arXiv:2301.00655v1 [math.OC] 2 Jan 2023

关于 GS-指数型凸函数的某些刻画

Ehtesham Akhter[a] 和 Musavvir Ali[b,*]

[a], [b] 印度阿里格尔阿里格尔穆斯林大学数学系，阿里格尔-202002,
印度电子邮箱： [b*]musavvir.alig@gmail.com（通讯作者），
ehteshamakhter111@gmail.com。

摘要

本文介绍了 GS-指数型凸函数的概念及其一些代数特征，并引入了一类新的 GS-指数型凸集。此外，我们描述了某些基本的 GS-指数型凸函数，这些函数在一般情形和可微情形下均具有相应特征。我们建立了最优性的充分条件，并在假设 GS-指数型凸性的基础上，为无约束规划以及不等式约束规划给出了证明。

数学学科分类：26A51，26B25，90C26。
关键词： GS指数型凸函数与集合、不等式、最优性条件、优化。

1 引言

鉴于凸性及其推广在研究最优性、解决数学问题中的重要作用，研究人员为此投入了大量精力研究广义凸函数。例如，Hudzik 和 Maligranda（1994年）[7], 研究了两种不同形式的 s-凸性，并发现，当（ s）时，第二种意义下的-凸性基本上比第一种意义下的更为重要。$0 < s < 1$Youness（1999年）[20] 扩展了凸集和凸函数的定义，构造出一类新的集合与函数，称为 E-凸集和 E-凸函数。Yang（2001年）[19] 通过加入一些例证 [20] 完善了 Youness 的论文。

近年来，学术界专家对这些广义凸函数给予了更多关注。X.J. Long 和 J.W. Peng 在 2006 [12] 中研究了半预拟凸函数，将其作为半预拟凸函数的一种推广，并

the b-vex 函数。Y. Syau 等人（2009年）[17] 提出了 E-b-vex 函数族，这是一类新型函数，是 b-vex 函数和E-vex 函数的推广。2011年，T. Emam 研究了一类称为近似 b-invex 函数的新型函数。他还讨论了这类函数的一些性质，并利用这些函数推导出非线性规划的必要最优性条件。在研究一类新型广义子 b-凸函数和子b-凸集时，M.T. Chao 等人（2012年）[13] 给出了无约束和不等式约束子b-凸规划中最优解存在的条件。

本文旨在介绍一类新的广义指数型凸函数，称为 GS-指数型凸函数，并探讨该类函数的若干特征。本文借鉴了多篇研究论文 [2, 5, 6, 8, 10, 14, 15, 16, 18, 21]。此外，我们还为变量无约束和受不等式约束的规划问题，给出了由 GS-指数型凸性导出的充分最优性判据。

2 预备知识

本节将介绍函数的次-b-s-凸性、指数型凸性和 s-凸性的定义。在本文余下部分，令 V 表示实数集 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个非空凸子集。

定义 2.1. [11] 函数 $Q : V \to \mathbb{R}$ 称为关于映射 $G : V \times V \times (0, 1] \to \mathbb{R}$ 的第二意义下的次-b-s-凸函数，若

$$Q(am_1 + (1-a)m_2) \le a^s Q(m_1) + (1-a)^s Q(m_2) + G(m_1, m_2, s)$$

对所有 m_1、$m_2 \in V$、$a \in [0, 1]$ 以及任意固定的 $s \in (0, 1]$，均成立。

定义 2.2. [7] 函数 $Q : V \to \mathbb{R}$ 称为第二意义下的 s-凸函数，若对于所有 m_1、$m_2 \in V$、$a \in [0, 1]$ 以及任意固定的 $s \in (0, 1],$，有

$$Q(am_1 + (1-a)m_2) \le a^s Q(m_1) + (1-a)^s Q(m_2)$$

定义 2.3. [9] 正函数 $Q: V \to \mathbb{R}$ 称为指数型凸函数，若

$$Q(am_1 + (1-a)m_2) \le (e^a - 1)Q(m_1) + (e^{1-a} - 1)Q(m_2)$$

对所有 m_1、$m_2 \in V$、$a \in [0, 1]$，均成立。

如 2.1、2.2 和 2.3 中所定义的概念促使我们探索一种称为 GS-指数型凸函数的新思想。

3 主要结果

定义 3.1。函数 $Q: V \to \mathbb{R}$称为与映射 $G: V \times V \times (0,1] \to \mathbb{R}$相关联的 GS-指数型凸函数，定义在 V 上，若

$$Q(am_1 + (1-a)m_2) \leq (e^a - 1)^s Q(m_1) + (e^{1-a} - 1)^s Q(m_2) + aG(m_1, m_2, s) \quad (3.1)$$

对每个 m_1、$m_2 \in V$、$a \in [0,1]$ 均成立，且对任意固定的 $s \in$（0，1].

注 3.1. 若取 $s = 1$、Q（m_1）为非负，且 G（m_1、m_2、s）$= 0$，则 GS-指数型凸函数退化为指数型凸函数。

定理 3.2. 若 Q_1、$Q_2: V \to \mathbb{R}$ 分别是与映射 G_1、G_2 相关联的 GS-指数型凸函数，则 $Q_1 + Q_2$ 和 βQ_1、（$\beta \geq 0$）也是 GS-指数型凸函数。

推论 3.2.1. 若 $Q_i: V \to \mathbb{R}$、（$i = 1$，2，.....，n）是分别与映射 $G_i: V \times V \times$（0，1] $\to \mathbb{R}$、（$i = 1$，2，....，n）相关联的 GS-指数型凸函数，则 $Q = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Q_i$、$\beta \geq 0$、（$i = 1$，2，...，$n$）是与映射 $G = \sum_{i=1}^{n} \beta_i G_i$ 相关联的 GS-指数型凸函数。

引理 3.3. 对所有的 $a \in [0,1]$ 和 $s \in (0,1],$，不等式 $(e^a - 1)^s \geq a$ 和 $(e^{1-a} - 1)^s \geq 1 - a$ 成立。

命题 3.4. 若每个凸函数都存在一个与之关联的非负映射 G，则它是 GS-指数型凸函数。

定理 3.5. 若 $Q: V \to \mathbb{R}$ 是与映射 G 关联的 GS 指数型凸函数，且 $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 除了是线性函数外还是非负函数，则 $S \circ Q$ 是与映射 $S \circ G$关联的 GS 指数型凸函数。

定义 3.6. 假设 U 是 $\mathbb{R}^{n+1}$的一个非空子集。那么，若对于所有的 (m_1, α_1)、$(m_2, \alpha_2) \in U, m_1, m_2 \in \mathbb{R}^n, a \in [0,1]$ 以及某个固定的 $s \in (0,1],$，满足

$$(am_1 + (1-a)m_2, (e^a - 1)^s \alpha_1 + (e^{1-a} - 1)^s \alpha_2 + aG(m_1, m_2, s)) \in U.$$

现在，我们根据各自的上图集，给出 GS-指数型凸函数Q 的刻画：$V \to \mathbb{R}$

$$E(Q) = \{(m, \alpha) : m \in V, \alpha \in \mathbb{R}, Q(m) \leq \alpha\}.$$

定理 3.7. 函数 $Q: V \to \mathbb{R}$ 是与映射 $G: V \times V \times (0,1] \to \mathbb{R}$相关的 GS-指数型凸函数，当且仅当 $E(Q)$是与映射 G相关的 GS-指数型凸集。

定理 3.8. 假设 $m_2 > 0$ 和 $Q_\beta: [m_1, m_2] \to \mathbb{R}$ 是与映射 G_β 相关的一族数值函数，且每个 G_β 都是 GS-指数型凸函数，并且每个 G_β 都是有界函数；另假设 $Q(m) = \sup_\beta Q_\beta(m)$ 且 $G(m_1, m_2, s) = \sup_\beta G_\beta(m_1, m_2, s)$。若集合（非空） $K = \{r \in [m_1, m_2] | Q(r) < \infty\}$，则 K 是一个区间，并且 Q 在 K上是 GS-指数型凸函数。

定理 3.9. 设 $Q: [m_1, m_2] \to \mathbb{R}$ 是与映射 $G: [m_1, m_2] \times [m_1, m_2] \times (0,1] \to \mathbb{R}$ 相关的 GS-指数型凸函数，并且 $G(m_1, m_2, s)$ 有界，则 Q 在 $[m_1, m_2]$.上也有界。

在本节中， Q 被视为可微函数，且 s、 $a \in (0, 1]$.

定理 3.10. 设 $Q: V \to \mathbb{R}$ 是一个非负的可微 GS-指数型凸函数，且与映射 G相关。则

$$(i)\nabla Q(m_2)^T(m_1 - m_2) < \frac{(e^a - 1)^s}{a} Q(m_1) + \frac{e^{(1-a)s}}{a} Q(m_2) + G(m_1, m_2, s) - \frac{o(a)}{a},$$

$$(ii)\nabla Q(m_2)^T(m_1 - m_2) < \frac{(e^s - 1)^s (Q(m_1) - Q(m_2)) + 3Q(m_2) - o(a)}{a} + G(m_1, m_2, s)$$

定理 3.11. 设 $Q: V \to \mathbb{R}$ 是一个非正的可微 GS-指数型凸函数，且与映射 G相关。则

$$\nabla Q(m_2)^T(m_1 - m_2) \leq \frac{(e^a - 1)^s}{a} [Q(m_1) - Q(m_2)] + G(m_1, m_2, s) - \frac{o(a)}{a}.$$

推论 3.11.1. 假设 $Q: V \to \mathbb{R}$ 是一个正的可微 GS-指数型凸函数，则

$$\begin{aligned} \nabla [Q(m_2) - Q(m_1)]^T (m_1 - m_2) \quad < \quad & \frac{(e^a - 1)^s}{a} [Q(m_1) + Q(m_2)] + \frac{e^{(1-a)s}}{a} [Q(m_1) + Q(m_2)] \\ & + G(m_1, m_2, s) + G(m_2, m_1, s) - 2\frac{o(a)}{a}. \end{aligned}$$

如果 Q 是负值，那么

$$\nabla [Q(m_2) - Q(m_1)]^T (m_1 - m_2) \leq G(m_1, m_2, s) + G(m_2, m_1, s) - 2\frac{o(a)}{a}.$$

随后采用以下方法，将上述结果应用于非线性规划。因此，我们考虑无约束问题(S)。

$$(S) : \min\{Q(m), m \in V\} \tag{3.2}$$

定理 3.12. 设 $Q : V \to \mathbb{R}$ 是与映射 G 相关的正可微 GS-指数型凸函数。此外，假设 $m \in V$ 且不等式

$$\nabla Q(m)^T(n-m) > G(n,m,s) + \frac{3Q(m) - o(a)}{a} \tag{3.3}$$

对每个 $n \in V$， $a \in (0,\ 1)$，且对于任意给定的 $s \in (0,1],,$，则 n 是问题 (3.2) 关于 Q 在 V 上的最优解。

以下 考虑如下无约束规划示例

参考文献

[1] Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S.：关于 s-凸函数的 Simpson 型新不等式及其应用。研究报告集，12(4)（2009年）。[2] Butt, S.I., Kashuri, A., Nasir, J.：通过新型指数型凸性及其应用得到的 Hermite-Hadamard 型不等式。Filomat，35(6)，第1803–1822页（2021）。[3] Du, T., Wang, H., Khan, M.A., Zhang, Y.：考虑分形集上广义 m-凸性的某些积分不等式及其应用。Fractals，27(07)，第1950117页（2019年）。[4] Emam, T.：粗糙 B-不变凸规划问题。Calcolo，48(2)，第173–188页（2011年）。[5] Fakhar, M., Mahyarinia, M.R., Zafarani, J.：广义凸性下带应用于投资组合优化的非光滑鲁棒多目标优化。《欧洲运筹学杂志》，265(1)，第39–48页（2018年）。[6] Fulga, C., Preda, V.：利用 E-预拟凸函数和局部 E-预拟凸函数进行非线性规划。《欧洲运筹学杂志》，192(3)，第737–743页（2009年）。[7] Hudzik, H., Maligranda, L.：关于 s-凸函数的若干评论。Aequationes mathematicae，48(1)，第100–111页（1994年）。[8] Iqbal, A., Hussain, A.：关于强 E-不变凸集和强 E-预拟凸函数的非线性规划问题。RAIRO-Operations Research，56(3)，第1397–1410页（2022年）。

. [9] Kadakal, M., Iscan, I.：指数型凸性及一些相关不等式。 不等式与应用期刊，2020年(1)，第1–9页（2020年）。[10] Kadakal, H.：强凸函数的新不等式。Journal of Function Spaces，（2019年）。[11] Liao, J., Du, T.：关于次 b-s 凸函数的某些刻画。Filomat，30(14)，第3885–3895页（2016年）。[12] Long, X.J., Peng, J.W.：半 B-预不变凸函数。优化理论与应用期刊，131(2)，第301–305页（2006年）。[13] Chao, M.T., Jian J.B.，Liang, D.Y.：次 b 凸函数与次 b 凸规划，《运筹学学报》（中国）16，第1–8页（2012年）。[14] Mishra, S.K., Mohapatra, R.N., Youness, E.A.：半 E–b-凸函数的若干性质。应用数学与计算，217(12)，第5525–5530页（2011年）。.. . [15] Ozcan, S., Iscan, I.：关于 s-凸函数及其应用的一些新 Hermite–Hadamard 型不等式。不等式与应用期刊，2019年(1)，第1–11页（2019年）。[16] Shi, F., Ye, G., Liu, W., Zhao, D.：cr-h 凸性及 cr-h 凸函数的某些不等式。Filomat（2022年）。[17] Syau, Y.R., Jia, L., Lee, E.S.：E-凸函数和 B-vex 函数的推广。计算机与应用数学，58(4)，第711–716页（2009年）。[18] Wang, G., He, Y.：反双曲余弦函数的广义凸性。米什科尔茨数学札记，19(2)，第873–881页（2018年）。[19] Yang, X.M.：关于 E-凸集、E-凸函数和 E-凸规划。优化理论与应用期刊，109(3)，第699页（2001年）。[20] Youness, E.A.：E-凸集、E-凸函数和 E-凸规划。优化理论与应用期刊，102(2)，第439–450页（1999年）。[21] Zhao, Y.X., Wang, S.Y., Coladas Uria, L.：r-凸函数的刻画。优化理论与应用期刊，145(1)，第186–195页（2010年）。