arXiv:2301.00685v1 [math.SP] 2 Jan 2023

关于大亏格随机曲面上线性特征值统计的中心极限定理

´ZEEV RUDNICK 和 IGOR WIGMAN

Abstract. 我们研究紧致双曲曲面的拉普拉斯特征值的光滑线性统计的涨落：对给定亏格的曲面模空间取平均，并考察短能量窗口内的特征值。平均是相对于 Weil-Petersson 测度进行的。我们证明，先取大亏格极限，再令窗口长度趋于零，所得分布趋于高斯分布。最近的研究表明，方差由高斯正交系综（GOE）中的相应量给出；这种高斯涨落也与随机矩阵理论中的结果一致，正如物理学文献针对固定曲面所提出的猜想。

1. 引言

令 X 为亏格 $g \geq 2$的紧致双曲曲面， $\lambda_j = 1/4 + r_j^2$为曲面 X 上的拉普拉斯算子的特征值。我们考察这些特征值在较短区间内的统计性质。为此，我们采用如下光滑线性统计，见 [13]：对于偶测试函数$\check{f}$，其傅里叶变换 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$具有紧支撑，且 $\tau > 0$定义

$$N_{f,L,\tau}(X) := \sum_{j \geq 0} f\left(L\left(r_j - \tau\right)\right) + f\left(L\left(r_j + \tau\right)\right).$$

（当 $\tau = 0$定义变为 $\sum_j \check{f}(Lr_j)$ 时。）

在 [13] 中已证明，在双重极限下，先对亏格为 g 的双曲曲面之模空间 $\mathcal{M}_g$ 按照 Weil-Petersson 测度取平均，取大亏格极限 $g \to \infty$，再取极限 $L \to \infty$，$N_{f,L,\tau}$ 的方差由下式给出

日期：2023年1月3日。本研究得到欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：786758）以及以色列科学基金会（资助编号：1881/20）的支持。1

GOE 方差：记 $\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}$ 为对 $\mathcal{M}_g$ 的平均，则有

$$\lim_{L\to\infty}\left(\lim_{g\to\infty}\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left(\left|N_{L,\tau}-\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}(N_{L,\tau})\right|^2\right)\right)=\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f) \tag{1.1}$$

其中 $\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)=2\int_{-\infty}^{\infty}|x|\widehat{f}(x)^2dx$。这支持了迈克尔·贝里关于混沌系统数方差的猜想 [3, 4] 。

本文考察 $N_{L,\tau}(X)$ 的分布。人们猜想，对于任意固定的双曲曲面，在高能极限下，该分布为高斯分布 [2], ；另见 [12] 关于模曲面的结果。根据随机矩阵理论 [5], 中的类似行为以及黎曼ζ函数零点的情况 [15], 这也是可以预期的。在这里，我们将曲面 X 视为服从模空间 $\mathcal{M}_g$ 上魏尔-彼得森测度的随机曲面，并证明在双重极限下，该分布趋于正态分布：

定理 1.1. 对所有有界连续函数 h，有

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{g\to\infty}\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left(h\left(\frac{N_{L,\tau}-\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}(N_{L,\tau})}{\sqrt{\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)}}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-t^2/2}dt.$$

定理 1.1 证明的第一步，是通过塞尔伯格迹公式将 $N_{L,\tau}$ 表示为闭测地线之和。随后，我们应用 Mirzakhani 和 Petri 的一项近期结果 [10], ：将本原闭测地线的长度视为模空间 $\mathcal{M}_g$ 上的随机点过程时，当 $g\to\infty$，它收敛于具有某种强度的泊松点过程。因此，对于每个 L，我们得到一个随机变量，即泛函 $\mathcal{H}_{L,\tau}$ 在该泊松点过程上的取值；随后我们证明，当 $L\to\infty$ 时，它具有高斯极限分布。

我们对定理 1.1 的证明有一个显著特点：我们避免使用矩方法，而是利用点过程理论的各种性质，直接过渡到极限泊松点过程，在那里，极限 $L\to\infty$ 的计算大为简化。

双曲曲面还有其他随机模型，近期人们也研究了这些模型中的各种谱统计 [7, 14],例如，在随机覆盖模型中，平滑数方差的对应结果近期已由 Fr´ed´eric Naud[11], 获得，他还得到了扭曲拉普拉斯算子的 GUE 统计。随机覆盖模型中的中心极限定理将见于约塔姆·毛兹的理学硕士论文 [9]。

2. Background on point processes

2.1. 一般概述。我们简要介绍点过程的背景知识，并以综述 [6] 作为基本参考。

我们的背景空间是非负实数 $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$。$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的点过程是对$\mathbb{R}_{\geq 0}$中一组点的随机指派，其中每个点都假定是局部有限的。我们假定原点不是这些点之一。我们用 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathbb{R}_{\geq 0}$上所有点过程实现的集合。这些可以视为原子测度

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \delta(x_j) \tag{2.1}$$

其点集 $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots$ 是离散集（因此唯一可能的聚点在无穷远处），且每个点都具有有限重数。特别地，对于这样的 μ，我们有 $\mu(0) = 0$ 和 $\mu\{(0,t]\} < \infty$。

我们在 $\mathcal{N}$上定义一种拓扑：若测度序列 $\mu_n \in \mathcal{N}$ 模糊收敛到另一个测度 $\mu_\infty \in \mathcal{N}$，则称该序列收敛；具体而言，对于 $\mu_\infty\{(0,t]\}$ 的每个连续点，我们都有 $\lim_{n\to\infty} \mu_n\{(0,t]\} = \mu\{(0,t]\}$。我们将此记作 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu_\infty$。等价地，[6, 定理 1]，：对于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的所有紧支撑连续函数 G，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty G d\mu_n = \int_0^\infty G d\mu_\infty. \tag{2.2}$$

在此拓扑下，$\mathcal{N}$ 成为一个可分、完备且可度量化的空间 [6]。

对于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的点过程 N 和有界博雷尔集 $B \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们用 N($B$) 表示 B 中点的数量；这是一个随机变量。测度 $\lambda(B) = \mathbb{E}(\mathrm{N}(B))$ 称为该过程的强度。

一个重要的例子是强度为 λ 的泊松点过程，它是点过程 Pois(λ)，满足对任意博雷尔集 B，随机变量 N(B) 都是强度为 $\lambda(B)$ 的泊松变量；并且对任意一组两两不相交的博雷尔集 B_1、.....、B_k，随机变量 N(B_1)、.....、N(B_k) 相互独立。

给定定义在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的点过程 N_n、N_∞，若对所有 $k \geq 1$ 以及所有满足对任意 i 都有 $\mathrm{N}_\infty(\partial B_i) = 0$ 几乎必然成立的有界博雷尔集 B_i，随机向量 $(\mathrm{N}_n(B_1) \dots, \mathrm{N}_n(B_k))$ 的分布收敛到随机向量 $(\mathrm{N}_\infty(B_1) \dots, \mathrm{N}_\infty(B_k))$ 的分布，则称 N_n 在分布上收敛到 N_∞（记作 $\mathrm{N}_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}_\infty$）。这等价于要求

$$\mathbb{E}(h(\mathbf{N}_n)) \to \mathbb{E}(h(\mathbf{N}_\infty))$$

对所有有界连续函数 $h: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ （连续是指，只要有一个序列 $\nu_n \in \mathcal{N}$ 按模糊拓扑收敛到 ν_∞，就有 $\lim_n h(\nu_n) = h(\nu_\infty)$）。

接下来我们回顾连续映射定理（参见例如 [1, 定理 9.4.2]）。在我们的语境下，该定理指出：若有一列随机变量 $X_n : \Omega_n \to \mathcal{N}$，它们分别定义在各自的概率空间 Ω_n 上，并且依分布收敛于另一个随机变量$X_\infty : \Omega_\infty \to \mathcal{N}$，且 $\mathcal{G}: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 是一个连续映射[1]，那么随机变量 $\mathcal{G}(X_n): \Omega_n \to \mathbb{R}$ 依分布收敛于随机变量 $\mathcal{G}(X_\infty) : \Omega_\infty \to \mathbb{R}$。

2.2. 一个泛函。对我们而言，将弱收敛的泛函形式 (2.2) 扩展为允许取 G 至关重要：它在正实数上连续，但不要求能够连续延拓到整个 $\mathbb{R}_{\geq 0}$，例如允许在 $x = 0$ 处发散。我们定义函数 $\mathcal{G}: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\mathcal{G} : \mu \in \mathcal{N} \mapsto \int_0^\infty G d\mu := \sum_{x \in \mu} G(x).$$

我们声称 $\mathcal{G} : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 是连续的：

引理 2.1. 假设 $G \in C(\mathbb{R}_{>0})$ 在正实数上连续，且支撑于一个有界区间内。那么 $\mathcal{G} : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 是连续映射。

证明。我们需要证明：若 $\mu_\infty, \mu_n \in \mathcal{N}$ 以 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu_\infty$模糊收敛，则 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}(\mu_n) = \mathcal{G}(\mu_\infty)$，也就是说，式 (2.2) 对 G成立。

将表示式 (2.1) 中测度 μ_n, μ_∞ 的原子记为 $x_{n,j}$ ($n = 1, 2 \ldots, \infty$, $j = 1, 2, \ldots$):

$$\mu_n = \sum_{j \geq 1} \delta(x_{n,j}).$$

请注意，弱收敛 $\mu_n \to \mu_\infty$ 意味着点集收敛；这些点集是分布函数的不连续点，参见[6, 定理 25]：设 G 的支撑集包含于 $(0, L)$。若 $x_{\infty,1} \ldots, x_{\infty,J}$ 是 μ_∞ 在 $(0, L)$ 中的原子，使得 $\mathcal{G}(\mu_\infty) = \sum_{j=1}^J G(x_{\infty,j})$，则对所有 $n \gg 1$， μ_n在 $(0, L)$ 中恰有 J个原子 $x_{n,1}, \ldots, x_{n,J}$，且对所有 $j = 1, \ldots, J$，$\lim_{n\to\infty} x_{n,j} = x_{\infty,j}$。因此对于 $n \gg 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}(\mu_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^J G(x_{n,j}) = \sum_{j=1}^J \lim_{n\to\infty} G(x_{n,j}).$$

[1]我们也可以允许 $\mathcal{G}$ 在关于 X_∞分布的测度为零的集合上不连续。

由于 $G(x)$ 在 x_j 处连续，我们有

$$\lim_{n\to\infty} G(x_{n,j}) = G(\lim_n x_{n,j}) = G(x_{\infty,j}),$$

使得

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}(\mu_n) = \sum_{j=1}^{J} G(x_{\infty,j}) = \mathcal{G}(\mu_\infty)$$

正如所声称的。 □

3. Reduction to a Poisson approximation

3.1. 一个展开。利用塞尔伯格迹公式，我们将中心化随机变量 $N_{L,\tau} - \mathbb{E}^{\mathrm{WP}}(N_{L,\tau})$ 展开为关于闭测地线 [13] 的和

$$N_{L,\tau} - \mathbb{E}^{\mathrm{WP}}(N_{L,\tau}) = N^{osc} - \mathbb{E}^{\mathrm{WP}}(N^{osc})$$

with

$$N^{osc}(X) = \sum_{\gamma} H_{L,\tau}\left(\ell_\gamma(X)\right) \tag{3.1}$$

所有本原无向闭测地线 $\{\gamma\}$ 在 X 上的和，其长度为 $\ell_\gamma(X)$，其中

$$H_{L,\tau}(x) = \frac{2x}{L}\sum_{k=1}^{\infty} F(kx), \quad F(x) = \frac{\widehat{f}\left(\frac{x}{L}\right)\cos(x\tau)}{\sinh(x/2)}.$$

对于每个 $x > 0$，定义 $H_{L,\tau}(x)$ 的求和都是有限的，求和范围截至 $k \le L/x$，因此我们得到一个定义在正实数上的连续函数。但当 $x \to 0$ 时，极限未必存在；如果 $f(0) > 0$，那么当 x 很小时，

$$H_{L,\tau}(x) \gg \sum_{k\ll x^{-1/2}} \frac{x}{\sinh(kx)}\widehat{f}(0) \gg \sum_{k\ll x^{-1/2}} \frac{\widehat{f}(0)}{k} \gg \log\frac{1}{x}$$

它会随着 $x \to 0$ 增大而发散。

3.2. 米尔扎哈尼-彼特里定理。对于每个亏格 $g \ge 2$，赋予 Weil-Petersson 概率测度的模空间 $\mathcal{M}_g$ 构成一个概率空间，而长度谱给出一个点过程 $\mathcal{L}_g\colon \mathcal{M}_g \to \mathcal{N}$，它将曲面 $X \in \mathcal{M}_g$ 映射到其（本原的、无向的）长度谱 $\mathcal{L}_g(X) = \{0 < \ell_1 \le \ell_2 \le \dots\}$。对于一个区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$，我们有随机变量

$$N_g([a,b]) : X \mapsto \#\mathcal{L}_g(X) \cap [a,b].$$

此外，令 $\mathrm{Pois}(\nu_{MP})$ 表示定义在 $\mathbb{R}_{\ge 0}$ 上的泊松点过程，其强度为

$$\nu_{MP}(x) = \frac{2\sinh^2(x/2)}{x}dx,$$

也就是说，对每个区间 $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$，计数函数 $N_{MP}(I)$ 是一个强度为 $\nu_{MP}(I) = \int_I \frac{2}{\sinh^2(x/2)}\, dx$ 的泊松随机变量。

Mirzakhani 和 Petri [10] 证明，对于任意一组互不相交的区间 $I_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, k$，随机变量 $(N_g(I_1) \ldots N_g(I_k))$ 的分布收敛于泊松随机变量 $(N_{MP}(I_1) \ldots N_{MP}(I_k))$，换言之，点过程 $\mathcal{L}_g$ 的分布收敛于泊松点过程 Pois(ν_{MP})。

3.3. 随机近似。定义映射 $\mathcal{N} \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}_{L,\tau} = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} H_{L,\tau}(\ell).$$

注意到 $H_{L,\tau}$ 是定义在正实数上的连续函数。因此，由引理 2.1 可知，泛函 $\mathcal{H}_{L,\tau} : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 关于正实数上点过程空间的模糊拓扑是连续的。

结合连续映射定理与米尔扎哈尼-彼特里定理，我们得到随机变量 $N^{osc} = \mathcal{H}_{L,\tau} \circ \mathcal{L}_g : \mathcal{M}_g \to \mathbb{R}$ 的分布收敛于随机变量

$$S_{L,\tau} := \mathcal{H}_{L,\tau} \circ \mathrm{Pois}(\nu_{MP}).$$

我们回顾一下，实值随机变量序列 Y_i 依分布收敛于随机变量 Y，是指累积分布函数（CDF） $F_i(t) = \mathrm{Prob}(Y_i \leq t)$ 在 F_Y 的每个连续点处逐点收敛到 $F_Y(t)$。这等价于要求，对于每个有界连续函数 h，都有

$$\lim_{i \to \infty} \mathbb{E}\left(h\left(Y_i\right)\right) = \mathbb{E}\left(h\left(Y\right)\right).$$

根据 Lévy 连续性定理，这又等价于特征函数逐点收敛：回顾一下，对于随机变量 Y，其特征函数为 $\phi_Y(t) = \mathbb{E}(\exp(itY))$, t real。

因此，当 $g \to \infty$ 时， N^{osc} 的特征函数收敛于 $S_{L,\tau}$ 的特征函数：

推论 3.1。特征函数收敛

$$\lim_{g \to \infty} \mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left(\exp\left(it\left(N^{osc}\right)\right)\right) = \mathbb{E}_{\mathrm{Pois}}\left(\exp\left(it\left(S_{L,\tau}\right)\right)\right).$$

3.4. 泊松近似的应用。接下来我们将证明，当 $L \to \infty$ 时，$S_{L,\,\tau}$ 的特征函数趋于高斯分布的特征函数。根据 Lévy 连续性定理（例如参见 [1, 第10]章），这将证明定理 1.1。

定理 3.2. 对所有 $\tau > 0$,

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{E}_{\mathrm{Pois}}(it\frac{S_{L,\tau} - \mathbb{E}(S_{L,\tau})}{\sqrt{\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)}}) = e^{-t^2/2}.$$

根据其定义，期望值为零。方差正确这一点已在证明 [13, 引理 5.2]的过程中得到验证。为了证明高斯性，我们采用一种组合捷径，即使用累积量。

回顾一下，随机变量 S 的累积量是累积量生成函数 $\log \mathbb{E}(e^{zS})$ 在 $z = 0$处泰勒展开的系数：

$$\log \mathbb{E}(e^{zS}) = \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m(S)\frac{z^m}{m!}.$$

一阶矩是第一累积量，第二累积量就是方差，第三累积量是中心三阶矩。一般来说， n阶中心矩是前 n 个累积量的一个 n次多项式；例如，第四中心矩为 $\kappa_4 + 3\kappa_2^2$。高斯性等价于高阶累积量 $\kappa_m(S)$ 对于 $m \geq 3$均为零。因此，我们要证明：

命题 3.3. 对所有 $m \geq 3$,

$$\lim_{L\to\infty} \kappa_m(S_{L,\tau}) = 0.$$

我们将使用 Campbell 公式 [8]：设 $\mathcal{L}$ 为强度为 ν的泊松点过程，设 $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为可测函数，并定义随机和

$$S = \sum_{\ell\in\mathcal{L}} H(\ell).$$

那么（假设所有相关量均收敛）， S 的期望值和方差为

$$\mathbb{E}(S) = \int_{\mathbb{R}} H(x)d\nu(x), \qquad \mathrm{Var}(S) = \int_{\mathbb{R}} H(x)^2 d\nu(x)$$

矩生成函数为

$$\mathbb{E}(e^{zS}) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} [e^{zH(x)} - 1]d\nu(x)\right). \tag{3.2}$$

使用公式 (3.2) 得

$$\log \mathbb{E}(e^{zS}) = \sum_{m\geq 1} \frac{z^m}{m!} \int_{\mathbb{R}} H(x)^m d\nu(x).$$

因此，命题 3.3 可由以下结论推出：

命题 3.4。对于所有 $m \geq 3$，关于 τ 一致地，

$$\lim_{L\to\infty} \int_{\mathbb{R}} H_{L,\tau}(x)^m d\nu_{MP}(x) = 0. \tag{3.3}$$

证明。我们使用：

引理 3.5。 [13, 引理 6.3] 设 $L > 2$。则对 τ 一致地，i) 对于 $0 < x < 1/2$，有 $|H_{L,\tau}(x)| \ll \frac{1}{L}\log(L/x)$。ii) 对于 $x \geq 1/2$，有 $|H_{L,\tau}(x)| \ll \frac{1}{L} x \exp(-x/2)$。

应用引理 3.5，我们得到

$$\int_0^\infty H_{L,\tau}(x)^m d\nu_{MP}(x) \ll \int_0^{1/2} \frac{1}{L^m} (\log \frac{L}{x})^m \frac{\sinh(x/2)^2}{x} dx + \int_{1/2}^{L} \frac{1}{L^m} x^m e^{-mx/2} \frac{\sinh(x/2)^2}{x} dx.$$

对于 $0 < x < 1/2$，利用 $\sinh(x/2) < 1.1 \cdot x/2 \ll x$ 来估计

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} (\log \frac{L}{x})^m \frac{\sinh(x/2)^2}{x} dx &\ll \int_0^{1/2} x (\log \frac{L}{x})^m dx \\ &= L^2 \int_{2L}^\infty (\log y)^m \frac{dy}{y^3} \\ &\ll_m L^2 \int_{2L}^{L^2} (\log L^2)^m \frac{dy}{y^3} + L^2 \int_{L^2}^\infty y^{1/2} \frac{dy}{y^3} \\ &\ll (\log L)^m + L^{-3} \ll (\log L)^m\end{aligned}$$

因此，第一个积分的贡献为 $O((\log L/L)^m)$。对于第二个积分，对于 $x > 0$，利用 $\sinh(x/2) < e^{x/2}$ 来估计；当 $m \geq 3$ 时，

$$\int_{1/2}^{L} x^m e^{-mx/2} \frac{\sinh(x/2)^2}{x} dx < \int_0^\infty e^{-(\frac{m}{2}-1)x} x^{m-1} dx = \frac{2^m \Gamma(m)}{(m-2)^m}$$

因此，第二个积分贡献为 $O_m(L^{-m})$。由此可得$m \geq 3$

$$\int_0^\infty H_{L,\tau}(x)^m d\nu_{MP}(x) \ll_m L^{-m+o(1)}$$

这就证明了 (3.3)。 □

至此，定理 3.2 的证明完成，定理 1.1 也随之得证。

References

[1] Athreya, Krishna B.; Lahiri, Soumendra N. 测度论与概率论。Springer统计学丛书。Springer，纽约，2006年。[2] Aurich, R., Bolte, and Steiner, F. 量子混沌的普适特征，《物理评论快报》73，第 10 期，1356–1359（1994）。[3] Berry, M. V. 谱刚性的半经典理论。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》400（1985年），第 1819 期，229–251。[4] Berry, M. V. 能级数量的涨落。《经典与量子系统中的随机过程》（阿斯科纳，1985年），47–53，物理学讲义，262，Springer，柏林，1986年。[5] Diaconis, P. and Evans, S. 随机矩阵特征值的线性泛函。《美国数学会汇刊》353（2001），第 7 期，2615–2633。[6] Grandell, J. 点过程与随机测度。《应用概率进展》，第 9 卷，第 3 期（1977），第 502–526 页。[7] Hide, W. and Magee, M. 双曲曲面的近最优谱隙。arXiv:2107.05292 [math.SP[8] Kingman, J. F. C. 泊松过程。牛津概率学研究丛书，3。牛津科学出版物。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1993年。[9] Maoz, Y. 理学硕士论文，特拉维夫大学，2023，在准备中。[10] Mirzakhani, M. and Petri, B. 大亏格随机曲面上的闭测地线长度。《赫尔维提数学评论》94（2019年），第 4 期，869–889。[11] Naud, F. 紧曲面的随机覆盖与光滑线性谱统计。arXiv:2209.07941 [math.SP[12] Rudnick Z. 模群谱的中心极限定理，《亨利·庞加莱年刊》6（2005年），863–883。[13] Rudnick, Z. 大亏格曲面模空间上的高斯正交系综统计。arXiv:2202.06379 [math.SP[14]Shen, Y. and Wu, Y. 随机Belyi曲面的Cheeger常数。arXiv:2204.09853 [math.DG]。《国际数学研究通知》（IMRN），即将发表。[15] Selberg, A. 对黎曼ζ函数理论的贡献。《自然科学档案数学》，48(5):89-155，1946年。

School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv69978, Israel电子邮箱地址：rudnick@tauex.tau.ac.il

Department of Mathematics, King's College London, UK电子邮箱地址：igor.wigman@kcl.ac.uk