y. Wang 和 L. Coladas Uria，r-凸函数的刻画。《优化理论与应用杂志》，145(1)，(2010)，第186–195页。