arXiv:2301.00654v1 [math.AP] 2 Jan 2023

随机趋化-纳维–斯托克斯模型解的存在性与唯一性

E. HAUSENBLAS*、B. JIDJOU MOGHOMYE* 和 P. A. RAZAFIMANDIMBY**

* 数学与信息技术系，莱奥本矿业大学，莱奥本，Franz Josef Strasse 18，8700 莱奥本，奥地利** 数学科学学院，都柏林城市大学，Collins Avenue，Dublin 9，爱尔兰

摘要。本文研究一个数学系统，该系统描述了随机扰动下，二维有界区域内流动的水生流体中，氧气驱动的游动细菌群体行为的动态。该模型可视为趋化-纳维-斯托克斯模型的随机版本。我们证明了概率意义下唯一强解的存在性。此外，我们还建立了强解的一些性质。具体而言，我们证明唯一解非负，并满足质量守恒性质和能量不等式。

1. 引言

在涉及好氧细菌的生物学应用中，人们观察到细菌细胞会迁移到化学物质浓度较高的区域。这种现象称为趋化性，被认为会对细菌种群的时间演化产生深远影响。根据细菌和化学物质的种类不同，趋化性的概念也有所差异。本文聚焦于一个数学模型，该模型描述了氧驱动的细菌悬浮液在水这类不可压缩流体中游动；这一模型最早由[39]提出。该系统主要由三个相互耦合的偏微分方程组成。第一个方程描述流体流动，其速度场为$\mathbf{u}$。第二个方程描述氧浓度 c的动态变化，最后一个方程描述细菌种群密度 n 的动态变化。现在，这个耦合模型可以写成

$$\begin{cases} d\mathbf{u} + [(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla P - \eta\Delta\mathbf{u}]\,dt = n\nabla\Phi dt \ \text{ in } \ [0,T]\times\mathcal{O}, \\ dc + \mathbf{u}\cdot\nabla c dt = [\mu\Delta c - nf(c)]\,dt \ \text{ in } \ [0,T]\times\mathcal{O}, \\ dn + \mathbf{u}\cdot\nabla n dt = [\delta\Delta n - \nabla\cdot(n\chi(c)\nabla c)]\,dt \ \text{ in } \ [0,T]\times\mathcal{O}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \ \text{ in } \ [0,T]\times\mathcal{O}, \\ n(0) = n_0, \quad c(0) = c_0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \qquad \text{in} \qquad \mathcal{O}. \end{cases} \tag{1.1}$$

除了未知量 $\mathbf{u}$、 c、 n 外，我们还有标量压力 P。正数 T是最终观测时间， $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2$ 是细胞与流体运动并相互作用的区域。正数常数 η、 μ和 δ 分别是相应的扩散系数

日期：2023年1月3日。2000年数学主题分类：35R60、35Q35、60H15、76M35、86A05。关键词和短语：纳维–斯托克斯方程组；趋化性；随机的；概率弱解；强解。

，分别对应流体、氧气和细菌。给定函数 χ 和 f 分别表示趋化敏感性和氧气消耗率。符号 Φ 表示给定的时间无关势函数，例如代表引力或离心力。

系统（1.1）的数学分析已由多位作者进行研究。弱解的存在性和唯一经典解的存在性已得到证明，例如参见 [9, 10, 15, 16, 18, 25, 36, 37, 42, 43]及其中的参考文献。在$d = 2$的情况下，关于（1.1）在不含非线性对流项 $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ 时的全局弱解存在性已在 [16, 36, 37] 以及带有非线性扩散的 [18] 中获得。在各种关于数据的假设下弱解的全局存在性可见于 [15, 25]；光滑解的全局存在性已在 [10, 42]中得到证明。关于经典解存在性的结果见 [9, 16, 43]。

固定 $T > 0$。本文关注二维有界区域内问题（1.1）的随机版本的数学分析。更准确地说，给定一族相互独立、同分布的标准实值布朗运动 $\{\beta^k\}_{k=1,\ 2}$，以及一族在固定可分希尔伯特空间 $\mathcal{U}$ 上演化、定义于某个滤过概率空间上的柱状维纳过程 W $(\Omega\ \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\ T]}, \mathbb{P})$，我们考虑以下系统

$$
\begin{cases}
d\mathbf{u} + \left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla P - \eta\Delta\mathbf{u}\right]dt = n\nabla\Phi dt + g(\mathbf{u}, c)dW_t \ \text{ in } \ [0,T]\times\mathcal{O},\\
dc + \mathbf{u}\cdot\nabla c dt = \left[\mu\Delta c - nf(c)\right]dt + \gamma\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\cdot\nabla c\circ d\beta_t^k \ \text{ in } \ [0,T]\times\mathcal{O},\\
dn + \mathbf{u}\cdot\nabla n dt = \left[\delta\Delta n - \nabla\cdot(n\chi(c)\nabla c)\right]dt \ \text{ in } \ [0,T]\times\mathcal{O},\\
\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \ \text{ in } \ [0,T]\times\mathcal{O},\\
\frac{\partial n}{\partial\nu} = \frac{\partial c}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{on} \qquad [0,T]\times\partial\mathcal{O},\\
\mathbf{u} = 0 \qquad \text{on} \qquad [0,T]\times\partial\mathcal{O},\\
n(0) = n_0, \quad c(0) = c_0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \qquad \text{in} \qquad \mathcal{O},
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

其中 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\mathcal{O}$ 的有界区域，正数常数 γ 是噪声强度。符号 $\circ$表示随机微分是在 Stratonovich意义下理解的。确定性模型（1.1）与随机模型（1.2）之间的主要区别在于存在 $g(\mathbf{u}\ c)dW_t$ 和 $\gamma\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\cdot\nabla c\circ d\beta_t^k$这些被称为噪声项的项。这些噪声项的存在降低了速度场和氧气浓度在时间上的正则性，因此使数学分析更加复杂。

我们的研究旨在为理解自然界中固有存在的小尺度扰动（例如水或空气受到的随机污染）的影响提供可靠的数学分析（见 [11, 29]）。这些随机扰动的存在可能会引发新的重要现象。事实上，在二维情形下，许多模型（例如 Navier-Stokes方程、Oldroyd-B 型模型、Landau-Lifshitz-Bloch方程，以及具有充分退化噪声的磁流体力学模型）都具有唯一的不变测度，因此表现出遍历行为，也就是说，一个解的时间平均等于对所有可能初始数据取平均所得的结果。尽管过去 30 年来人们持续进行研究，这些方程的确定性对应版本迄今尚未发现具有这一性质。该性质有望帮助我们深入理解湍流的本质。据我们所知，唯一研究

趋化-流体相互作用模型随机版本的数学分析的论文是 [44, 45]，作者在某个有界区域上证明了模型（1.2）的温和解和弱解均存在，其中区域为二维或三维，且数据满足一些较强的假设。

本文旨在研究正参数 η、 μ γ 和 δ 均非零时，问题（1.2）的整体可解性。我们证明了在二维有界区域中概率强解的存在性与唯一性。证明基于伽辽金格式和山田-渡边定理。需要指出的是， c方程中噪声的存在使模型的数学分析更加复杂。事实上， c方程中的噪声项使得无法像文献中那样应用确定性最大值原理方法来证明解的非负性。此外，我们从 [14] 中借鉴的最大值原理随机版本需要加以调整，才能保持解的正性。我们的工作与 [44]的主要区别在于， [44] 中考虑的模型在 c方程中不含任何噪声，且 $\mathbf{u}$方程中的噪声项仅依赖于速度场$\mathbf{u}$。因此，本文可视为对 [44]的推广。

本文的组织结构如下。第 2 节定义各种函数空间，并介绍全文中使用的假设。第 3 节陈述并证明主要结果，即概率强解的存在唯一性。第 4 节详细证明若干对证明主要结果有用的重要结论。第 5 节证明强解的质量守恒性质和非负性。此外，我们还证明一个能量不等式，该不等式可能有助于未来对不变测度的研究。

2. 模型的函数空间设定与假设

全文中，我们假设 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ 是一个边界 $\partial\mathcal{O}$属于 C^∞类的有界区域。符号 $L^p(\mathcal{O})$ 表示关于勒贝格测度的 L^p 空间，而 $W^{m,p}(\mathcal{O})$ 表示由分布导数阶数不超过 m 且属于 $L^p(\mathcal{O})$ 的函数组成的索об列夫空间。函数空间 $\phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ ，其中 ϕ 的每个分量都属于 $L^p(\mathcal{O})$ 或 $W^{m,p}(\mathcal{O})$ ，分别记作 $\mathbb{L}^p(\mathcal{O})$ 或 $\mathbb{W}^{m,p}(\mathcal{O})$。我们用 $|.|_{L^p}$表示 $L^p(\mathcal{O})$或 $\mathbb{L}^p(\mathcal{O})$上的范数，用$\|.\|_{W^{m,q}}$表示 $W^{m,p}(\mathcal{O})$或$\mathbb{W}^{m,p}(\mathcal{O})$上的范数。对于 $p = 2$ ，函数空间 $W^{m,2}(\mathcal{O})$（分别为 $\mathbb{W}^{m,2}(\mathcal{O})$）记作 $H^m(\mathcal{O})$（分别为 $\mathbb{H}^m(\mathcal{O})$），其范数记作 $|\cdot|_{H^m}$。 $\mathbb{H}^1_0(\mathcal{O})$ 表示 $\mathbb{H}^1$ 中在边界 $\partial\mathcal{O}$ 上为零的函数空间。 $L^2(\mathcal{O})$ 上的内积记作 $(\cdot,\cdot)$。沿用纳维 - 斯托克斯模型中使用的记号 [38] ，我们引入以下空间 $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in C_c^\infty(\mathcal{O};\mathbb{R}^2)$ ，使得 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$，并将空间 H 和 V 分别定义为 $\mathcal{V}$ 在 $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$ 和 $\mathbb{H}^1_0(\mathcal{O})$中的闭包。我们赋予 H以 $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$的标量积和范数。通常，我们在空间 V 上使用梯度标量积和梯度范数 $|\nabla\cdot|_{L^2}$，它等价于 $\mathbb{H}^1_0(\mathcal{O})$-范数。通常， $\mathcal{P}$ 表示从 $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$ 到 H的亥姆霍兹投影。众所周知，V 在 H 中稠密，且该嵌入连续且紧。将 H 与其对偶空间等同后，我们得到盖尔范德三元组 $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$。

我们在 $L^2(\mathcal{O})$ 上定义纽曼拉普拉斯算子 $A_1\phi = -\Delta\phi$ ，对所有 $\phi \in D(A_1)$，其中

$$D(A_1) = \{\phi \in H^2(\mathcal{O}) : \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, \text{ on } \partial\mathcal{O}\}.$$

众所周知， A_1 是 $L^2(\mathcal{O})$中的非负自伴算子。由于我们考虑的是有界区域， A_1 具有紧预解式，参见例如[7]。因此，存在 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\mathcal{O})$ 的标准正交基 $L^2(\mathcal{O})$ ，其由诺伊曼拉普拉斯算子的特征函数构成A_1。此外，我们有稠密紧嵌入 $H^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{O})$。

现在我们定义 Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 如下:

$$\mathcal{H} = H \times H^1(\mathcal{O}),$$

赋予其标量积，其对应的范数定义为

$$|(\mathbf{u}, c)|_{\mathcal{H}}^2 = |\mathbf{u}|_{L^2}^2 + |c|_{H^1}^2, \quad (\mathbf{u}, c) \in \mathcal{H}.$$

我们分别引入双线性算子 B_0、 B_1 和 R_2 及其对应的三线性型b_0、 b_1 和 r_2 ，如下所示:

$$(B_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w}) = \int_{\mathcal{O}} [(\mathbf{u}(x) \cdot \nabla)\mathbf{v}(x)] \cdot \mathbf{w}(x) dx = b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{w} \in V,$$

$$(B_1(\mathbf{u}, c), \psi) = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{u}(x) \cdot \nabla c(x) \psi(x) dx = b_1(\mathbf{u}, c, \psi), \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad c \in H^1(\mathcal{O}), \quad \psi \in H^1(\mathcal{O}),$$

$$\begin{aligned}(R_2(n, c), \psi) &= \int_{\mathcal{O}} \nabla \cdot (n(x) \nabla c(x)) \psi(x) dx \\ &= -\int_{\mathcal{O}} n(x) \nabla c(x) \cdot \nabla \psi(x) dx = r_2(n, c, \psi), \quad \forall n \in L^2(\mathcal{O}), \quad c \in H^1(\mathcal{O}), \quad \psi \in H^3(\mathcal{O}).\end{aligned}$$

众所周知，在 [38，第二章第1节2] 中，算子 B_0 是良定义的。对于 $\mathbf{u} \in V$、 $c \in H^1(\mathcal{O})$ 和 $\psi \in H^1(\mathcal{O})$ ，算子 B_1 也是良定义的，因为根据 H¨older 不等式以及从 $H^1(\mathcal{O})$ 到 $L^4(\mathcal{O})$的 Sobolev嵌入，我们有

$$\begin{aligned}(B_1(\mathbf{u}, c), \psi) &\leqslant |\mathbf{u}|_{L^4} |\nabla c|_{L^2} |\psi|_{L^4} \\ &\leqslant \mathcal{K} |\nabla \mathbf{u}|_{L^2} |c|_{H^1} |\psi|_{H^1}.\end{aligned}$$

类似地，我们也可以验证，对于 $n \in L^2(\mathcal{O})$、$c \in H^1(\mathcal{O})$ 和 $\psi \in H^1(\mathcal{O})$，算子 R_2 是良定义的。事实上，除了 H¨older 不等式之外，利用从 $H^2(\mathcal{O})$ 到 $L^{\infty}(\mathcal{O})$的 Sobolev嵌入，我们得到

$$\begin{aligned}(R_2(n, c), \psi) &\leqslant |n|_{L^2} |\nabla c|_{L^2} |\nabla \psi|_{L^{\infty}} \\ &\leqslant |n|_{L^2} |c|_{H^1} |\psi|_{H^3}.\end{aligned}$$

我们还引入以下耦合映射 R_0 和 R_1

$$(R_0(n, \Phi), \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{O}} n(x) \nabla \Phi(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx, \quad \forall n \in L^2(\mathcal{O}), \quad \mathbf{v} \in H, \quad \Phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{O}),$$

$$(R_1(n, c), \psi) = \int_{\mathcal{O}} n(x) f(c(x)) \psi(x) dx, \quad \forall n \in L^2(\mathcal{O}), \quad c \in L^{\infty}(\mathcal{O}), \quad \psi \in L^2(\mathcal{O}), \quad f \in L^{\infty}(\mathbb{R}).$$

注意到算子 R_0 和 R_1 是定义良好的。事实上，对于 $n \in L^2(\mathcal{O})$, $\mathbf{v} \in H$ 和$\Phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$ ，我们可以看到

$$(R_0(n, \Phi), \mathbf{v}) \leqslant |\Phi|_{W^{1,\infty}} |n|_{L^2} |\mathbf{v}|_{L^2}.$$

Fu此外，对于 $n \in L^2(\mathcal{O})$、 $c \in L^{\infty}(\mathcal{O})$、 $\psi \in L^2(\mathcal{O})$ 和 $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$，我们还可以看到 t

$$(R_1(n, c), \psi) \leqslant |f(c)|_{L^{\infty}} |n|_{L^2} |\psi|_{L^2}.$$

此后， $\mathfrak{A} := (\Omega\ \mathbb{F}\ (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\ T]}\mathbb{P})$ 将是一个配备滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\ T]}$ 并满足通常条件的完备概率空间，即该滤过是右连续的，并且

的所有零测集 $\mathcal{F}$ 都是 $\mathcal{F}_0$的元素。设 $\mathcal{U}$ 是一个以$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为基的可分希尔伯特空间，并且 W 是 $\mathcal{U}$上的柱状维纳过程。特别地，根据 [12,命题4，3] 维纳过程 $t \mapsto W_t$ 可以表示为

$$W_t = \sum_{k=1}^{\infty} W_t^k e_k, \qquad \text{for all } t \in [0,T],$$

其中 $\{W^k : k \in \mathbb{N}\}$ 是一族相互独立的标准 $\mathbb{R}$值布朗运动，定义在 $\mathfrak{A}$上。

对于任意希尔伯特空间 X，我们将 $\mathcal{L}^2(\mathcal{U}; X)$ 记为从 $\mathcal{U}$ 到 X的希尔伯特-施密特算子所构成的可分希尔伯特空间。对于可分巴拿赫空间 X，$p \in [1,\infty)$ 和$T > 0$，我们将 $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}^p(0,T; X)$记为所有过程 $\psi \in L^p(\Omega \times (0,T), d\mathbb{P}\otimes dt; X)$上的空间，这些过程在$\mathfrak{A}$上$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]}$-渐进可测。我们将 $L^p(\Omega; C([0,T]; X))$，$1 \leqslant p < \infty$记为所有连续且$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]}$-渐进可测的 X值过程$\{\psi_t;\ \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 上的空间，它们满足

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|\psi_t\|_X^p\right] < +\infty.$$

如果 Y是一个Banach空间，我们将用 $\mathcal{L}(X,Y)$ 表示有界线性算子空间。

根据无穷维希尔伯特空间上的随机积分理论（见 [12,第 4]章），对于任意过程 $\rho \in \mathcal{M}_{\mathfrak{A}}^2(0,T;\ \mathcal{L}^2(U;\ H))$，关于Wiener过程 $t \mapsto W_t$ 的 ρ随机积分记作

$$\int_0^t \rho(s)dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

并定义为在 $\mathfrak{A}$上的唯一连续 H-值鞅，使得对所有 $h \in H$，我们有

$$\left(\int_0^t \rho(s)dW_s, h\right)_H = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (\rho(s)e_k, h)_H dW_s^k, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中关于 dW_s^k 的积分是按照Itˆo的意义理解的 .

现在我们介绍系统中所涉及的参数函数和函数所满足的以下条件（1.2）。

假设 2.1。对于参数函数 χ、 f 和 Φ （*1.2*）中的参数函数，我们假设 $\chi(c)$ 是一个非负常数，即 $\chi(c) = \chi > 0$，并要求 f和 Φ 满足

$$\begin{aligned} &f \in C^1([0,\infty)), \qquad f(0) = 0, \qquad \textit{and} \qquad f > 0, \qquad f' > 0 \qquad \textit{in } (0,\infty), \\ &\Phi \textit{ is time-independent and } \Phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{O}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

在本文中，我们设

$$\mathcal{K}_f := \frac{\chi^2}{2\delta \min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'} + \frac{1}{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'}. \tag{2.2}$$

此外， 我们考虑一族满足以下假设的向量场 $\{\sigma_1、\ \sigma_2\}$ s.

假设 2.2。

(A$_1$) 对于 $k \in \{1、\ 2\}$、 $\sigma_k : = (\sigma_k^1、\ \sigma_k^2) \in W^{1,\ \infty}(\mathcal{O}) \times W^{1,\ \infty}(\mathcal{O})$ 以及 $\sigma_k = 0$ 在 $\partial\mathcal{O}$上。(A$_2$) σ_k 是无散向量场，即对于 $k = 1$，2，有 $\nabla \cdot \sigma_k = 0$。

(A$_3$) 矩阵值函数 q： $\mathcal{O}\times\mathcal{O}\to\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ 定义为

$$q^{i,j}(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\sigma_k^i(x)\sigma_k^j(y),\qquad \forall i,j=1,2 \ \text{ and } \ \forall x,y\in\mathcal{O}, \tag{2.3}$$

对任意 $x\in\mathcal{O}$，满足 $q(x、x)=Id_{\mathbb{R}^2}$。

在介绍本文中使用的其他基本假设之前，我们先对假设 2.2 以及噪声 $\sum_{k=1}\sigma_k\cdot\nabla c\circ d\beta_t^k$ 作出一些

注 2.1. 对于 $k=1$，设为 2，

$$\sigma_k(x)=\begin{cases} g_k & \text{if } x\in\bar{\mathcal{O}}\backslash\partial\mathcal{O},\\ 0 & \text{if } x\in\partial\mathcal{O},\end{cases}$$

其中，$\{g_1、g_2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基，向量场族 $\{\sigma_1、\sigma_2\}$ 满足 (A$_1$)、(A$_2$) 和 (A$_3$)。

下文将使用以下记号

$$|\sigma|_{L^\infty}=\left(\sum_{k=1}^{2}|\sigma_k|_{L^\infty}^2\right)^{1/2}\quad\text{and}\quad|\sigma|_{W^{1,\infty}}=\left(\sum_{k=1}^{2}|\sigma_k|_{W^{1,\infty}}^2\right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

由于 [17, 第 65 页，第 4.5 节。1], Stratonovich 积分 $\gamma\int_0^t\sigma_k\cdot\nabla c(s)\circ d\beta_s^k$ 可以表示为带有修正项的 Itô 积分，如下所示：

$$\gamma\int_0^t\sigma_k\cdot\nabla c(s)\circ d\beta_s^k=\frac{1}{2}\int_0^t D_c(\gamma\sigma_k\cdot\nabla c(s))(\gamma\sigma_k\cdot\nabla c(s))ds+\gamma\int_0^t\sigma_k\cdot\nabla c(s)d\beta_s^k, \tag{2.5}$$

其中，$D_c(\gamma\sigma_k\cdot\nabla c)$ 表示关于 c的 $\gamma\sigma_k\cdot\nabla c$ Fr´echet 导数。

引理 2.2。 若假设 2.2 成立，则对所有 $t\in[0,\ T]$,

$$\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{k=1}^{2}D_c(\gamma\sigma_k\cdot\nabla c(s))(\gamma\sigma_k\cdot\nabla c(s))ds=\frac{\gamma^2}{2}\int_0^t\Delta c(s)ds,\quad c\in H^2(\mathcal{O}). \tag{2.6}$$

证明。令$c\in H^2(\mathcal{O})$ 和 $t\in[0、T]$ 为任意但固定的对象。则对所有 $s\in[0、t]$ 和 $k=1,\ 2$,

$$\sum_{k=1}^{2}D_c(\gamma\sigma_k\cdot\nabla c)(\gamma\sigma_k\cdot\nabla c)=\gamma\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\cdot\nabla(\gamma\sigma_k\cdot\nabla c)=\gamma^2\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\cdot\nabla(\sigma_k\cdot\nabla c).$$

由于 $\nabla\cdot\sigma_k=0$，我们注意到 $\sigma_k\cdot\nabla c=\nabla\cdot(c\sigma_k)$，因此，

$$\gamma^2\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\cdot\nabla(\sigma_k\cdot\nabla c)=\gamma^2\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\cdot\nabla(\nabla\cdot(c\sigma_k))=\gamma^2\sum_{k=1}^{2}\nabla\cdot(\sigma_k\nabla\cdot(c\sigma_k)). \tag{2.7}$$

对于第二个等式，我们再次用到了这样一个事实：对所有 $k=1,\ 2,\ \nabla\cdot\sigma_k=0$。

由于 $\sigma_k=(\sigma_k^1,\ \sigma_k^2)\in W^{1,\infty}(\mathcal{O})\times W^{1,\infty}(\mathcal{O})$ 且 $c\in H^2(\mathcal{O})\hookrightarrow L^\infty(\mathcal{O})$，我们可以应用 [2,命题 9.4，P. 中给出的乘积求导公式 269] ，从而得到：

$$\sum_{k=1}^{2}\nabla\cdot(\sigma_k(\nabla\cdot(c\sigma_k))=\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(q^{ij}(x,x)c)-\nabla\cdot\left(\left(\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\cdot\nabla\sigma_k\right)c\right), \tag{2.8}$$

其中， $\sigma_k \cdot \nabla \sigma_k$ 是分量为以下各项的向量场

$$(\sigma_k \cdot \nabla \sigma_k)^i = \sum_{j=1}^{2} \sigma_k^j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_k^i.$$

再次应用乘积求导公式，对于 $j = 1,2$，我们得到

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (\nabla \sigma_k \cdot \sigma_k)^i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} q^{ij}(x,x) - \sum_{k=1}^{2} \sigma_k^i \nabla \cdot \sigma_k = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{ij} = 0. \tag{2.9}$$

在（2.9）中，我们使用了以下事实： $\nabla \cdot \sigma_k = 0$ 以及以下事实： $q^{ij} = \delta_{ij}$ （见假设 $\mathbf{A}_3$）中的 2）。

由（2.8）和（2.9），我们推得

$$\sum_{k=1}^{2} \nabla \cdot (\sigma_k \nabla \cdot (c\sigma_k)) = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (q^{ij}(x,x)c) = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\delta_{ij} c) = \Delta c. \tag{2.10}$$

结合 （2.10）和（2.7），我们推导出（2.6），从而完成引理2.2 . □

对于 $k \in \{1、2\}$，通过 $\phi_k(c) = \sigma_k \cdot \nabla c$定义映射 ϕ_k： $H^1(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$。于是，映射 ϕ： $H^1(\mathcal{O}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;\ L^2(\mathcal{O}))$ 给出为

$$\phi(c)(h) = \sum_{k=1}^{2} \phi_k(c) h_k, \qquad c \in H^1(\mathcal{O}),\ \ h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2,$$

在条件 $(\mathbf{A}_1)$ 下，该映射定义良好。令 $\{g_1、g_2\}$ 为 $\mathbb{R}^2$的标准正交基，则对所有 $c \in H^1(\mathcal{O})$，有 $\phi(c)(g_k) = \phi_k(c)$。令 $\beta = (\beta^1、\beta^2)$ 为定义在 $\mathfrak{A}$上的标准二维布朗运动，且独立于 W。我们将反复使用以下记号

$$\phi(c) d\beta_s = \sum_{k=1}^{2} \phi_k(c) d\beta_s^k. \tag{2.11}$$

我们回顾一下，本文中，符号 $\mathcal{K}$、 $\mathcal{K}_{GN}$ 以及 $\mathcal{K}_i$、 $i \in \mathbb{N}$ 表示正数常数，这些常数可能在不同行之间发生变化。

假设 2.3。令 g： $\mathcal{H} \to \mathcal{L}^2(\mathcal{U},\ H)$ 为连续映射。特别地，存在一个正数常数 L_g，使得对于任意 $(\mathbf{u}\ c) \in \mathcal{H}$,

$$|g(\mathbf{u}, c)|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)} \leqslant L_g(1 + |(\mathbf{u}, c)|_{\mathcal{H}}). \tag{2.12}$$

假设 2.4. 令 g: $\mathcal{H} \to \mathcal{L}^2(\mathcal{U}, H)$ 为利普希茨连续映射。特别地，存在正数常数 L_{Lip}，使得对所有 $(\mathbf{u}_i, c_i) \in \mathcal{H},\ i = 1,2$,

$$|g(\mathbf{u}_1, c_1) - g(\mathbf{u}_2, c_2)|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U};H)} \leqslant L_{Lip} |(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, c_1 - c_2)|_{\mathcal{H}}. \tag{2.13}$$

采用前文的记号，令 $\xi = \eta + \frac{\gamma^2}{2}$，并考虑引理 2.2，模型（1.2）可形式化地写成以下抽象形式

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}(t) + \int_0^t [\eta A_0 \mathbf{u}(s) + B_0(\mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s)]ds = \mathbf{u}_0 + \int_0^t R_0(n(s), \Phi)ds + \int_0^t g(\mathbf{u}(s), c(s))dW_s, \\
&c(t) + \int_0^t [\xi A_1 c(s) + B_1(\mathbf{u}(s), c(s))]ds = c_0 - \int_0^t R_1(n(s), c(s))ds + \gamma \int_0^t \phi(c(s))d\beta_s, \\
&n(t) + \int_0^t [\delta A_1 n(s) + B_1(\mathbf{u}(s), n(s))]ds = n_0 - \int_0^t R_2(n(s), c(s))ds.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

这些 e 方程分别理解为在 V^*、 $H^{-2}(\mathcal{O})$ 和 $H^{-3}(\mathcal{O})$ 中成立 ly.

本节最后介绍一些记号。设 Y 为一个 Banach空间。用$\mathcal{C}([0,T]; Y)$ 表示连续函数 $\mathbf{v}: [0,T] \to Y$所构成的空间，其拓扑由以下范数诱导:

$$|\mathbf{v}|_{\mathcal{C}([0,T];Y)} := \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|\mathbf{v}(s)\|_Y .$$

用 $L^2(0,T;\, Y)$ 表示可测函数 $\mathbf{v}: [0,T] \to Y$所构成的空间，其拓扑由以下范数生成:

$$|\mathbf{v}|_{L^2(0,T;Y)} := \left(\int_0^T \|\mathbf{v}(s)\|_Y^2 \, ds\right)^{1/2},$$

而用 $L^2_w(0,T;\, Y)$ 表示可测函数 $\mathbf{v}: [0,T] \to Y$所构成的空间，并赋予弱拓扑。

对于 Hilbert空间 X，用 X_w 表示赋予弱拓扑的空间 X ，并用 $C([0,T];\, X_w)$ 表示弱连续函数 $\mathbf{v}: [0,T] \to X_w$所构成的空间。

3. 主要结果：概率强解的存在性

本节旨在陈述本文的主要结果。在继续讨论之前，我们先给出以下定义。

定义 3.1. 问题 (1.2) 的概率强解是一个 $H\times H^1(\mathcal{O})\times L^2(\mathcal{O})$值随机过程 $(\mathbf{u}\ c, n)$ 满足

i): 我们有 $\mathbb{P}$-几乎处处成立。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0,T]; H) \cap L^2(0,T;V),\\
&c \in \mathcal{C}([0,T]; H^1(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T; H^2(\mathcal{O})),\\
&n \in \mathcal{C}([0,T]; L^2_w(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T; H^1(\mathcal{O})) \cap \mathcal{C}([0,T]; H^{-3}(\mathcal{O})).
\end{aligned}$$

ii): $(\mathbf{u}\ c, n): [0,T]\times\Omega \to H \times H^1(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})$ 是渐进可测的，且对所有$p \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\mathbf{u}(s)|^p_{L^2} + \mathbb{E}\left(\int_0^T |\nabla \mathbf{u}(s)|^2_{L^2}\, ds\right)^p < \infty,\\
&\mathbb{E}\left(\int_0^T |n(s)|^2_{L^2}\, ds\right)^p < \infty,\\
&\text{and}\quad \mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |c(s)|^p_{H^1} + \mathbb{E}\left(\int_0^T |c(s)|^2_{H^2}\, ds\right)^p < \infty.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

iii): 对于所有 $t \in [0、 T]$，以下恒等式几乎处处（ $\mathbb{P}$）成立。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}(t) + \int_0^t [\eta A_0 \mathbf{u}(s) + B_0(\mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s))] ds = \mathbf{u}_0 + \int_0^t R_0(n(s), \Phi) ds + \int_0^t g(\mathbf{u}(s), c(s)) dW_s,\\
&c(t) + \int_0^t [\xi A_1 c(s) + B_1(\mathbf{u}(s), c(s))] ds = c_0 - \int_0^t R_1(n(s), c(s)) ds + \gamma \int_0^t \phi(c(s)) d\beta_s,\\
&n(t) + \int_0^t [\delta A_1 n(s) + B_1(\mathbf{u}(s), n(s))] ds = n_0 - \int_0^t R_2(n(s), c(s)) ds,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

分别在 V^*、 $H^{-2}(\mathcal{O})$ 和 $H^{-3}(\mathcal{O})$ 中。

现在我们陈述本节的主要结果。

定理 3.2。设假设 2.1、假设 2.2、假设 2.3和假设 2.4 成立。设初始数据 $(\mathbf{u}_0, c_0, n_0)$ 属于

$$H \times L^\infty(\mathcal{O}) \cap H^1(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O}).$$

此外，设 $c_0(x) > 0$, $n_0(x) > 0$ 对所有 $x \in \mathcal{O}$ 成立，并且

$$\int_{\mathcal{O}} n_0(x) \ln n_0(x) dx < \infty,$$

以及

$$\frac{4\mathcal{K}_f \max\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f^2}{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'} \leqslant \delta, \quad \gamma^2 \leqslant \frac{\min\left(\xi, \frac{\xi}{2\mathcal{K}_0}\right)}{6\,|\sigma|^2_{L^\infty}}, \quad \textit{and} \quad \gamma^{2p} \leqslant \frac{3^p \xi^p}{2^{2p+1}\,|\sigma|^{2p}_{L^\infty}\,8^p}, \tag{3.3}$$

对所有 $p \geqslant 2$, 其中 $\mathcal{K}_0$ 是正数常数，满足 $|\psi|^2_{H^2} \leqslant \mathcal{K}_0(|\Delta\psi|^2_{L^2} + |\psi|^2_{H^1})$, 对所有$\psi \in H^2(\mathcal{O})$（参见 [35, 命题 7.2, 第 404] 页，以了解此类常数的存在性）。那么，根据定义3.1，问题（1.2）存在唯一的概率强解。

注 3.3. 注意，在 $f(c) = c$ 的情况下，我们有 $\mathcal{K}_f = \frac{\chi^2+2\delta}{2\delta}$，并且条件（3.3）的第一个不等式在以下情况下成立：

$$|c_0|_{L^\infty} \leqslant \frac{\delta\sqrt{2}}{2\sqrt{\chi^2 + 2\delta}}.$$

此外，引入条件（3.3）是为了控制不等式（**??**）中的细胞项，以及不等式（ c-方程中的噪声项的更高正则性，见（4.36）和（**??**）。然而， [24，注 1。1] 指出，对于二维确定性趋化系统，存在临界质量现象。当细胞初始总质量 $\int_{\mathcal{O}} n_0(x)dx$ 超过临界质量 m_{crit} （即 $\int_{\mathcal{O}} n_0(x)dx > m_{\text{crit}}$）时，解会在有限时间内爆破；否则，所有解均保持有界。而对于二维随机趋化系统， [26] 表明，如果趋化敏感性 χ 足够大，那么爆破发生的概率为 1。对于耦合系统（1.2），尽管流体流动迅速，我们也预期会出现某些现象。因此，一个重要的问题是：如果条件（3.3）不成立，会发生什么？这个问题的答案将在未来通过研究系统（1.2）的爆破解判据给出。

为了证明定理 3.2，我们将首先证明问题（1.1）具有一个概率弱解，见定义 3.2，然后证明弱解的非负性以及 L^∞-稳定性，这使我们能够证明路径唯一性，最后应用山田-渡边定理。但在进一步开展之前，我们先介绍概率弱解的概念。

定义 3.4。问题（1.2）的弱概率解是一个系统

$$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{F}}, \bar{\mathbb{P}}, (\mathbf{u}, c, n), (\bar{W}, \bar{\beta})),$$

其中

i): $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ 是一个滤过概率空间，

ii): $(\bar{W},\bar{\beta})$是在 $(\bar{\Omega}\ \bar{\mathcal{F}},\bar{\mathbb{F}},\bar{\mathbb{P}})$上取值于 $\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2$ 的柱状维纳过程，iii): 且 $(\mathbf{u}\ c,n):[0,T]\times\bar{\Omega}\ \to\mathcal{H}\times L^2(\mathcal{O})$ 是在滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$上、由驱动噪声 noise (W,β) 驱动的方程 (1.1) 的强解。

解的存 在性由以下命题给出 .

命题 3.5.假设假设条件 *2.1*、假设条件 *2.2* 和假设条件 *2.3* 均成立。令

$$(\mathbf{u}_0,c_0,n_0)\in H\times L^\infty(\mathcal{O})\cap H^1(\mathcal{O})\times L^2(\mathcal{O}),$$

使得 $c_0(x)>0$, $n_0(x)>0$ 对所有 $x\in\mathcal{O}$ 均成立，且

$$\int_{\mathcal{O}} n_0(x)\ln n_0(x)dx<\infty.$$

我们还假设（*3.3*）成立。那么，根据定义 *3.4*，问题（*1.2*）至少存在一个概率弱解。

命题 3.5的证明技术性很强，推迟到第 5 节进行。

接下来，我们证明问题（1.2）的概率弱解的一些性质，例如非负性和 L^∞-稳定性，这些性质将有助于证明路径唯一性结果。事实上，路径唯一性的主要要素是 L^∞-稳定性，但要获得这一性质，我们需要非负性。

引理 3.6。 设假设 *2.1* 和假设 *2.2* 成立。设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P},(\mathbf{u}\ c,n),(W,\beta))$ 是问题（*1.2*）的概率弱解。若 $c_0>0$ 且 $n_0>0$，则以下不等式几乎处处成立 $\mathbb{P}$-*a.s*

$$n(t)>0,\ \textit{and}\ \ c(t)>0,\ \textit{for all}\ \ t\in[0,T]. \tag{3.4}$$

证明。我们将结合 [19, 第 3 节1] 的思路与[14, 引理 14] 和 [5, 定理 37]的思路。令 $t\in[0,T]$ 为任意固定值。接着定义$n_-(t):=\max(-n(t),0)$ 并注意到 $n_-(t)\in W^{2,2}(\mathcal{O})$。因此，我们将方程 $(2.14)_3$ 乘以 $n_-(t)$，在 $\mathcal{O}$上积分，并利用分部积分，得到 $\mathbb{P}$几乎处处成立。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|n_-(t)|_{L^2}^2&=-\int_{\mathcal{O}}\mathbf{u}(t,x)\cdot\nabla n_-(t,x)n_-(t,x)dx-\delta|\nabla n_-(t)|_{L^2}^2\\&\quad-\chi\int_{\mathcal{O}}n(t,x)\nabla c(t,x)\nabla n_-(t,x)dx\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}n_-^2(t,x)\nabla\cdot\mathbf{u}(t,x)dx-\delta|\nabla n_-(t)|_{L^2}^2+\chi\int_{\mathcal{O}}n_-(t,x)\nabla c(t,x)\nabla n_-(t,x)dx\\&\leqslant-\delta|\nabla n_-(t)|_{L^2}^2+\chi|n_-(t)|_{L^4}|\nabla c(t)|_{L^4}|\nabla n_-(t)|_{L^2}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

根据 Gagli ardo-Nirenberg-Sobolev 不等式 (3.7) 和杨氏不等式，我们注意到 th at

$$\begin{aligned}\chi|n_-|_{L^4}|\nabla c|_{L^4}|\nabla n_-|_{L^2}&\leqslant\mathcal{K}(|n_-|_{L^2}^{1/2}|\nabla n_-|_{L^2}^{1/2}+|n_-|_{L^2})|\nabla c|_{L^4}|\nabla n_-|_{L^2}\\&\leqslant\mathcal{K}|n_-|_{L^2}^{1/2}|\nabla c|_{L^4}|\nabla n_-|_{L^2}^{3/2}+\mathcal{K}|n_-|_{L^2}|\nabla c|_{L^4}|\nabla n_-|_{L^2}\\&\leqslant\frac{\delta}{2}|\nabla n_-|_{L^2}^2+\mathcal{K}|n_-|_{L^2}^2(|\nabla c|_{L^4}^4+|\nabla c|_{L^4}^2)\\&\leqslant\frac{\delta}{2}|\nabla n_-|_{L^2}^2+\mathcal{K}|n_-|_{L^2}^2(|\nabla c|_{L^4}^4+1).\end{aligned} \tag{3.6}$$

由于 $\bar{\mathbb{P}}$-几乎必然有 $c \in \mathcal{C}([0,T];\, H^1(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T;\, H^2(\mathcal{O}))$，根据以下 Gagliardo-Niremberg 不等式

$$|f|_{L^4} \leqslant \mathcal{K}_{GN}(|f|_{L^2}^{1/2} |\nabla f|_{L^2}^{1/2} + |f|_{L^2}), \quad f \in W^{1,2}(\mathcal{O}), \tag{3.7}$$

¯我们注意到，对所有 $t \in [0,T]$ 和 $\mathbb{P}$，几乎必然成立。

$$\begin{aligned}
\int_0^t (|\nabla c(s)|_{L^4}^4 + 1) ds &\leqslant \int_0^t |\nabla c(s)|_{L^4}^4 \, ds + t \\
&\leqslant \mathcal{K} \int_0^T |\nabla c(s)|_{L^2}^2 \, |c(s)|_{H^2}^2 \, ds + \int_0^T |\nabla c(s)|_{L^2}^4 \, ds + T \\
&\leqslant \mathcal{K} \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |\nabla c(s)|_{L^2}^2 \int_0^T |c(s)|_{H^2}^2 \, ds + \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |\nabla c(s)|_{L^2}^2 \int_0^T |\nabla c(s)|_{L^2}^2 \, ds + T \\
&\leqslant \mathcal{K} \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |c(s)|_{H^1}^2 \int_0^T |c(s)|_{H^2}^2 \, ds + T < \infty.
\end{aligned}$$

¯因此，对（3.5）在 [0 上积分，T]并利用不等式（3.6），我们推得 $\mathbb{P}$几乎必然成立。

$$|n_-(t)|_{L^2}^2 \leqslant |n_-(0)|_{L^2}^2 + \mathcal{K} \int_0^t (|\nabla c(s)|_{L^4}^4 + |\nabla c(s)|_{L^4}^2) \, |n_-(s)|_{L^2}^2 \, ds.$$

由格朗沃尔不等式可得

$$|n_-(t)|_{L^2}^2 \leqslant |(n_0)_-|_{L^2}^2 \exp\left(\mathcal{K} \int_0^t (|\nabla c(s)|_{L^4}^4 + |\nabla c(s)|_{L^4}^2) ds \right),$$

¯这意味着 $\mathbb{P}$几乎必然成立，$n_-(t) = 0$ 且由此可得 $n(t)$ 的非负性。

为证明 $c(t)$ 的非负性，主要思路是将伊藤公式应用于函数 $\Psi: H^2(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ 定义如下: $\Psi(z) = \int_{\mathcal{O}} z_-^2(x) dx$ 其中 $z_- = \max(-z;\, 0)$。由于函数 Ψ 不是二次弗雷歇可微的 ´，我们将采用 [14,引理 14]（另见 [5, 定理 3.7]）的思路，引入 Ψ的如下近似。令 $\varphi: \mathbb{R} \to [-1;\, 0]$ 为一个 C^∞ 类递增函数，使得

$$\varphi(s) = \begin{cases} -1 & \text{if } s \in (-\infty, -2] \\ 0 & \text{if } s \in [-1, +\infty). \end{cases} \tag{3.8}$$

令 $\{\psi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ 为由 $\psi_h(y) = y^2 \varphi(hy)$ 定义的一列光滑函数，其中对所有 $y \in \mathbb{R}$ 和 $h \in \mathbb{N}$ 均成立。对于任意 $h \in \mathbb{N}$，我们考虑以下函数序列 $\Psi_h: H^2(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$，其定义为

$$\Psi_h(c) = \int_{\mathcal{O}} \psi_h(c(x)) dx, \quad \text{for } c \in H^2(\mathcal{O}).$$

注意到映射 Ψ_h 二次 Fr´echet 可微，且

$$\Psi_h'(c)(k) = 2 \int_{\mathcal{O}} c(x) \varphi(hc(x)) k(x) dx + h \int_{\mathcal{O}} c^2(x) \varphi'(hc(x)) k(x) dx, \quad \forall c, k \in H^2(\mathcal{O}),$$

以及

$$\begin{aligned}
\Psi_h''(c)(z,k) = m^2 &\int_{\mathcal{O}} c^2(x) \varphi''(hc(x)) z(x) k(x) dx \\
&+ 4h \int_{\mathcal{O}} c(x) \varphi'(hc(x)) z(x) k(x) dx + 2 \int_{\mathcal{O}} \varphi(hc(x)) z(x) k(x) dx, \quad \forall c, z, k \in H^2(\mathcal{O}).
\end{aligned}$$

¯将 Itô 公式应用于 $t \mapsto \Psi_h(c(t))$，我们可以得到 $\mathbb{P}$-几乎处处成立。

$$\begin{aligned}\Psi_h(c(t)) - \Psi_h(c(0)) &= \int_0^t \Psi_h'(c(s)) \left(\mathbf{u}(s)\cdot\nabla c(s) + \xi\Delta c(s) - n(s)f(c(s))\right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{k=1}^2 \Psi_h''(c(s))\left(\gamma\phi_k(c(s)), \gamma\phi_k(c(s))\right) ds \\ &\quad + \gamma\sum_{k=1}^2 \int_0^t \Psi_h'(c(s))(\phi_k(c(s)))d\bar{\beta}_s^k.\end{aligned} \tag{3.9}$$

现在，我们将找到公式（3.9）的一个更简单表示。

对于固定的 $k = 1,2$，我们注意到，对于所有 $h \geqslant 1$,

$$h\varphi'(hc)\sigma_k\cdot\nabla c = \sigma_k\cdot(h\varphi'(hc)\nabla c) = \sigma_k\cdot\nabla(\varphi(hc)), \tag{3.10}$$

并且还注意到 $2c\sigma_k\cdot\nabla c = \sigma_k\cdot\nabla c^2$. 因此，对于任意 $h \geqslant 1$，利用分部积分以及 $\sigma_k = 0$ 在 $\partial\mathcal{O}$ 上这一事实，我们有，对于任意 $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Psi_h'(c)(\phi_k(c)) &= 2\int_{\mathcal{O}} c(x)\varphi(hc(x))\sigma_k(x)\cdot\nabla c(x)dx + h\int_{\mathcal{O}} c^2(x)\varphi'(hc(x))\sigma_k(x)\cdot\nabla c(x)dx \\ &= \int_{\mathcal{O}}\varphi(hc(x))\sigma_k(x)\cdot\nabla c^2(x)dx + \int_{\mathcal{O}} c^2(x)\sigma_k(x)\cdot\nabla(\varphi(hc(x)))dx \\ &= -\int_{\mathcal{O}} c^2(x)\nabla\cdot(\varphi(hc(x))\sigma_k(x))dx + \int_{\partial\mathcal{O}} c^2(\sigma)\varphi(hc(\sigma))\sigma_k(\sigma)\cdot\nu d\sigma \\ &\quad + \int_{\mathcal{O}} c^2(x)\sigma_k(x)\cdot\nabla(\varphi(hc(x)))dx \\ &= -\int_{\mathcal{O}} c^2(x)\nabla\cdot(\varphi(hc(x))\sigma_k(x))dx + \int_{\mathcal{O}} c^2(x)\sigma_k(x)\cdot\nabla(\varphi(hc(x)))dx.\end{aligned} \tag{3.11}$$

由于 $\nabla\cdot\sigma_k = 0$，我们推得

$$\begin{aligned}\Psi_h'(c)(\phi_k(c)) &= -\int_{\mathcal{O}} c^2(x)\varphi(hc(x))\nabla\cdot\sigma_k(x)dx \\ &\quad - \int_{\mathcal{O}} c^2(x)\sigma_k(x)\cdot\nabla(\varphi(hc(x)))dx + \int_{\mathcal{O}} c^2(x)\sigma_k(x)\cdot\nabla(\varphi(hc(x)))dx \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^2 \sigma_k\cdot\nabla c\sigma_k\cdot\nabla c &= \sum_{k=1}^2\sum_{i,j=1}^2 \sigma_k^i\sigma_k^j\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial c}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^2 q^{ij}(x,x)\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial c}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \delta_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial c}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial c}{\partial x_i} = |\nabla c|^2.\end{aligned} \tag{3.13}$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{2}\Psi_h''(c)\left(\gamma\phi_k(c),\gamma\phi_k(c)\right)=\gamma^2h^2\int_{\mathcal{O}}c^2(x)\varphi''(hc(x))\left|\nabla c(x)\right|^2dx$$
$$+4h\gamma^2\int_{\mathcal{O}}c(x)\varphi'(hc(x))\left|\nabla c(x)\right|^2dx+2\gamma^2\int_{\mathcal{O}}\varphi(hc(x))\left|\nabla c(x)\right|^2dx.$$

另一方面，通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\gamma^2\Psi_h'(c)(\Delta c)\\
&=2\gamma^2\int_{\mathcal{O}}c(x)\varphi(hc(x))\Delta c(x)dx+h\gamma^2\int_{\mathcal{O}}c^2(x)\varphi'(hc(x))\Delta c(x)dx\\
&=-2\gamma^2\int_{\mathcal{O}}\nabla c(x)\cdot\nabla(c(x)\varphi(hc(x)))dx-h\gamma^2\int_{\mathcal{O}}\nabla c(x)\cdot\nabla(c^2(x)\varphi'(hc(x)))dx\\
&\quad+2\gamma^2\int_{\partial\mathcal{O}}\frac{\partial c(\sigma)}{\partial\nu}\varphi(hc(\sigma))\Delta c(\sigma)d\sigma+2h\gamma^2\int_{\partial\mathcal{O}}\frac{\partial c(\sigma)}{\partial\nu}c(\sigma)\varphi'(hc(\sigma))\Delta c(\sigma)d\sigma\\
&=-2\gamma^2\int_{\mathcal{O}}\varphi(hc(x))\left|\nabla c(x)\right|^2dx-2h\gamma^2\int_{\mathcal{O}}c(x)\varphi'(hc(x))\left|\nabla c(x)\right|^2dx\\
&\quad-2h\gamma^2\int_{\mathcal{O}}c(x)\varphi'(hc(x))\left|\nabla c(x)\right|^2dx-\gamma^2h^2\int_{\mathcal{O}}c^2(x)\varphi''(hc(x))\left|\nabla c(x)\right|^2dx\\
&=-\sum_{k=1}^{2}\Psi_h''(c)\left(\gamma\phi_k(c),\gamma\phi_k(c)\right).
\end{aligned}\tag{3.14}$$

在等式（3.14）中，我们用到了以下事实： $\frac{\partial c}{\partial\nu}$ 在 $\partial\mathcal{O}$上消失。

因此，回想起 $\xi=\eta+\frac{\gamma^2}{2}$ 并利用（3.12）和（3.14），等式（3.9）等价于

$$\int_{\mathcal{O}}\psi_h(c(t,x))dx-\int_{\mathcal{O}}\psi_h(c_0(x))dx=\int_0^t\Psi_h'(c(s))\left(\mathbf{u}(s)\cdot\nabla c(s)+\eta\Delta c(s)-n(s)f(c(s))\right)ds,$$

由此，当 $h\to\infty$ 时取极限，可推出

$$\begin{aligned}
&-\int_{\mathcal{O}}c_-^2(t,x)dx+\int_{\mathcal{O}}(c_0(x))_-^2dx\\
&=-2\int_0^t\int_{\mathcal{O}}\left(\left(\mathbf{u}(s,x)\cdot\nabla c(s,x)+\eta\Delta c(s,x)-n(s,x)f(c(s,x))\right)\right)c(s,x)1_{\{c(s,x)<0\}}dxds\\
&=2\int_0^t\int_{\mathcal{O}}\left(\eta\left|\nabla c(s,x)\right|^2+n(s,x)f(c(s,x))c(s,x)\right)1_{\{c(s,x)<0\}}dxds.
\end{aligned}$$

我们注意到，在最后一行中，我们使用了分部积分以及以下事实： $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$。由中值定理、以下事实： $f(0)=0$，以及 $f'>0$和 $1_{\{c<0\}}>0$，$c^2>0$，以及 $n>0$，我们推得 $|c_-(t)|_{L^2}^2\leqslant|(c_0)_-|_{L^2}^2$。这意味着 $c_-(t)=0$ $\bar{\mathbb{P}}$-a.s.，从而完成引理3.6的证明。□

有了概率弱解的非负性，我们现在可以陈述并证明 L^∞-稳定性。

推论 3.7。 在与引理 *3.6* 相同的假设下，若 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P},(\mathbf{u}\ c,n),(W,\beta))$是问题 (*1.2*) 的概率弱解，则对所有 $t\in[0,T]$

$$|c(t)|_{L^\infty}\leqslant|c_0|_{L^\infty},\quad\bar{\mathbb{P}}\text{-}a.s.\tag{3.15}$$

证明。证明思路源自 [19，第 3 节。2]。我们对过程 $t \mapsto \Psi(c(t)) := \int_{\mathcal{O}} c^p(t,x)dx$，对任意 $p \geqslant 2$，并求 p 趋于 ∞ 时的极限。令 Ψ： $H^2(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ 为由 $\Psi(c) = \int_{\mathcal{O}} c^p(x)dx$ 定义的泛函。注意，该映射是二阶 Fr´échet 可微的，并且

$$\Psi'(c)(h) = p\int_{\mathcal{M}} c^{p-1}(x)h(x)dx, \quad \forall c,h \in H^2(\mathcal{O}),$$
$$\Psi''(c)(h,k) = p(p-1)\int_{\mathcal{M}} c^{p-2}(x)h(x)k(x)dx, \quad \forall c,h,k \in H^2(\mathcal{O}).$$

对过程 $t \mapsto \Psi(c(t))$应用 Itô 公式，可得

$$\begin{aligned}\Psi(c(t)) - \Psi(c(0)) &= \int_0^t \Psi'(c(s))\left(\mathbf{u}(s)\cdot\nabla c(s) + \xi\Delta c(s) - n(s)f(c(s))\right)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{k=1}^2 \Psi''(c(s))\left(\gamma\phi_k(c(s)),\gamma\phi_k(c(s))\right)ds + \gamma\sum_{k=1}^2\int_0^t \Psi'(c(s))(\phi_k(c(s)))d\bar{\beta}_s^k. \end{aligned} \tag{3.16}$$

利用分部积分、 σ_k 的无散性质以及 $\sigma_k = 0$ 在 $\partial\mathcal{O}$上的事实，我们注意到，对所有 $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\Psi'(c)(\phi_k(c)) &= p\int_{\mathcal{O}} c^{p-1}(x)\sigma_k(x)\cdot\nabla c(x)dx \\ &= \int_{\mathcal{O}} \sigma_k(x)\cdot\nabla c^p(x)dx \\ &= -\int_{\mathcal{O}} c^p(x)\nabla\cdot\sigma_k(x)dx + \int_{\partial\mathcal{O}} c^p(\sigma)\sigma_k(\sigma)\cdot\nu d\sigma = 0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

这意味着（3.16）中的随机项消失。

注意到

$$\int_{\mathcal{O}} \Delta c(x)c^{p-1}(x)dx = -(p-1)\int_{\mathcal{O}} |\nabla c(x)|^2 c(x)^{p-2}dx. \tag{3.18}$$

由于 $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$，利用分部积分，我们推得

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{u}(x)\cdot\nabla c(x)c^{p-1}(x)dx = \frac{1}{p}\int_{\mathcal{O}} \mathbf{u}(x)\cdot\nabla c^p(x)dx = 0. \tag{3.19}$$

利用等式（3.17）、（3.18）和（3.19），由（3.17）可推得

$$\begin{aligned}\Psi(c(t)) - \Psi(c_0) &= \int_0^t\int_{\mathcal{O}} \left(-p(p-2)\xi\left|\nabla c(s,x)\right|^2 c^{p-2}(s,x) - pn(s,x)f(c(s,x))c^{p-1}(s,x)\right)dxds \\ &+ \frac{p(p-1)}{2}\int_0^t\int_{\mathcal{O}} c^{p-2}(s)\sum_{k=1}^2 \sigma_k(x)\cdot\nabla c(s,x)\sigma_k(x)\cdot\nabla c(s,x)dxds.\end{aligned} \tag{3.20}$$

由等式（3.13）可得 $\sum_{k=1}^2 \sigma_k\cdot\nabla c\sigma_k\cdot\nabla c = |\nabla c|^2$。因此，等式（3.20）变为

$$\Psi(c(t)) - \Psi(c_0) = \int_0^t\int_{\mathcal{O}} \left(-p(p-2)\left|\nabla c(s,x)\right|^2 c^{p-2}(s,x) - pn(s,x)f(c(s,x))c^{p-1}(s,x)\right)dxds.$$

利用 n 和 c 在引理3.6 中证明的非负性，以及函数 f的非负性，由最后一个等式可推得，对所有 $p \geqslant 2$ 和$t \in [0,\ T]$， $|c(t)|_{L^p} \leqslant |c_0|_{L^p}$，结合取极限 $p \to +\infty$，即可完成定理5.1（详见 [1,定理 2。14] 中的详细证明）。□

现在我们继续陈述并证明弱解的路径唯一性。

命题 3.8。我们假设定理 *3.2* 的假设成立。若

$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{P},(\mathbf{u}_1,c_1,n_1),(\bar{W},\bar{\beta}))$ *and* $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{P},(\mathbf{u}_2,c_2,n_2),(\bar{W},\bar{\beta}))$

是系统（*2.14*）的两个弱概率解，且具有相同的初始数据 $(\mathbf{u}_0,c_0,n_0)$，则

$$(\mathbf{u}_1(t),c_1(t),n_1(t))=(\mathbf{u}_2(t),c_2(t),n_2(t)) \qquad \mathbb{P}\text{-}a.s. \qquad for\ \ all\ \ t\in[0,T]. \tag{3.21}$$

证明。对于 $t\in[0,T]$，令

$$(\mathbf{w}(t),\psi(t),\varphi(t))=(\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t),c_1(t)-c_2(t),n_1(t)-n_2(t)).$$

那么这个过程满足 $(\mathbf{w}(0),\psi(0),\varphi(0))=0$，并且对所有 $t\in[0,T]$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{w}(t)+\int_0^t[\eta A_0\mathbf{w}(s)+B_0(\mathbf{w}(s),\mathbf{u}_1(s))+B_0(\mathbf{u}_2(s),\mathbf{w}(s))]ds\\&=\int_0^t R_0(\varphi(s),\Phi)ds+\int_0^t[g(\mathbf{u}_1(s),c_1(s))-g(\mathbf{u}_2(s),c_2(s))]dW_s,\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}&\psi(t)+\int_0^t[\xi A_1\psi(s)+B_1(\mathbf{w}(s),c_1(s))+B_1(\mathbf{u}_2(s),\psi(s))]ds\\&=-\int_0^t[R_1(n_1(s),c_1(s))-R_1(n_2(s),c_2(s))]ds+\gamma\int_0^t\phi(\psi(s))d\beta_s,\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}&\varphi(t)+\int_0^t[\delta A_1\varphi(s)+B_1(\mathbf{w}(s),n_1(s))+B_1(\mathbf{u}_2(s),\phi(s))]ds\\&=-\int_0^t[R_2(n_1(s),c_1(s))-R_2(n_2(s),c_2(s))]ds.\end{aligned} \tag{3.24}$$

利用 $(B_0(\mathbf{u}_2,\mathbf{w}),\mathbf{w})=0$ 这一事实，对 $t\mapsto|\mathbf{w}(t)|_{L^2}^2$ 应用伊藤公式可得

$$\begin{aligned}|\mathbf{w}(t)|_{L^2}^2+2\eta\int_0^t|\nabla\mathbf{w}(s)|_{L^2}^2\,ds&=-2\int_0^t(B_0(\mathbf{w}(s),\mathbf{u}_1(s)),\mathbf{w}(s))ds+2\int_0^t(R_0(\varphi(s),\Phi),\mathbf{w}(s))ds\\&\quad+\int_0^t|g(\mathbf{u}_1(s),c_1(s))-g(\mathbf{u}_2(s),c_2(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}^2\,ds\\&\quad+2\int_0^t(g(\mathbf{u}_1(s),c_1(s))-g(\mathbf{u}_2(s),c_2(s)),\mathbf{w}(s))dW_s.\end{aligned} \tag{3.25}$$

利用连续嵌入 $V\hookrightarrow H$ 和 $H^1(\mathcal{O})\hookrightarrow L^4(\mathcal{O})$ 、H¨older 不等式以及杨氏不等式，我们推得

$$\begin{aligned}2\,|(B_0(\mathbf{w},\mathbf{u}_1),\mathbf{w})|&\leqslant 2\,|\mathbf{w}|_{L^4}\,|\mathbf{u}_1|_{L^4}\,|\mathbf{w}|_{L^2}\\&\leqslant\frac{\eta}{5}\,|\nabla\mathbf{w}|_{L^2}^2+\mathcal{K}\,|\nabla\mathbf{u}_1|_{L^2}^2\,|\mathbf{w}|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{3.26}$$

and

$$
\begin{aligned}
2\left|(R_0(\varphi,\Phi),\mathbf{w})\right| &\leqslant 2\left|\nabla\Phi\right|_{L^\infty}\left|\varphi\right|_{L^2}\left|\mathbf{w}\right|_{L^2}\\
&\leqslant \mathcal{K}\left|\nabla\Phi\right|_{L^\infty}\left|\varphi\right|_{L^2}\left|\nabla\mathbf{w}\right|_{L^2}\\
&\leqslant \frac{\eta}{5}\left|\nabla\mathbf{w}\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|\Phi\right|_{W^{1,\infty}}^2\left|\varphi\right|_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

由（2.13），可得

$$
|g(\mathbf{u}_1,c_1)-g(\mathbf{u}_2,c_2)|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}\leqslant L^2_{Lip}(|\mathbf{w}|^2_{L^2}+|\psi|^2_{H^1}).
\tag{3.28}
$$

由于 $\nabla\cdot\sigma_1=\nabla\cdot\sigma_2=0$，我们得到 $(\phi(\psi),\psi)=0$。此外，根据 $\nabla\cdot\mathbf{u}_2=0$ 这一事实，我们推得 $(B_1(\mathbf{u}_2,\psi),\psi)=0$。接下来，我们回顾一下，$(\mathbf{A}_3)$ 蕴含

$$
|\phi(\psi)|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}=\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathcal{O}}|\sigma_k(x)\cdot\nabla\psi(x)|^2\,dx=|\nabla\psi|^2_{L^2}.
$$

因此，对 $t\mapsto|\psi(t)|^2_{H^1}$ 应用 Itô 公式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&|\psi(t)|^2_{H^1}+2\int_0^t\left(\mu\left|\nabla\psi(s)\right|^2_{L^2}+\xi\left|A_1\psi(s)\right|^2_{L^2}\right)ds\\
&=-2\int_0^t(B_1(\mathbf{w}(s),c_1(s)),\psi(s))ds-2\int_0^t(R_1(n_1(s),c_1(s))-R_1(n_2(s),c_2(s)),\psi(s))ds\\
&\quad+2\int_0^t(B_1(\mathbf{w}(s),c_1(s))+B_1(\mathbf{u}_2(s),\psi(s)),A_1\psi(s))ds\\
&\quad-2\int_0^t(R_1(n_1(s),c_1(s))-R_1(n_2(s),c_2(s)),A_1\psi(s))ds\\
&\quad+\gamma^2\int_0^t|\nabla\phi(\psi(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}\,ds+2\gamma\int_0^t(\nabla\phi(\psi(s)),\nabla\psi(s))d\beta_s.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

对方程 L^2取内积3.24，与 φ 相乘，并将所得结果与3.29相加，得到

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(t)|^2_{L^2}+|\psi(t)|^2_{H^1}+2\int_0^t(\mu\left|\nabla\psi(s)\right|^2_{L^2}+\xi\left|A_1\psi(s)\right|^2_{L^2}+\delta\left|\nabla\varphi(s)\right|^2_{L^2})ds\\
&=-2\int_0^t(B_1(\mathbf{w}(s),c_1(s)),\psi(s))ds-2\int_0^t(R_1(n_1(s),c_1(s))-R_1(n_2(s),c_2(s)),\psi(s))ds\\
&\quad+2\int_0^t(B_1(\mathbf{w}(s),c_1(s))+B_1(\mathbf{u}_2(s),\psi(s)),A_1\psi(s))ds\\
&\quad-2\int_0^t(R_1(n_1(s),c_1(s))-R_1(n_2(s),c_2(s)),A_1\psi(s))ds\\
&\quad-2\int_0^t[r_2(\varphi(s),c_1(s),\varphi(s))+r_2(n_2(s),\psi(s),\varphi(s))]ds+\gamma^2\int_0^t|\nabla\phi(\psi(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}\,ds\\
&\quad-2\int_0^t(B_1(\mathbf{w}(s),n_1(s)),\varphi(s))ds+2\gamma\int_0^t(\nabla\phi(\psi(s)),\nabla\psi(s))d\beta_s.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

现在，我们给出对3.30右端进行估计。与3.26类似，我们有

$$
\begin{aligned}
2\left|(B_1(\mathbf{w},c_1),\psi)\right| &\leqslant 2\left|\mathbf{w}\right|_{L^4}\left|\nabla c_1\right|_{L^2}\left|\psi(s)\right|_{L^4}\\
&\leqslant \mathcal{K}\left|\nabla\mathbf{w}\right|_{L^2}\left|\nabla c_1\right|_{L^2}\left|\psi\right|_{H^1}\\
&\leqslant \frac{\eta}{5}\left|\nabla\mathbf{w}\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|\nabla c_1\right|_{L^2}^2\left|\psi\right|_{H^1}.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

得益于连续嵌入 $H^1(\mathcal{O})\hookrightarrow L^4(\mathcal{O})$ 以及 L^∞在推论 3.7中证明的稳定性性质，我们有

$$
\begin{aligned}
2(R_1(n_1,c_1)-R_1(n_2,c_2),\psi) &\leqslant 2\left|R_1(n_1,c_1)-R_1(n_2,c_2)\right|_{L^2}\left|\psi\right|_{L^2}\\
&\leqslant 4\left|(f(c_1)-f(c_2))n_1\right|_{L^2}^2+4\left|f(c_2)\psi\right|_{L^2}^2+2\left|\psi\right|_{L^2}^2\\
&\leqslant 4\sup_{0\leqslant r\leqslant|c_0|_{L^\infty}}(f'(r))^2\left|n_1\psi\right|_{L^2}^2+4\sup_{0\leqslant r\leqslant|c_0|_{L^\infty}}f(r)\left|\psi\right|_{L^2}^2+2\left|\psi\right|_{L^2}^2\\
&\leqslant \mathcal{K}\left|\psi\right|_{L^4}^2\left|n_1\right|_{L^4}^2+\mathcal{K}_f\left|\psi\right|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

应用加利亚多-纳伦伯格-索博列夫不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
2(R_1(n_1,c_1)-R_1(n_2,c_2),\psi) &\leqslant \mathcal{K}\left|\psi\right|_{H^1}^2\left(\left|\nabla n_1\right|_{L^2}\left|n_1\right|_{L^2}+\left|n_1\right|_{L^2}^2\right)+\mathcal{K}_f\left|\psi\right|_{L^2}^2\\
&\leqslant \mathcal{K}\left(\left|\nabla n_1\right|_{L^2}\left|n_1\right|_{L^2}+\left|n_1\right|_{L^2}^2\right)\left|\psi\right|_{H^1}^2+\mathcal{K}_f\left|\psi\right|_{H^1}^2.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

得益于拉迪任斯卡娅不等式、加利亚多-纳伦伯格-索博列夫不等式和杨氏不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
2\left|(B_1(\mathbf{w},c_1),A_1\psi)\right| &\leqslant 2\left|\mathbf{w}\right|_{L^4}\left|\nabla c_1\right|_{L^4}\left|A_1\psi\right|_{L^2}\\
&\leqslant \frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|\mathbf{w}\right|_{L^2}\left|\nabla\mathbf{w}\right|_{L^2}\left(\left|c_1\right|_{H^2}\left|\nabla c_1\right|_{L^2}+\left|\nabla c_1\right|_{L^2}^2\right)\\
&\leqslant \frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\frac{\eta}{5}\left|\nabla\mathbf{w}\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left(\left|c_1\right|_{H^2}^2\left|\nabla c_1\right|_{L^2}^2+\left|\nabla c_1\right|_{L^2}^4\right)\left|\mathbf{w}\right|_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

我们回顾一下，存在一个正数常数 $\mathcal{K}_0$，使得$\left|\psi\right|_{H^2}^2\leqslant\mathcal{K}_0(\left|A_1\psi\right|^2+\left|\psi\right|_{H^1}^2)$。因此，利用连续嵌入 $V\hookrightarrow H$，我们得到

$$
\begin{aligned}
2\left|(B_1(\mathbf{u}_2,\psi),A_1\psi)\right| &\leqslant 2\left|\mathbf{u}_2\right|_{L^4}\left|\nabla\psi\right|_{L^4}\left|A_1\psi\right|_{L^2}\\
&\leqslant \frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|\mathbf{u}_2\right|_{L^2}\left|\nabla\mathbf{u}_2\right|_{L^2}\left(\left|\psi\right|_{H^2}\left|\nabla\psi\right|_{L^2}+\left|\nabla\psi\right|_{L^2}^2\right)\\
&\leqslant \frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\frac{\mathcal{K}_0^{-1}\xi}{6}\left|\psi\right|_{H^2}^2+\mathcal{K}\left|\mathbf{u}_2\right|_{L^2}^2\left|\nabla\mathbf{u}_2\right|_{L^2}^2\left|\nabla\psi\right|_{L^2}^2\\
&\quad+\mathcal{K}\left|\mathbf{u}_2\right|_{L^2}\left|\nabla\mathbf{u}_2\right|_{L^2}\left|\nabla\psi\right|_{L^2}^2\\
&\leqslant \frac{\xi}{3}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\frac{\xi}{6}\left|\psi\right|_{H^1}^2+\mathcal{K}\left(\left|\mathbf{u}_2\right|_{L^2}^2\left|\nabla\mathbf{u}_2\right|_{L^2}^2+\left|\nabla\mathbf{u}_2\right|_{L^2}^2\right)\left|\psi\right|_{H^1}^2.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

采用与（3.32）中类似的论证，我们得到

$$
\begin{aligned}
2\left|(R_1(n_1,c_1)-R_1(n_2,c_2),A_1\psi\right| &\leqslant \frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|R_1(n_1,c_1)-R_1(n_2,c_2)\right|_{L^2}^2\\
&\leqslant \frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|\psi\right|_{L^4}^2\left|n_1\right|_{L^4}^2+\mathcal{K}_f\left|\psi\right|_{L^2}^2\\
&\leqslant \frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}_f\left|\psi\right|_{H^1}^2+\mathcal{K}\left(\left|\nabla n_1\right|_{L^2}\left|n_1\right|_{L^2}+\left|n_1\right|_{L^2}^2\right)\left|\psi\right|_{H^1}^2.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

通过分部积分和 H¨older 不等式，以及加利亚多-尼伦伯格-索博列夫不等式，我们可知

$$
\begin{aligned}
2\left|(B_1(\mathbf{w},n_1),\varphi)\right| &\leqslant 2\left|\int_{\mathcal{O}} n_1(x)\mathbf{w}(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx\right| \\
&\leqslant 2\left|n_1\right|_{L^4}\left|\mathbf{w}\right|_{L^4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2} \\
&\leqslant \frac{\delta}{4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|\mathbf{w}\right|_{L^2}\left|\nabla\mathbf{w}\right|_{L^2}\left(\left|\nabla n_1\right|_{L^2}\left|n_1\right|_{L^2}+\left|n_1\right|_{L^2}^2\right) \\
&\leqslant \frac{\delta}{4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}^2+\frac{\eta}{5}\left|\nabla\mathbf{w}\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left(\left|\nabla n_1\right|_{L^2}^2\left|n_1\right|_{L^2}^2+\left|n_1\right|_{L^2}^4\right)\left|\mathbf{w}\right|_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

通过应用杨氏不等式和加利亚多-尼伦伯格-索博列夫不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
2\left|r_2(\varphi,c_1,\varphi)\right| &\leqslant 2\left|\varphi\right|_{L^4}\left|\nabla c_1\right|_{L^4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2} \\
&\leqslant \frac{\delta}{4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|\varphi\right|_{L^4}^2\left|\nabla c_1\right|_{L^4}^2 \\
&\leqslant \frac{\delta}{4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left(\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}\left|\varphi\right|_{L^2}+\left|\varphi\right|_{L^2}^2\right)\left(\left|c_1\right|_{H^2}\left|\nabla c_1\right|_{L^2}+\left|\nabla c_1\right|_{L^2}^2\right) \\
&\leqslant \frac{\delta}{2}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left(\left|c_1\right|_{H^2}^2\left|\nabla c_1\right|_{L^2}^2+\left|\nabla c_1\right|_{L^2}^4+\left|c_1\right|_{H^2}\left|\nabla c_1\right|_{L^2}+\left|\nabla c_1\right|_{L^2}^2\right)\left|\varphi\right|_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

类似地，我们有

$$
\begin{aligned}
2\left|r_2(n_2,\psi,\varphi)\right| &\leqslant 2\left|n_2\right|_{L^4}\left|\nabla\psi\right|_{L^4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2} \\
&\leqslant \frac{\delta}{4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|n_2\right|_{L^4}^2\left(\left|\psi\right|_{H^2}\left|\nabla\psi\right|_{L^2}+\left|\nabla\psi\right|_{L^2}^2\right) \\
&\leqslant \frac{\delta}{4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}^2+\frac{\mathcal{K}_0^{-1}\xi}{6}\left|\psi\right|_{H^2}^2+\mathcal{K}\left|n_2\right|_{L^4}^4\left|\nabla\psi\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|n_2\right|_{L^4}^2\left|\nabla\psi\right|_{L^2}^2 \\
&\leqslant \frac{\delta}{4}\left|\nabla\varphi\right|_{L^2}^2+\frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+\frac{\xi}{6}\left|\psi\right|_{H^1}^2+\mathcal{K}\left|n_2\right|_{L^2}^4\left|\psi\right|_{H^1}^2 \\
&\quad+\mathcal{K}\left(\left|\nabla n_2\right|_{L^2}\left|n_2\right|_{L^2}+\left|n_2\right|_{L^2}^2\left|\nabla n_2\right|_{L^2}^2+\left|n_2\right|_{L^2}^2\right)\left|\psi\right|_{H^1}^2.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

利用（3.3）我们推导出

$$
\begin{aligned}
\gamma^2\left|\nabla\phi(\psi)\right|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2 &= \gamma^2\sum_{k=1}^{2}\int_{\mathcal{O}}\left|\nabla(\sigma_k(x)\cdot\nabla\psi(x))\right|^2dx \\
&\leqslant 2\gamma^2\sum_{k=1}^{2}\left|\sigma_k\right|_{W^{1,\infty}}^2\left|\nabla\psi\right|_{L^2}^2+2\gamma^2\sum_{k=1}^{2}\left|\sigma_k\right|_{L^\infty}^2\left|\psi\right|_{H^2}^2 \\
&\leqslant (1+\mathcal{K}_0)2\gamma^2\left|\sigma\right|_{W^{1,\infty}}^2\left|\nabla\psi\right|_{L^2}^2+2\gamma^2\mathcal{K}_0\left|\sigma\right|_{L^\infty}^2\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2 \\
&\leqslant \frac{\xi}{6}\left|A_1\psi\right|_{L^2}^2+(1+\mathcal{K}_0)2\gamma^2\left|\sigma\right|_{W^{1,\infty}}^2\left|\psi\right|_{H^1}^2.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

现在，对于 $t\in[0、T]$ 和 $s\in[0、t]$，令

$$
\mathcal{Y}(t):=\left|\mathbf{u}(t)\right|_{L^2}^2+\left|c(t)\right|_{H^1}^2+\left|\varphi(t)\right|_{L^2}^2,
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}(s) :=& \mathcal{K}\left|\nabla u_1(s)\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left|\nabla c_1(s)\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\left(\left|\nabla n_1(s)\right|_{L^2}\left|n_1(s)\right|_{L^2}+\left|n_1(s)\right|_{L^2}^2\right)\\
&+\mathcal{K}\left(\left|c_1(s)\right|_{H^2}^2\left|\nabla c_1(s)\right|_{L^2}^2+\left|\nabla c_1(s)\right|_{L^2}^4\right)+\mathcal{K}\left(\left|\mathbf{u}_2(s)\right|_{L^2}^2\left|\nabla \mathbf{u}_2(s)\right|_{L^2}^2+\left|\nabla \mathbf{u}_2(s)\right|_{L^2}^2\right)\\
&+\mathcal{K}\left(\left|\nabla n_1(s)\right|_{L^2}\left|n_1(s)\right|_{L^2}+\left|n_1(s)\right|_{L^2}^2\right)+\mathcal{K}\left(\left|\nabla n_1(s)\right|_{L^2}^2\left|n_1(s)\right|_{L^2}^2+\left|n_1(s)\right|_{L^2}^4\right)\\
&+\mathcal{K}\left(\left|c_1(s)\right|_{H^2}^2\left|\nabla c_1(s)\right|_{L^2}^2+\left|\nabla c_1(s)\right|_{L^2}^4+\left|c_1(s)\right|_{H^2}\left|\nabla c_1(s)\right|_{L^2}+\left|\nabla c_1(s)\right|_{L^2}^2\right)\\
&+\mathcal{K}\left(\left|\nabla n_2(s)\right|_{L^2}\left|n_2(s)\right|_{L^2}+\left|n_2(s)\right|_{L^2}^2\left|\nabla n_2(s)\right|_{L^2}^2+\left|n_2(s)\right|_{L^2}^2+\left|n_2(s)\right|_{L^2}^4\right),
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

and

$$
\theta(t) := \exp\left(-\int_0^t \mathcal{Z}(s)ds\right).
$$

对 $t\mapsto\theta(t)\left|\mathbf{u}(t)\right|_{L^2}^2$ 应用 Itô 公式，我们推导得

$$
\begin{aligned}
\theta(t)\left|\mathbf{w}(t)\right|_{L^2}^2+2\eta\int_0^t\theta(s)\left|\nabla\mathbf{w}(s)\right|_{L^2}^2ds \leqslant& 2\int_0^t\theta(s)(B_0(\mathbf{w}(s),\mathbf{u}_1(s)),\mathbf{w}(s))ds\\
&+2\int_0^t\theta(s)(R_0(\varphi(s)),\mathbf{w}(s))ds+\int_0^t\theta'(s)\left|\mathbf{w}(s)\right|_{L^2}^2ds\\
&+\int_0^t\theta(s)\left|g(\mathbf{u}_1(s),c_1(s))-g(\mathbf{u}_2(s),c_2(s))\right|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}^2ds\\
&+2\int_0^t\theta(s)(g(\mathbf{u}_1(s),c_1(s))-g(\mathbf{u}_2(s),c_2(s)),\mathbf{w}(s))dW_s.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

再次对$t\mapsto\theta(t)(\left|\varphi(t)\right|_{L^2}^2+\left|\psi(t)\right|_{H^1}^2)$ 应用 Itô 公式，并将所得结果与（3.41）相加，同时考虑估计（3.26）-（3.28）和（3.31）-（3.39），可得

$$
\begin{aligned}
&\theta(t)\mathcal{Y}(t)+\int_0^t\theta(s)\left(\eta\left|\nabla\mathbf{w}(s)\right|_{L^2}^2+\mu\left|\nabla\psi(s)\right|_{L^2}^2+\xi\left|A_1\psi(s)\right|_{L^2}^2\right)ds\\
&\quad\leqslant\left(\mathcal{K}\left|\Phi\right|_{W^{1,\infty}}^2+L_{Lip}^2+2\mathcal{K}_f+\frac{\xi}{3}+(1+\mathcal{K}_0)2\gamma^2\left|\sigma\right|_{W^{1,\infty}}^2\right)\int_0^t\theta(s)\mathcal{Y}(s)ds\\
&\qquad+2\gamma\int_0^t\theta(s)(\nabla\phi(\psi(s)),\nabla\psi(s))d\beta_s\\
&\qquad+2\int_0^t\theta(s)(g(\mathbf{u}_1(s),c_1(s))-g(\mathbf{u}_2(s),c_2(s)),\mathbf{w}(s))dW_s.
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

接下来，取数学期望可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\theta(t)\mathcal{Y}(t)+\mathbb{E}\int_0^t\theta(s)\left(\eta\left|\nabla\mathbf{w}(s)\right|_{L^2}^2+\mu\left|\nabla\psi(s)\right|_{L^2}^2+\xi\left|A_1\psi(s)\right|_{L^2}^2\right)ds\\
&\quad\leqslant\left(\mathcal{K}\left|\Phi\right|_{W^{1,\infty}}^2+L_{Lip}^2+2\mathcal{K}_f+\frac{\xi}{3}+(1+\mathcal{K}_0)2\gamma^2\left|\sigma\right|_{W^{1,\infty}}^2\right)\mathbb{E}\int_0^t\theta(s)\mathcal{Y}(s)ds.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Fr由此，结合格朗沃尔不等式可推知，对于任意的 $t\in[0,T]$

$$
\mathbb{E}\theta(t)\mathcal{Y}(t)=0.
$$

由此可得，对于所有 $t\in[0,T]$，$\mathcal{Y}(t)=0$ $\mathbb{P}$-几乎必然成立。由于 $(\mathbf{u}_i,c_i,n_i)$，$i=1,2$ 的路径是连续的，故 $\mathbb{P}$-几乎必然成立，

$$
(\mathbf{u}_1(t),c_1(t),n_1(t))=(\mathbf{u}_2(t),c_2(t),n_2(t)),\quad \mathbb{P}\text{-a.s., for all } t\in[0,T].
$$

□

有了存在性和路径唯一性的结论，我们现在证明定理3.2中所述强解的存在性。

定理 ***3.2*** 的证明。问题（1.2）的概率弱解的存在性见命题 3.5。概率弱解的路径唯一性由命题 3.8 给出。因此，根据山田 - 渡边定理（见 [30, 定理 E.1。8]），问题（ 1.2 ）存在唯一的概率强解；该定理指出，弱概率解的存在性与路径唯一性意味着唯一概率强解的存在。□

4. 命题 3.5 的证明

本节将证明命题 3.5。我们首先引入 Galerkin 逼近，然后讨论 Galerkin 逼近的存在性，并证明质量守恒性质、非负性以及 L^∞-范数在有限维情形下的稳定性。利用这些性质，我们证明先验估计，并据此证明逼近族的紧性；随后分两步进行：先将确定性项取极限，再利用 [12,定理 8。2] 中证明的通常鞅表示定理构造噪声项。

4.1. Galerkin 逼近与先验一致估计。在本小节中，我们将构造一族解的逼近，并证明这些逼近一致满足若干关键估计。为此，我们回顾一下：存在由 Stokes 算子 A_0 的特征函数组成的标准正交基 $\{\mathrm{w}_i\}_{i=1}^\infty$ of H ，以及由诺伊曼拉普拉斯算子 A_1 的特征函数组成的 $L^2(\mathcal{O})$ 的标准正交基 $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ 。对于 $m \in \mathbb{N}$，我们将考虑以下有限维空间

$$\mathbf{H}_m = \mathrm{spam}\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m\}, \qquad H_m = \mathrm{spam}\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}, \qquad \mathcal{H}_m = \mathbf{H}_m \times H_m \times H_m,$$

其中，我们赋予 $\mathcal{H}_m$ 以下范数

$$|(\mathbf{u}, c, n)|^2_{\mathcal{H}_m} = |\mathbf{u}|^2_{L^2} + |c|^2_{L^2} + |n|^2_{L^2}, \quad (\mathbf{u}, c, n) \in \mathcal{H}_m.$$

由于 $\mathcal{H}_m$ 是有限维空间，因此在该空间上， $L^2(\mathcal{O})$、 $H^1(\mathcal{O})$ 和 $H^2(\mathcal{O})$ 范数等价。按照 [44, P. 335] n_0^m 的方式，我们选取 c_0^m 和 $\mathbf{u}_0^m$ ，使得

$$\begin{aligned} &n_0^m > 0, \ \ n_0^m \to n_0 \ \text{ in } \ L^2(\mathcal{O}), \ \ n_0^m \ln n_0^m \to n_0 \ln n_0 \ \text{ in } \ L^1(\mathcal{O}), \\ &c_0^m > 0, \ \ |c_0^m|_{L^\infty} \leqslant |c_0|_{L^\infty}, \ \ c_0^m \to c_0 \ \text{ in } \ H^1(\mathcal{O}), \\ &\text{and } \ \mathbf{u}_0^m \to \mathbf{u}_0 \ \text{ in } \ H. \end{aligned} \tag{4.1}$$

接下来，我们在滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]}, \mathbb{P})$ 上考虑以下有限维问题。对于所有 $t \in [0, T]$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_m(t) + \int_0^t [\eta A_0 \mathbf{u}_m(s) + \mathcal{P}_m^1 B_0(\mathbf{u}_m(s), \mathbf{u}_m(s))] ds \\
&= \mathbf{u}_0^m + \int_0^t \mathcal{P}_m^1 R_0(n_m(s), \Phi) ds + \int_0^t \mathcal{P}_m^1 g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s)) dW_s, \\
&c_m(t) + \int_0^t [\xi A_1 c_m(s) + \mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))] ds \\
&= c_0^m - \int_0^t \mathcal{P}_m^2 R_1(n_m(s), c_m(s)) ds + \gamma \int_0^t \mathcal{P}_m^2 \phi(c_m(s)) d\beta_s, \\
&n_m(t) + \int_0^t [\delta A_1 n_m(s) + \mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s), n_m(s))] ds = n_0^m - \int_0^t \mathcal{P}_m^2 R_2(n_m(s), c_m(s)) ds,
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

其中，$\mathcal{P}_m^1$ 和 $\mathcal{P}_m^2$ 分别是从 H 和 $L^2(\mathcal{O})$ 到 H_m 和 H_m的投影，且它们的算子范数均为 1。

对于每个 m，我们考虑如下映射 Ψ_m： $\mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_m$，其定义为

$$
\Psi_m(\mathbf{u}, c, n) = \begin{pmatrix} \eta A_0 \mathbf{u} + \mathcal{P}_m^1 B_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathcal{P}_m^1 R_0(n, \Phi) \\ \xi A_1 c + \mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}, c) + \mathcal{P}_m^2 R_1(n, c) \\ \delta A_1 n + \mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}, n) + \mathcal{P}_m^2 R_2(n, c) \end{pmatrix}.
$$

在下述引理中，我们将陈述映射 Ψ_m、$m \in \mathbb{N}$的一项重要性质。

引理 4.1. 设假设 *2.1* 和假设 *2.3* 成立。对于每个 $m \in \mathbb{N}$，映射 Ψ_m 是局部 Lipschitz 连续的。更具体地，对于每个 $m \in \mathbb{N}$ 以及任意$r > 0$，存在一个常数 $\mathcal{K}_r$ 使得

$$
|\Psi_m(\mathbf{v}_1) - \Psi_m(\mathbf{v}_2)|_{\mathcal{H}_m} \leqslant \mathcal{K}_r |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_{\mathcal{H}_m}, \tag{4.3}
$$

对于 $\mathbf{v}_1 = (\mathrm{u}_1, c_1, n_1), \mathbf{v}_2 = (\mathrm{u}_2, c_2, n_2) \in \mathcal{H}_m$，其中 $|\mathrm{v}_i|_{\mathcal{H}_m} \leqslant r$，$i = 1,2$。

证明。设 $\mathbf{v}_1 = (\mathrm{u}_1, c_1, n_1), \mathbf{v}_2 = (\mathrm{u}_2, c_2, n_2) \in \mathcal{H}_m$ and $\mathrm{v} = (\mathrm{u}\ c, n) \in \mathcal{H}_m$。我们假设 that|v $_i|_{\mathcal{H}_m} \leqslant r$，$i = 1,2$。我们有

$$
\begin{aligned}
(\Psi_m(\mathbf{v}_1) - \Psi_m(\mathbf{v}_2), \mathbf{v})_{\mathcal{H}_m} &= (\eta A_0(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + B_0(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) - B_0(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) - R_0(n_1, \Phi) + R_0(n_2, \Phi), \mathbf{u}) \\
&\quad + (\xi A_1(c_1 - c_2) + B_1(\mathbf{u}_1, c_1) - B_1(\mathbf{u}_2, c_2) + R_1(n_1, c_1) - R_1(n_2, c_2), c) \\
&\quad + (\delta A_1(n_1 - n_2) + B_1(\mathbf{u}_1, n_1) - B_1(\mathbf{u}_2, n_2) + R_2(n_1, c_1) - R_2(n_2, c_2), n).
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

利用算子 B_0 的双线性，我们可知

$$
\begin{aligned}
|(B_0(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) - B_0(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2), \mathbf{u})| &\leqslant |(B_0(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1), \mathbf{u})| + |(B_0(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \mathbf{u})| \\
&\leqslant 2\mathcal{K}_r |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{L^2} |\mathbf{u}|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

由 H¨older 不等式，我们还注意到

$$
\begin{aligned}
(R_0(n_1, \Phi) - R_0(n_2, \Phi), \mathbf{u}) &\leqslant \int_{\mathcal{O}} |n_1 - n_2| |\nabla \Phi| |\mathbf{u}| dx \\
&\leqslant |\nabla \Phi|_{L^\infty} |n_1 - n_2|_{L^2} |\mathbf{u}|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

由于对于任意 $q \geqslant 2$，空间 $H^1(\mathcal{O})$ 连续嵌入到空间 $L^q(\mathcal{O})$ 中，因此我们有

$$\begin{aligned}|(B_1(\mathbf{u}_1,c_1)-B_1(\mathbf{u}_2,c_2),c)| &\leqslant |(B_1(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2,c_1),c)|+|(B_1(\mathbf{u}_2,c_1-c_2),c)|\\ &\leqslant |\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2|_{L^4}\,|\nabla c_1|_{L^2}\,|c|_{L^4}+|\mathbf{u}_2|_{L^4}\,|\nabla(c_1-c_2)|_{L^2}\,|c|_{L^4}\\ &\leqslant (|\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)|_{L^2}\,|\nabla c_1|+|\nabla\mathbf{u}_2|_{L^2}\,|\nabla(c_1-c_2)|_{L^2})\,|c|_{H^1}\\ &\leqslant \mathcal{K}_r(|\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)|_{L^2}+|\nabla(c_1-c_2)|_{L^2})\,|c|_{H^1}\,.\end{aligned}$$

以类似的方式，我们证明

$$|(B_1(\mathbf{u}_1,n_1)-B_1(\mathbf{u}_2,n_2),n)| \leqslant \mathcal{K}_r(|\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)|_{L^2}+|\nabla(n_1-n_2)|_{L^2})\,|n|_{H^1}\,.$$

由于 $H_m \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ 和 $f(0)=0$ 以及 $f\in C^1([0、\infty))$，我们推得

$$\begin{aligned}|(R_1(n_1,c_1)-R_1(n_2,c_2),c)| &\leqslant \int_{\mathcal{O}}|n_1-n_2|\,f(c_1)\,|c|\,dx+\int_{\mathcal{O}}|n_2|\,|f(c_1)-f(c_2)|\,|c|\,dx\\ &\leqslant \max_{0\leqslant c\leqslant |c_1|_{L^\infty}} f(c)\int_{\mathcal{O}}|n_1-n_2|\,|c|\,dx\\ &\quad+\max_{0\leqslant c\leqslant \max(|c_1|_{L^\infty},|c_2|_{L^\infty})} f'(c)\int_{\mathcal{O}}|n_2|\,|c_1-c_2|\,|c|\,dx\\ &\leqslant \max_{0\leqslant c\leqslant r} f(c)\,|n_1-n_2|_{L^2}\,|c|_{L^2}+\max_{0\leqslant c\leqslant r} f'\,|n_2|_{L^4}\,|c_1-c_2|_{L^4}\,|c|_{L^2}\\ &\leqslant \mathcal{K}_r(|n_1-n_2|_{L^2}+|c_1-c_2|_{H^1})\,|c|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

此外，我们注意到

$$\begin{aligned}|(R_2(n_1,c_1)-R_2(n_2,c_2),n)| &\leqslant \int_{\mathcal{O}}|n_1-n_2|\,|\nabla c_1|\,|\nabla n|\,dx+\int_{\mathcal{O}}|n_2|\,|\nabla(c_1-c_2)|\,|\nabla n|\,dx\\ &\leqslant |n_1-n_2|_{L^2}\,|\nabla c_1|_{L^4}\,|\nabla n|_{L^2}+|n_2|_{L^4}\,|\nabla(c_1-c_2)|_{L^4}\,|\nabla n|_{L2}\\ &\leqslant \mathcal{K}_r(|n_1-n_2|_{L^2}+|c_1-c_2|_{H^2})\,|n|_{H^1}\,.\end{aligned}$$

考虑到无限维空间中所有范数等价，且算子 A_0 和 A_1 是线性的，我们由上述不等式和等式（4.4）推得。□

有限维问题（4.2）的解的存在性是经典结果。事实上，由于引理4.1，映射 Ψ_m 是局部 Lipschitz 连续的。此外，根据不等式（2.12），$\mathcal{P}_m^1 g(\cdot,\ \cdot)$ 是局部 Lipschitz 连续的。由 $\phi(.)$的线性性，我们很容易看出 $\mathcal{P}_m^2\phi(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的。因此，根据系数局部 Lipschitz 连续的有限维随机微分方程的经典理论（完整细节见 [31，定理 38，P. 303] ），存在系统（4.2）的一个局部解，其路径在 $\mathcal{H}_m$中连续。也就是说，存在一个停时 τ_m、一个过程 $t\mapsto(\mathbf{u}_m(t),\ c_m(t),\ n_m(t))$ 使得 $\tau_m>0$ $\mathbb{P}$几乎必然成立，并且停过程

$$t\mapsto(\mathbf{u}_m(t\wedge\tau_m),c_m(t\wedge\tau_m),n_m(t\wedge\tau_m))$$

满足 Itˆo 方程系统（4.2），且在 $\mathcal{H}_m$ 中具有连续路径。此外，若一个过程

$$t\mapsto(\bar{\mathbf{u}}_m(t),\bar{c}_m(t),\bar{n}_m(t)),$$

以及停时 σ_m 构成另一个局部解，那么

$$(\mathbf{u}_m(\cdot),c_m(\cdot),n_m(\cdot))=(\bar{\mathbf{u}}_m(\cdot),\bar{c}_m(\cdot),\bar{n}_m(\cdot)),\quad \mathbb{P}\text{-a.s. on } [0,\tau_m\wedge\sigma_m].$$

接下来我们将证明，对于每个$t \in [0,T]$，解 $(\mathbf{u}_m, c_m, n_m)$ 几乎处处存在。为此，只需证明

$$\tau_m(\omega) > T, \quad \text{for almost all } \omega \in \Omega, \text{and all } m \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

为此，我们将采用一些来自 [33, 第132页，定理12的证明。1]由于对于所有$m \in \mathbb{N}$，确定性被积函数 Ψ_m 和随机被积函数 $\mathcal{P}_m^1 g$ 都是局部 Lipschitz 连续的，对于每个 $N \in \mathbb{N}$，我们可以定义被积函数 Ψ_m^N 和 $\mathcal{P}_m^1 g^N$，分别与Ψ_m 和 $\mathcal{P}_m^1 g$ 在球

$$\mathbb{B}_{\mathcal{H}_m}^N := \left\{(\mathbf{v}, \varphi, \psi) \in \mathcal{H}_m : |(\mathbf{v}, \varphi, \psi)|_{\mathcal{H}_m} < N\right\},$$

使得 Ψ_m^N 和 $\mathcal{P}_m^1 g^N$ 都是全局 Lipschitz 连续的。因此，由于 $\mathcal{P}_m^2 \phi$ 已经是全局 Lipschitz 连续的， [33, 第128页，定理11。2] 保证存在唯一解$(\mathbf{u}_m^N, c_m^N, n_m^N)$，其4.2系统为与系统（ Ψ_m^N 和 $\mathcal{P}_m^1 g^N$ （而不是Ψ_m 和 $\mathcal{P}_m^1 g$）相关联的系统，并定义在 [0上，$+\infty$）几乎处处成立。然后，对于所有 m，我们如下定义一个停时序列， $N \in \mathbb{N}$

$$\tau_N^m := \inf\{t > 0 : \sqrt{|n_m^N(t)|_{L^2}^2 + |\mathbf{u}_m^N(t)|_{L^2}^2 + |c_m^N(t)|_{H^1}^2} \geqslant N\} \wedge N, \tag{4.6}$$

其中 $a \wedge b := \min\{a, b\}$ 对任意实数 a 和 b。

对于任意固定的 $m \in \mathbb{N}$，序列 $\{\tau_N^m\}_{N\in\mathbb{N}}$ 显然是递增的。此外， [33, 第 131 页，推论 11。10] 意味着对于所有 $N \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbf{u}_m, c_m, n_m) = (\mathbf{u}_m^N, c_m^N, n_m^N) \text{ on } [0, \tau_N^m].$$

由最后一个等式，我们推断系统（4.2）的解 $(\mathbf{u}_m, c_m, n_m)$ 定义在 $[0, \tau_N^m]$对所有 $N \in \mathbb{N}$均成立，因此， $\tau_m > \tau_N^m$几乎处处对所有 $N \in \mathbb{N}$成立。因此，

$$\tau_m \geqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \tau_N^m, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

为了证明不等式（4.5），只需证明

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \tau_N^m > T, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{4.7}$$

在证明这一点之前，下面的引理将证明局部解 $(\mathbf{u}_m, c_m, n_m)$ 系统（4.2）的若干性质。

引理 4.2。 假设 *2.1* 和假设 *2.2*。则对于所有 m, $N \in \mathbb{N}$，以下等式和不等式成立 $\mathbb{P}$-几乎处处。

$$\int_{\mathcal{O}} n_m(t \wedge \tau_N^m, x)dx = \int_{\mathcal{O}} n_0^m(x)dx, \quad \textit{for all } t \in [0,T], \tag{4.8}$$

$$n_m(t \wedge \tau_N^m) > 0, \quad \textit{and } c_m(t \wedge \tau_N^m) > 0, \quad \textit{for all } t \in [0,T], \tag{4.9}$$

and

$$|c_m(t \wedge \tau_N^m)|_{L^\infty} \leqslant |c_0|_{L^\infty}, \quad \textit{for all } t \in [0,T]. \tag{4.10}$$

证明。 为了证明 $n_m(t \wedge \tau_N^m)$和 $c_m(t \wedge \tau_N^m)$的非负性，我们将沿用引理3.6的证明思路。不过，我们将使用有限维空间上的范数等价性，而非 Gagliardo–Nirenberg–Sobolev 不等式。

令 N、$m \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0、T]$ 为任意但固定的值。对所有 $s \in [0、t]$，定义

$$n_{m_-(s\wedge\tau_N^m)} := \max(-n_m(s \wedge \tau_N^m), 0).$$

我们注意到 $n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\in W^{2,\,2}(\mathcal{O})$ 和

$$\begin{aligned}
n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)&=0\cdot 1_{\{n_m(s\wedge\tau_N^m)\geqslant 0\}}-n_m(s\wedge\tau_N^m)\cdot 1_{\{n_m(s\wedge\tau_N^m)<0\}},\\
\nabla n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)&=0\cdot 1_{\{n_m(s\wedge\tau_N^m)\geqslant 0\}}-\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)\cdot 1_{\{n_m(s\wedge\tau_N^m)<0\}},\\
\Delta n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)&=0\cdot 1_{\{n_m(s\wedge\tau_N^m)\geqslant 0\}}-\Delta n_m(s\wedge\tau_N^m)\cdot 1_{\{n_m(s\wedge\tau_N^m)<0\}}.
\end{aligned}$$

我们也很容易看出，对于所有 $s\in[0,t]$,

$$\begin{aligned}
\frac{dn_m(s\wedge\tau_N^m)}{dt}n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)&=-\frac{dn_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)}{dt}n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m),\\
n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)&=-n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\nabla n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m),\\
\Delta n_m(s\wedge\tau_N^m)n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)&=-\Delta n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m).
\end{aligned}$$

因此，我们将方程 (2.14)$_3$乘以 $n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)$，对任意 $s\in[0,\ t]$在 $\mathcal{O}$上积分，并利用分部积分以及 $\nabla\cdot\mathbf{u}_m=0$ 这一事实，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\\
&=-\int_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_m(s\wedge\tau_N^m,x)\cdot\nabla n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m,x)n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m,x)dx-\delta\left|\nabla n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\\
&\quad-\chi\int_{\mathcal{O}}n_m(s\wedge\tau_N^m,x)\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m,x)\nabla n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m,x)dx\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}n_{m_-}^2(s\wedge\tau_N^m,x)\nabla\cdot\mathbf{u}_m(s\wedge\tau_N^m,x)dx-\delta\left|\nabla n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m,x)\right|_{L^2}^2\\
&\quad+\chi\int_{\mathcal{O}}n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m,x)\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m,x)\nabla n_-(s\wedge\tau_N^m,x)dx\\
&\leqslant-\delta\left|\nabla n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2+\chi\left|n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^4}\left|\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^4}\left|\nabla n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}\\
&\leqslant\mathcal{K}\left|n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{H^1}^2\left|c_m(s\wedge\tau_N^m)\right|_{H^2}.
\end{aligned}$$

在最后一行中，我们使用了 $H^1(\mathcal{O})$ 到 $L^4(\mathcal{O})$的连续嵌入。由于 H_m上的 $L^2(\mathcal{O})$、$H^1(\mathcal{O})$ 和 $H^2(\mathcal{O})$范数等价，因此由这个最后的不等式可推知，对于所有 $s\in[0,t]$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\leqslant\mathcal{K}(m)\left|n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\left|c_m(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2},\tag{4.11}$$

其中 $\mathcal{K}(m)$ 是一个依赖于 m的常数， m是空间 H_m的维数。由于 $\mathbb{P}$-几乎必然地， c_m 的路径是连续的，我们得到

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|c_m(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}<\infty,\quad\mathbb{P}\text{-a.s.}$$

因此，对4.11）在 $[0,\ t]$ 上积分，可得

$$\left|n_{m_-}(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\leqslant\left|(n_0^m)_-\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\int_0^t\left|c_m(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}\left|n_{m_-}(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2ds.\tag{4.12}$$

根据格朗沃尔不等式，由不等式（4.12）可得

$$\left|n_{m_-}(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\leqslant\left|(n_0^m)_-\right|_{L^2}^2\exp\left(\mathcal{K}\int_0^t\left|c_m(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}ds\right),$$

这意味着 $\mathbb{P}$-几乎处处， $n_{m_-}(t\wedge\tau_N^m)=0$对所有 $t\in[0,\ T]$由于根据关系式（4.1），$n_0^m>0$。

$c_m(t\wedge\tau_N^m)$的非负性与引理 3.6 的证明非常相似。我们考虑函数 $\Psi:\ H_m\to\mathbb{R}$ 定义为 $\Psi(c)=\int_{\mathcal{O}}c_-^2(x)dx$，其中 $c_-=\max(-c;\ 0)$。设 $\{\psi_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ 为由 $\psi_h(y)=y^2\varphi(hy)$定义的光滑函数序列，对所有 $y\in\mathbb{R}$和 $h\in\mathbb{N}$均成立，其中函数 φ 由（3.8）定义。对于任意 $h\geqslant 1$，我们考虑如下函数序列 $\Psi_h:\ H_m\to\mathbb{R}$ 定义为 $\Psi_h=\int_{\mathcal{O}}\psi_h(c(x))dx$，其中 $c\in H_m$。映射 Ψ_h 二次（Fr´echet）可微，其一阶和二阶导数分别为

$$\Psi_h'(c)(z)=2\int_{\mathcal{O}}c(x)\varphi(hc(x))z(x)dx+h\int_{\mathcal{O}}c^2(x)\varphi'(hc(x))z(x)dx,\quad\forall c,z\in H_m,$$

and

$$\begin{aligned}\Psi_h''(c)(z,k)=h^2&\int_{\mathcal{O}}c^2(x)\varphi''(hc(x))z(x)k(x)dx\\&+4h\int_{\mathcal{O}}c(x)\varphi'(hc(x))z(x)k(x)dx+2\int_{\mathcal{O}}\varphi(hc(x))z(x)k(x)dx,\quad\forall c,z,k\in H_m.\end{aligned}$$

对 $t\mapsto\Psi_h(c_m(t\wedge\tau_N^m))$ 应用伊藤公式，我们得到：对所有 $t\in[0、\ T,\qquad]$,

$$\begin{aligned}\Psi_h(c_m(t\wedge\tau_N^m))-\Psi_h(c_m(0))=&\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\Psi_h'(c_m(s))\left(\mathbf{u}_m(s)\cdot\nabla c_m(s)+\xi\Delta c_m(s)-n_m(s)f(c_m(s))\right)ds\\&+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\sum_{k=1}^{2}\Psi_h''(c_m(s))\left(\gamma\phi_k(c_m(s)),\gamma\phi_k(c_m(s))\right)ds\\&+\gamma\sum_{k=1}^{2}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\Psi_h'(c_m(s))(\phi_k(c_m(s)))d\beta_s^k.\end{aligned}$$

与（3.10）、（3.11）、（3.12）、（3.13）和（3.14）类似，我们可以从最后这个等式推得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{O}}\psi_h(c_m(t\wedge\tau_N^m,x))dx-\int_{\mathcal{O}}\psi_h(c_0^m(x))dx\\&=\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\Psi_h'(c_m(s))\left(\mathbf{u}_m(s)\cdot\nabla c_m(s)+\eta\Delta c_m(s)-n_m(s)f(c_m(s))\right)ds.\end{aligned}\tag{4.13}$$

现在注意到，根据函数 φ 的假设，我们可知对所有 $y\in\mathbb{R}$，都有

$$\lim_{h\longrightarrow\infty}\psi_h(y)=-y^2\cdot 1_{\{y<0\}}=-y_-^2\quad\text{and}\quad\lim_{h\longrightarrow\infty}2y\varphi(hy)=-2y\cdot 1_{\{y<0\}}.\tag{4.14}$$

注意到，对于任意 $y\in\mathbb{R}$，都有

$$\lim_{h\longrightarrow\infty}h\varphi'(hy)=0,\tag{4.15}$$

并且还有

$$|\psi_h(y)|\leqslant\mathcal{K}y^2\quad\text{and}\quad\left|h\varphi'(hy)\right|\leqslant\mathcal{K}\left|y\right|,\tag{4.16}$$

对任意 $y\in\mathbb{R}$ 以及所有 $h\geqslant 1$，其中 $\mathcal{K}>0$ 是一个常数。

利用（4.14）-（4.16），并应用勒贝格控制收敛定理，当 h 在（4.13）中趋于无穷大时，我们可以取极限。由此可得

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathcal{O}} c_{m_-}^2(t\wedge\tau_N^m,x)dx+\int_{\mathcal{O}}(c_0^m(x))_-^2dx\\
&=-2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\int_{\mathcal{O}}\left(\left(\mathbf{u}_m(s,x)\cdot\nabla c_m(s,x)+\eta\Delta c_m(s,x)\right)\right)c_m(s,x)1_{\{c_m(s,x)<0\}}dxds\\
&\quad+2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\int_{\mathcal{O}} n_m(s,x)f(c_m(s,x))c_m(s,x)1_{\{c_m(s,x)<0\}}dxds\\
&=2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\int_{\mathcal{O}}\left(\eta\left|\nabla c_m(s,x)\right|^2+n_m(s,x)f(c_m(s,x))c_m(s,x)\right)1_{\{c_m(s,x)<0\}}dxds,
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

这里用到了分部积分以及 $\nabla\cdot\mathbf{u}_m=0$ 这一事实。由中值定理可知，对于所有 $x\in\mathcal{O}$，存在一个数 $\lambda_m(x)\in(\min(0,c_m(x))、\max(0,c_m(x)))$，使得

$$
f(c_m(x))-f(0)=c_m(x)f'(\lambda_m(x)).
$$

根据 $f(0)=0$，由（4.17）可推得

$$
\left|c_{m_-}(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2-\left|(c_0^m)_-\right|_{L^2}^2=-2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\int_{\mathcal{O}} n_m(s,x)f'(\lambda_m(s,x))c_m^2(s,x)1_{\{c_m(s,x)<0\}}dxds.
$$

由于 $f'>0$和 $1_{\{c_m<0\}}>0$以及关于 $[0,\ t\wedge\tau_N^m]$，$c_m^2>0$和 $n_m>0$，我们推得 $\left|c_{m_-}(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\leqslant\left|(c_0^m)_-\right|_{L^2}^2$。鉴于由关系（4.1）可知 $c_0^m>0$，因此得到 $(c_0^m)_-=0$，从而 $\left|c_{m_-}(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2=0$。由此可得 $c_{m_-}(t\wedge\tau_N^m)=0$，并意味着对于所有 $t\in[0,\ T]$，$\mathbb{P}$- 几乎处处，$c_m(t\wedge\tau_N^m)>0$。

剩下的就是证明不等式（4.10）。证明与推论 3.7的证明类似。设 $p\geqslant 2$ 为一个整数。设 $\Psi:\ H_m\to\mathbb{R}$ 为由 $\Psi(c)=\int_{\mathcal{O}}c^p(x)dx$ 定义的泛函。注意，映射 Ψ 是两次（Fr´echet）可微的，其一阶和二阶导数如下：

$$
\begin{aligned}
\Psi'(c)(z)&=p\int_{\mathcal{O}}c^{p-1}(x)z(x)dx,\quad\forall c,z\in H_m,\\
\Psi''(c)(z,k)&=p(p-1)\int_{\mathcal{O}}c^{p-2}(x)z(x)k(x)dx,\quad\forall c,z,k\in H_m.
\end{aligned}
$$

对过程 $t\mapsto\Psi(c_m(t\wedge\tau_N^m))$ 应用伊藤公式，可得对于所有 $t\in[0、\ T]$，

$$
\begin{aligned}
\Psi(c_m(t\wedge\tau_N^m))-\Psi(c_m(0))&=\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\Psi'(c_m(s))\left(\mathbf{u}(s)\cdot\nabla c_m(s)+\xi\Delta c_m(s)-n_m(s)G(c_m(s))\right)ds\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\sum_{k=1}^{2}\Psi''(c_m(s))\left(\gamma\phi_k(c_m(s)),\gamma\phi_k(c_m(s))\right)ds\\
&\quad+\gamma\sum_{k=1}^{2}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\Psi'(c_m(s))(\phi_k(c_m(s)))d\beta_s^k,
\end{aligned}
$$

由此以及类似于 (3.13)、(3.18)、(3.19) 和 (3.20) 的计算，我们从最后一个等式推出

$$\begin{aligned}&\Psi(c_m(t\wedge\tau_N^m))-\Psi(c_0^m)\\&=\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\int_{\mathcal{O}}\left(-p(p-2)\left|\nabla c_m(s,x)\right|^2c_m^{p-2}(s,x)-pn_m(s,x)f(c_m(s,x))c_m^{p-1}(s,x)\right)dxds.\end{aligned}$$

由于对所有 $s\in[0,\ t]$ 量 $n_m(s\wedge\tau_N^m)$、$f(c_m(s\wedge\tau_N^m))$ 和 $c_m(s\wedge\tau_N^m)$ 均为正$\mathbb{P}$-几乎必然成立，我们由最后一个等式可知，对所有 $t\in[0,\ T]$，$\Psi(c_m(t\wedge\tau_N^m))\leqslant\Psi(c_0^m)$. 这意味着 $|c_m(t\wedge\tau_N^m)|_{L^p}\leqslant|c_0^m|_{L^p}$ 对所有 $p\geqslant 2$均成立。利用 $|.|_{L^p}\to|.|_{L^\infty}$ 当$p\to+\infty$ 时的事实以及不等式（4.1），即可得到所需结果。□

接下来，我们 对任意 $t\in[0、\ T]$ 以及 $m、\ N\in\mathbb{N}$，引入如下李雅普诺夫泛函

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(t\wedge\tau_N^m)=&\int_{\mathcal{O}}n_m(t\wedge\tau_N^m)\ln n_m(t\wedge\tau_N^m)dx+\mathcal{K}_f\left|\nabla c_m(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\\&+\frac{\mathcal{K}_4}{\eta}\left|\mathbf{u}_m(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2+e^{-1}\left|\mathcal{O}\right|,\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{K}_4$ 是稍后给出的某个正数常数，且 $\mathcal{K}_f$ 定义见（2.2）。由于$x\ln x\geqslant-e^{-1}$对任意 $x>0$均成立，我们很容易看出，对所有 $t\in[0,\ T]$，$\mathcal{E}(n_m,\ c_m,\ \mathbf{u}_m)(t\wedge\tau_N^m)\geqslant 0$。根据 [44] 性质（4.1）可得

$$\mathcal{E}(n_0^m,c_0^m,\mathbf{u}_0^m)\leqslant\mathcal{E}(n_0,c_0,\mathbf{u}_0),\qquad\text{for all }\ m\geqslant 1. \tag{4.18}$$

此外，考虑不等式（4.10）并令 $\mathcal{K}=\min(\mathcal{K}_f,\ \frac{\mathcal{K}_4}{\eta})$ 则对所有 $t\in[0,\ T]$，以下结论成立

$$\begin{aligned}\left|(\mathbf{u}_m(t),c_m(t\wedge\tau_N^m)\right|_{\mathcal{H}}^2&\leqslant\mathcal{K}^{-1}\mathcal{E}(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(t\wedge\tau_N^m)+\mathcal{K}^{-1}\left|c_m(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2\\&\leqslant\mathcal{K}^{-1}\mathcal{E}(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(t\wedge\tau_N^m)+\mathcal{K}^{-1}\left|\mathcal{O}\right|\left|c_0\right|_{L^\infty}^2,\quad\mathbb{P}\text{-a.s.}\end{aligned} \tag{4.19}$$

现在我们继续在某些适当的空间中为 $\mathbf{u}_m$、c_m 和 n_m 建立一些一致有界性。为此，我们回顾一下，以下用 $\mathcal{K}$ 表示一个与 m 和 N 无关的正数常数，该常数在不同项中可能取不同值。

引理 4.3。在与命题 *3.5* 相同的假设下，存在一个正数常数$\mathcal{K}$ 使得对所有 $m\in\mathbb{N}$ 和 $N\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|c_m(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2+2\eta\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2ds\leqslant\left|\mathcal{O}\right|\left|c_0\right|_{L^\infty}^2,\qquad\mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)\leqslant\mathcal{K},\\&\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left(\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2+\left|\Delta c_m(s)\right|_{L^2}^2+\left|\nabla\mathbf{u}_m(s)\right|_{L^2}^2\right)ds\leqslant\mathcal{K}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

证明。令 $t\in[0,\ T]$ 为任意但固定的值。我们首先证明估计式（4.20）。为此，取 $(m,\ N)\in\mathbb{N}^2$ 为任意值，并对 $t\mapsto|c_m(t\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2$ 应用 Itô 公式，得到

$$\begin{aligned}&|c_m(t\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2+2\xi\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^2}^2\,ds\\&=|c_0^m|_{L^2}^2-2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(B_1(\mathbf{u}_m(s),c_m(s)),c_m(s))ds-2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(R_1(n_m(s),c_m(s)),c_m(s))ds\\&\quad+\gamma^2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\phi(c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2+2\gamma\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(\phi(c_m(s)),c_m(s))d\beta_s.\end{aligned}\tag{4.22}$$

通过分部积分，我们推导出

$$(B_1(\mathbf{u}_m,c_m),c_m)=\frac12\int_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_m(x)\cdot\nabla c_m^2(x)dx=-\frac12\int_{\mathcal{O}}c_m^2(x)\nabla\cdot\mathbf{u}_m(x)dx=0.$$

根据自由 σ_k 的散度性质以及 $\sigma_k=0$ 在 $\partial\mathcal{O}$，$k=1,2$ 上这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}(\phi(c_m),c_m)&=\sum_{k=1}^2\int_{\mathcal{O}}\sigma_k(x)\cdot\nabla c_m(x)c_m(x)dx\\&=\frac12\sum_{k=1}^2\int_{\mathcal{O}}\sigma_k(x)\cdot\nabla c_m^2(x)dx\\&=-\frac12\sum_{k=1}^2\int_{\mathcal{O}}c_m^2(x)\nabla\cdot\sigma_k(x)dx+\frac12\sum_{k=1}^2\int_{\partial\mathcal{O}}c_m^2(\sigma)\sigma_k(\sigma)\cdot\nu d\sigma\\&=0.\end{aligned}$$

考虑到等式（3.13），我们推断出

$$|\phi(c_m)|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2=\sum_{k=1}^2\int_{\mathcal{O}}|\sigma_k(x)\cdot\nabla c_m(x)|_{L^2}^2\,dx=|\nabla c_m|_{L^2}^2\,.$$

利用最后这三个等式以及这一事实 $|c_0^m|_{L^2}^2\leqslant|\mathcal{O}|\,|c_0|_{L^\infty}^2$（由于根据关系式（4.1），$|c_0^m|_{L^\infty}^2\leqslant|c_0|_{L^\infty}^2$），由等式（4.22）可推断，对于所有 $t\in[0,\ T]$，

$$|c_m(t\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2+2\eta\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^2}^2\,ds+2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\int_{\mathcal{O}}n_m(s,x)f(c_m(s,x))c_m(s,x)dxds\leqslant|\mathcal{O}|\,|c_0|_{L^\infty}^2\,.\tag{4.23}$$

由于 $n_m(s\wedge\tau_N^m)$、$c_m(s\wedge\tau_N^m)$ 和 f 在区间 $[0$上 $t]$ 的非负性（见引理4.2 和假设2.1），由不等式（4.23）可推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|c_m(t\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2+2\eta\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^2}^2\,ds\leqslant|\mathcal{O}|\,|c_0|_{L^\infty}^2\,,\qquad\mathbb{P}\text{-a.s.}\tag{4.24}$$

现在我们来证明估计（4.21）。

将方程（2.14）$_3$ 乘以 $1+\ln n_m(s\wedge\tau_N^m)$，对 $s\in[0,\ t]$ 并对所得方程在 $\mathcal{O}$ 上积分，利用分部积分以及$\mathbf{u}_m$的无散性质，可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{O}}n_m(s\wedge\tau_N^m,x)\ln n(s\wedge\tau_N^m,x)dx+\delta\int_{\mathcal{O}}\frac{|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m,x)|^2}{n_m(s\wedge\tau_N^m,x)}dx\\&=\chi\int_{\mathcal{O}}\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m,x)\cdot\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m,x)dx.\end{aligned}\tag{4.25}$$

在等式中 式（4.25），我们用到了这样一个事实： $\mathbf{u}_m = \frac{\partial n_m}{\partial \nu} = 0$ 在 $\partial\mathcal{O}$ 上，以及这样一个事实 at

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{O}} \Delta n_m(x)\ln(n_m(x))dx &= \int_{\mathcal{O}} \nabla n_m(x)\cdot\nabla\ln(n_m(x))dx - \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial n_m(\sigma)}{\partial\nu}\ln(n_m(\sigma))d\sigma \\
&= \int_{\mathcal{O}} \frac{\nabla n_m(x)\cdot\nabla n_m(x)}{n_m(x)}dx,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}} \mathbf{u}_m(x)\cdot\nabla n_m(x)\ln(n_m(x))dx &= -\int_{\mathcal{O}} n_m(x)\nabla\cdot(\mathbf{u}_m(x)\ln(n_m(x)))dx \\
&\quad + \int_{\partial\mathcal{O}} n_m(\sigma)\ln(n_m(\sigma))\mathbf{u}_m(\sigma)\cdot\nu d\sigma \\
&= -\int_{\mathcal{O}} n_m(x)\mathbf{u}_m(x)\cdot\nabla\ln(n_m(x))dx \\
&\quad - \int_{\mathcal{O}} n_m(x)\ln(n_m(x))\nabla\cdot\mathbf{u}_m(x)dx \\
&= -\int_{\mathcal{O}} \mathbf{u}_m(x)\cdot\nabla n_m(x)dx.
\end{aligned}
$$

由杨氏不等式和柯西-施瓦茨不等式可得

$$
\chi\int_{\mathcal{O}} \nabla n_m(x)\cdot\nabla c_m(x)dx \leqslant \frac{\delta}{2}\int_{\mathcal{O}} \frac{|\nabla n_m(x)|^2}{n_m(x)}dx + \frac{\chi^2}{2\delta}\int_{\mathcal{O}} n_m(x)\left|\nabla c_m(x)\right|^2 dx.
$$

由于

$$
\int_{\mathcal{O}} \frac{|\nabla n_m(x)|^2}{n_m(x)}dx = 4\int_{\mathcal{O}} \left|\nabla\sqrt{n_m(x)}\right|^2 dx,
$$

我们可以将最后一个不等式与等式（4.25）结合，得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}} n_m(t\wedge\tau_N^m,x)\ln n_m(t\wedge\tau_N^m,x)dx + 2\delta\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2 ds \\
&\leqslant \int_{\mathcal{O}} n_0^m(x)\ln n_0^m(x)dx + \frac{\chi^2}{2\delta}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left|\sqrt{n_m(s)}\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2 ds.
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

再次对 $t\mapsto|\nabla c_m(t\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2$ 应用 Itô 公式，得到

$$
\begin{aligned}
&|\nabla c_m(t\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 + 2\xi\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\Delta c_m(s)|_{L^2}^2 ds \\
&= |\nabla c_0^m|_{L^2}^2 - 2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(\nabla B_1(\mathbf{u}_m(s),c_m(s)),\nabla c_m(s))ds \\
&\quad - 2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(\nabla R_1(n_m(s),c_m(s)),\nabla c_m(s))ds \\
&\quad + \gamma^2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla\phi(c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2 + 2\gamma\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(\nabla\phi(c_m(s)),\nabla c_m(s))d\beta_s.
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

由于 u_m 是无散的，且在 $\partial\mathcal{O}$ 上消失，我们推得

$$\begin{aligned}(\nabla B_1(\mathbf{u}_m, c_m), \nabla c_m) &= \int_{\mathcal{O}} \nabla(\mathbf{u}_m(x)\cdot\nabla c_m(x))\cdot\nabla c_m(x)dx\\ &= \int_{\mathcal{O}} \nabla\mathbf{u}_m(x)\nabla c_m(x)\cdot\nabla c_m(x)dx\\ &\quad + \int_{\mathcal{O}} \nabla c_m(x)\cdot D^2 c_m(x)\mathbf{u}_m(x)dx\\ &\leqslant \int_{\mathcal{O}} |\nabla\mathbf{u}_m(x)|\,|\nabla c_m(x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} u_m(x)\cdot\nabla\,|\nabla c_m(x)|^2\,dx\\ &\leqslant |\nabla\mathbf{u}_m|_{L^2}\,|\nabla c_m|^2_{L^4}\,.\end{aligned} \tag{4.28}$$

我们利用 Gagliardo-Niremberg 不等式得到

$$|\nabla c_m|^4_{L^4} \leqslant \mathcal{K}_{GN}\,|c_m|^2_{L^\infty}\,\left|D^2 c_m\right|^2_{L^2} + \mathcal{K}_{GN}\,|c_m|^4_{L^\infty}\,,$$

为消去 $\left|D^2 c_m\right|_{L^2}$，我们使用逐点恒等式

$$|\Delta c_m|^2 = \nabla\cdot(\Delta c_m\nabla c_m) - \nabla c_m\cdot\nabla\Delta c_m,$$

以及 $\Delta\,|\nabla c_m|^2 = 2\nabla c_m\cdot\nabla\Delta c_m + 2\left|D^2 c_m\right|^2$，并利用分部积分将 $|\Delta c_m|^2_{L^2}$ 改写为

$$\begin{aligned}|\Delta c_m|^2_{L^2} &= -\int_{\mathcal{O}} \nabla c_m(x)\cdot\nabla\Delta c_m(x)dx\\ &= \left|D^2 c_m\right|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} \Delta\,|\nabla c_m(x)|^2\,dx\\ &= \left|D^2 c_m\right|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial\,|\nabla c_m(\sigma)|^2}{\partial\nu}d\sigma.\end{aligned} \tag{4.29}$$

利用 [27，引理 4。2] 我们得到

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial\,|\nabla c_m(\sigma)|^2}{\partial\nu}d\sigma \leqslant \kappa(\mathcal{O})\int_{\partial\mathcal{O}} |\nabla c_m(\sigma)|^2\,d\sigma, \tag{4.30}$$

其中 $\kappa(\mathcal{O})$是 $\partial\mathcal{O}$的曲率上界。

根据迹定理（参见命题4.22的 [21，(ii)以及定理4.24]的(i)），可得

$$\int_{\partial\mathcal{O}} |\nabla c_m(\sigma)|^2\,d\sigma \leqslant \mathcal{K}(\mathcal{O},\varsigma)\,|c_m|^2_{H^{\frac{3+\varsigma}{2}}} \qquad \text{for any } \varsigma\in(0,1),$$

其中 $\mathcal{K}(\mathcal{O},\ \varsigma) > 0$ 仅取决于 $\mathcal{O}$ 和 ς，例如可取为 $\varsigma = 1/2$。另一方面，由插值不等式、杨氏不等式以及引理4.10中的不等式（4.2 ）可知，存在 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ ，它们依赖于 $\mathcal{O}$ ，使得

$$\begin{aligned}\kappa(\mathcal{O})\mathcal{K}(\mathcal{O},\varsigma)\,|c_m|^2_{H^{\frac{7}{4}}} &\leqslant \mathcal{K}_1(\left|D^2 c_m\right|^{7/4}_{L^2}\,|c_m|^{1/4}_{L^2} + |c_m|^2_{L^2})\\ &\leqslant \frac{1}{4}\left|D^2 c_m\right|^2_{L^2} + \mathcal{K}_2\,|c_0|^2_{L^\infty}\,.\end{aligned}$$

Us利用这一前述不等式和（4.30），由等式（4.29）可推得 t

$$\left|D^2 c_m\right|^2_{L^2} \leqslant \frac{4}{3}\,|\Delta c_m|^2_{L^2} + \frac{4\mathcal{K}_2}{3}\,|c_0|^2_{L^\infty}\,, \tag{4.31}$$

因此

$$|\nabla c_m|_{L^4}^4 \leqslant \frac{4\mathcal{K}_{GN}\,|c_0|_{L^\infty}^2}{3}\,|\Delta c_m|_{L^2}^2 + \left(\frac{4\mathcal{K}_2}{3}+1\right)\mathcal{K}_{GN}\,|c_0|_{L^\infty}^4 .$$

由不等式（4.28）和杨氏不等式，我们推得

$$\begin{aligned}(\nabla B_1(\mathbf{u}_m,c_m),\nabla c_m) &\leqslant |\nabla \mathbf{u}_m|_{L^2}\,|\nabla c_m|_{L^4}^2\\ &\leqslant \frac{3\xi}{16\mathcal{K}_{GN}\,|c_0|_{L^\infty}^2}\,|\nabla c_m|_{L^4}^4 + \frac{4\mathcal{K}_{GN}\,|c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}\,|\nabla \mathbf{u}_m|_{L^2}^2\\ &\leqslant \frac{\xi}{4}\,|\Delta c_m|_{L^2}^2 + \frac{4\mathcal{K}_{GN}\,|c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}\,|\nabla \mathbf{u}_m|_{L^2}^2 + \frac{\xi(4\mathcal{K}_2+3)}{16}\,|c_0|_{L^\infty}^2 .\end{aligned}$$

由于假设1 以及引理4.2中的不等式（4.10），我们注意到

$$\begin{aligned}-(\nabla R_1(n_m,c_m),\nabla c_m) &= -\int_{\mathcal{O}} \nabla(n_m(x)f(c_m(x)))\cdot\nabla c_m(x)dx\\ &= -\int_{\mathcal{O}} f'(c_m(x))\,|\nabla c_m(x)|^2\,n_m(x)dx - \int_{\mathcal{O}} f(c_m(x))\nabla c_m(x)\cdot\nabla n_m(x)dx\\ &\leqslant -\frac{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)}{2}\int_{\mathcal{O}} n_m(x)\,|\nabla c_m(x)|^2\,dx\\ &\quad + \frac{1}{2\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)}\int_{\mathcal{O}} f^2(c_m(x))\frac{|\nabla n_m(x)|^2}{n_m(x)}dx\\ &\leqslant -\frac{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)}{2}\,|\sqrt{n_m}\nabla c_m|_{L^2}^2 + \frac{2\max\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f^2(c)}{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)}\,|\nabla\sqrt{n_m}|_{L^2}^2 .\end{aligned}$$

结合上述最后两个不等式，由等式（4.27）可得

$$\begin{aligned}&|\nabla c_m(t\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 + \frac{3\xi}{2}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\Delta c_m(s)|_{L^2}^2\,ds + \min_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left|\sqrt{n_m(s)}\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2 ds\\ &\quad\leqslant |\nabla c_0^m|_{L^2}^2 + \frac{\xi(4\mathcal{K}_2+3)}{8}\,|c_0|_{L^\infty}^2\,t + \frac{8\mathcal{K}_{GN}\,|c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\\ &\qquad + \frac{4\max\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f^2(c)}{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2 ds\\ &\qquad + \gamma^2\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla\phi(c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2\,ds + 2\gamma\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(\nabla\phi(c_m(s)),\nabla c_m(s))d\beta_s .\end{aligned}$$

将 t 相乘 通过 得到该最后一个不等式，并将结果与不等式（4.26）相加，可得 in

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}} n_m(t\wedge\tau_N^m,x)\ln n_m(t\wedge\tau_N^m,x)dx+\mathcal{K}_f\left|\nabla c_m(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2+\frac{\xi\mathcal{K}_f}{4}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\Delta c_m(s)|_{L^2}^2\,ds\\
&\quad+2\delta\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2ds+\int_0^t\left|\sqrt{n_m(s)}\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2ds\\
&\leqslant\mathcal{K}_f\left|\nabla c_0^m\right|_{L^2}^2+\int_{\mathcal{O}}n_0^m(x)\ln n_0^m(x)dx+\frac{\mathcal{K}_f\xi(4\mathcal{K}_f\mathcal{K}_2+3)}{8}|c_0|_{L^\infty}^2\,t\\
&\quad+\frac{8\mathcal{K}_f\mathcal{K}_{GN}|c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds+\frac{4\mathcal{K}_f\max\limits_{0\leqslant c\leqslant|c_0|_{L^\infty}}f^2(c)}{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant|c_0|_{L^\infty}}f'(c)}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2ds\\
&\quad+\gamma^2\mathcal{K}_f\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla\phi(c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2\,ds+2\gamma\mathcal{K}_f\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(\nabla\phi(c_m(s)),\nabla c_m(s))d\beta_s.
\end{aligned}
$$

利用第一个不等式（3.3），可知前一个不等式化简为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}} n_m(t\wedge\tau_N^m,x)\ln n_m(t\wedge\tau_N^m,x)dx+\mathcal{K}_f\left|\nabla c_m(t\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^2+\frac{3\xi\mathcal{K}_f}{2}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\Delta c_m(s)|_{L^2}^2\,ds\\
&\quad+2\delta\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2ds+\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left|\sqrt{n_m(s)}\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2ds\\
&\leqslant\mathcal{K}_f\left|\nabla c_0^m\right|_{L^2}^2+\int_{\mathcal{O}}n_0^m(x)\ln n_0^m(x)dx+\frac{\mathcal{K}_f\xi(4\mathcal{K}_f\mathcal{K}_2+3)}{8}|c_0|_{L^\infty}^2\,t\\
&\quad+\frac{8\mathcal{K}_f\mathcal{K}_{GN}|c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds+\gamma^2\mathcal{K}_f\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla\phi(c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2\,ds\\
&\quad+2\gamma\mathcal{K}_f\int_0^{t\wedge\tau_N^m}(\nabla\phi(c_m(s)),\nabla c_m(s))d\beta_s.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

现在，我们利用引理4.2 中的等式（3.7）和不等式（

$$
\begin{aligned}
|n_m|_{L^2}&\leqslant\mathcal{K}_{GN}\left(|\sqrt{n_m}|_{L^2}|\nabla\sqrt{n_m}|_{L^2}+|\sqrt{n_m}|_{L^2}^2\right)\\
&\leqslant\mathcal{K}_{GN}\left(|n_0^m|_{L^1}^{\frac12}|\nabla\sqrt{n_m}|_{L^2}+|n_0^m|_{L^1}\right),
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

由关系（4.1），我们有 $n_0^m\to n_0$ 属于 $L^2(\mathcal{O})$。得益于$L^2(\mathcal{O})$ 到 $L^1(\mathcal{O})$的连续嵌入，我们推出 $n_0^m\to n_0$ 属于 $L^1(\mathcal{O})$，因此序列 $\{n_0^m\}_{m\geqslant1}$在 $L^1(\mathcal{O})$中有界。这意味着不等式（4.33）可如下估计

$$
|n_m|_{L^2}\leqslant\mathcal{K}_{GN}\mathcal{K}^{1/2}|\nabla\sqrt{n_m}|_{L^2}+\mathcal{K},
\tag{4.34}
$$

其中 $\mathcal{K}$ 是一个与 m 和 N无关的常数。

接下来，对 $t \mapsto |\mathbf{u}_m(t \wedge \tau_N^m)|_{L^2}^2$ 应用 Itô 公式并利用估计式（4.34），我们推知存在 $\mathcal{K}_3 > 0$ 使得

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{u}_m(t \wedge \tau_N^m)|_{L^2}^2 + 2\eta \int_0^{t\wedge\tau_N^m} |\nabla \mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2 \, ds \\
&\leqslant 2\int_0^{t\wedge\tau_N^m} |\nabla\Phi|_{L^\infty} |n_m(s)|_{L^2} |\mathbf{u}_m(s)|_{L^2} \, ds \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_N^m} |g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U};H)}^2 \, ds + 2\int_0^{t\wedge\tau_N^m} (g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s)), \mathbf{u}_m(s)) dWs \\
&\leqslant |\mathbf{u}_0^m|_{L^2}^2 + \frac{\delta\eta}{\mathcal{K}_4} \int_0^{t\wedge\tau_N^m} \left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2 ds + \mathcal{K}_3 |\nabla\Phi|_{L^\infty}^2 \int_0^{t\wedge\tau_N^m} |\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2 \, ds \\
&\quad + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|_{L^\infty}^2 \mathcal{K}^2 \int_0^{t\wedge\tau_N^m} |\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2 \, ds \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_N^m} |g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U};H)}^2 \, ds + 2\int_0^{t\wedge\tau_N^m} (g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s)), \mathbf{u}_m(s)) dWs,
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{K}_4 = \frac{8\mathcal{K}_f\mathcal{K}_{GN}|c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}$。将此不等式乘以 $\frac{\mathcal{K}_4}{\eta}$，并将结果与不等式（4.32）相加，再利用不等式（4.18），可知存在正数常数$\mathcal{K}_5$和 $\mathcal{K}_6$，使得对所有 $t \in [0, T]$， $\mathbb{P}$几乎必然成立。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}(n_m, c_m, \mathbf{u}_m)(t \wedge \tau_N^m) + \delta \int_0^{t\wedge\tau_N^m} \left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2 ds \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_N^m} \left[\frac{3\xi\mathcal{K}_f}{2}|\Delta c_m(s)|_{L^2}^2 + \mathcal{K}_4|\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2 + \left|\sqrt{n_m(s)}\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2\right] ds \\
&\leqslant \mathcal{E}(n_0, c_0, \mathbf{u}_0) + \mathcal{K}_5 T + \mathcal{K}_6 \int_0^{t\wedge\tau_N^m} |\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2 \, ds + \gamma^2\mathcal{K}_f \int_0^{t\wedge\tau_N^m} |\nabla\phi(c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2 \, ds \\
&\quad + \frac{2\mathcal{K}_4}{\eta}\int_0^{t\wedge\tau_N^m} (g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s)), \mathbf{u}_m(s)) dW_s \\
&\quad + \frac{\mathcal{K}_4}{\eta}\int_0^{t\wedge\tau_N^m} |g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}^2 \, ds + 2\gamma\mathcal{K}_f \int_0^{t\wedge\tau_N^m} (\nabla\phi(c_m(s)), \nabla c_m(s)) d\beta_s.
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

现在，由于 γ 满足关系（3.3），结合不等式（4.31），我们注意到

$$
\begin{aligned}
\gamma^2\mathcal{K}_f |\nabla\phi(c_m)|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2 &\leqslant 2\gamma^2\mathcal{K}_f \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{O}} |\nabla\sigma_k(x)\nabla c(x)|^2 \, dx + 2\gamma^2\mathcal{K}_f \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{O}} \left|D^2 c(x)\sigma_k(x)\right|^2 dx \\
&\leqslant 2\gamma^2\mathcal{K}_f |\nabla c|_{L^2}^2 \sum_{k=1}^2 |\sigma_k|_{W^{1,\infty}}^2 + |\Delta c|_{L^2}^2 \frac{8\gamma^2\mathcal{K}_f}{3} \sum_{k=1}^2 |\sigma_k|_{L^\infty}^2 \\
&\quad + \frac{8\gamma^2\mathcal{K}_f\mathcal{K}_2}{3}|c_0|_{L^\infty} \sum_{k=1}^2 |\sigma_k|_{L^\infty}^2 \\
&\leqslant \mathcal{K}|\nabla c|_{L^2}^2 + \frac{\xi\mathcal{K}_f}{2}|\Delta c|_{L^2}^2 + \mathcal{K}.
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

由不等式（2.12）和（4.19），我们还注意到

$$
\begin{aligned}
|g(\mathbf{u}_m, c_m)|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)} &\leqslant 2L_g^2 \, |(\mathbf{u}_m, c_m)|^2_{\mathcal{H}} + 2L_g^2 \\
&\leqslant \mathcal{K}\mathcal{E}(n_m, c_m, \mathbf{u}_m) + \mathcal{K} \, |c_0|^2_{L^\infty} + 2L_g^2. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

由估计式（4.35）至（4.37），我们推得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \mathcal{E}(n_m, c_m, \mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m) + \delta\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} \left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|^2_{L^2} ds \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} \left[\xi\mathcal{K}_f \, |\Delta c_m(s)|^2_{L^2} + \mathcal{K}_4 \, |\nabla \mathbf{u}_m(s)|^2_{L^2} + \left|\sqrt{n_m(s)}\nabla c_m(s)\right|^2_{L^2}\right] ds \\
&\leqslant \mathcal{E}(n_0, c_0, \mathbf{u}_0) + \mathcal{K}T + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} \mathcal{E}(n_m(s), c_m(s), \mathbf{u}_m(s)) ds + 2L_g^2 T \\
&\quad + 2\gamma\mathcal{K}_f\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \left|\int_0^{s\wedge\tau_N^m} (\nabla\phi(c_m(s)), \nabla c_m(s)) d\beta_s\right| \qquad (4.38) \\
&\quad + \frac{2\mathcal{K}_4}{\eta}\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{s\wedge\tau_N^m} (g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))e_k, \mathbf{u}_m(s)) dW_s^k\right|.
\end{aligned}
$$

现在，利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式、柯西-施瓦茨不等式、杨氏不等式，以及 γ 满足关系式（3.3）这一事实，我们推知

$$
\begin{aligned}
&2\gamma\mathcal{K}_f\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \left|\int_0^{s\wedge\tau_N^m} (\nabla\phi(c_m(s)), \nabla c_m(s)) d\beta_s\right| \\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m} |(\nabla\phi(c_m(s)), \nabla c_m(s))|^2 \, ds\right)^{1/2} \\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m} |\nabla\phi(c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)} \, |\nabla c_m(s)|^2_{L^2} \, ds\right)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{\mathcal{K}_f}{4}\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|^2_{L^2} + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} |\nabla\phi(c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)} \, ds \\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \mathcal{E}(n_m(s), c_m(s), \mathbf{u}_m(s))(s\wedge\tau_N^m) \\
&\quad + \frac{\xi\mathcal{K}_f}{2}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} |\Delta c_m(s)|^2_{L^2} \, ds + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} |\nabla c_m(s)|^2_{L^2} \, ds + \mathcal{K}T.
\end{aligned}
$$

同理，

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\mathcal{K}_4}{\eta}\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{s\wedge\tau_N^m} (g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))e_k, \mathbf{u}_m(s)) dW_s^k\right| \\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \mathcal{E}(n_m, c_m, \mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m) + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} |g(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U};H)} \, ds \\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \mathcal{E}(n_m, c_m, \mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m) + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} |(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))|^2_{\mathcal{H}} \, ds + \mathcal{K}TL_g^2.
\end{aligned}
$$

由估计（4.38）可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)\\
&+\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left[\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}_f\left|\Delta c_m(s)\right|_{L^2}^2+\left|\nabla\mathbf{u}_m(s)\right|_{L^2}^2+\left|\sqrt{n_m(s)}\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2\right]ds\\
&\leqslant\mathcal{K}\mathcal{E}(n_0,c_0,\mathbf{u}_0)+\mathcal{K}T+\mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\mathcal{E}(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s)ds+\mathcal{K},
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

其中， $\mathcal{K}$ 是一个取决于初始数据和 T 、但与 m 和 N无关的常数。现在，由Gronwall引理可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\ \text{上确界}_{0\leqslant s\leqslant T}\ \mathcal{E}(n_m,\ c_m,\ \mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)\\
&+\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left[\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2+\left|\Delta c_m(s)\right|_{L^2}^2+\left|\nabla\mathbf{u}_m(s)\right|_{L^2}^2+\left|\sqrt{n_m(s)}\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2\right]ds\leqslant\mathcal{K},
\end{aligned}
$$

由此　　我们推得估计式（4.21），从而完成引理4.3的证明　　. □

引理4.4。 在与引理 *4.3*相同的假设下，对于所有 $p\geqslant 1$，存在一个正数常数 $\mathcal{K}$，使得对于所有 $m\in\mathbb{N}$ 和 $N\in\mathbb{N}$,

$$
\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|c_m(s\wedge\tau_N^m)\right|_{L^2}^{2p}+\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|\nabla c_m(s)\right|_{L^2}^2ds\right)^p\leqslant|\mathcal{O}|^p\left|c_0\right|_{L^\infty}^{2p},\qquad\mathbb{P}\text{-}a.s.,
\tag{4.40}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2ds\right)^p\leqslant\mathcal{K},\\
&\textit{and}\ \ \mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|\Delta c_m(s)\right|_{L^2}^2ds\right)^p+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\mathbf{u}_m(s)\right|_{L^2}^2ds\right)^p\leqslant\mathcal{K}.
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

证明。不等式（4.40）直接由引理 4.20中的估计（4.3）得出。接下来，我们将推导估计（4.41）。我们从不等式（4.38）出发，并运用詹森不等式，得到对于所有 $p\geqslant 2$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2ds\right)^p\\
&\quad+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\xi\mathcal{K}_f\left|\Delta c_m(s)\right|_{L^2}^2ds\right)^p+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\mathcal{K}_4\left|\nabla\mathbf{u}_m(s)\right|_{L^2}^2ds\right)^p\\
&\leqslant\mathcal{E}^p(n_0,c_0,\mathbf{u}_0)+\mathcal{K}T^p+\mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\mathcal{E}(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s)ds\right)^p\\
&\quad+\mathcal{K}^p+2^p\gamma^p\mathcal{K}_f^p\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|\int_0^{s\wedge\tau_N^m}(\nabla\phi(c_m(s)),\nabla c_m(s))d\beta_s\right|^p\\
&\quad+\mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{s\wedge\tau_N^m}(g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))e_k,\mathbf{u}_m(s))dW_s^k\right|^p.
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

利用 Hölder 不等式，我们可以得到

$$
\mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\mathcal{E}(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s)ds\right)^p\leqslant\mathcal{K}T^{\frac{p}{p-1}}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s)ds.
$$

根据 Burkholder-Davis-Gundy不等式，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{s\wedge\tau_N^m}(g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))e_k,\mathbf{u}_m(s))dW_s^k\right|^p\\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|(g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))e_k,\mathbf{u}_m(s))\right|^2ds\right)^{p/2}\\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|u_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^p\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U};H)}\,ds\right)^{p/2}\\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)+\mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U};H)}\,ds\right)^p\\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)+\mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|^{2p}_{\mathcal{H}}\,ds+\mathcal{K}T^{\frac{p}{p-1}}L_g^{2p}.
\end{aligned}
$$

考虑到 γ 足够小，使得关系式（3.3）成立，我们还可得到

$$
\begin{aligned}
&2^p\gamma^p\mathcal{K}_f^p\mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|\int_0^{s\wedge\tau_N^m}(\nabla\phi(c_m(s)),\nabla c_m(s))d\beta_s\right|^p\\
&\leqslant 2^p\gamma^p\mathcal{K}_f^p\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla\phi(c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}\,|\nabla c_m(s)|^2_{L^2}\,ds\right)^{p/2}\\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|^{2p}_{L^2}+2^{2p}\gamma^{2p}\mathcal{K}_f^{2p}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla\phi(c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}\,ds\right)^p\\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)\\
&\quad+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\xi\mathcal{K}_f\,|\Delta c_m(s)|^2_{L^2}\,ds\right)^p+\mathcal{K}T^{\frac{p}{p-1}}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|^{2p}_{L^2}\,ds+\mathcal{K}T^p.
\end{aligned}
$$

由估计式（4.42）可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|^2_{L^2}ds\right)^p\\
&\qquad+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\Delta c_m(s)|^2_{L^2}\,ds\right)^p+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla\mathbf{u}_m(s)|^2_{L^2}\,ds\right)^p\\
&\leqslant \mathcal{K}\mathcal{E}^p(n_0,c_0,\mathbf{u}_0)+\mathcal{K}T^p+\mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s)ds+\mathcal{K}.
\end{aligned}
$$

现在，由Gronwall引理可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathcal{E}^p(n_m,c_m,\mathbf{u}_m)(s\wedge\tau_N^m)+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|^2_{L^2}ds\right)^p\\
&\qquad+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\Delta c_m(s)|^2_{L^2}\,ds\right)^p+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla\mathbf{u}_m(s)|^2_{L^2}\,ds\right)^p\leqslant\mathcal{K},
\end{aligned}
$$

并且，估计式（4.41）可直接由上述最后一个不等式推出。这就完成了引理4.4的证明。□

In 为了控制过程 $t\mapsto n_m(t\wedge\tau_N^m)$，我们证明以下引理 a.

引理 4.5。在与引理 4.3相同的假设下，存在一个正数常数$\eta_0 > 1$ 使得对所有 $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ 以及 $\mathbb{P}$-几乎处处成立,

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 + \int_0^{T\wedge\tau_N^m} |n_m(s)|_{H^1}^2\,ds \leqslant \eta_0 \exp\left(\mathcal{K}\int_0^{T\wedge\tau_N^m} |\nabla c_m(s)|_{L^4}^4\,ds\right). \tag{4.43}$$

证明。令 $t\in[0,\ T]$为任意但固定的值。将（4.2）的最后一个方程乘以 $n_m(s\wedge\tau_N^m)$，其中 $0\leqslant s\leqslant t$，并利用 $\nabla\cdot\mathbf{u}_m = 0$ 以及不等式（3.7），再结合 H¨older 不等式和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 + \delta\,|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2\\
&= \xi\int_{\mathcal{O}} n_m(s\wedge\tau_N^m,x)\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m,x)\cdot\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m,x)dx\\
&\leqslant \xi\,|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^4}\,|\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^4}\,|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}\\
&\leqslant \mathcal{K}(|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^{1/2}\,|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^{1/2} + |n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2})\,|\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^4}\,|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}\\
&\leqslant \mathcal{K}\,|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^{1/2}\,|\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^4}\,|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^{3/2}\\
&\quad + \mathcal{K}\,|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}\,|\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^4}\,|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}\\
&\leqslant \frac{\delta}{2}|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 + \mathcal{K}\,|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2\,(|\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^4}^4 + |\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^4}^2)\\
&\leqslant \frac{\delta}{2}|\nabla n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 + \mathcal{K}\,|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2\left(|\nabla c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^4}^4 + 1\right).
\end{aligned}$$

这意味着对所有 $t\in[0、\ T]$,

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 + \delta\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla n_m(s)|_{L^2}^2\,ds \leqslant |n_0^m|_{L^2}^2 + \mathcal{K}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|n_m(s)|_{L^2}^2\left(|\nabla c_m(s)|_{L^4}^4+1\right)ds.$$

由于 $n_m^0\to n_0$ 属于 $L^2(\mathcal{O})$, $|n_0^m|_{L^2}^2$ 一致有界。因此，应用 Gronwall引理可得

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 + \int_0^{t\wedge\tau_N^m}|n_m(s)|_{H^1}^2\,ds &\leqslant \mathcal{K}_\delta\exp\left(\mathcal{K}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}\left(|\nabla c_m(s)|_{L^4}^4+1\right)ds\right)\\
&\leqslant (\mathcal{K}_\delta+1)e^{\mathcal{K}T}\exp\left(\mathcal{K}\int_0^{t\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^4}^4\,ds\right),
\end{aligned}$$

并完成引理4.5的证明。 □

推论 4.6. 在与引理 4.3 相同的假设下，对于 $p\geqslant 1$，存在一个正数常数 $\mathcal{K}$，使得对所有 $m\in\mathbb{N}$ 和 $N\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\mathbf{u}_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^{2p} + \mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^p \leqslant \mathcal{K}, \tag{4.44}$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|n_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^p \leqslant \mathcal{K}, \tag{4.45}$$

$$\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{H^1}^{2p} + \mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|c_m(s)|_{H^2}^2\,ds\right)^p \leqslant \mathcal{K}, \tag{4.46}$$

$$\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^2}^4\,ds \leqslant \mathcal{K}. \tag{4.47}$$

证明。估计式（4.44）由估计式（4.21）和（4.41）推出。由不等式（4.34）、（4.21）和（4.41），我们推得

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|n_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^p\leqslant\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}\left(\mathcal{K}_{GN}\mathcal{K}^{1/2}\left|\nabla\sqrt{n_m(s)}\right|_{L^2}^2+\mathcal{K}\right)ds\right)^p\leqslant\mathcal{K},$$

这就证明了不等式（4.45）的第二个估计。

根据 [35，命题 7.2，P. 404]，我们有

$$|c_m|_{H^2}^2\leqslant\mathcal{K}(|\Delta c_m|_{L^2}^2+|c_m|_{H^1}^2),$$

由此结合（4.21）和（4.41），可推出（4.46）。

应用不等式（3.7），可得

$$|\nabla c_m|_{L^4}^4\leqslant\mathcal{K}(|c_m|_{H^2}^2\,|\nabla c_m|_{L^2}^2+|\nabla c_m|_{L^2}^4).$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^4}^4\,ds&\leqslant\mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|c_m(s)|_{H^2}^2\,|\nabla c_m(s)|_{L^2}^2\,ds+\mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^2}^4\,ds\\&\leqslant\mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{H^1}^2\int_0^T|c_m(s)|_{H^2}^2\,ds+\mathcal{K}T\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{H^1}^4\\&\leqslant\mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{H^1}^4+\mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_N^m}|c_m(s)|_{H^2}^2\,ds\right)^2,\end{aligned}$$

由此结合 (4.46)，我们可推出 (4.47)。这就完成了推论4.6的证明。□

在下面的引理中，我们陈述并证明一个关于停时 τ_N^m 的结果。更确切地说，我们证明存在概率为 1 $\tau_m^N\geqslant 2T$ 的情形，使得 sup 满足不等式 (4.7)$_{N\in\mathbb{N}}$。

引理 4.7. 设 τ_N^m， m， $N\in\mathbb{N}$ 为 (4.6 中定义的停时。那么，在与引理4.3 相同的假设下，有

$$\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\sup_{N\in\mathbb{N}}\tau_m^N(\omega)\geqslant 2T\right\}=1. \tag{4.48}$$

因此， 系统 (4.2) 的解 $(\mathbf{u}_m,\ c_m,\ n_m)$ 几乎处处对每个 $t\in[0,\ T$].

证明。 我们注意到，推论 4.6 中的不等式对每个 $T>0$ 都成立。因此，对于一个˜固定的 $T>0$，我们令 $T=2T$ 并注意到对所有 $J\in\mathbb{N}$，

$$\left\{\omega\in\Omega:\sup_{N\in\mathbb{N}}\tau_m^N(\omega)<\tilde{T}\right\}\subset\left\{\omega\in\Omega:\tau_m^J(\omega)<\tilde{T}\right\},$$

这意味着

$$\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\sup_{N\in\mathbb{N}}\tau_m^N(\omega)<2T\right\}\leqslant\lim_{N\longrightarrow\infty}\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\tau_m^N(\omega)<\tilde{T}\right\}, \tag{4.49}$$

因此，只需证明最后这个等式右端的第二项当 $N\to\infty$ 时收敛于零。为此，令

$$A_N=\left\{\omega\in\Omega:\tau_m^N<\tilde{T}\right\}$$

and

$$B_N = \left\{\omega\in\Omega : \left|n_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 + \left|\mathbf{u}_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 + \left|c_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{H^1}^2 \geqslant N^2\right\}.$$

于是，对于 $N>\tilde{T}$，有 $A_N\subset B_N$。事实上，令 $\omega\in A_N$，则 $\tilde{T}\wedge\tau_m^N(\omega)=\tau_m^N(\omega)$。因此，根据停时 τ_m^N 的定义可知，对于 $N>\tilde{T}$，

$$\begin{aligned}\left|n_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 + \left|\mathbf{u}_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 + \left|c_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{H^1}^2 &= |n_m(\tau_m^N)|_{L^2}^2 + |\mathbf{u}_m(\tau_m^N)|_{L^2}^2 + |c_m(\tau_m^N)|_{H^1}^2\\ &\geqslant N^2.\end{aligned}$$

由此我们得出 $\omega\in B_N$。

˜现在，对于 $N>T$，利用包含关系 $A_N\subset B_N$，我们推导得出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\tau_m^N<\tilde{T}\right\} &\leqslant \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \left|n_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 + \left|\mathbf{u}_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 + \left|c_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{H^1}^2 \geqslant N^2\right\}\\ &\leqslant \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \left|n_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\} + \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \left|\mathbf{u}_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\}\\ &\quad + \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \left|c_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{H^1}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\}.\end{aligned}\tag{4.50}$$

根据推论 4.6 中的估计（4.44）和（4.46），以及马尔可夫不等式，˜我们推导得出，对于 $N>T$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \left|c_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{H^1}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\} &\leqslant \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \sup_{0\leqslant s\leqslant\tilde{T}}|c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{H^1}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\}\\ &\leqslant \frac{3}{N^2}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant\tilde{T}}|c_m(s\wedge\tau_N^m)|_{H^1}^2\\ &\leqslant \frac{\mathcal{K}}{N^2},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \left|\mathbf{u}_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\} &\leqslant \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \sup_{0\leqslant s\leqslant\tilde{T}}|\mathbf{u}_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\}\\ &\leqslant \frac{3}{N^2}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant\tilde{T}}|\mathbf{u}_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2\\ &\leqslant \frac{\mathcal{K}}{N^2}.\end{aligned}$$

˜此外，对于 $N>$最大值$(\sqrt{3\eta_0},\ T)$(其中 η_0 是引理 4.5 中得到的一个常数)，我们使用引理 4.43 的不等式4.5 ，推知

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \left|n_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\} &\leqslant \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \sup_{0\leqslant s\leqslant\tilde{T}}|n_m(s\wedge\tau_N^m)|_{L^2}^2 \geqslant \frac{N^2}{3}\right\}\\ &\leqslant \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \eta_0\exp\left(\mathcal{K}\int_0^{\tilde{T}\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^4}^4\,ds\right) \geqslant \frac{N^2}{3}\right\}\\ &\leqslant \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega : \int_0^{\tilde{T}\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^4}^4\,ds \geqslant \frac{\ln(\frac{N^2}{3\eta_0})}{\mathcal{K}}\right\}.\end{aligned}$$

调用 由马尔可夫不等式并利用推论 4.47 中的估计（4.6），可知 at

$$\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\left|n_m(\tilde{T}\wedge\tau_m^N)\right|_{L^2}^2\geqslant\frac{N^2}{3}\right\}\leqslant\frac{\mathcal{K}}{\ln(\frac{N^2}{3\eta_0})}\mathbb{E}\int_0^{\tilde{T}\wedge\tau_N^m}|\nabla c_m(s)|_{L^4}^4\,ds$$
$$\leqslant\frac{\mathcal{K}}{2\ln(N)-\ln(3\eta_0)}.$$

将这些不等式代入不等式（4.50），得到

$$\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\tau_m^N<\tilde{T}\right\}\leqslant\frac{\mathcal{K}}{N^2}+\frac{\mathcal{K}}{2\ln(N)-\ln(\eta_0)-\ln(3)},$$

˜对所有 $N>\max(\sqrt{3\eta_0},\ T)$。令 N趋于无穷，在这个最后的不等式中得到

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\tau_m^N<\tilde{T}\right\}=0,$$

这与（4.49）一起推出（4.48）。

由等式（4.48）可推得不等式（4.7），因此关系（4.5）成立，引理得证。□

由于$(T\wedge\tau_m^N)_{N\in\mathbb{N}}$是递增的，我们有 $T\wedge\tau_m^N\to T$几乎处处成立，因为 $N\to\infty$。有了这一几乎处处收敛结果，我们将给出引理4.5 和推论 4.6的一些推论。

推论 4.8。 在与引理 *4.3*相同的假设下，对任意 $p\geqslant1$，存在一个正数常数 $\mathcal{K}$，使得对所有 $m\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|n_m(s)|_{L^2}^2+\int_0^T|n_m(s)|_{H^1}^2\,ds\leqslant\eta_0\exp\left(\mathcal{K}\int_0^T|\nabla c_m(s)|_{L^4}^4\,ds\right),\ \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{4.51}$$

$$\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^{2p}+\mathbb{E}\left(\int_0^T|\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^p\leqslant\mathcal{K}, \tag{4.52}$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T|n_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^p\leqslant\mathcal{K}, \tag{4.53}$$

$$\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|c_m(s)|_{H^1}^{2p}+\mathbb{E}\left(\int_0^T|c_m(s)|_{H^2}^2\,ds\right)^p\leqslant\mathcal{K}, \tag{4.54}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T|\nabla c_m(s)|_{L^2}^4\,ds\leqslant\mathcal{K}, \tag{4.55}$$

其中 $\eta_0>1$ 是引理 *4.5*中得到的一个常数。

证明。由于 $T\wedge\tau_m^N\to T$ 几乎处处成立，且 $N\to\infty$，由过程$t\mapsto(\mathbf{u}_m(t),c_m(t),n_m(t))$的路径连续性，我们可以在引理 4.5 的不等式 (4.43) 中令 $N\to\infty$，从而推出不等式 (4.51)。除了 $T\wedge\tau_m^N$ 收敛到 T 几乎处处成立，以及过程 $t\mapsto(\mathbf{u}_m(t),c_m(t),n_m(t))$ 的路径连续性外，我们还运用 Fatou引理，在不等式 (4.44)、(4.45)、(4.46) 和 (4.47) 中令 $N\to\infty$，从而得到估计 (4.52)、(4.53)、(4.54) 和 (4.55)。□

推论 4.9。在与引理 *4.3*中相同的假设下，存在一个正数常数$\mathcal{K}$ 使得对所有 $m\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\,|n_m|_{C^{1/2}([0,T];H^{-3})}^2\leqslant\mathcal{K}. \tag{4.56}$$

证明。令 $v \in H^3(\mathcal{O})$。我们回顾一下，$|\nabla v|_{L^\infty} \leqslant \mathcal{K}\,|v|_{H^3}$。因此，利用分部积分和 H¨older 不等式，我们得到

$$|(A_1 n_m, v)| = |(n_m, \Delta v)| \leqslant |n_m|_{L^2}\,|\Delta v|_{L^2} \leqslant |n_m|_{L^2}\,|v|_{H^3}\,,$$

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{P}_m^1 B_1(\mathbf{u}_m, n_m), v)\right| &= \left|(B_1(\mathbf{u}_m, n_m), \mathcal{P}_m^1 v)\right| \\ &= \left|(n_m \mathbf{u}_m, \nabla \mathcal{P}_m^1 v)\right| \\ &\leqslant \mathcal{K}\,|n_m|_{L^2}\,|\mathbf{u}_m|_{L^2}\left|\nabla \mathcal{P}_m^1 v\right|_{L^\infty} \\ &\leqslant \mathcal{K}\,|n_m|_{L^2}\,|\mathbf{u}_m|_{L^2}\,|v|_{H^3}\,,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{P}_m^1 R_2(n_m, c_m), v)\right| &= \xi\left|(n_m \nabla c_m, \nabla \mathcal{P}_m^1 v)\right| \\ &\leqslant \mathcal{K}\,|n_m|_{L^2}\,|\nabla c_m|_{L^2}\left|\nabla \mathcal{P}_m^1 v\right|_{L^\infty} \\ &\leqslant \mathcal{K}\,|n_m|_{L^2}\,|\nabla c_m|_{L^2}\,|v|_{H^3}\,.\end{aligned}$$

由于连续的Sobolev嵌入 $W^{1,\,2}(0,T;\,H^{-3}(\mathcal{O})) \hookrightarrow C^{1/2}(0,T;\,H^{-3}(\mathcal{O}))$，以及$L^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^{-3}(\mathcal{O})$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|n_m|^2_{C^{1/2}(0,T;H^{-3})} &\leqslant \mathbb{E}\,|n_m|^2_{W^{1,2}(0,T;H^{-3})} \\ &= \mathbb{E}\int_0^T |n_m(s)|^2_{H^{-3}}\,ds + \mathbb{E}\int_0^T \left|\frac{d}{dt} n_m(s)\right|^2_{H^{-3}} ds \\ &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T |n_m(s)|^2_{L^2}\,ds + \mathbb{E}\int_0^T \left|\frac{d}{dt} n_m(s)\right|^2_{H^{-3}} ds.\end{aligned}$$

利用估计（4.52）、（4.53）和（4.54），我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|n_m|^2_{C^{1/2}(0,T;H^{-3}))} &\leqslant \mathcal{K} + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T |A_1 n_m(s)|^2_{H^{-3}}\,ds \\ &\quad + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T \left[|\mathcal{P}_m^1 B_1(\mathbf{u}_m(s), n_m(s))|^2_{H^{-3}} + |\mathcal{P}_m^1 R_2(n_m(s), c_m(s))|^2_{H^{-3}}\right] ds \\ &\leqslant \mathcal{K} + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T \left[|n_m(s)|^2_{L^2} + |u_m(s)|^2_{L^2}\,|n_m(s)|^2_{L^2} + |n_m(s)|^2_{L^2}\,|\nabla c_m(s)|^2_{L^2}\right] ds \\ &\leqslant \mathcal{K} + \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\mathbf{u}_m(s)|^2_{L^2}\int_0^T |n_m(s)|^2_{L^2}\,ds + \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\nabla c_m(s)|^2_{L^2}\int_0^T |n_m(s)|^2_{L^2}\,ds \\ &\leqslant \mathcal{K} + \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\mathbf{u}_m(s)|^4_{L^2} + \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\nabla c_m(s)|^4_{L^2} + \mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^T |n_m(s)|^2_{L^2}\,ds\right)^2 \leqslant \mathcal{K}.\end{aligned}$$

□

引理4.10。在与引理 *4.3*相同的假设下，存在一个正数常数$\mathcal{K}$ 使得对所有 $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^T \left[|A_1 c_m(s)|^2_{L^2} + |\mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))|^2_{L^2} + |\mathcal{P}_m^2 R_1(n_m(s), c_m(s))|^2_{L^2}\right] ds \leqslant \mathcal{K}, \\ &\mathbb{E}\int_0^T \left[|A_0 \mathbf{u}_m(s)|^2_{V^*} + |\mathcal{P}_m^2 B_0(\mathbf{u}_m(s), \mathbf{u}_m(s))|^2_{V^*} + |\mathcal{P}_m^2 R_0(n_m(s), \Phi)|^2_{V^*}\right] ds \leqslant \mathcal{K}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

证明。再次利用不等式（4.52）、（4.53）和（4.54），我们注意到 t

$$\mathbb{E}\int_0^T |A_1 c_m(s)|_{L^2}^2\,ds = \mathbb{E}\int_0^T |\Delta c_m(s)|_{L^2}^2\,ds \leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T |c_m(s)|_{H^2}^2\,ds \leqslant \mathcal{K},$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \left|\mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))\right|_{L^2}^2 ds &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T |\mathbf{u}_m(s)\cdot\nabla c_m(s)|_{L^2}^2\,ds\\ &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\int_0^T |\nabla c_m(s)|_{L^2}^2\\ &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|u_m(s)|_{L^2}^4 + \mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^T |\nabla c_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^2 \leqslant \mathcal{K},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \left|\mathcal{P}_m^2 R_1(n_m(s), c_m(s))\right|_{L^2}^2 ds &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T |n_m(s) f(c_m(s))|_{L^2}^2\,ds\\ &\leqslant \mathcal{K}\sup_{0\leqslant s\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f^2(s)\mathbb{E}\int_0^T |n_m(s)|_{L^2}^2 \leqslant \mathcal{K},\end{aligned}$$

and

$$\mathbb{E}\int_0^T |A_0\mathbf{u}_m(s)|_{V^*}^2\,ds \leqslant \mathbb{E}\int_0^T |\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds \leqslant \mathcal{K}.$$

同理，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \left|\mathcal{P}_m^2 B_0(\mathbf{u}_m(s), \mathbf{u}_m(s))\right|_{V^*}^2 ds &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T |\mathbf{u}_m|_{L^2}^2 |\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\\ &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\int_0^T |\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\\ &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|u_m(s)|_{L^2}^4 + \mathcal{K}\mathbb{E}\left(\int_0^T |\nabla\mathbf{u}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^2 \leqslant \mathcal{K},\end{aligned}$$

and

$$\mathbb{E}\int_0^T |R_0(n_m(s), \Phi)|_{V^*}^2\,ds \leqslant |\Phi|_{W^{1,\infty}}^2\,\mathbb{E}\int_0^T |n_m(s)|_{L^2}^2\,ds \leqslant \mathcal{K}.$$

综合这些不等式，我们得到关系（4.57）。 □

4.2.紧性结果与取极限。本小节旨在研究近似解的紧性，并证明若干收敛性。这些结果将使我们能够取极限，并通过 [12，定理 82]中给出的鞅表示定理构造问题的弱概率解。为此，我们考虑以下空间：

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_n &= L_w^2(0,T;H^1(\mathcal{O}))\cap L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))\cap\mathcal{C}([0,T];H^{-3}(\mathcal{O}))\cap\mathcal{C}([0,T];L_w^2(\mathcal{O})),\\ \mathcal{Z}_{\mathbf{u}} &= L_w^2(0,T;V)\cap L^2(0,T;H)\cap\mathcal{C}([0,T];V^*)\cap\mathcal{C}([0,T];H_w),\\ \mathcal{Z}_c &= L_w^2(0,T;H^2(\mathcal{O}))\cap L^2(0,T;H^1(\mathcal{O}))\cap\mathcal{C}([0,T];L^2(\mathcal{O}))\cap\mathcal{C}([0,T];H_w^1(\mathcal{O})),\\ \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}_n\times\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}\times\mathcal{Z}_c.\end{aligned} \tag{4.58}$$

通过适当运用引理 A.3、推论 A.8和推论 A.9，我们现在将证明概率律序列 $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}(n_m)\times\mathcal{L}(\mathbf{u}_m)\times\mathcal{L}(c_m)$ 在 $\mathcal{Z}$ 中是紧的。

引理 4.11。假设命题 4.3 的假设成立。则概率律族 $(\mathcal{L}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 在空间 $\mathcal{Z}$上是紧的。

证明。 我们首先证明 $(\mathcal{L}(n_m))_m$ 在 $\mathcal{Z}_n$上是紧的。对任意 $\varepsilon>0$，令 $\mathcal{K}_\varepsilon=\eta_0 e^{\mathcal{K}/\varepsilon}>\eta_0$其中 $\eta_0>1$ 由引理 4.5给出。由不等式（4.51），可推出

$$\begin{aligned}\sup_m \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\ |n_m|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}>\mathcal{K}_\varepsilon\right\}&\leqslant \sup_m \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\ \eta_0\exp\left(\mathcal{K}\int_0^T|\nabla c_m(s)|^4_{L^4}\,ds\right)>\mathcal{K}_\varepsilon\right\}\\&\leqslant \sup_m \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\ \mathcal{K}\int_0^T|\nabla c_m(s)|^4_{L^4}\,ds>\ln\left(\frac{\mathcal{K}_\varepsilon}{\eta_0}\right)\right\}.\end{aligned}$$

利用马尔可夫不等式和不等式（4.55），可得

$$\begin{aligned}\sup_m \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\ |n_m|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}>\mathcal{K}_\varepsilon\right\}&\leqslant\frac{1}{\ln\left(\frac{\mathcal{K}_\varepsilon}{\eta_0}\right)}\mathbb{E}\left(\mathcal{K}\int_0^T|\nabla c_m(s)|^4_{L^4}\,ds\right)\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{\mathcal{K}}\mathbb{E}\left(\mathcal{K}\int_0^T|\nabla c_m(s)|^4_{L^4}\,ds\right)\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

同样，我们也可以证明

$$\begin{aligned}\sup_m \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\ |n_m|^2_{L^2(0,T;H^1)}>\mathcal{K}_\varepsilon\right\}&\leqslant \sup_m \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\ \eta_0\exp\left(\mathcal{K}\int_0^T|\nabla c_m(s)|^4_{L^4}\,ds\right)>\mathcal{K}_\varepsilon\right\}\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

由不等式（4.56），可推出

$$\sup_m \mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\ |n_m|^2_{\mathcal{C}^{1/2}([0,T];H^{-3})}>\frac{\mathcal{K}}{\varepsilon}\right\}\leqslant\frac{\varepsilon}{\mathcal{K}}\mathbb{E}\,|n_m|^2_{\mathcal{C}^{1/2}([0,T];H^{-3})}\leqslant\varepsilon.$$

由于最后这三个不等式成立，我们可以应用引理 A.3，并得出 n_m 的分布构成一个概率测度族，且该测度族在 $\mathcal{Z}_n$上是紧的。

其次，我们将证明以下分布$\mathbf{u}_m$ 和 c_m 在 $\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}\times\mathcal{Z}_c$上是紧的。由不等式（4.52）和（4.54），可得推论A.8 和A.9中关于$\mathbf{u}_m$ 和 c_m 的前两个条件。因此，只需证明序列 $(\mathbf{u}_m)_m$ 和(c_m) 分别在空间 V^* 和 $L^2(\mathcal{O})$ 中满足 Aldous 条件。设 $\theta>0(\tau_\ell)_{\ell\geqslant1}$ 是停时序列，且满足 $0\leqslant\tau_\ell\leqslant T$。由系统（4.2）的第二个方程可得

$$\begin{aligned}c_m(\tau_\ell+\theta)-c_m(\tau_\ell)=&\,\xi\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}A_1c_m(s)ds-\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^2B_1(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))ds\\&+\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^2R_1(n_m(s),c_m(s))ds+\gamma\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^2\phi(c_m(s))d\beta_s.\end{aligned}\tag{4.59}$$

根据富比尼定理，H¨older 不等式和不等式（4.57），可得以下估计

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\xi\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}A_1c_m(s)ds\right|^2_{L^2}&\leqslant\xi^2\theta^{1/2}\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}|A_1c_m(s)|^2_{L^2}\,ds\\&\leqslant\xi^2\theta^{1/2}\mathbb{E}\int_0^T|A_1c_m(s)|^2_{L^2}\,ds\leqslant\mathcal{K}\theta^{1/2},\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left|\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))ds\right|_{L^2}^2 ds \leqslant \theta^{1/2}\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\left|\mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))\right|_{L^2}^2 ds$$
$$\leqslant \theta^{1/2}\mathbb{E}\int_0^T\left|\mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))\right|_{L^2}^2 ds \leqslant \mathcal{K}\theta^{1/2},$$

and

$$\mathbb{E}\left|\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^2 R_1(n_m(s),c_m(s))ds\right|_{L^2}^2 ds \leqslant \theta^{1/2}\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\left|\mathcal{P}_m^2 R_1(n_m(s),c_m(s))\right|_{L^2}^2 ds$$
$$\leqslant \theta^{1/2}\mathbb{E}\int_0^T\left|\mathcal{P}_m^2 R_1(n_m(s),c_m(s))\right|_{L^2}^2 ds \leqslant \mathcal{K}\theta^{1/2}.$$

根据 Itô 等距性，我们注意到

$$\mathbb{E}\left|\gamma\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^2\phi(c_m(s))d\beta_s\right|_{L^2}^2 \leqslant \gamma^2\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}|\phi(c_m(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,L^2)}^2$$
$$\leqslant \gamma^2\sum_{k=1}^2|\sigma_k|_{L^2}^2\,\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}|\nabla c_m(s)|_{L^2}^2 ds$$
$$\leqslant \mathcal{K}\theta\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\nabla c_m(s)|_{L^2}^2 \leqslant \mathcal{K}\theta.$$

结合这些不等式，由等式（4.59）可推知，条件（A.5）对 $(c_m)_{m\geqslant 1}$ 属于 $L^2(\mathcal{O})$ 成立。因此，根据引理 A.7，序列 $(c_m)_{m\geqslant 1}$ 在空间 $L^2(\mathcal{O})$ 中满足 Aldous 条件。

现在我们来考虑序列 $(\mathbf{u}_m)_{m\geqslant 1}$。首先注意到，根据系统（4.2）的第一个方程可推知

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_m(\tau_\ell+\theta)-\mathbf{u}_m(\tau_\ell) &= -\eta\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}A_0\mathbf{u}_m(s)ds-\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^1 B_0(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m(s))ds\\ &\quad+\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^1 R_0(n_m(s),\Phi)ds+\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^1 g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))dW_s.\end{aligned}\tag{4.60}$$

利用 Hölder 不等式以及（4.57），我们得到以下估计

$$\mathbb{E}\left|\eta\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}A_0\mathbf{u}_m(s)ds\right|_{V^*}^2 \leqslant \eta^2\theta^{1/2}\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}|A_0\mathbf{u}_m(s)|_{V^*}^2 ds$$
$$\leqslant \eta^2\theta^{1/2}\mathbb{E}\int_0^T|A_0\mathbf{u}_m(s)|_{V^*}^2 ds \leqslant \mathcal{K}\theta^{1/2},$$

and

$$\mathbb{E}\left|\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^2 B_0(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m(s))ds\right|_{V^*}^2 ds \leqslant \theta^{1/2}\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\left|\mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m(s))\right|_{V^*}^2 ds$$
$$\leqslant \theta^{1/2}\mathbb{E}\int_0^T\left|\mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m(s))\right|_{V^*}^2 ds \leqslant \mathcal{K}\theta^{1/2},$$

以及

$$\mathbb{E}\left|\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^2R_0(n_m(s),\Phi)ds\right|_{V^*}^2 ds \leqslant \theta^{1/2}\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\left|\mathcal{P}_m^2R_0(n_m(s),\Phi)\right|_{V^*}^2 ds$$
$$\leqslant \theta^{1/2}\mathbb{E}\int_0^T\left|\mathcal{P}_m^2R_0(n_m(s),\Phi)\right|_{V^*}^2 ds \leqslant \mathcal{K}\theta^{1/2}.$$

利用 Itô 等距性质以及关于 g 的假设，我们得到

$$\mathbb{E}\left|\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^1g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))dW_s\right|_{V^*}^2 \leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\left|\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\mathcal{P}_m^1g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))dW_s\right|_{L^2}^2$$
$$\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}\left|\mathcal{P}_m^1g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))\right|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}^2 ds$$
$$\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_{\tau_\ell}^{\tau_\ell+\theta}(1+|(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|_{\mathcal{H}}^2)ds$$
$$\leqslant \mathcal{K}\left(1+\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|_{\mathcal{H}}^2\right)\theta \leqslant \mathcal{K}\theta.$$

由这些不等式和等式（4.60），根据引理 A.7可得，序列$(\mathbf{u}_m)_{m\geqslant 1}$ 在空间 V^*中满足 Aldous 条件。因此，应用推论A.8和推论 A.9可知， c_m 和 $\mathbf{u}_m$ 的分布分别在 $\mathcal{Z}_c$ 和 $\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}$ 上是紧的。□

由于 $(\mathcal{L}_m)_m$ 在 $\mathcal{Z}$上是紧的，调用 [28，推论 2，附录 B]（另见 [7，定理 4。13]）可得，存在一个概率空间

$$(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}'),$$

以及随机向量的一个子序列 $(\bar{\mathbf{u}}^{m_k},\bar{c}_{m_k},\bar{n}_{m_k})$，其取值于 $\mathcal{Z}$，使得

i)：$(\bar{\mathbf{u}}^{m_k},\bar{c}_{m_k},\bar{n}_{m_k})$具有与 $(\mathbf{u}^{m_k},c_{m_k},n_{m_k})$相同的概率分布；ii)：$(\bar{\mathbf{u}}^{m_k},\bar{c}_{m_k},\bar{n}_{m_k})$在 $\mathcal{Z}$ 的拓扑中收敛到随机元素 $(\mathbf{u}\ c,n)\in\mathcal{Z}$，且在 $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}')$ 上以概率 1 成立，当 $k\to\infty$时。

为简化记号，我们分别将这些序列记为 $(\mathbf{u}_m,c_m,n_m)_{m\geqslant 1}$ and$(\bar{\mathbf{u}}_m,\bar{c}_m,\bar{n}_m)_{m\geqslant 1}$。

接下来，根据空间 $\mathcal{Z}$ 的定义，我们推得 $\mathbb{P}'$-几乎处处成立，

(4.61)
$$\bar{\mathbf{u}}_m\to\mathbf{u}\ \text{ in }\ L_w^2(0,T;V)\cap L^2(0,T;H)\cap\mathcal{C}([0,T];V^*)\cap\mathcal{C}([0,T];H_w),$$
$$\bar{c}_m\to c\ \text{ in }\ L_w^2(0,T;H^2(\mathcal{O}))\cap L^2(0,T;H^1(\mathcal{O}))\cap\mathcal{C}([0,T];L^2(\mathcal{O}))\cap\mathcal{C}([0,T];H_w^1(\mathcal{O})),$$
$$\bar{n}_m\to n\ \text{ in }\ L_w^2(0,T;H^1(\mathcal{O}))\cap L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))\cap\mathcal{C}([0,T];H^{-3}(\mathcal{O}))\cap\mathcal{C}([0,T];L_w^2(\mathcal{O})).$$

根据[40，定理 1.10.4及补充说明 1.10.5]，，可以构造一族可测映射Ψ_m：$\Omega'\to\Omega$，使得它们与新的概率空间 $(\Omega'、\ \mathcal{F}'、\ \mathbb{P}')$一起满足以下性质

(4.62)
$$\bar{\mathbf{u}}_m(\omega')=\mathbf{u}_m\circ\Psi_m(\omega'),\quad \bar{n}_m(\omega')=n_m\circ\Psi_m(\omega'),$$
$$\bar{c}_m(\omega')=c_m\circ\Psi_m(\omega'),\quad\text{and}\quad\mathbb{P}=\mathbb{P}'\circ\Psi_m^{-1},$$

对所有 $\omega' \in \Omega'$。考虑到不等式（4.10）成立这一事实，我们可以推出，对于几乎处处的 $(t, \omega') \in [0, T] \times \Omega'$,

$$\left|\bar{c}_m(t,\omega')\right|_{L^\infty} = \left|c_m(t,\Psi_m(\omega'))\right|_{L^\infty} \leqslant |c_0|_{L^\infty}, \qquad \text{for all } m \geqslant 1. \tag{4.63}$$

由于 $(\mathbf{u}_m, c_m, n_m)$ 和 $(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{c}_m, \bar{n}_m)$ 在空间 $\mathcal{Z}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{Z}_c \times \mathcal{Z}_n$中的分布相同，因此我们得到估计式（4.52）、（4.54）以及

$$\mathbb{E}' \int_0^T |\bar{c}_m(s)|^2_{H^2}\, ds \leqslant \mathcal{K}, \quad \mathbb{E}' \int_0^T |\nabla \bar{\mathbf{u}}_m(s)|^2_{L^2}\, ds \leqslant \mathcal{K}, \tag{4.64}$$

以及

$$\mathbb{E}' \int_0^T |\bar{n}_m(s)|^2_{L^2}\, ds \leqslant \mathcal{K}. \tag{4.65}$$

由（4.64）、（4.65）和巴拿赫-阿劳格鲁定理可知，$(\bar{\mathbf{u}}_m)_{m\geqslant 1}$、$(\bar{c}_m)_{m\geqslant 1}$和 $(\bar{n}_m)_{m\geqslant 1}$ 在 $L^2(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'; L^2(0, T; V))$、$L^2(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'; L^2(0, T; H^2(\mathcal{O})))$以及 $L^2(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'; L^2(0, T; L^2(\mathcal{O})))$ 中分别存在一个弱收敛子序列。即

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} \in L^2(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'; L^2(0,T;V)), \quad c \in L^2(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'; L^2(0,T;H^2(\mathcal{O}))), \\ &n \in L^2(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'; L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))). \end{aligned} \tag{4.66}$$

另一方面，根据推论 4.8 中的估计（4.52）、（4.53）和（4.54，以及由（4.62）给出的等式，对于任意 $p \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}' \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\bar{\mathbf{u}}_m(s)|^{2p}_{L^2} + \mathbb{E}' \left(\int_0^T |\nabla \bar{\mathbf{u}}_m(s)|^2_{L^2}\, ds \right)^p \leqslant \mathcal{K}, \tag{4.67}$$

$$\mathbb{E}' \left(\int_0^T |\bar{n}_m(s)|^2_{L^2}\, ds \right)^p \leqslant \mathcal{K}, \tag{4.68}$$

$$\mathbb{E}' \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\bar{c}_m(s)|^p_{H^1} + \mathbb{E}' \left(\int_0^T |\bar{c}_m(s)|^2_{H^2}\, ds \right)^p \leqslant \mathcal{K}. \tag{4.69}$$

然后，利用 Fatou引理，我们推知对于 $p \geqslant 2$，有

$$\mathbb{E}' \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\mathbf{u}(s)|^p_{L^2} < \infty, \qquad \mathbb{E}' \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |c(s)|^p_{H^1} < \infty. \tag{4.70}$$

and

$$\mathbb{E}' \left(\int_0^T |\nabla \mathbf{u}(s)|^2_{L^2}\, ds \right)^p < \infty, \quad \mathbb{E}' \left(\int_0^T |n(s)|^2_{L^2}\, ds \right)^p < \infty, \quad \mathbb{E}' \left(\int_0^T |c(s)|^2_{H^2}\, ds \right)^p < \infty. \tag{4.71}$$

现在，我们证明三个引理，以说明如何利用 $\mathcal{Z}$ （由（4.61）给出）中的收敛性，来证明 Galerkin 逼近中出现的确定性项的收敛。首先注意到，由于 n_0^m, c_0^m 和 $\mathbf{u}_0^m$ 的选取满足（4.1），我们可以推得，对于所有 $\psi \in H^3(\mathcal{O})$ 和 $(\psi, \mathbf{v}) \in L^2(\mathcal{O}) \times V$,

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} (n_0^m, \psi) = (n_0, \psi), \quad \lim_{m\longrightarrow\infty} (c_0^m, \psi) = (c_0, \psi), \quad \text{and} \quad \lim_{m\longrightarrow\infty} (\mathbf{u}_0^m, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}). \tag{4.72}$$

引理4.12. 对任意 r、$t\in[0$、$T]$，若满足 $r\leqslant t$ 和 $\psi\in H^3(\mathcal{O})$，则以下收敛性以 $\mathbb{P}'$-几乎处处成立。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\longrightarrow\infty}(\bar{n}_m(t),\psi)=(n(t),\psi),\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t(A_1\bar{n}_m(s),\psi)ds=\int_r^t(A_1n(s),\psi)ds\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t(\mathcal{P}_m^2B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{n}_m(s)),\psi)ds=\int_r^t(B_1(\mathbf{u}(s),n(s)),\psi)ds,\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t(\mathcal{P}_m^2R_2(\bar{n}_m(s),\bar{c}_m(s)),\psi)ds=\int_r^t(R_2(n(s),c(s)),\psi)ds.
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

证明。令 $\psi\in H^3(\mathcal{O})$ 和 $t\in[0,\ T]$ 为任意但固定的值。由赫尔德不等式，我们有 e

$$
\begin{aligned}
|(\bar{n}_m(t),\psi)-(n(t),\psi)|&\leqslant|\bar{n}_m(t)-n(t)|_{H^{-3}}\,|\psi|_{H^3}\\
&\leqslant|\bar{n}_m-n|_{\mathcal{C}([0,T];H^{-3})}\,|\psi|_{H^3},
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

这与（4.61）一起意味着（4.73）中的第一个收敛性。

现在，我们也固定 $r\in[0$、$T]$，使得 $r\leqslant t$。通过分部积分和赫尔德不等式，我们注意到

$$
\begin{aligned}
\left|\int_r^t(A_1\bar{n}_m(s),\psi)ds-\int_r^t(A_1n(s),\psi)ds\right|dt&\leqslant\int_0^T|(A_1\bar{n}_m(s)-A_1n(s),\psi)|\,ds\\
&\leqslant\int_0^T|(\bar{n}_m(s)-n(s),A_1\psi)|\,ds\\
&\leqslant T\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|(\bar{n}_m(s)-n(s),A_1\psi)|.
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

由收敛性（4.61），我们推得 $\bar{n}_m\to n$ 在 $\mathcal{C}([0$中，$T];\ L^2_w(\mathcal{O}),\ \mathbb{P}'$几乎处处成立。这意味着 $\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|(\bar{n}_m(s)-n(s),\ \varphi)|$ 对所有 $\varphi\in L^2(\mathcal{O})$，当 m 以概率一趋于无穷时，都趋于零。我们代入 $\varphi=A_1\psi$ 并在（4.75）中令其趋于极限，从而得到（4.73）中的第二个收敛性。对所有 $\omega\in\Omega$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_r^t(\mathcal{P}_m^2B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{n}_m(s)),\psi)ds-\int_r^t(B_1(\mathbf{u}(s),n(s)),\psi)ds\right|\\
&\leqslant\int_0^T\left|(B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{n}_m(s)),\mathcal{P}_m^2\psi-\psi)\right|+\int_0^T|(B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{n}_m(s))-B_1(\mathbf{u}(s),n(s)),\psi)|\,ds
\end{aligned}
$$

由于 $\bar{\mathbf{u}}_m\to\mathbf{u}$ 属于 $L^2(0,T;\ H)$，且 $\bar{n}_m\to n$ 属于 $L^2(0,T;\ L^2(\mathcal{O}))$ $\mathbb{P}'$-a.s.，通过分部积分，我们推导得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\left|(B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{n}_m(s)),\mathcal{P}_m^2\psi-\psi)\right|ds\\
&\leqslant\int_0^T\left|(\bar{n}_m(s)\bar{\mathbf{u}}_m(s),\nabla(\mathcal{P}_m^2\psi-\psi))\right|\\
&\leqslant\left|\nabla(\mathcal{P}_m^2\psi-\psi)\right|_{L^\infty}\int_0^T|\bar{n}_m(s)|_{L^2}\,|\bar{\mathbf{u}}_m(s)|_{L^2}\,ds\\
&\leqslant\left|\mathcal{P}_m^2\psi-\psi\right|_{H^3}\left(\int_0^T|\bar{\mathbf{u}}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T|\bar{n}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}\\
&\leqslant\mathcal{K}\left|\mathcal{P}_m^2\psi-\psi\right|_{H^3}.
\end{aligned}
$$

通过分部积分以及事实 $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T |(B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{n}_m(s))-B_1(\mathbf{u}(s),n(s)),\psi),\psi)|\,ds\\
&\leqslant \int_0^T |((\bar{\mathbf{u}}_m(s)-\mathbf{u}(s))\nabla\bar{n}_m(s),\psi)|\,ds+\int_0^T |(\mathbf{u}(s)\nabla(\bar{n}_m(s)-n(s)),\psi)|\,ds\\
&\leqslant \int_0^T |(\bar{n}_m(s),(\bar{\mathbf{u}}_m(s)-\mathbf{u}(s))\cdot\nabla\psi)|\,ds+\int_0^T |((\bar{n}_m(s)-n(s)),\mathbf{u}(s)\cdot\nabla\psi)|\,ds\\
&\leqslant |\psi|_{L^\infty}\int_0^T |\bar{\mathbf{u}}_m(s)-\mathbf{u}(s)|_{L^2}\,|\bar{n}_m(s)|_{L^2}\,ds+|\nabla\psi|_{L^\infty}\int_0^T |\bar{n}_m(s)-n(s)|_{L^2}\,|\mathbf{u}(s)|_{L^2}\,ds.
\end{aligned}
$$

利用 $|\nabla\psi|_{L^\infty}\leqslant|\psi|_{H^3}$ 这一事实，我们从最后两个不等式推得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^t(\mathcal{P}_m^2B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{n}_m(s)),\psi)ds-\int_0^t(B_1(\mathbf{u}(s),n(s)),\psi)ds\right|\\
&\leqslant T\,|\psi|_{H^3}\left(\int_0^T|\bar{\mathbf{u}}_m(s)-\mathbf{u}(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T|\bar{n}_m(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}\\
&\qquad+T\,|\psi|_{H^3}\left(\int_0^T|\bar{n}_m(s)-n(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T|\mathbf{u}(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}+\mathcal{K}\left|\mathcal{P}_m^2\psi-\psi\right|_{H^3}\\
&\leqslant \mathcal{K}\left(\int_0^T|\bar{\mathbf{u}}_m(s)-\mathbf{u}(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}\\
&\qquad+\mathcal{K}\left(\int_0^T|\bar{n}_m(s)-n(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T|\mathbf{u}(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}+\mathcal{K}\left|\mathcal{P}_m^2\psi-\psi\right|_{H^3},
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

令 $n\to\infty$，可得式（4.73）中的第三个收敛。

同理，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_r^t(\mathcal{P}_m^2R_2(\bar{n}_m(s),\bar{c}_m(s)),\psi)ds-\int_r^t(R_2(n(s),c(s)),\psi)ds\right|\\
&\leqslant\int_0^T|(R_2(\bar{n}_m(s),\bar{c}_m(s))-R_2(n(s),c(s)),\psi)|\,ds\\
&\qquad+\int_0^T\left|(R_2(\bar{n}_m(s),\bar{c}_m(s)),\mathcal{P}_m^2\psi-\psi)\right|ds.
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

由于 $(\bar{c}_m,\bar{n}_m)\to(c,n)$ 属于 $\mathcal{Z}_c\times\mathcal{Z}_n$，我们可知 $\mathbb{P}'$-几乎处处成立，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\left|(R_2(\bar{n}_m(s),\bar{c}_m(s)),\mathcal{P}_m^2\psi-\psi)\right|ds\\
&\leqslant\left|\nabla(\mathcal{P}_m^2\psi-\psi)\right|_{L^\infty}\int_0^T|\bar{n}_m(s)|_{L^2}\,|\nabla\bar{c}_m(s)|_{L^2}\,ds\\
&\leqslant\mathcal{K}\left|\mathcal{P}_m^2\psi-\psi\right|_{H^3}.
\end{aligned}
$$

另一方面，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T |(R_2(\bar{n}_m(s),\bar{c}_m(s)) - R_2(n(s),c(s)),\psi)|\,ds \\
&\leqslant \int_0^T |((\bar{n}_m(s)-n(s))\nabla\bar{c}_m(s),\nabla\psi)|\,ds + \int_0^T |(n(s)\nabla(\bar{c}_m(s)-c(s)),\nabla\psi)|\,ds \\
&\leqslant |\nabla\psi|_{L^\infty}\int_0^T |\bar{n}_m(s)-n(s)|_{L^2}\,|\nabla\bar{c}_m(s)|_{L^2}\,ds \\
&\qquad + |\nabla\psi|_{L^\infty}\int_0^T |\nabla(\bar{c}_m(s)-c(s))|_{L^2}\,|n(s)|_{L^2}\,ds \\
&\leqslant \mathcal{K}\left(\int_0^T |\bar{n}_m(s)-n(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2} \\
&\qquad + \mathcal{K}\left(\int_0^T |\nabla(\bar{c}_m(s)-c(s))|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T |n(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

这与（4.61）一同推出（4.73）中的第四个收敛性。 □

引理4.13. 对于任意 r、$t\in[0$、$T]$，满足 $r\leqslant t$ 和 $\psi\in H^2(\mathcal{O})$，以下收敛性以 $\mathbb{P}'$-几乎处处成立。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\longrightarrow\infty}(\bar{c}_m(t),\psi) = (c(t),\psi),\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t (A_1\bar{c}_m(s),\psi)ds = \int_r^t (A_1c(s),\psi)ds,\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t (\mathcal{P}_m^2 B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{c}_m(s)),\psi)ds = \int_r^t (B_1(\mathbf{u}(s),c(s)),\psi)ds,\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t (\mathcal{P}_m^2 R_1(\bar{n}_m(s),\bar{c}_m(s)),\psi)ds = \int_r^t (R_1(n(s),c(s)),\psi)ds.
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

证明。由于 $\bar{c}_m\to c$ 在 $\mathcal{C}([0$中，$T];\ L^2(\mathcal{O}))$，$\mathbb{P}'$-几乎处处成立，故第一个收敛性完全可利用与（4.74）类似的不等式得到。通过分部积分以及 H¨older 不等式，我们注意到

$$
\begin{aligned}
\left|\int_r^t (A_1\bar{c}_m(s),\psi)ds - \int_r^t (A_1c(s),\psi)ds\right| &\leqslant \int_0^T |(A_1\bar{c}_m(s)-A_1c(s),\psi)|\,ds\\
&\leqslant \int_0^T |(\nabla(\bar{c}_m(s)-c(s)),\nabla\psi)|\,ds\\
&\leqslant T^{1/2}\,|\psi|_{H^1}\left(\int_0^T |\bar{c}_m(s)-c(s)|_{H^1}^2\,ds\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

这与（4.61）一起意味着（4.78）中的第二个收敛。

接下来，利用 Sobolev嵌入 $H^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^4(\mathcal{O})$，可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_r^t (\mathcal{P}_m^2 B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s)), \psi) ds - \int_r^t (B_1(\mathbf{u}(s), c(s)), \psi) ds\right| \\
&\leqslant \int_0^T \left|(B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s)) - B_1(\mathbf{u}(s), c(s)), \psi), \psi)\right| ds + \int_0^T \left|(B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s)), \mathcal{P}_m^2\psi - \psi)\right| ds \\
&\leqslant \int_0^T \left|((\bar{\mathbf{u}}_m(s) - \mathbf{u}(s))\nabla \bar{c}_m(s), \psi)\right| ds + \int_0^T \left|(\mathbf{u}(s)\nabla(\bar{c}_m(s) - c(s)), \psi)\right| ds \\
&\qquad + T^{1/2} \left|\mathcal{P}_m^2\psi - \psi\right|_{L^2} \left(\int_0^T |B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s))|_{L^2}^2 \, ds\right)^{1/2} \\
&\leqslant |\psi|_{L^4} \int_0^T |\bar{\mathbf{u}}_m(s) - \mathbf{u}(s)|_{L^2} \, |\nabla \bar{c}_m(s)|_{L^4} \, ds + |\psi|_{L^4} \int_0^T |\nabla(\bar{c}_m(s) - c(s))|_{L^2} \, |\mathbf{u}(s)|_{L^4} \, ds \\
&\qquad + \mathcal{K} \left|\mathcal{P}_m^2\psi - \psi\right|_{L^2} \\
&\leqslant T \, |\psi|_{H^1} \int_0^T |\bar{\mathbf{u}}_m(s) - \mathbf{u}(s)|_{L^2} \, |\bar{c}_m(s)|_{H^2} \, ds \\
&\qquad + T \, |\psi|_{H^1} \int_0^T |\nabla(\bar{c}_m(s) - c(s))|_{L^2} \, |\nabla \mathbf{u}(s)|_{L^2} \, ds + \mathcal{K} \left|\mathcal{P}_m^2\psi - \psi\right|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

由于收敛（4.61）成立，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_r^t (\mathcal{P}_m^2 B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s)), \psi) ds - \int_r^t (B_1(\mathbf{u}(s), c(s)), \psi) ds\right| \\
&\leqslant T \, |\psi|_{H^1} \left(\int_0^T |\bar{\mathbf{u}}_m(s) - \mathbf{u}(s)|_{L^2}^2 \, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^T |\bar{c}_m(s)|_{H^2}^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + T \, |\psi|_{H^1} \left(\int_0^T |\bar{c}_m(s) - c(s)|_{H^1}^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |\nabla \mathbf{u}(s)|_{L^2}^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{K} \left|\mathcal{P}_m^2\psi - \psi\right|_{L^2},
\end{aligned}
$$

这与（4.61）一起推出了（4.78）中的第三个收敛。

现在我们证明最后一个收敛结论。为此，我们注意到

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_r^t (\mathcal{P}_m^2 R_1(\bar{n}_m(s), \bar{c}_m(s)), \psi) ds - \int_r^t (R_1(n(s), c(s)), \psi) ds\right| \\
&\leqslant \int_0^T \left|(R_1(\bar{n}_m(s), \bar{c}_m(s)) - R_1(n(s), c(s)), \psi)\right| ds \\
&\qquad + \int_0^T \left|(R_1(\bar{n}_m(s), \bar{c}_m(s)), \mathcal{P}_m^2\psi - \psi)\right| ds \\
&\leqslant \int_0^T \left|((\bar{n}_m(s) - n(s)) f(\bar{c}_m(s)), \psi)\right| ds \\
&\qquad + \int_0^T \left|n(s)(f(\bar{c}_m(s)) - f(c(s))), \psi)\right| ds + \mathcal{K} \left|\mathcal{P}_m^2\psi - \psi\right|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{4.79}
$$

利用（4.63），我们推导出

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |((\bar{n}_m(s)-n(s))f(\bar{c}_m(s)),\psi)|\,ds\\
&\leqslant |\psi|_{L^\infty}\int_0^T\int_{\mathcal{O}} |\bar{n}_m(s)-n(s)|\,|f(\bar{c}_m(s))|\,dxds\\
&\leqslant T^{1/2}\,|\mathcal{O}|^{1/2}\,|\psi|_{H^2}\sup_{0\leqslant s\leqslant|c_0|_{L^\infty}} f(s)\left(\int_0^T |\bar{n}_m(s)-n(s)|_{L^2}^2\,ds\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

以类似的方式，我们可以看到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |n(s,x)(f(\bar{c}_m(s,x))-f(c(s,x))),\psi)|\,dsdx\\
&\leqslant |\psi|_{H^2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}} |n(s,x)f(\bar{c}_m(s,x))-n(s,x)f(c(s,x))|\,dxds.
\end{aligned}\tag{4.80}$$

由于强收敛 $\bar{c}_m\to c$ 在 $L^2(0,T;\ H^1(\mathcal{O}))$，$\mathbb{P}'$-几乎处处成立，我们可推出，除去一个子序列外

$$\bar{c}_m\to c\qquad dt\otimes dx\text{-a.e}$$

由于 f 连续，我们推得 $\mathbb{P}'$-几乎处处成立，

$$nf(\bar{c}_m)\to nf(c)\qquad a.e\ \text{ in }\ \times(0,T)\times\mathcal{O}.$$

我们还注意到，$\mathbb{P}$-几乎处处，$\{nf(\bar{c}_m)\}_{m\geqslant1}$ 在 $(0,T)\times\mathcal{O}$上是一致可积的。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{(0,T)\times\mathcal{O}} |n(s,x)f(\bar{c}_m(s,x))|^2\,dxdsd\mathbb{P} &\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant|c_0|_{L^\infty}} f^2(s)\int_0^T\int_{\mathcal{O}} |n(s,x)|^2\,dxds\\
&\leqslant \mathcal{K}\int_0^T |n(s)|_{L^2}^2\,ds.
\end{aligned}$$

因此，根据Vitali收敛定理，我们得到 $\mathbb{P}'$-几乎处处，不等式（4.80）右端随着 m趋于 ∞而趋于零。由于这一结果，我们可以在不等式（4.79）中取极限，从而得到（4.78）中的最后一个收敛结论。□

接下来，我们证明以下收敛性。

引理**4.14.** 对任意 r、$t\in[0、\ T]$，满足 $r\leqslant t$ 且 $\mathbf{v}\in V$，以下收敛性以 $\mathbb{P}'$-几乎必然成立。

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\longrightarrow\infty}(\bar{\mathbf{u}}_m(t),\mathbf{v})=(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}),\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t(A_0\bar{\mathbf{u}}_m(s),\mathbf{v})ds=\int_r^t(A_0\mathbf{u}(s),\mathbf{v})ds,\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t(\mathcal{P}_m^1B_0(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{\mathbf{u}}_m(s)),\mathbf{v})ds=\int_r^t(B_0(\mathbf{u}(s),\mathbf{u}(s)),\mathbf{v})ds,\\
&\lim_{m\longrightarrow\infty}\int_r^t(\mathcal{P}_m^1R_0(\bar{n}_m(s),\Phi),\mathbf{v})ds=\int_r^t(R_0(n(s),\Phi),\mathbf{v})ds.
\end{aligned}\tag{4.81}$$

证明。证明与引理4.12 和引理4.13的证明类似。 □

下文中，我们将结合引理4.12、引理4.13和引理4.14 的收敛结果以及鞅表示定理，构造问题（1.2）的概率弱解。为简化记号，我们在概率空间 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ 上分别定义过程 N_m^1, N_m^2 和 N_m^3，其中 $t \in [0,T]$,

$$N_m^1(t) := -\bar{\mathbf{u}}_m(t) - \int_0^t [\eta A_0 \bar{\mathbf{u}}_m(s) + \mathcal{P}_m^1 B_0(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{\mathbf{u}}_m(s))]ds + \mathbf{u}_0^m + \int_0^t \mathcal{P}_m^1 R_0(\bar{n}_m(s), \Phi)ds,$$

$$N_m^2(t) := -\bar{c}_m(t) - \int_0^t [\xi A_1 \bar{c}_m(s) + \mathcal{P}_m^2 B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s))]ds + c_0^m - \int_0^t \mathcal{P}_m^2 R_1(\bar{n}_m(s), \bar{c}_m(s))ds,$$

and

$$N_m^3(t) := -\bar{n}_m(t) - \int_0^t [\delta A_1 \bar{n}_m(s) + \mathcal{P}_m^2 B_1(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{n}_m(s))]ds + n_0^m - \int_0^t \mathcal{P}_m^2 R_2(\bar{n}_m(s), \bar{c}_m(s))ds.$$

引理 4.15. 对所有 $m \in \mathbb{N}$ 以及任意的 $t \in [0,T]$，我们有

$$N_m^3(t) = 0, \qquad \mathbb{P}'\text{-}a.s. \tag{4.82}$$

证明。令 $m \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0,T]$ 为任意但固定的值。在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$上，我们定义过程 $M_m^3(t)$ 如下:

$$M_m^3(t) := -n_m(t) - \int_0^t [\delta A_1 n_m(s) + \mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s), n_m(s))]ds + n_0^m - \int_0^t \mathcal{P}_m^2 R_2(n_m(s), c_m(s))ds.$$

我们还定义 Ω 和 Ω' 的以下子集

$$\mathcal{A}_m^N(t) := \left\{\omega' \in \Omega' : N_m^3(t) = 0\right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_m^M(t) := \left\{\omega \in \Omega : M_m^3(t) = 0\right\}.$$

注意，由于（4.2）的最后一个方程成立，$\mathbb{P}(\mathcal{A}_m^M(t)) = 1$。此外，由（4.62），我们推得对所有 $\omega' \in \Omega$, $N_m^3(t,\ \omega') = M_m^3(t,\ \Psi_m(\omega'))$ 因此我们观察到$\mathcal{A}_m^N(t) = \Psi_m^{-1}(\mathcal{A}_m^M(t))$。再次利用（4.62），我们可推出

$$\mathbb{P}'(\mathcal{A}_m^N(t)) = \mathbb{P}'(\Psi_m^{-1}(\mathcal{A}_m^M(t))) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_m^M(t)) = 1,$$

这就完成了引理的证明4.15。 □

利用收敛性（4.72）和（4.73），以及引理4.15 ，我们看到，对所有$t \in [0,\ T]$, $\mathbb{P}'$-几乎处处。

$$n(t) + \int_0^t [\delta A_1 n(s) + B_1(\mathbf{u}(s), n(s))]ds = n_0 - \int_0^t R_2(n(s), c(s))ds, \qquad \text{in } H^{-3}(\mathcal{O}). \tag{4.83}$$

现在，在概率空间 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ 上，我们定义一个取值于 $\mathbf{H}_m \times H_m$ 的过程 N_m，其定义为 $N_m(t) = (N_m^1(t), N_m^2(t))$，对所有 $m \geqslant 1$ 和 $t \in [0,T]$。由于

$$\mathbf{H}_m \times H_m \subset H \times L^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow V^* \times H^{-2}(\mathcal{O}), \tag{4.84}$$

过程 N_m 可以看作一个取值于 $V^* \times H^{-2}(\mathcal{O})$ 的过程。

接下来，我们整理应用[12，定理 82]中的鞅表示定理所需的要素。为此，我们考虑以下盖尔范德三元组$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ 和 $H^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^{-2}(\mathcal{O})$。令 $i^1 :\ V \hookrightarrow H$ 为通常嵌入，令 i^{1*}为其希尔伯特空间伴随算子，使得 $(ix,\ y) = (x,\ i^{1*}y)_V$对所有 $x \in V$以及 $y \in H$成立。类似地，我们将通常嵌入 $H^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{O})$ 记为 i^2，将 i^{*2} 其

希尔伯特空间伴随算子。我们分别将嵌入 $i: V \times H^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow H \times L^2(\mathcal{O})$ 及其伴随算子i^*: $H \times L^2(\mathcal{O}) \longrightarrow V \times H^2(\mathcal{O})$ 定义为

$$i = \begin{pmatrix} i^1 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix}, \qquad i^* = \begin{pmatrix} i^{1*} & 0 \\ 0 & i^{2*} \end{pmatrix}.$$

此外，我们定义 $L^1 = (i^{1*})': V^* \longrightarrow H$ 为 i^{1*} 的对偶算子，使得对所有 $x \in H$ 和 $y \in V^*$, $(Ly, x) = \langle y, x\rangle$。类似地，$i^{2*}$ 的对偶算子记作 $L^2: H^{-2}(\mathcal{O}) \longrightarrow L^2(\mathcal{O})$。接下来，我们定义如下对偶算子 $L := (i^*)': V^* \times H^{-2}(\mathcal{O}) \longrightarrow H \times L^2(\mathcal{O})$:

$$L = \begin{pmatrix} L^1 & 0 \\ 0 & L^2 \end{pmatrix}.$$

在空间 $\mathbf{H}_m \times H_m$ 上，我们定义映射 G_m:

$$G_m(\mathbf{v}, \psi) = \begin{pmatrix} L^1 \mathcal{P}_m^1 g(\mathbf{v}, \psi) & 0 \\ 0 & L^2 \mathcal{P}_m^2 \phi(\psi) \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{H}_m \times H_m.$$

这里 $(\mathcal{P}_m^1 g(\mathbf{v}\ \psi),\ \mathcal{P}_m^2 \phi(\psi)) = (\mathcal{P}_m^1 g(\mathbf{v}\ \psi),\ \mathcal{P}_m^2 \phi(\psi))$ 由于包含关系（4.84），视为 $V^* \times H^{-2}(\mathcal{O})$

在下面的引理中，我们证明过程 LN_m 的鞅性质。

引理 4.16. 对每个 $m \geqslant 1$，过程 LN_m 是一个取值于 $H \times L^2(\mathcal{O})$ 的连续平方可积鞅，其相对于滤过

$$\mathbb{F}'^m = \left\{\sigma\left(\sigma\left((\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s), \bar{n}_m(s)); s \leqslant t\right) \cup \mathcal{N}'\right)\right\}_{t\in[0,T]},$$

其中， $\mathcal{N}'$ 是 $\mathcal{F}'$ 的零测集集合。 LN_m 的二次变差由下式给出

$$\langle\langle LN_m \rangle\rangle_t = \int_0^t G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s)) G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s))^* ds, \tag{4.85}$$

其中， $G_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{c}_m)^*: H \times L^2(\mathcal{O}) \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^2$ 是算子 $G_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{c}_m)$ 的伴随算子，且定义为

$$G_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{c}_m)^* \mathbf{v} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{P}_m^1 g(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{c}_m) e_k, i^{1*}\mathbf{w}) e_k, \sum_{k=1}^{2} (\mathcal{P}_m^2 \phi(\bar{c}_m) g_k, i^{2*}\psi) g_k\right),$$

对所有 $\mathbf{v} = (\mathbf{w}\ \psi) \in H \times L^2(\mathcal{O})$ 均成立。

证明. 对任意 $m \geqslant 1$，我们定义取值于 $V^* \times H^{-2}(\mathcal{O})$ 的过程 M_m 如下

$$M_m(t) = (M_m^1(t), M_m^2(t)), \quad t \in [0, T],$$

其中

$$M_m^1(t) := -\mathbf{u}_m(t) - \int_0^t [\eta A_0 \mathbf{u}_m(s) + \mathcal{P}_m^1 B_0(\mathbf{u}_m(s), \mathbf{u}_m(s))] ds + \mathbf{u}_0^m + \int_0^t \mathcal{P}_m^1 R_0(n_m(s), \Phi) ds,$$

$$M_m^2(t) := -c_m(t) - \int_0^t [\xi A_1 c_m(s) + \mathcal{P}_m^2 B_1(\mathbf{u}_m(s), c_m(s))] ds + c_0^m - \int_0^t \mathcal{P}_m^2 R_1(n_m(s), c_m(s)) ds.$$

令 $\mathbf{W}_s := (W_s,\ \beta_s)$。那么，由于 $(\mathbf{u}_m,\ c_m,\ n_m)$ 是有限维系统（4.2）的一个解，我们推知 LM_m 可表示为

$$LM_m(t) = \int_0^t G_m(\mathbf{u}_m(s), c_m(s)) d\mathbf{W}_s, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \quad \text{for all} \quad t \in [0.T].$$

利用算子 L^1 和 L^2 的连续性以及推论 4.8，可得估计

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T |G_m(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2,H\times L^2)}\,ds\\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T |\mathcal{P}^1_m g(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}\,ds + \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T |\mathcal{P}^2_m\phi(c_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,L^2)}\,ds\\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}\int_0^T (1+|(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|^2_{\mathcal{H}})ds + \gamma^2\sum_{k=1}^2 |\sigma_k|^2_{L^2}\,\mathbb{E}\int_0^T |\nabla c_m(s)|^2_{L^2}\,ds\\
&\leqslant \mathcal{K}\left(1+\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))|^2_{\mathcal{H}}\right) + \mathcal{K}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\nabla c_m(s)|^2_{L^2} < \infty,
\end{aligned}$$

这表明 M_m 是概率空间$(\Omega\ \mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$上的平方可积连续鞅。此外，根据 M_m的定义可得，对于每个 $t\in[0.T]$，$M_m(t)$ 关于 σ-域可测

$$\mathbb{F}^m = \{\sigma\left(\sigma\left((\mathbf{u}_m(s),c_m(s),n_m(s));s\leqslant t\right)\cup\mathcal{N}\right)\}_{t\in[0,T]},$$

其中 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{F}$的零测集集合。因此，利用 [12，定理 4。27] 我们推知M_m 是一个 $\mathbb{F}^m$-鞅，其二次变差为

$$\langle\langle M_m\rangle\rangle_t = \int_0^t G_m(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))G_m(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))^*ds.$$

这意味着，对于所有 s、$t\in[0$、$T]$、$s\leqslant t$，所有 $\mathbf{v}_i=(\mathbf{w}_i$、$\psi_i)\in H\times L^2(\mathcal{O})$、$i=1$、$2$，以及所有定义在 $\mathcal{C}([0$、$T]$ 上的有界连续实值函数 $h=(h_1$、h_2、$h_3)$；$H\times L^2(\mathcal{O})\times L^2(\mathcal{O}))$，都有

$$\mathbb{E}\left[(LM_m(t)-LM_m(s),\mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,h_1(\mathbf{u}_m|_{[0,s]})h_2(c_m|_{[0,s]})h_3(n_m|_{[0,s]})\right]=0,$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(&(LM_m(t),\mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}(LM_m(t),\mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})} - (LM_m(s),\mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}(LM_m(s),\mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\\
&-\int_0^t (G_m(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))^*\mathbf{v}_1, G_m(\mathbf{u}_m(s),c_m(s))^*\mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\,ds\Big)\times\\
&\times h_1(\mathbf{u}_m|_{[0,s]})h_2(c_m|_{[0,s]})h_3(n_m|_{[0,s]})\Big]=0.
\end{aligned}$$

由于 $(\mathbf{u}_m,c_m,n_m)$ 和 $(\bar{\mathbf{u}}_m,\bar{c}_m,\bar{n}_m)$ 在 $\mathcal{C}([0,T]$ 上同分布；$\mathcal{H}_m)$，由最后这两个等式可得

$$\mathbb{E}'\left[(LN_m(t)-LN_m(s),\mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,h_1(\bar{\mathbf{u}}_m|_{[0,s]})h_2(\bar{c}_m|_{[0,s]})h_3(\bar{n}_m|_{[0,s]})\right]=0, \tag{4.86}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}'\Big[\Big(&(LN_m(t),\mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}(LN_m(t),\mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\\
&-(LN_m(s),\mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}(LN_m(s),\mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\\
&-\int_0^t (G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{c}_m(s))^*\mathbf{v}_1, G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(s),\bar{c}_m(s))^*\mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\,ds\Big)\times\\
&\times h_1(\bar{\mathbf{u}}_m|_{[0,s]})h_2(\bar{c}_m|_{[0,s]})h_3(\bar{n}_m|_{[0,s]})\Big]=0,
\end{aligned} \tag{4.87}$$

对所有 $s,t\in[0,T]$，$s\leqslant t$，所有 $\mathbf{v}_i=(\mathbf{w}_i,\psi_i)\in H\times L^2(\mathcal{O})$，$i=1,2$，以及所有在 $\mathcal{C}([0,T]$ 上有界且连续的（实值）函数h_i，$i=1,2,3$；$\mathcal{H}_m)$，$\mathcal{C}([0,T];\ H_m)$，以及 $\mathcal{C}([0,T];\ H_m)$

分别地，这意味着 LN_m 是关于 $\mathbb{F}'^m$ 的连续平方可积鞅，且其二次变差如等式（4.85）所示。□

在新的概率空间 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ 上，我们考虑由 $N(t) = (N^1(t), N^2(t))$ 定义的取值于 $V^* \times H^{-2}(\mathcal{O})$ 的连续过程 N，对所有 $t \in [0,T]$ 均成立，其中

$$N^1(t) := -\mathbf{u}(t) - \int_0^t [\eta A_0 \mathbf{u}(s) + B_0(\mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s))]ds + \mathbf{u}_0 + \int_0^t R_0(n(s), \Phi)ds,$$

$$N^2(t) := -c(t) - \int_0^t [\xi A_1 c(s) + B_1(\mathbf{u}(s), c(s))]ds + c_0 - \int_0^t R_1(n(s), c(s))ds.$$

在下一个引理中，我们指出 $LN = (L^1 N^1, L^2 N^2)$ 也是一个取值于 $H \times L^2(\mathcal{O})$ 的鞅。

引理 4.17. 过程 LN 是一个关于滤过 $\mathbb{F}' = \{\sigma((\mathbf{u}(s), c(s), n(s)) \text{ 的取值于 } H \times L^2(\mathcal{O}) \text{ 的连续平方可积鞅；} s \leqslant t)\}_{t\in[0,T]}$。二次变差由下式给出

$$\langle\langle LN \rangle\rangle_t = \int_0^t G(\mathbf{u}(s), c(s)) G(\mathbf{u}(s), c(s))^* ds,$$

其中

$$G(\mathbf{u}, c) = \begin{pmatrix} L^1 g(\mathbf{u}, c) & 0 \\ 0 & L^2 \phi(c) \end{pmatrix},$$

且 $G(\mathbf{u}\ c)^*$: $H \times L^2(\mathcal{O}) \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^2$ 是算子 $G(\mathbf{u}\ c)$ 的伴随算子，其定义为

$$G(\mathbf{u}, c)^* \mathbf{v} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (L^1 g(\mathbf{u}(s), c(s)) e_k, \mathbf{w}) e_k, \sum_{k=1}^{2} (L^2 \phi(c(s)) g_k, \psi) g_k \right),$$

对所有 $\mathbf{v} = (\mathbf{w}\ \psi) \in H \times L^2(\mathcal{O})$。

证明。设 $t \in [0, T]$。我们首先证明 LN 是一个取值于 $H \times L^2(\mathcal{O})$ 的平方可积随机变量。由于 L 的连续性，只需证明 $\mathbb{E}\,|N|^2_{V^* \times H^{-2}} < \infty$。利用引理4.13 和引理 4.14，我们得出

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} N_m(t) = N(t) \qquad \mathbb{P}'\text{-a.s. in } V^* \times H^{-2}(\mathcal{O}).$$

由嵌入映射 $H \times L^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow V^* \times H^{-2}(\mathcal{O})$ 的连续性、连续鞅的 Burkholder-Gundy-Davis不等式以及等式（4.85），还有不等式（4.67）和（4.69），可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}' \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |N_m(s)|^4_{V^* \times H^{-2}} &\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}' \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |N_m(s)|^4_{L^2 \times L^2} \\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}' \left(\int_0^T |G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2, H\times L^2)}\, ds \right)^2 \\
&= 2\mathcal{K}\mathbb{E}' \left(\int_0^T \left| \mathcal{P}^1_m g(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s)) \right|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U}, H)}\, ds \right)^2 \\
&\quad + 2\mathcal{K}\mathbb{E}' \left(\int_0^T \left| \mathcal{P}^2_m \phi(\bar{c}_m(s)) \right|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, L^2)}\, ds \right)^2 \\
&\leqslant \mathcal{K} \left(1 + \mathbb{E}' \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |(\bar{\mathbf{u}}_m(s), \bar{c}_m(s))|^4_{\mathcal{H}} \right) + \mathcal{K}\mathbb{E}' \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\nabla \bar{c}_m(s)|^4_{L^2} < \mathcal{K}.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

因此，由维塔利定理可推知 $N(t) \in L^2(\Omega'; V^* \times H^{-2}(\mathcal{O}))$ an d

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} N_m(t) = N(t) \quad \text{in} \quad L^2(\Omega'; V^* \times H^{-2}(\mathcal{O})).$$

接下来，设 $\mathbf{v} = (\mathbf{w}\ \psi) \in V^* \times H^{-2}(\mathcal{O})$，且 h_i、$i = 1$、2、3 是定义在 $\mathcal{C}([0、T]; V^*)$、$\mathcal{C}([0、T]; H^{-2}(\mathcal{O}))$ 和 $\mathcal{C}([0、T]; H^{-3}(\mathcal{O}))$ 上的有界连续函数。设 s、$t \in [0、T]$ 满足 $s \leqslant t$。设

$$F_m(t,s) := (LN_m(t) - LN_m(s), \mathbf{v})_{H\times L^2(\mathcal{O})}\, h_1(\bar{\mathbf{u}}_m|_{[0,s]})h_2(\bar{c}_m|_{[0,s]})h_3(\bar{n}_m|_{[0,s]}),$$
$$F(t,s) := (LN(t) - LN(s), \mathbf{v})_{H\times L^2(\mathcal{O})}\, h_1(\mathbf{u}|_{[0,s]})h_2(c|_{[0,s]})h_3(n|_{[0,s]}).$$

我们将证明

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \mathbb{E}' F_m(t,s) = \mathbb{E}' F(t,s). \tag{4.89}$$

为此，我们首先注意到，根据 $\mathbb{P}'$-几乎处处收敛 $(\bar{\mathbf{u}}_m,\ \bar{c}_m,\ \bar{n}_m) \to (\mathbf{u}\ c,\ n)$ 于 $\mathcal{Z}$ 以及引理 4.13 和引理 4.14，可推得

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} F_m(t,s) = F(t,s), \qquad \mathbb{P}'\text{-a.s.}$$

现在我们将证明函数 $\{F_m(t、s)\}_{m\geqslant 1}$ 一致可积。利用估计（4.88），可推出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'\,|F_m(t,s)|^4 &\leqslant \mathcal{K}\,|h_1|^4_{L^\infty}\,|h_2|^4_{L^\infty}\,|h_3|^4_{L^\infty}\,|\mathbf{v}|^4_{H\times L^2}\,\mathbb{E}'\left[|N_m(t)|^4_{L^2\times L^2} + |N_m(s)|^4_{L^2\times L^2}\right]\\ &\leqslant \mathcal{K}\,|h_1|^4_{L^\infty}\,|h_2|^4_{L^\infty}\,|h_3|^4_{L^\infty}\,|\mathbf{v}|^4_{H\times L^2}.\end{aligned}$$

应用维塔利定理，我们得到收敛式（4.89）。

令 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ and $\mathbf{v}_i = (\mathbf{w}_i, \psi_i) \in H \times L^2(\mathcal{O})$，$i = 1,2$。令

$$\begin{aligned}Q_m(t,s) :=& \Big((LN_m(t), \mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,(LN_m(t), \mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\\ &- (LN_m(s), \mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,(LN_m(s), \mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\Big)\, h_1(\bar{\mathbf{u}}_m|_{[0,s]})h_2(\bar{c}_m|_{[0,s]})h_3(\bar{n}_m|_{[0,s]}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(t,s) :=& \Big((LN(t), \mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,(LN(t), \mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\\ &- (LN(s), \mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,(LN(s), \mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\Big)\, h_1(\mathbf{u}|_{[0,s]})h_2(c|_{[0,s]})h_3(n|_{[0,s]}).\end{aligned}$$

现在我们的目的是证明

$$\mathbb{E}' Q(t,s) = \lim_{m\longrightarrow\infty} \mathbb{E}' Q_m(t,s), \tag{4.90}$$

仿照前面的证明。事实上，由于 $\mathbb{P}'$-几乎处处收敛 $(\bar{\mathbf{u}}_m,\ \bar{c}_m,\ \bar{n}_m) \to (\mathbf{u}\ c,\ n)$ 在 $\mathcal{Z}$ 以及引理4.13 和引理 4.14 再次得到

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} Q_m(t,s) = Q(t,s), \qquad \mathbb{P}'\text{-a.s.}$$

现在我们证明 $Q_m(t$的一致可积性，$s)$。为此，由（4.88）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'\,|Q_m(t,s)|^2 &\leqslant \mathcal{K}\,|h_1|^2_{L^\infty}\,|h_2|^2_{L^\infty}\,|h_3|^2_{L^\infty}\,\mathbb{E}'\Big[\Big|(N_m(t), \mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,(N_m(t), \mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\Big|^2\\ &\quad + \Big|(N_m(s), \mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,(N_m(s), \mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\Big|^2\Big]\\ &\leqslant \mathcal{K}\,|h_1|^2_{L^\infty}\,|h_2|^2_{L^\infty}\,|h_3|^2_{L^\infty}\,|\mathbf{v}_1|^2_{H\times L^2}\,|\mathbf{v}_2|^2_{H\times L^2}\,\mathbb{E}'\left[|N_m(t)|^4_{L^2\times L^2} + |N_m(s)|^4_{L^2\times L^2}\right]\\ &\leqslant \mathcal{K}\,|h_1|^2_{L^\infty}\,|h_2|^2_{L^\infty}\,|h_3|^2_{L^\infty}\,|\mathbf{v}|^2_{H\times L^2}.\end{aligned}$$

与前面一样，维塔利定理给出等式（4.90）。

最后，我们还定义

$$R_m(t,s) := \left(\int_s^t (G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_1, G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \, dr \right) \times \\ \times \, h_1(\bar{\mathbf{u}}_m|_{[0,s]}) h_2(\bar{c}_m|_{[0,s]}) h_3(\bar{n}_m|_{[0,s]}),$$

and

$$R(t,s) := \left(\int_s^t (G(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_1, G(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \, dr \right) h_1(\mathbf{u}|_{[0,s]}) h_2(c|_{[0,s]}) h_3(n|_{[0,s]}),$$

我们声称

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \mathbb{E}' R_m(t,s) = \mathbb{E}' R(t,s). \tag{4.91}$$

为了证明这一主张，我们首先证明

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} R_m(t,s) = R(t,s), \qquad \mathbb{P}'\text{-a.s.} \tag{4.92}$$

由于 $h_1(\bar{}\mathbf{u}_m|_{[0,\ s]}) h_2(\bar{c}_m|_{[0,\ s]}) h_3(\bar{n}_m|_{[0,\ s]}) \to h_1(\mathbf{u}|_{[0,\ s]}) h_2(c|_{[0,\ s]}) h_3(n|_{[0,\ s]})$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立，为证明（4.92），只需证明

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_s^t (G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_1, G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \, dr \\ = \int_s^t (G(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_1, G(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \, dr, \qquad \mathbb{P}'\text{-a.s.} \tag{4.93}$$

对于所有 $r \in [s,t]$，我们令

$$J(r) := (G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_1, G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \\ - (LG(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_1, LG(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}.$$

接着，我们注意到

$$\int_s^t |J(r)| \, dz \leqslant \int_0^T \left| (G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_1 - LG(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_1, G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \right| dr \\ + \int_0^T \left| (G(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_1, G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_2 - G(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \right| dr \tag{4.94}$$
$$= I_1(m) + I_2(m).$$

利用柯西-施瓦茨不等式和 H¨older 不等式，我们推得 at

$$I_1(m) \leqslant \left(\int_0^T |G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_1 - G(\mathbf{u}(r), c(r))^* \mathbf{v}_1)|^2_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \, dr \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left(\int_0^T |G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^* \mathbf{v}_2|^2_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2} \, dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由于 $\mathcal{P}^1_m g(\bar{}\mathbf{u}_m、\ \bar{c}_m) e_k \in H$ 和 $\mathcal{P}^2_m \phi(\bar{c}_m) g_k \in L^2(\mathcal{O})$，我们推知

$$(L^1 \mathcal{P}^1_m g(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{c}_m) e_k, \mathbf{w}_1) := \langle \mathcal{P}^1_m g(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{c}_m) e_k, i^{1*} \mathbf{w}_1 \rangle = (g(\mathbf{u}, c) e_k, i^{1*} \mathbf{w}_1).$$

and

$$(L^2 \mathcal{P}^2_m \phi(\bar{c}_m) g_k, \psi_2) := \langle \mathcal{P}^2_m \phi(\bar{c}_m) g_k, i^{2*} \psi_2 \rangle = (\mathcal{P}^2_m \phi(\bar{c}_m) g_k, i^{2*} \psi_2).$$

因此，利用不等式（2.12）以及 $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ 和 $\{g_k\}_{k=1,\ 2}$ 分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基这一事实，我们推导出

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T |G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))^*\mathbf{v}_2|^2_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\,dr\\
&=\int_0^T\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty}(L^1\mathcal{P}^1_m g(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))e_k,\mathbf{w}_2)e_k\right|^2_{\mathcal{U}}+\left|\sum_{k=1}^{2}(L^2\mathcal{P}^2_m\phi(\bar{c}_m(r))g_k,\psi_2)g_k\right|^2_{\mathbb{R}^2}\right)dr\\
&\leqslant\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left|(\mathcal{P}^1_m g(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))e_k,i^{1*}\mathbf{w}_2)\right|^2dr+\int_0^T\sum_{k=1}^{2}\left|(\mathcal{P}^2_m\phi(\bar{c}_m(r))g_k,i^{2*}\psi_2)\right|^2dr \qquad (4.95)\\
&\leqslant\left|i^{1*}\mathbf{w}_2\right|^2_{L^2}\int_0^T|g(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}\,dr+\left|i^{2*}\psi_2\right|^2_{L^2}\int_0^T|\phi(\bar{c}_m(r))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,L^2)}\,dr\\
&\leqslant\mathcal{K}\int_0^T(1+|(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))|^2_{\mathcal{H}})dr+\mathcal{K}\int_0^T|\nabla\bar{c}_m(r))|^2_{L^2}\,dr\\
&\leqslant\mathcal{K},\qquad\mathbb{P}'\text{-a.s.}
\end{aligned}
$$

在最后一行中，我们用到了以下事实： $\bar{c}_m\to c$ 属于 $L^2(0,T;\ H^1(\mathcal{O}))$ 且 $\bar{\mathbf{u}}_m\to\mathbf{u}$ 属于 $L^2(0,T;\ H)\mathbb{P}'$-几乎处处成立。

另一方面，我们注意到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T|G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))^*\mathbf{v}_1-G(\mathbf{u}(r),c(r))^*\mathbf{v}_1)|^2_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\,dr\\
&\leqslant\int_0^T\left|\left[\sum_{k=1}^{\infty}(L^1\mathcal{P}^1_m g(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))e_k,\mathbf{w}_1)-\sum_{k=1}^{\infty}(L^1 g(\mathbf{u}(r),c(r))e_k,\mathbf{w}_1)\right]e_k\right|^2_{\mathcal{U}}dr\\
&\quad+\int_0^T\left|\left[\sum_{k=1}^{2}(L^2\mathcal{P}^2_m\phi(\bar{c}_m(r))g_k,\psi_1)-\sum_{k=1}^{2}(L^2\phi(c(r))g_k,\psi_1)\right]g_k\right|^2_{\mathbb{R}^2}dr.
\end{aligned}
$$

由此不等式和不等式（4.95），我们推得

$$
\begin{aligned}
I_1^2(m)&\leqslant\mathcal{K}\int_0^T\left|\sum_{k=1}^{\infty}(g(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))e_k,\mathcal{P}^1_m i^{1*}\mathbf{w}_1)-\sum_{k=1}^{\infty}(g(\mathbf{u}(r),c(r))e_k,i^{1*}\mathbf{w}_1)\right|^2dr\\
&\quad+\mathcal{K}\int_0^T\left|\sum_{k=1}^{2}(\phi(\bar{c}_m(r))g_k,\mathcal{P}^2_m i^{2*}\psi_1)-\sum_{k=1}^{2}(\phi(c(r))g_k,i^{2*}\psi_1)\right|^2dr\\
&\leqslant\mathcal{K}\left|i^{1*}\mathbf{w}_1\right|^2_{L^2}\int_0^T|g(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))-g(\mathbf{u}(r),c(r))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}\,dr \qquad (4.96)\\
&\quad+\mathcal{K}\left|\mathcal{P}^1_m i^{1*}\mathbf{w}_1-i^{1*}\mathbf{w}_1\right|^2_{L^2}\int_0^T|g(\bar{\mathbf{u}}_m(r),\bar{c}_m(r))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}\,dr\\
&\quad+\left|i^{2*}\psi_1\right|^2_{L^2}\int_0^T|\phi(\bar{c}_m(r))-\phi(c(r))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,L^2)}\,dr\\
&\quad+\left|\mathcal{P}^2_m i^{2*}\psi_1-i^{2*}\psi_1\right|^2_{L^2}\int_0^T|\phi(\bar{c}_m(r))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,L^2)}\,dr\\
&:=II_1(m)+II_2(m)+II_3(m)+II_4(m).
\end{aligned}
$$

利用 g的连续性、 $\mathbb{P}'$-几乎必然收敛 $(^{-}\mathbf{u}_m, \bar{c}_m, \bar{n}_m) \to (\mathbf{u}\ c, n)$ 在 $\mathcal{Z}$中，不等式（2.12）以及维塔利定理，我们可以推得$\lim_{m\longrightarrow\infty} II_1(m) = 0$。此外，由于

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |g(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}\, dr + \int_0^T |\phi(\bar{c}_m(r))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,L^2)}\, dr \\
&\leqslant \mathcal{K}\int_0^T (1 + |(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))|^2_{\mathcal{H}})dr + \mathcal{K}\int_0^T |\nabla \bar{c}_m(r)|^2_{L^2}\, dr \\
&\leqslant \mathcal{K} \qquad \mathbb{P}'\text{-a.s.},
\end{aligned}$$

我们推得

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} II_2(m) = \lim_{m\longrightarrow\infty} II_4(m) = 0.$$

现在，我们研究 $II_3(m)$。我们看到

$$\begin{aligned}
II_3(m) &\leqslant |\psi_1|^2_{L^2}\, \gamma^2\, |\sigma|^2_{L^\infty} \int_0^T |\nabla \bar{c}_m(r) - \nabla c(r)|^2_{L^2}\, dr \\
&\leqslant |\psi_1|^2_{L^2}\, \gamma^2\, |\sigma|^2_{L^\infty} \int_0^T |\bar{c}_m(r) - c(r)|^2_{H^1}\, dr.
\end{aligned}$$

利用以下事实 $\bar{c}_m \to c$在 $L^2(0$中， T； $H^1(\mathcal{O}))$， $\mathbb{P}'$-几乎处处成立，我们可以在这个最后的不等式中取极限，并推得 极限$_{m\longrightarrow\infty} II_3(m) = 0$。因此，在（4.96）中取极限可得 极限$_{m\longrightarrow\infty} I_1(m) = 0$。类似地，我们还可以证明 极限$_{m\longrightarrow\infty} I_2(m) = 0$。因此，在（4.94）中取极限，我们得到收敛性（4.93），从而完成几乎处处收敛性（4.92）的证明。

为了完成等式（4.91）的证明，还需证明$R_m(t,\ s)$的一致可积性。为此，利用杨氏不等式，采用与不等式（4.95）中类似的计算，并结合估计（4.67）和（4.69），我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}'\,|R_m(t,s)|^2 &\leqslant \prod_{i=1}^{3} |h_i|^2_{L^\infty}\, \mathbb{E}'\left(\int_s^t (G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^*\mathbf{v}_1, G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^*\mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\, dr\right)^2 \\
&\leqslant \mathcal{K}(t-s)\mathbb{E}'\int_s^t |G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^*\mathbf{v}_1|^2_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\, |G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^*\mathbf{v}_2|^2_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\, dr \\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}'\int_0^T |G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^*\mathbf{v}_1|^4_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\, dr + \mathcal{K}\mathbb{E}'\int_0^T |G_m(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))^*\mathbf{v}_2|^4_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\, dr \\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}'\int_0^T |g(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))|^4_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}\, dr + \mathcal{K}\mathbb{E}'\int_0^T |\phi(\bar{c}_m(r))|^4_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,L^2)}\, dr \\
&\leqslant \mathcal{K}\mathbb{E}'\sup_{0\leqslant r\leqslant T}(1 + |(\bar{\mathbf{u}}_m(r), \bar{c}_m(r))|^4_{\mathcal{H}}) + \mathcal{K}\mathbb{E}'\sup_{0\leqslant r\leqslant T}|\nabla \bar{c}_m(r))|^4_{L^2} \\
&\leqslant \mathcal{K},
\end{aligned}$$

这证明了 $R_m(t$的$s)$一致可积性。因此，应用维塔利定理，我们得到收敛（4.91）。

考虑到收敛性（4.89）、（4.90）和（4.91），我们可以在等式（4.86）和（4.87）中取极限，从而得到

$$\mathbb{E}\left[(LN(t) - LN(s), \mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\, h_1(\mathbf{u}|_{[0,s]})h_2(c|_{[0,s]})h_3(n|_{[0,s]})\right] = 0,$$

and

$$\mathbb{E}\left[\left((LN(t),\mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,(LN(t),\mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}-(LN(s),\mathbf{v}_1)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\,(LN(s),\mathbf{v}_2)_{H\times L^2(\mathcal{O})}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_0^t (G(\mathbf{u}(s),c(s))^*\mathbf{v}_1, G(\mathbf{u}(s),c(s))^*\mathbf{v}_2)_{\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2}\,ds\right) h_1(\mathbf{u}|_{[0,s]})h_2(c|_{[0,s]})h_3(n|_{[0,s]})\right]=0,$$

这就完成了引理4.17的证明。 □

根据引理 4.17，我们将[12，定理 8.2] 中证明的常用鞅表示定理应用于过程 LN ，并得出存在一个概率空间$(\tilde{\Omega}\ \tilde{\mathcal{F}}、\ \tilde{\mathbb{P}})$，一个滤过 $\tilde{\mathbb{F}}$以及一个 $\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2$-柱状维纳过程 $\bar{\mathrm{W}}_s:=(\bar{W}_s,\ \bar{\beta}_s)$，定义在$\bar{}\ \bar{}\ \bar{}\ \tilde{}\ \tilde{}\ \tilde{}\ \bar{}\ \tilde{}$概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})=(\Omega'\times\Omega\ \mathcal{F}'\otimes\mathcal{F},\mathbb{P}'\otimes\mathbb{P})$上，且适应于滤过 $\mathbb{F}=\mathbb{F}'\otimes\mathbb{F}$，使得

$$LN(t,\omega',\tilde{\omega})=\int_0^t G(\mathbf{u}(s,\omega',\tilde{\omega}),c(s,\omega',\tilde{\omega}))d\bar{\mathbf{W}}_s(\omega',\tilde{\omega}),\qquad t\in[0,T],\qquad(\omega',\tilde{\omega})\in\bar{\Omega},$$

其中

$LN(t,\omega',\tilde{\omega})=LN(t,\omega')$，$(\mathbf{u}(s,\omega',\tilde{\omega}),c(s,\omega',\tilde{\omega}))=(\mathbf{u}(s,\omega'),c(s,\omega'))$，$t\in[0,T]$，$(\omega',\tilde{\omega})\in\bar{}\,\Omega$.

$\bar{}\ \bar{}\ \bar{}\ \bar{}$这意味着，在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$上，对于 $t\in[0,T]$ 以及 $\mathbb{P}$-几乎处处成立。

$$\text{(4.97)}\qquad\begin{cases}L^1N^1(t)=\displaystyle\int_0^t L^1g(\mathbf{u}(s),c(s))d\bar{W}_s,\ \text{ in }\ H,\\ L^2N^2(t)=\displaystyle\int_0^t L^2\phi(c(s))d\bar{\beta}_s,\ \text{ in }\ L^2(\mathcal{O}).\end{cases}$$

由 (2.12) 和 (4.70) 可得估计

$$\bar{\mathbb{E}}\int_0^T|g(\mathbf{u}(s),c(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},V^*)}\,ds\leqslant\mathcal{K}\bar{\mathbb{E}}\int_0^T|g(\mathbf{u}(s),c(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U},H)}\,ds$$
$$\leqslant\mathcal{K}\left(1+\mathbb{E}'\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|(\mathbf{u}(s),c(s))|^2_{\mathcal{H}}\right)<\infty,$$

and

$$\bar{\mathbb{E}}\int_0^T|\phi(c(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,H^{-2})}\,ds\leqslant\mathcal{K}\bar{\mathbb{E}}\int_0^T|\phi(c(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,L^2)}\,ds$$
$$\leqslant\mathcal{K}\left(1+\mathbb{E}'\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|c(s)|^2_{H^1}\right)<\infty,$$

可得 L^1N^1 和 L^2N^2 在 (4.97) 中分别是 H 和 $L^2(\mathcal{O})$ 上的连续鞅。仿照 [6，定理 1 的证明，1]，利用算子的连续性L^1 和 L^2，可得

$$\int_0^t L^1g(\mathbf{u}(s),c(s))d\bar{W}_s=L^1\left(\int_0^t g(\mathbf{u}(s),c(s))d\bar{W}_s\right)\ \text{ and }\ \int_0^t L^2\phi(c(s))d\bar{\beta}_s=L^2\left(\int_0^t\phi(c(s))d\bar{\beta}_s\right),$$

对所有 $t\in[0,\ T]$。结合最后两个不等式以及算子L^1和 L^2的单射性，我们从系统（4.97）推得，对于 $t\in[0,\ T]$,

$$\text{(4.98)}\qquad\begin{cases}N^1(t)=\displaystyle\int_0^t g(\mathbf{u}(s),c(s))d\bar{W}_s,\ \text{ in }\ V^*,\\ N^2(t)=\displaystyle\int_0^t\phi(c(s))d\bar{\beta}_s,\ \text{ in }\ H^{-2}(\mathcal{O}).\end{cases}$$

关于 新的概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$，我们还将随机变量 $n(t)$ 扩展为

$$n(t,\omega',\tilde{\omega})=n(t,\omega'),\quad t\in[0,T],\quad (\omega',\tilde{\omega})\in\bar{\Omega},$$

并推断等式 (4.83) 在 $(\Omega\ \mathcal{F},\bar{\mathbb{P}})$ 中同样成立。利用这一点、 N^1 and N^2 的定义以及系统 (4.98)，我们推导出 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\bar{\mathbb{P}},(\mathbf{u}\ c,n),(\bar{W},\bar{\beta}))$ 满足系统 (3.2)。特别地，对于所有 $t\in[0,T]$ 以及 $\mathbb{P}$-a.s.，有

$$\begin{cases}\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_0-\int_0^t[\eta A_0\mathbf{u}(s)+B_0(\mathbf{u}(s),\mathbf{u}(s))+R_0(n(s),\Phi)]ds+\int_0^t g(\mathbf{u}(s),c(s))d\bar{W}_s,\ \text{in}\ V^*,\\ c(t)=c_0-\int_0^t[\xi A_1c(s)+B_1(\mathbf{u}(s),c(s))-R_1(n(s),c(s))]ds+\gamma\int_0^t\phi(c(s))d\bar{\beta}_s,\ \text{in}\ H^{-2}(\mathcal{O}),\end{cases}$$

这可以写成

$$\begin{cases}\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_0-\int_0^t G_0(s)ds+\int_0^t S_0(s)d\bar{W}_s,\ \text{in}\ V^*,\\ c(t)=c_0-\int_0^t G_1(s)ds+\int_0^t S_1(s)d\bar{\beta}_s,\ \text{in}\ H^{-2}(\mathcal{O}),\end{cases}$$

其中，对于所有 $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}G_0(t)&:=\eta A_0\mathbf{u}(t)+B_0(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))+R_0(n(t),\Phi),\\ G_1(t)&:=\xi A_1c(t)+B_1(\mathbf{u}(t),c(t))-R_1(n(t),c(t)),\\ S_0(t)&:=g(\mathbf{u}(t),c(t)),\quad\text{and}\quad S_1(t):=\gamma\phi(c(t)).\end{aligned}$$

由于恒等式 (4.66)、(4.70) 和 (4.71) 成立，按照估计 (4.57) 的证明思路，我们可以看到 $G_0\in L^2([0,T]\times\bar{\Omega};\ V^*)$, $G_1\in L^2([0,T]\times\bar{\Omega};\ L^2(\mathcal{O}))$,$S_0\in L^2([0,T]\times\bar{\Omega};\ H)$ 以及 $S_1\in L^2([0,T]\times\bar{\Omega};\ H^1(\mathcal{O}))$。因此，由 [23, 定理 3.2] 可知，存在 $\Omega_0\in\mathcal{F}$ 使得 $\mathbb{P}(\Omega_0)=1$，并且对于所有 $\omega\in\Omega_0$,，函数 $\mathbf{u}$ 和 c 分别取值于 H 和 $H^1(\mathcal{O})$，且关于 t 在 H 和 $H^1(\mathcal{O})$ 中连续。由于 $(\mathbf{u}\ c,n)$ 是 $\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}\times\mathcal{Z}_c\times\mathcal{Z}_n$-值随机变量，并且关于滤过 $\mathbb{F}$ 渐进可测，我们推导出 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P},(\mathbf{u}\ c,n),(W,\beta))$ 是系统 (1.2) 的概率弱解。我们回顾一下，不等式 (3.1) 直接由关系 (4.66)、(4.70) 和 (4.71) 得出。

5. 解的性质与能量不等式

本节证明系统（L^∞1.2）的概率强解满足质量守恒性质、非负性以及-范数稳定性。基于这些性质，我们还证明了一个能量不等式，这可能有助于研究系统（1.2）的不变测度；据我们所知，这仍是一个悬而未决的问题。

5.1.非负性与质量守恒。以下定理给出了系统（1.2）强解的总质量守恒性质和非负性。

定理 5.1。设 $\mathfrak{A}=(\Omega\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]},\ \mathbb{P})$ 为一个滤过概率空间，$\mathcal{U}$为一个可分希尔伯特空间，W 为定义在 $\mathcal{U}$ 上的柱状维纳过程，$\mathfrak{A}$，且 $\beta=(\beta^1,\ \beta^2)$ 为定义在 $\mathfrak{A}$ 上的二维标准布朗运动，且与 W独立。如果 $(\mathbf{u}\ c,\ n)$ 是系统（1.2）的概率强解，则对所有 $t\in[0,\ T]$

$$\int_{\mathcal{O}}n(t,x)dx=\int_{\mathcal{O}}n_0(x)dx,\ \ \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{5.1}$$

此外，如果 $c_0 > 0$ 且 $n_0 > 0$，则以下不等式成立 $\mathbb{P}$-a。 s

$$n(t) > 0, \quad and \quad c(t) > 0, \quad for \quad all \quad t \in [0, T]. \tag{5.2}$$

证明。注意，总质量的守恒（5.1）可直接由以下事实得出： $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 而（5.2）的证明与引理 3.6 的证明非常相似。□

下面的定理给出了系统（ L^∞1.2）的概率强解的稳定性。

定理 5.2. 设 $\mathfrak{A} = (\Omega\ \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ 为一个滤过概率空间， $\mathcal{U}$ 为一个可分希尔伯特空间， W 为定义在 $\mathcal{U}$ 上、相对于 $\mathfrak{A}$ 的柱状维纳过程，且 $\beta = (\beta^1, \beta^2)$ 为定义在 $\mathfrak{A}$ 上、与 W 独立的二维标准布朗运动。若 $(\mathbf{u}\ c, n)$ 是滤过概率空间 $\mathfrak{A}$ 上系统 (1.2) 的概率强解，则对所有 $t \in [0, T]$

$$|c(t)|_{L^\infty} \leqslant |c_0|_{L^\infty}, \quad \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{5.3}$$

证明。该证明与推论3.7的证明类似。 □

5.2. 能量不等式。本小节中，我们将推导一个能量不等式。概率强解 $(\mathbf{u}\ n, c)$ 涉及以下李雅普诺夫泛函

$$\mathcal{E}(n, c, \mathbf{u})(t) = \int_{\mathcal{O}} n(t) \ln n(t) dx + \mathcal{K}_f |\nabla c(t)|^2_{L^2} + \frac{8\mathcal{K}_f \mathcal{K}_{GN} |c_0|^2_{L^\infty}}{3\xi\eta} |\mathbf{u}(t)|^2_{L^2} + e^{-1} |\mathcal{O}|, \quad t \in [0, T],$$

其中 $\mathcal{K}_{GN}$ 是由 Gagliardo-Niremberg 不等式（3.7）给出的常数，且 $\mathcal{K}_f$ 定义见（2.2）。

命题 5.3. 假设假设1、假设 2 以及下列不等式

$$\frac{4\mathcal{K}_f \max\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f^2}{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'} \leqslant \delta, \tag{5.4}$$

均成立。设 $\mathfrak{A} = (\Omega\ \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ 为一个滤过概率空间， $\mathcal{U}$ 为一个可分希尔伯特空间， W 为定义在 $\mathcal{U}$ 上、以 $\mathfrak{A}$ 为参数的柱状维纳过程，且 $\beta = (\beta^1, \beta^2)$ 为定义在 $\mathfrak{A}$ 上的二维标准布朗运动，并且与 W 独立。那么，滤过概率空间 $\mathfrak{A}$ 上系统（1.2）的任意概率强解 $(\mathbf{u}\ c, n)$ 对几乎所有 $t \in [0, T]$ 均满足以下熵泛函关系，

$$|c(t)|^2_{L^2} + 2\eta \int_0^t |\nabla c(s)|^2_{L^2} ds + 2\int_0^t (n(s) f(c(s)), c(s)) ds = |c_0|^2_{L^2}, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(n, c, \mathbf{u})(t) + \int_0^t \left[\delta \left| \nabla \sqrt{n(s)} \right|^2_{L^2} + \frac{3\xi\mathcal{K}_f}{2} |\Delta c(s)|^2_{L^2} + \frac{8\mathcal{K}_f \mathcal{K}_{GN} |c_0|^2_{L^\infty}}{3\xi} |\nabla \mathbf{u}(s)|^2_{L^2} + \left| \sqrt{n(s)} \nabla c(s) \right|^2_{L^2} \right] ds \\
&\quad \leqslant \mathcal{E}(n_0, c_0, \mathbf{u}_0) + \mathcal{K}_5 t + \mathcal{K}_6 \int_0^t |\mathbf{u}(s)|^2_{L^2} ds + \gamma^2 \mathcal{K}_f \int_0^t |\nabla \phi(c(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2; L^2)} ds \\
&\quad + \frac{8\mathcal{K}_f \mathcal{K}_{GN} |c_0|^2_{L^\infty}}{3\xi\eta} \int_0^t |g(\mathbf{u}(s), c(s))|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U}; H)} ds + 2\gamma\mathcal{K}_f \int_0^t (\nabla \phi(c(s)), \nabla c(s)) d\beta_s \\
&\quad + \frac{16\mathcal{K}_f \mathcal{K}_{GN} |c_0|^2_{L^\infty}}{3\xi\eta} \int_0^t (g(\mathbf{u}(s), c(s)), \mathbf{u}(s)) dW s,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$\mathbb{P}$-几乎处处，其中 $\mathcal{K}_5$ 和 $\mathcal{K}_6$ 是稍后给出的某些正数常数。

证明。 等式（5.5）可直接由对 $t \mapsto |c(t)|_{L^2}^2$应用 Itô 公式以及以下事实得出：

$$(B_1(\mathbf{u}, c), c) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} \mathbf{u}(x) \cdot \nabla c^2(x) dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} c^2(x) \nabla \cdot \mathbf{u}(x) dx = 0,$$

以及

$$(\phi(c), c) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} \sigma_k(x) \cdot \nabla c(x) c(x) dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} \int_{\mathcal{O}} \sigma_k(x) \cdot \nabla c^2(x) dx = 0$$

and

$$|\phi(c)|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2; L^2)}^2 = |\nabla c|_{L^2}^2 .$$

接下来，我们将方程（2.14）$_3$乘以 $1 + \ln n(s)$，其中 $s \in [0, t]$ 并对所得方程关于 $\mathcal{O}$ 积分，得到

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{O}} n(s,x) \ln n(s,x) dx + \delta \int_{\mathcal{O}} \frac{|\nabla n(s,x)|^2}{n(s,x)} dx = \chi \int_{\mathcal{O}} \nabla n(s,x) \cdot \nabla c(s,x) dx. \tag{5.7}$$

Th根据杨氏不等式和柯西-施瓦茨不等式，我们注意到 at

$$\chi \int_{\mathcal{O}} \nabla n(x) \cdot \nabla c(x) dx \leqslant 2\delta \int_{\mathcal{O}} \left|\nabla \sqrt{n(x)}\right|^2 dx + \frac{\chi^2}{2\delta} \int_{\mathcal{O}} n(x) |\nabla c(x)|^2 dx.$$

将上一个不等式与等式（5.7）结合，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} n(t,x) \ln n(t,x) dx + 2\delta \int_0^t \left|\nabla \sqrt{n(s)}\right|_{L^2}^2 ds \leqslant & \int_{\mathcal{O}} n_0(x) \ln n_0(x) dx \\ & + \frac{\chi^2}{2\delta} \int_0^t \left|\sqrt{n(s)} \nabla c(s)\right|_{L^2}^2 ds. \end{aligned} \tag{5.8}$$

对 $t \mapsto |\nabla c(t)|_{L^2}^2$ 应用伊藤公式，我们得到

$$\begin{aligned} |\nabla c(t)|_{L^2}^2 + 2\xi \int_0^t |\Delta c(s)|_{L^2}^2 ds = & |\nabla c_0|_{L^2}^2 - 2\int_0^t (\nabla B_1(\mathbf{u}(s), c(s)), \nabla c(s)) ds \\ & - 2\int_0^t (\nabla R_2(n(s), c(s)), \nabla c(s)) ds \\ & + \gamma^2 \int_0^t |\nabla \phi(c(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2; L^2)}^2 + 2\gamma \int_0^t (\nabla \phi(c(s)), \nabla c(s)) d\beta_s. \end{aligned} \tag{5.9}$$

由于 假设 1 以及定理 L^∞ 中得到的 -范数稳定性 5.2，我们得到

$$\begin{aligned} (\nabla B_1(\mathbf{u}, c), \nabla c) &\leqslant |\nabla \mathbf{u}|_{L^2} |\nabla c|_{L^4}^2 \\ &\leqslant \frac{3\xi}{16 \mathcal{K}_{GN} |c_0|_{L^\infty}^2} |\nabla c|_{L^4}^4 + \frac{4\mathcal{K}_{GN} |c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi} |\nabla \mathbf{u}|_{L^2}^2 \\ &\leqslant \frac{\xi}{4} |\Delta c|_{L^2}^2 + \frac{4\mathcal{K}_{GN} |c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi} |\nabla \mathbf{u}|_{L^2}^2 + \frac{\xi(4\mathcal{K}_2 + 3)}{16} |c_0|_{L^\infty}^2 . \end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
-(\nabla R_2(n,c),\nabla c(s))ds &\leqslant -\frac{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)}{2}\int_{\mathcal{O}} n(x)\left|\nabla c(x)\right|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'}\int_{\mathcal{O}} f^2(c(x))\frac{|\nabla n(x)|^2}{n(x)}dx \\
&\leqslant -\frac{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)}{2}\left|\sqrt{n}\nabla c\right|_{L^2}^2 + \frac{2\max\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f^2}{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'(c)}\left|\nabla\sqrt{n}\right|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

因此，由式（5.9）可知

$$
\begin{aligned}
&|\nabla c(t)|_{L^2}^2 + \frac{3\xi}{2}\int_0^t |\Delta c(s)|_{L^2}^2\,ds + \min_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'\int_0^t \left|\sqrt{(s)}\nabla c(s)\right|_{L^2}^2 ds \\
&\quad\leqslant |\nabla c_0|_{L^2}^2 + \frac{\xi(4\mathcal{K}_2+3)}{8}|c_0|_{L^\infty}^2\,t + \frac{8\mathcal{K}_{GN}|c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}\int_0^t |\nabla\mathbf{u}(s)|_{L^2}^2\,ds \\
&\qquad + \frac{4\max\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f^2}{\min\limits_{0\leqslant c\leqslant |c_0|_{L^\infty}} f'}\int_0^t \left|\nabla\sqrt{n(s)}\right|_{L^2}^2 ds \\
&\qquad + \gamma^2\int_0^t |\nabla\phi(c(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2\,ds + 2\gamma\int_0^t (\nabla\phi(c(s)),\nabla c(s))d\beta_s.
\end{aligned}
$$

现在，将这个最后的不等式乘以 $\mathcal{K}_f$，将所得结果与不等式（5.8）相加，并使用不等式（5.4）可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}} n(t,x)\ln n(t,x)dx + \mathcal{K}_f|\nabla c(t)|_{L^2}^2 + \frac{3\xi\mathcal{K}_f}{2}\int_0^t |\Delta c(s)|_{L^2}^2\,ds \\
&\qquad + 2\delta\int_0^t \left|\nabla\sqrt{n(s)}\right|_{L^2}^2 ds + \int_0^t \left|\sqrt{n(s)}\nabla c(s)\right|_{L^2}^2 ds \\
&\qquad\leqslant \mathcal{K}_f|\nabla c_0|_{L^2}^2 + \int_{\mathcal{O}} n_0(x)\ln n_0(x)dx + \frac{\mathcal{K}_f\xi(4\mathcal{K}_f\mathcal{K}_2+3)}{8}|c_0|_{L^\infty}^2\,t \\
&\qquad + \frac{8\mathcal{K}_f\mathcal{K}_{GN}|c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}\int_0^t |\nabla\mathbf{u}(s)|_{L^2}^2\,ds + \gamma^2\mathcal{K}_f\int_0^t |\nabla\phi(c(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;L^2)}^2\,ds \\
&\qquad + 2\gamma\mathcal{K}_f\int_0^t (\nabla\phi(c(s)),\nabla c(s))d\beta_s.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

利用等式（5.1）和不等式（3.7），我们注意到

$$
\begin{aligned}
|n|_{L^2} &\leqslant \mathcal{K}_{GN}\left(\left|\sqrt{n}\right|_{L^2}\left|\nabla\sqrt{n}\right|_{L^2} + \left|\sqrt{n}\right|_{L^2}^2\right) \\
&\leqslant \mathcal{K}_{GN}\left(|n_0|_{L^1}^{\frac{1}{2}}\left|\nabla\sqrt{n}\right|_{L^2} + |n_0|_{L^1}\right),
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

结合对 $t \mapsto |\mathbf{u}(t)|_{L^2}^2$ 应用的伊藤公式，可知存在 $\mathcal{K}_3 > 0$ 使得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}(t)|_{L^2}^2 + 2\eta \int_0^t |\nabla \mathbf{u}(s)|_{L^2}^2 \, ds &\leqslant 2 \int_0^t |\nabla \Phi|_{L^\infty} |n(s)|_{L^2} |\mathbf{u}(s)|_{L^2} \, ds \\
&\quad + \int_0^t |g(\mathbf{u}(s), c(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U};H)}^2 \, ds + 2 \int_0^t (g(\mathbf{u}(s), c(s)), \mathbf{u}(s)) dW s \\
&\leqslant |\mathbf{u}_0|_{L^2}^2 + \frac{\delta \eta}{\mathcal{K}_4} \int_0^t \left| \nabla \sqrt{n(s)} \right|_{L^2}^2 ds + \mathcal{K}_3 |\nabla \Phi|_{L^\infty}^2 |n_0|_{L^1} \int_0^t |\mathbf{u}(s)|_{L^2}^2 \, ds \\
&\quad + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|_{L^\infty}^2 |n_0|_{L^1}^2 \int_0^t |\mathbf{u}(s)|_{L^2}^2 \, ds \\
&\quad + \int_0^t |g(\mathbf{u}(s), c(s))|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{U};H)}^2 \, ds + 2 \int_0^t (g(\mathbf{u}(s), c(s)), \mathbf{u}(s)) dW s,
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

其中 $\mathcal{K}_4 = \frac{8\mathcal{K}_f \mathcal{K}_{GN} |c_0|_{L^\infty}^2}{3\xi}$将不等式（5.12）乘以 $\frac{\mathcal{K}_4}{\eta}$，并将所得结果与不等式（5.10相加，我们得到某些正数常数 $\mathcal{K}_5$ 和 $\mathcal{K}_6$，使得不等式（5.6）成立。□

附录A。紧性与紧性判据

在本附录中，我们回顾本文中经常使用的几个紧性与紧性判据。

我们从下面这个基于Dubinsky定理的引理开始。

引理A.1。考虑空间

$$
\tilde{\mathcal{Z}}_0 = L_w^2(0,T;H^1(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T;L^2(\mathcal{O})) \cap \mathcal{C}([0,T];H^{-3}(\mathcal{O})) \tag{A.1}
$$

和 $\mathcal{T}_0$ 是相应拓扑的上确界。则集合 $K_0 \subset \mathcal{Z}_0$ 是 $\mathcal{T}_0$-相对紧的，当且仅当满足以下三个条件

(a) $\sup_{\varphi \in \bar{K}_0} \int_0^T |\varphi(s)|_{H^1}^2 ds < \infty$, *i.e.*, $\bar{K}_0$ *is bounded in* $L^2(0,T;H^1(\mathcal{O}))$,

(b) $\exists \gamma > 0$: $\sup_{\varphi \in \bar{K}_0} |\varphi|_{C^\gamma([0,T];H^{-3})} < \infty$.

证明。注意到以下嵌入是连续的： $H^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^{-3}(\mathcal{O})$，且 $H^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{O})$ 是紧的。由巴拿赫-阿劳格鲁定理，条件 (a) 推出 $\bar{K}_0$ 在 $L_w^2(0,T$ 中是紧的； $H^1(\mathcal{O}))$。此外，(b) 蕴含函数 $\varphi \in \bar{K}_0$ 是等度连续的，即对所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $|t-s| < \delta$，则对于 H^{-3} 中的所有 $\varphi \in K_0$，都有 $|\varphi(t) - \varphi(s)|_{H^{-3}} < \varepsilon$。随后可以应用 Dubinsky 定理（见 [41, 定理 IV.4.1]），因为根据条件 (a)，$\bar{K}_0$ 在 $L^2(0,T$ 中有界； $H^1(\mathcal{O}))$。□

按照与 [8, 引理 3.3]，相同的方法，我们得到以下紧性结果。

引理 A.2. 考虑空间

$$
\tilde{\mathcal{Z}}_n = L_w^2(0,T;H^1(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T;L^2(\mathcal{O})) \cap \mathcal{C}([0,T];H^{-3}(\mathcal{O})) \cap \mathcal{C}([0,T];L_w^2(\mathcal{O})), \tag{A.2}
$$

和 $\mathcal{T}_0$ 是相应拓扑的上确界。若满足以下三个条件，则集合 $K_0 \subset \mathcal{Z}_n$ 是 $\mathcal{T}_0$-相对紧的

(a) $\sup_{\varphi\in\bar{\bar{K}}_0} |\varphi|_{L^\infty(0,T;L^2)} < \infty$,

(b) $\sup_{\varphi\in\bar{\bar{K}}_0} \int_0^T |\varphi(s)|^2_{H^1} ds < \infty$, *i.e.,* $\bar{\bar{K}}_0$ *is bounded in* $L^2(0,T;H^1(\mathcal{O}))$,

(c) $\exists \gamma > 0$: $\sup_{\varphi\in\bar{\bar{K}}_0} |\varphi|_{C^\gamma([0,T];H^{-3})} < \infty$.

由此引理还可得到如下关于具有˜路径的随机过程的紧性判据，其取值于 $\mathcal{Z}_n$ 证明与 [3，引理 5 的证明5]相同。

引理 A.3（ n的紧性判据）。设 $\gamma > 0$ 为给定参数， $(\varphi_n)_n$ 为一列连续的$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-适应的 $H^{-3}(\mathcal{O})$-值过程。设 $\mathcal{L}_m$ 为φ_n在 $\mathcal{Z}_n$上的分布。若对任意 $\varepsilon > 0$，都存在常数 $\mathcal{K}_i$、 $i = 1$、...、...、3，使得

$$\sup_m \mathbb{P}\left(|\varphi_m|_{L^\infty(0,T;L^2)} > K_1\right) \leqslant \varepsilon,$$
$$\sup_m \mathbb{P}\left(|\varphi_m|_{L^2(0,T;H^1)} > K_2\right) \leqslant \varepsilon,$$
$$\sup_m \mathbb{P}\left(|\varphi_m|_{C^\gamma(0,T;H^{-3})} > K_3\right) \leqslant \varepsilon,$$

˜那么，序列 $(\mathcal{L}_m)_m$ 在 $\mathcal{Z}_n$上是紧的。

以下紧致性结果归功于[7, 定理 4.4 和定理 4.5] （另见[28]），其中可以看到证明的详细过程。

引理 A.4。考虑空间

(A.3) $$\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathbf{u}} = L^2_w(0,T;V) \cap L^2(0,T;H) \cap \mathcal{C}([0,T];V^*) \cap \mathcal{C}([0,T];H_w),$$

˜ = ˜，并令 $\mathcal{T}_1$ 为相应拓扑的上确界。那么，若满足以下三个条件，集合 $K_1 \subset \mathcal{Z}_{\mathbf{u}}$ 就是 $\mathcal{T}_1$-相对紧的

(a) $\sup_{\mathbf{v}\in\bar{\bar{K}}_1} \sup_{t\in[0,T]} |\mathbf{v}(t)|_{L^2} < \infty$,

(b) $\sup_{\mathbf{v}\in\bar{\bar{K}}_1} \int_0^T |\nabla\mathbf{v}(s)|^2_{L^2} ds < \infty$, *i.e.,* $\bar{\bar{K}}_2$ *is bounded in* $L^2(0,T;V)$,

(c) $\lim_{\delta\to 0} \sup_{\mathbf{v}\in\bar{\bar{K}}_1} \sup_{s,t\in[0,T],|t-s|\leqslant\delta} |\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(s)|_{V^*} = 0$.

引理 A.5。考虑空间

(A.4) $$\tilde{\mathcal{Z}}_c = L^2_w(0,T;H^2(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T;H^1_w(\mathcal{O})) \cap \mathcal{C}([0,T];L^2(\mathcal{O})) \cap \mathcal{C}([0,T];H^1_w(\mathcal{O})),$$

˜ = ˜和 $\mathcal{T}_2$ 是相应拓扑的上确界。那么，集合 $K_2 \subset \mathcal{Z}_c$ 是 $\mathcal{T}_2$-相对紧的，当且仅当满足以下三个条件

(a) $\sup_{\varphi\in\bar{\bar{K}}_2} \sup_{t\in[0,T]} |\varphi(t)|_{H^1} < \infty$,

(b) $\sup_{\varphi\in\bar{\bar{K}}_2} \int_0^T |\varphi(s)|^2_{H^2} ds < \infty$, *i.e.,* $\bar{\bar{K}}_2$ *is bounded in* $L^2(0,T;H^2(\mathcal{O}))$,

(c) $\lim_{\delta\to 0} \sup_{\varphi\in\bar{\bar{K}}_2} \sup_{s,t\in[0,T],|t-s|\leqslant\delta} |\varphi(t) - \varphi(s)|_{L^2} = 0$.

现在考虑一个滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 其滤过为 $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 并满足通常假设。设 $(\mathbb{M}, d_1)$ 为一个完备可分度量空间，并且 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由 $\mathbb{F}$-适应且取值于 $\mathbb{M}$ 的过程序列。我们回顾 [20] 中的以下定义。

定义 A.6. 序列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在空间 $\mathbb{M}$ 中满足 Aldous 条件，当且仅当

$\forall \epsilon > 0$ $\forall \zeta > 0$ $\exists \delta > 0$，使得对于每个由 $\mathbb{F}$ 个停时组成的序列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $\tau_n \leqslant T$，都有 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{0\leqslant\theta\leqslant\delta} \mathbb{P}\{|y_n(\tau_n+\theta) - y_n(\tau_n)|_{\mathbb{M}} \geqslant \zeta\} \leqslant \epsilon$.

在定义 A.6中，以及全文中，我们约定 y_n 在区间 $[0$之外取零，$T]$。

以下引理的证明见 [28，附录A，引理 6。3]。

引理 A.7. 设 $(X, |.|_X)$ 为可分巴拿赫空间，并设 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列取值于 X 的随机变量。假设对于每个由 $\mathbb{F}$ 个停时组成的序列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $\tau_n \leqslant T$，且对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\theta \geqslant 0$，以下条件均成立

$$\mathbb{E}\,|y_n(\tau_n+\theta) - y_n(\tau_n)|_X^{\alpha} \leqslant C\theta^{\beta}, \tag{A.5}$$

对于某个 α、$\beta > 0$ 以及某个常数 $C > 0$。那么，序列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足空间 X 中的 Aldous 条件。

根据引理A.4 和引理 4.2，在以下推论中，我们将陈述针对部分取值于˜ ˜或取值于 $\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}$ 的随机过程的 $\mathcal{Z}_c$紧性判据。

推论 A.8. 设 $(\mathrm{v}_m)_m$ 是一列连续的 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-适应的 V^*-值过程，满足

(a)：存在一个常数 $\mathcal{K}_1 > 0$，使得

$$\sup_m \mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\mathbf{v}_m(s)|_{L^2}^2 \leqslant \mathcal{K}_1,$$

(b)：存在一个常数 $\mathcal{K}_2 > 0$，使得

$$\sup_m \int_0^T |\nabla \mathbf{v}_m(s)|_{L^2}^2\, ds \leqslant \mathcal{K}_2,$$

(c)： $(\mathrm{v}_m)_m$ 满足 V^* 中的 Aldous 条件。

˜设 $\mathcal{L}_m(\mathrm{v}_m)$ 是 v_m 在 $\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}$上的分布。那么，序列 $(\mathcal{L}_m(\mathrm{v}_m))_m$ 在 $\mathcal{Z}_{\mathbf{u}}$中是紧的。

推论 A.9. $(v_m)_m$ 设 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]}$-适应的连续 $L^2(\mathcal{O})$值过程序列满足

(a)：存在常数 $\mathcal{K}_1 > 0$ 使得

$$\sup_m \mathbb{E} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |v_m(s)|_{H^1}^2 \leqslant \mathcal{K}_1,$$

(b)：存在常数 $\mathcal{K}_2 > 0$ 使得

$$\sup_m \int_0^T |v_m(s)|_{H^2}^2\, ds \leqslant \mathcal{K}_2,$$

(c)： $(v_m)_m$ 在 $L^2(\mathcal{O})$中满足 Aldous 条件。

设 $\mathcal{L}_m(v_{\text{紧的}}$˜ ˜$_m)$ 是 v_m 在 $\mathcal{Z}_c$上的分布。然后，序列 $(\mathcal{L}_m(v_m))_m$ 在 $\mathcal{Z}_c$中是

致谢

我们感谢奥地利科学基金（FWF）提供的经费支持。特别是，Boris Jidjou Moghomye 和 Erika Hausenblas（部分）获得了奥地利科学基金项目 32295 的资助。

参考文献

[1]R. A. Adams，《索伯列夫空间》，Academic Press，纽约-伦敦，1975。[2]H. Brezis，《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》，施普林格，纽约、伦敦，2010。[3]Z. Brz´ezniak 和 B. Ferrario，关于具有非正则乘性噪声的随机纳维-斯托克斯方程的注记，Stoch PDE: Anal Comp.，5（2017）53-80。[4]Z. Brz´ezniak、E. Hausenblas 和 P. A. Razafimandimby，关于乘性噪声驱动的惩罚型向列液晶方程的一些结果：弱解与最大值原理，Stoch PDE: Anal Comp.，7（2019）417-475。[5] Z. Brz´ezniak、E. Hausenblas 和 P. A. Razafimandimby，关于向列液晶的随机 Ericksen-Leslie 方程的注记，Disc. Cont. Dyn. Sys.，24（2019）5785-5802。[6] Z. Brz´ezniak、F. Hornung 和 L. Weis，能量空间中随机非线性 Schr¨odinger 方程的鞅解，Probability Theory and Related Fields，174（2019）1273-1338。[7] Z. Brz´ezniak、U. Manna 和 A. A. Panda，Marcus 规范形式下纯跳噪声驱动的向列液晶方程的鞅解，J. Differential Equations，10（2019）6204-6283。[8] Z. Brz´ezniak 和 E. Motyl，无界二维和三维区域内随机纳维-斯托克斯方程鞅解的存在性。J. Differ. Equ. 254（2013）1627-1685。[9] X. Cao 和 J. Lankeit，涉及矩阵值敏感度的三维趋化纳维–斯托克斯系统的全局经典小初值解，Calc. Var.，55（2016）1-39。[10] M. Chae、K. Kang 和 J. Lee，关于趋化-流体耦合方程光滑解的存在性，Discrete Contin. Dyn. Syst. A，33（2013）2271-2297。[11] F. B. Christiansen 和 T. M. Fenchel，《生物群落中的种群理论》，施普林格出版社，柏林-海德堡，1977。[12]G. Da Prato 和 J. Zabczyk，《无限维随机方程》，《数学及其应用百科全书》第152卷，第2版。剑桥大学出版社，剑桥，2014。[13] L. Denis、A. Matoussi 和 L. Stoica，拟线性随机偏微分方程的最大值原理与比较定理，Electron. J. Probab. 14（2009）500-530。[14] L. Denis 和 A. Matoussi，有界区域上无正则性假设的拟线性随机偏微分方程最大值原理，Stochastic Processes and Their Applications，12（2013）1104-1137。[15] R. Duan、X. Li 和 Z. Xiang，二维趋化-纳维–斯托克斯系统的全局存在性与大时间行为，J. Differential Equations，263（2017）6284-6316。[16] R. Duan、A. Lorz 和 P. Markowich，趋化-流体耦合方程的全局解，Comm. Partial Differential Equations，35（2010）1635-1673。[17] J. Duan 和 W. Wang，随机偏微分方程的有效动力学。Elsevier Insights。爱思唯尔，阿姆斯特丹，2014。[18]R. Duan 和 Z. Xiang，关于具有非线性扩散的趋化斯托克斯模型全局存在性的一则注记，Int. Math. Res. Not. IMRN 2014（2014）1833-1852。[19]M. D. Francesco、A. Lorz 和 P. A. Markowich，具有非线性扩散的游动细菌趋化-流体耦合模型：全局存在性与渐近行为，Discrete and Continuous Dynamical Systems，2010，28（2010）1437-1453。[20]A. Joffe 和 M. M´etivier，半鞅序列的弱收敛及其在多类型分枝过程中的应用，Adv. Appl. Probab.，18（1986）20-65。[21]D. D. Haroske 和 H. Triebel，《广义函数、索伯列夫空间、椭圆方程》。EMS 数学教材。欧洲数学会，苏黎世，2008。[22]O. Kallenberg，《现代概率论基础：概率论及其应用》，施普林格，纽约，1997。[23]N. V. Krylov 和 B. L. Rozovskii，随机演化方程，Journal of Soviet Mathematics，16（1981）1233-1277。

[24]X. Li 和 Y. Xiao，二维凯勒-塞格尔-斯托克斯系统的全局存在性与有界性，《非线性分析：现实世界应用》，37（2017）14-30。[25] J. G. Liu 和 A. Lorz，一个趋化-流体耦合模型，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire，28（2011）643-652。[26]A. Mayorcas 和 M. Tomǎsevi´c，守恒噪声驱动的趋化随机模型的爆破解，$\mathbb{R}^2$，arXiv:2111.02245，2022。[27]N. Mizoguchi、P. Souplet，抛物型凯勒-塞格尔系统爆破解的非退化性，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 31（2014）851-875。[28]E. Motyl，无界三维区域内 Lévy 噪声驱动的随机纳维-斯托克斯方程，Potential Anal.，38（2013）863-912。[29] R. M. Nisbet 和 W. S. C. Gurney，《波动种群建模》，Blackburn出版社，2003。[30] C. Pr´evˆot 和 M. R¨ockner，《随机偏微分方程简明教程》，载于：《数学讲义》，施普林格，柏林，2007。[31]P. E. Protter，《随机积分与微分方程》，《随机建模与应用概率》，第2版，施普林格，柏林，2004。[32]P. A. Razafimandimby 和 M. Sango，修正磁流体力学方程随机系统的存在性与大时间行为，Z. Angew. Math. Phys.，66（2015）2197-2235。[33] L. C. Rogers 和 D. Williams，《扩散过程、马尔可夫过程与鞅》，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，2000。[34]R. Situ，《带跳随机微分方程理论及其应用》。《数学与分析技术及其工程应用》-施普林格，纽约，2005。[35] M. E. Taylor，《偏微分方程 I：基础理论》，第2版，《应用数学科学》，施普林格，2011。[36]Y. Tao 和 M. Winkler，具有任意多孔介质扩散的凯勒-塞格尔-斯托克斯模型的全局存在性与有界性，Discrete Contin. Dyn. Syst. A，32（2012）1901-1914。[37] Y. Tao 和 M. Winkler，具有非线性扩散的三维趋化-斯托克斯系统的局部有界全局解，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 30（2013）157-178。[38]R. Temam，《纳维-斯托克斯方程》。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1979。[39] I. Tuval、L. Cisneros、C. Dombrowski、C. W. Wolgemuth、J. O. Kessler 和 R. E. Goldstein，接触线附近的细菌游动与氧输运，Proc. Natl. Acad. Sci.，102（2005）2277-2282。[40]A. W. van der Vaart 和 J. A. Wellner，《弱收敛与经验过程》，纽约，施普林格，1996。[41]M. J. Vishik 和 A.V. Fursikov，《统计水力学的数学问题》，Kluwer学术出版社，多德雷赫特，1988。[42]M. Winkler，描述流体液滴中细胞游动的趋化-(纳维-)斯托克斯系统的全局大数据解，Comm. Partial Differential Equations，37（2012）319-351。[43] M. Winkler，三维趋化-纳维-斯托克斯系统的全局弱解，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 33（2016）1329-1352。[44] J. Zhai 和 T. Zhang，二维随机趋化-纳维-斯托克斯系统，J. Math. Pures Appl.，138（2020）307-355。[45] L. Zhang 和 B. Liu，三维随机趋化-纳维-斯托克斯系统的全局鞅解，arXiv:2209.06500v1，2022。