用于二元分布序约束位置/尺度参数同时估计的保序回归估计量：统一研究

NARESHGARG 和 NEERAJ MISRA 数学与统计学系
印度理工学院坎普尔分校 坎普尔-208016，北方邦，印度

arXiv:2301.00690v1 [math.ST] 2 Jan 2023

摘要

研究了在已知参数间具有先验顺序关系（即 $\theta_1 \leq \theta_2$）时，一般二元位置/尺度模型的位置/尺度参数 θ_1 和 θ_2 的同时估计问题。我们基于 θ_1 和 θ_2 的最佳位置/尺度等变估计量（BLEEs/BSEEs），在一般权函数下考虑保序回归估计量。令 $\mathcal{D}$ 表示 (θ_1, θ_2) 的相应保序回归估计量类。在加权平方误差损失函数之和下，我们刻画了类 $\mathcal{D}$ 中的可容许估计量，并确定了支配 (θ_1,θ_2) 的 BLEE/BSEE 的估计量。我们的研究统一了文献中针对具有独立边缘分布的特定概率分布所开展的若干研究。我们还给出了 Katz（1963）关于某些估计量在一种损失函数下不可容许性的推广版本，该损失函数是各分量问题的一般损失函数的加权和。此外，我们还开展了模拟研究，以验证本文的研究结果。

关键词： 可容许估计量；最佳线性无偏估计量；最佳平移等变估计量；不可容许估计量；保序回归；位置/尺度模型；混合估计量。

1. 引言

设 $X = (X_1, X_2)$ 为一个随机向量，其联合概率密度函数为 $f_\theta(x_1, x_2)$，$(x_1, x_2) \in \Re^2$，其中 $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta = \Re^2/\Re^2_{++}$ 是未知位置/尺度参数向量，$\Re_{++} = (0, \infty)$，$\Re^2$ 表示二维欧几里得空间。在许多现实情形中，参数 θ_1 和 θ_2 之间的顺序可能是已知的（例如，$\theta_1 \leq \theta_2$），因此，同时估计 θ_1 和 θ_2 可能具有重要意义。例如，在一项发动机效率测量实验中，如果需要估计内燃机（I.C. engine）和外燃机（E.C. engine）的平均效率，则可以假设内燃机的平均效率高于外燃机的平均效率。关于更多现实生活中的例子，可参见 Barlow 等（1972）和 Robertson 等（1988）。

令 $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta_1 \leq \theta_2\}$ 为受限参数空间。对于已知先验满足 $\theta \in \Theta_0$ 的情形，关于 (θ_1,θ_2) 的估计（包括同时估计和分量估计）已有大量文献。早期研究大多着重于寻找受限最大似然估计量（约束条件为 $\theta \in \Theta_0$）并研究其性质（例如，参见 van Eeden（1956a、1956b、1957、1958）和 Brunk（1955））。随后，

关于序约束估计量的决策论估计，出现了大量文献，特别关注保序回归估计量和最大似然估计量的风险性质（参见 Katz（1963）、Cohen 和 Sackrowitz（1970）、Brewster-Zidek（1974）、Lee（1981）、Kumar 和 Sharma（1988、1989、1992）、Kelly（1989）、Kushary 和 Cohen（1989）、Kaur 和 Singh（1991）、Gupta 和 Singh（1992）、Vijayasree 和 Singh（1993）、Hwang 和 Peddada（1994）、Kubokawa 和 Saleh（1994）、Vijayasree 等（1995）、Misra 和 Dhariyal（1995）、Garren（2000）、Misra 等（2002、2004）、Peddada 等（2005）、Chang 和 Shinozaki（2015）以及 Patra 和 Kumar（2017））。对于双变量模型，保序回归估计量也常被称为混合估计量（例如，参见 Katz（1963）、Kumar 和 Sharma（1988）以及 Vijayasree 和 Singh（1991、1993））。上述研究大多围绕具有独立边缘分布的特定分布以及特定损失函数展开，只有少数是一般性研究（例如，参见 Kelly（1989）、Hwang 和 Peddada（1994）以及 Kubokawa 和 Saleh（1994））。有关这一研究领域成果的详细介绍，可参阅 van Eeden（2006）的研究专著。

这类问题的一个自然目标是利用先验信息 $\theta \in \Theta_0$，找到优于无约束情形下自然估计量（例如，最佳位置/尺度估计量；无约束最大似然估计量）的估计量。过去，许多研究者针对特定概率模型和/或特定损失函数探讨了这一问题（例如，Kumar 和 Sharma（1989）、Kushary 和 Cohen（1989），以及 Vijayasree 和 Singh（1991，1993））。

Katz（1963）提出了用于同时估计两个分布的序约束参数的混合估计量。在一类广泛的合理损失函数（包括平方误差损失）下，他证明，无约束情形下与参数排序不一致的自然估计量是不可容许的，并提出了支配估计量。他还进一步研究了一类保持参数排序的混合估计量，并在两个分布满足正态性的条件下得到了可容许且极小极大的估计量。Kumar 和 Sharma（1988）研究了方差已知的两个正态分布的有序均值的同时估计，并刻画了基于 θ_1 和 θ_2 的最佳线性无偏估计量的混合估计量中的可容许估计量。Jin 和 Pal（1991）研究了用于同时估计两个独立指数分布的序约束位置参数的混合估计量，并推导出在混合估计量类中可容许的估计量。对于两个独立指数分布的序约束尺度参数的同时估计，Vijayasree 和 Singh（1991）研究了基于无约束最大似然估计量的保序回归估计量类，并得到了在该估计量类中可容许的估计量。Patra 和 Kumar（2017）在平方误差和损失函数下研究了二元正态分布有序均值的同时估计，并讨论了基于 θ_1 和 θ_2 的最佳线性无偏估计量的保序回归估计量的可容许性。

本文旨在通过考虑一般的双变量位置/尺度模型，统一上述针对特定概率模型开展的一些研究。对于 θ_1和 θ_2 的同时估计，在受限参数空间以及加权平方误差损失函数之和下，我们考虑基于最佳线性无偏估计量/最佳平移等变估计量的保序回归估计量类。我们将刻画该类中的可容许估计量，并得到一类支配最佳线性无偏估计量/最佳平移等变估计量的估计量。本文其余部分安排如下。在第

2 节中，我们介绍一些后文将用到的有用定义和结果。第 3 节给出一项一般性结果，讨论在损失函数为一般损失函数加权和的情况下，某些估计量的不可容许性。第 4 节（第 5 节）讨论序约束位置（尺度）参数的保序回归估计量。

2. 一些有用的定义和结果

我们将讨论对数凹函数和对数凸函数的一些性质（参见 Pecaric 等人（1992年）），因为这些性质与我们的研究有关。我们从对数凹函数和对数凸函数的定义开始。

定义 2.2 设 D 是 $\Re^m$ 的一个凸子集，其中 $\Re^m$ 是 m维欧几里得空间。若对于所有 $x, y \in D$ 以及所有$\alpha \in [0,1]$，函数 $h: D \to [0,\infty)$ 满足以下条件，则称其为对数凹（对数凸）函数：

$$h(\alpha \underline{x} + (1-\alpha)\underline{y}) \geq (\leq)(h(\underline{x}))^{\alpha}(h(\underline{y}))^{1-\alpha}.$$

以下性质众所周知。

性质 P1. 设 $g: \Re \to [0,\infty)$ 是一个概率密度函数，其支撑集的内部为 (a,b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$。那么，$g$ 在 (a,b) 上是对数凹（对数凸）的，当且仅当

$$g(x_1)\, g(x_2-\delta) \geq (\leq) g(x_1-\delta)\, g(x_2), \tag{2.1}$$

对于所有的 $0 < \delta < b-a$，以及对于所有 $a+\delta < x_1 < x_2 < b$（见 Pecaric 等人（1992年））.

在本文中，凡是说函数 $k: A \to \Re$（其中 $A \subseteq \Re$）递增（递减），均指非递减（非递增）。此外，$\Re$ 表示实数轴，$\Re^2_{++} = (0, \infty) \times (0, \infty)$，并且对于任意整数 m (≥ 2)，$\Re^m$ 表示 m 维欧几里得空间。

以下结果引自 Misraand van der Meulen（2003年），将用于证明本文的主要结果。

命题 2.1设 T_1 和 T_2 是随机变量，其分布支撑集分别为 B_1 和 B_2。设 $k_i: B_1 \cup B_2 \to \Re$，$i = 1, 2$，是给定函数，并设 $\beta_i = E[k_i(T_i)]$，$i = 1, 2$。假设 $T_1 \leq_{st} T_2$ $(T_2 \leq_{st} T_1)$。那么

(i) $\beta_1 \leq \beta_2$，若 $k_1(x) \leq k_2(x)$、$\forall\, x \in B_1 \cup B_2$，且 $k_1(x)$ 或 $k_2(x)$ 是 $x \in B_1 \cup B_2$ 的递增（递减）函数；**(ii)** $\beta_2 \leq \beta_1$，若 $k_2(x) \leq k_1(x)$、$\forall\, x \in B_1 \cup B_2$，且 $k_1(x)$ 或 $k_2(x)$ 是 $x \in B_1 \cup B_2$ 的递减（递增）函数。

在下一节中，我们将考虑在相当一般的损失函数下，对序约束位置参数 θ_1 和 θ_2 $(\theta_1 \leq \theta_2)$ 的保序回归估计量。

3. 关于无约束估计量不可容许性的一般结果 r

设 $X = (X_1, X_2)$ 是一个随机向量，其勒贝格概率密度函数（概率密度函数）为 $f_\theta(x_1, x_2)$，$(x_1, x_2) \in \Re^2$，$\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0$，其中 $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0 = \{(x_1, x_2): -\infty < x_1 \leq x_2 < \infty\}$ 是一个未知参数。考虑在损失函数下同时估计 θ_1 和 θ_2

$$L(\underline{\theta}, \underline{a}) = p_1 W(a_1 - \theta_1) + p_2 W(a_2 - \theta_2),\ \underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0,\ \underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathcal{A} = \Re^2, \tag{3.1}$$

其中 $p_1 > 0$ 和 $p_2 > 0$ 是预先指定的常数，并且 $W: \Re \to [0, \infty)$ 满足以下假设:

假设 D1。$W(\cdot)$ 是一个非负的严格凸函数，定义在$\Re$上，且满足 $W(0) = 0$； $W(t)$ 在 $t \in (-\infty, 0)$ 上严格递减，并在$t \in (0, \infty)$ 上严格递增。

在假设 $D1$ 下， $W(\cdot)$ 处处连续，且除至多可数个点外，处处可微。

对于估计量 $\delta = (\delta_1, \delta_2)$，其风险函数定义为

$$R(\underline{\theta}, \underline{\delta}) = E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \underline{\delta})] = p_1 E_{\underline{\theta}}[W_1(\delta_1(\underline{X}) - \theta_1)] + p_2 E_{\underline{\theta}}[W_2(\delta_2(\underline{X}) - \theta_2)], \ \underline{\theta} \in \Theta_0.$$

以下引理推广了 Katz（1963）定理 1 中的结果。

引理 3.1。 假设假设 (D1) 成立。设 $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \Re^2$ 满足$\delta_1 > \delta_2$。对于 $\alpha \in \Re$，定义 $\delta_{1, \alpha} = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2$、$\delta_{2, \alpha} = \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)\delta_1 + (1 - \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))\delta_2$ 和$\delta_\alpha = (\delta_{1, \alpha}, \delta_{2, \alpha})$。那么，

（**a**）对于最大值$\{0, \frac{p_1 - p_2}{p_1}\} < \alpha < 1$,

$$L(\underline{\theta}, \underline{\delta}_\alpha) < L(\underline{\theta}, \underline{\delta}), \ \forall \ \underline{\theta} \in \Theta_0;$$

（**b**）对于最大值$\{0, \frac{p_1 - p_2}{p_1}\} \le \alpha < 1$,

$$L(\underline{\theta}, \underline{\delta}_\alpha) < L(\underline{\theta}, \underline{\delta}), \ \forall \ \underline{\theta} \in \Theta_0, \ \text{such that } \theta_1 < \theta_2;$$

（**c**）对于$\frac{p_1}{p_1 + p_2} \le \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$,

$$L(\underline{\theta}, \underline{\delta}_{\alpha_1}) < L(\underline{\theta}, \underline{\delta}_{\alpha_2}), \ \forall \ \underline{\theta} \in \Theta_0.$$

证明。**（a）和（b）**由于 $W(\cdot)$是一个严格凸函数 $\Re$，我们有

$$\frac{W(x_2) - W(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{W(y_2) - W(y_1)}{y_2 - y_1}, \tag{3.2}$$

给定 $x_1 \le y_1$， $x_2 \le y_2$，其中至少有一个不等式为严格不等式， $x_1 \ne x_2$且 $y_1 \ne y_2$。固定 $\alpha \in [\max\{0, \frac{p_1 - p_2}{p_1}\}, 1)$，并且$\theta \in \Theta_0$。利用 (3.2)，取 $x_1 = \delta_2 - \theta_2$,$x_2 = \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)\delta_1 + (1 - \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))\delta_2 - \theta_2$, $y_1 = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2 - \theta_1$ 以及 $y_2 = \delta_1 - \theta_1$(使得$x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, $x_1 \ne x_2$ 和 $y_1 \ne y_2$)，得到

$$\begin{aligned}
L(\underline{\theta}, \underline{\delta}) - L(\underline{\theta}, \underline{\delta}_\alpha) =& p_1[W(\delta_1 - \theta_1) - W(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2 - \theta_1)] \\
&+ p_2\left[W(\delta_2 - \theta_2) - W\left(\frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)\delta_1 + (1 - \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))\delta_2 - \theta_2\right)\right] \\
=& p_1(1-\alpha)(\delta_1 - \delta_2)\left\{\frac{W(\delta_1 - \theta_1) - W(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2 - \theta_1)}{(1-\alpha)(\delta_1 - \delta_2)}\right. \\
&\left. - \frac{W(\frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)\delta_1 + (1 - \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))\delta_2 - \theta_2) - W(\delta_2 - \theta_2)}{(1-\alpha)\frac{p_1}{p_2}(\delta_1 - \delta_2)}\right\} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

在断言 (a) 和 (b) 的假设下。

（**c**）固定 $\theta \in \Theta_0$ 并考虑

$$Q(\alpha) = L(\underline{\theta}, \underline{\delta}_\alpha) = p_1[W(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2 - \theta_1)] + p_2\left[W\left(\frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)\delta_1 + (1-\frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))\delta_2 - \theta_2\right)\right].$$

为简单起见，我们假设 $W(\cdot)$ 处处可导，因此 $W'(\cdot)$ 严格递增（因为 $W(\cdot)$ 是凸的），于是

$$Q'(\alpha) = p_1(\delta_1 - \delta_2)\Big\{W'(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2 - \theta_1) - W'\left(\frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)\delta_1 + (1-\frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))\delta_2 - \theta_2\right)\Big\} > 0,$$

给定 $\alpha \geq \frac{p_1}{p_1+p_2}$ 和 $\theta_1 \leq \theta_2$，且至少一个不等式为严格不等式；此处 $Q'(\cdot)$ 表示 $Q(\cdot)$ 的导数。

下面的定理是上述引理的直接推论。

定理 3.1. 假设假设 (D1) 成立。令 $\delta(X) = (\delta_1(X), \delta_2(X))$ 为 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ 的一个估计量，使得 $P_\theta[\delta_1(X) > \delta_2(X)] > 0$，其中某个 $\theta \in \Theta_0$ 满足 $\theta_1 < \theta_2$。对于 $\alpha \in \Re$，定义 $\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M)$，其中

$$\delta_{1,\alpha}^M(\underline{X}) = \begin{cases} \delta_1(\underline{X}), & \text{if} \quad \delta_1(\underline{X}) \leq \delta_2(\underline{X}) \\ \alpha\delta_1(\underline{X}) + (1-\alpha)\delta_2(\underline{X}), & \text{if} \quad \delta_1(\underline{X}) > \delta_2(\underline{X}) \end{cases}$$

and

$$\delta_{2,\alpha}^M(\underline{X}) = \begin{cases} \delta_2(\underline{X}), & \text{if} \quad \delta_1(\underline{X}) \leq \delta_2(\underline{X}) \\ \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)\delta_1(\underline{X}) + (1-\frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))\delta_2(\underline{X}), & \text{if} \quad \delta_1(\underline{X}) > \delta_2(\underline{X}) \end{cases}.$$

那么，

(a) 对于 $\max\{0, \frac{p_1-p_2}{p_1}\} \leq \alpha < 1$,

$$R(\underline{\theta}, \underline{\delta}_\alpha^M) \leq R(\underline{\theta}, \underline{\delta}), \ \forall\, \underline{\theta} \in \Theta_0,$$

对于某些 $\theta \in \Theta_0$，上述不等式为严格不等式；

（**b**）对于 $\frac{p_1}{p_1+p_2} \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$,

$$R(\underline{\theta}, \underline{\delta}_{\alpha_1}^M) \leq R(\underline{\theta}, \underline{\delta}_{\alpha_2}^M), \ \forall\, \underline{\theta} \in \Theta_0,$$

对于某些 $\theta \in \Theta_0$，不等式严格成立。

证明。注意，对于任意 $\alpha \in \Re$, $L(\theta, \delta_\alpha^M(X)) = L(\theta, \delta(X)) \ \forall \theta \in \Theta_0$，若 $\delta_1(X) \le \delta_2(X)$。现在利用引理 3.1 即可得到该结果。

设 $\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M)$ $\alpha \in \Re$，如定理 3.1 中所定义。我们称 δ_α^M，$\alpha \in \Re$，为基于 $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ 对 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ 的混合估计量（或保序回归估计量）。以下几点值得注意。

注 3.1 (a) 我们有 $\delta_1^M = (\delta_{1,1}^M, \delta_{2,1}^M) = (\delta_1, \delta_2)$。此外，对于 $\alpha \le 1$，$\delta_{1,\alpha}^M(X) = \min\{\delta_1(X), \alpha\delta_1(X) + (1-\alpha)\delta_2(X)\}$ 和 $\delta_{2,\alpha}^M(X) = \max\{\delta_2(X), \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)\delta_1(X) + (1 - \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))\delta_2(X)\}$。

(b) 对于 $\alpha > \frac{p_1}{p_1+p_2} = \alpha_0$，例如，$P_\theta[\delta_{1,\alpha}^M(X) > \delta_{2,\alpha}^M(X)] = P_\theta[\delta_1(X) > \delta_2(X)]$，$\forall \theta \in \Theta_0$。因此，只要 $P_\theta[\delta_1(X) \ge \delta_2(X)] > 0$ 对某个 $\theta \in \Theta_0$ 成立，则任何估计量 $\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M)$（其中 $\alpha > \frac{p_1}{p_1+p_2}$）在估计 $\theta \in \Theta_0$ 时都是不可容许的。在这种情况下，对于任意 $\alpha > \frac{p_1}{p_1+p_2}$，估计量 $\delta_{\alpha_0}^M = (\delta_{1,\alpha_0}^M, \delta_{2,\alpha_0}^M)$ 优于 $\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M)$。

(c) 假设参数空间为 $\Theta_0 = \{(\theta_1, \theta_2) \in \Re_{++}^2 : \theta_1 \le \theta_2\}$。为估计 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$，考虑损失函数

$$L(\underline{\theta}, \underline{a}) = p_1 W\left(\frac{a_1}{\theta_1} - 1\right) + p_2 W\left(\frac{a_2}{\theta_2} - 1\right), \ \underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0, \ \underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathcal{A} = \Re_{++}^2,$$

其中 $p_1 > 0$ 和 $p_2 > 0$ 是预先指定的常数，且 $W: \Re \to [0, \infty)$ 是严格凸函数，满足 $W(1) = 0$, $W(t)$ 关于 $t \in (-\infty, 1)$ 严格递减，并关于 $t \in (1, \infty)$ 严格递增。于是，只要满足 $\delta_1 > \delta_2 > 0$，引理 3.1 即成立。此外，只要满足 $P_\theta[\delta_i(X) > 0] = 1$，$\forall \theta \in \Theta_0$，$i = 1, 2$。，定理 3.1 也成立。

4. 加权平方误差和损失下位置参数保序回归估计量的可容许性

设 $X = (X_1, X_2)$ 是一个随机向量，其概率密度函数（p.d.f.）属于位置族

$$f_{\underline{\theta}}(x_1, x_2) = f(x_1 - \theta_1, x_2 - \theta_2), \ (x_1, x_2) \in \Re^2, \ \underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0, \tag{4.1}$$

其中 $f(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $\Re^2 = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ 上的指定二元勒贝格概率密度函数，且 $\Theta_0 = \{(\theta_1, \theta_2) : -\infty < \theta_1 \le \theta_2 < \infty\}$。通常，$(X_1, X_2)$ 是基于随机样本的最小充分统计量。为同时估计 θ_1 和 θ_2 $(\theta \in \Theta_0)$，考虑如下加权平方误差和损失函数：

$$L(\underline{\theta}, \underline{a}) = p_1(a_1 - \theta_1)^2 + p_2(a_2 - \theta_2)^2, \ \underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0, \ \underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathcal{A} = \Re^2, \tag{4.2}$$

其中 $p_1 > 0$ 和 $p_2 > 0$ 是预先指定的常数。

在（不受限制的）参数空间 $\Theta = \Re^2$ 下，根据损失函数（4.2）同时估计 θ_1 和 θ_2 的问题，在加法群 $\mathcal{G} = \{g_{c_1,c_2}$ 的变换下是不变的：$(c_1, c_2) \in \Re^2\}$，其中 $g_{c_1,c_2}(x_1, x_2) = (x_1 + c_1, x_2 + c_2)$，6

$(x_1,\ x_2) \in \Re^2$, $(c_1,\ c_2) \in \Re^2$。变换群 $\mathcal{G}$ 在参数空间 Θ 和行动空间 $\mathcal{A}$ 上分别诱导出变换群 $\mathcal{G} = \{g_{c_1,c_2} : (c_1,\ c_2) \in \Re^2\}$ 和 $\tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{g}_{c_1,c_2} : (c_1,\ c_2) \in \Re^2\}$，其中 $g_{c_1,\ c_2}(x_1,\ x_2) = (x_1 + c_1,\ x_2 + c_2)$，$\tilde{g}_{c_1,\ c_2}(a_1,\ a_2) = (a_1 + c_1,\ a_2 + c_2)$，$(x_1,\ x_2) \in \Theta = \Re^2$，$(a_1,\ a_2) \in \mathcal{A} = \Re^2$，$(c_1,\ c_2) \in \Re^2$。在变换群 $\mathcal{G}$ 下，若且唯若估计量 $\delta = (\delta_1,\ \delta_2)$ 在估计 $\theta = (\theta_1,\ \theta_2)$ 时是不变的（位置不变），则

$$\underline{\delta}(\underline{X}) = (\delta_1(\underline{X}), \delta_2(\underline{X})) = (X_1 - c_1, X_2 - c_2), \tag{4.3}$$

对于某些 $\underline{c} = (c_1,\ c_2) \in \Re^2$。$(\theta_1,\ \theta_2)$ 的最佳位置等变估计量（最佳线性无偏估计量）为

$$\underline{\delta}_0(\underline{X}) = (\delta_{1,0}(\underline{X}), \delta_{2,0}(\underline{X})) = (X_1 - c_{0,1}, X_2 - c_{0,2}), \tag{4.4}$$

其中，对于 $Z_i = X_i - \theta_i$, $c_{0,\ i} = E[Z_i],\quad i = 1,\ 2$。

考虑基于最佳线性无偏估计量 $(X_1 - c_{0,\ 1},\ X_2 - c_{0,\ 2})$ 的保序回归估计量 $(\cdot,\ \alpha,\ \delta_2^M,\ \alpha)$ $(\alpha \in \Re)$，其中，对于 $\alpha \in \Re$,

$$\delta_{1,\alpha}^M(\underline{X}) = \begin{cases} X_1 - c_{0,1}, & \text{if} \quad X_1 - c_{0,1} \le X_2 - c_{0,2} \\ \alpha(X_1 - c_{0,1}) + (1-\alpha)(X_2 - c_{0,2}), & \text{if} \quad X_1 - c_{0,1} > X_2 - c_{0,2} \end{cases} \tag{4.5}$$

and

$$\delta_{2,\alpha}^M(\underline{X}) = \begin{cases} X_2 - c_{0,2}, & \text{if} \quad X_1 - c_{0,1} \le X_2 - c_{0,2} \\ \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)(X_1 - c_{0,1}) + (1 - \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))(X_2 - c_{0,2}), & \text{if} \quad X_1 - c_{0,1} > X_2 - c_{0,2} \end{cases}. \tag{4.6}$$

令 $\mathcal{D} = \{\underline{\delta}_\alpha^M = (\delta_{1,\ \alpha}^M(\underline{X}) \delta_{2,\ \alpha}^M(\underline{X})) : \alpha \in \Re\}$ 为基于最佳线性无偏估计量的保序回归估计量（IRE）类。定义 $\lambda = \theta_2 - \theta_1$ $(\lambda \ge 0)$，$Z_1 = X_1 - \theta_1$, $Z_2 = X_2 - \theta_2$, $Z = Z_2 - Z_1$ 和 $Z = (Z_1, Z_2)$。估计量 $\delta_\alpha^M,\ \alpha \in \Re$，的风险函数为

$$\begin{aligned} &R(\underline{\theta},\ \delta_\alpha^M) \\ &= p_1 E_{\underline{\theta}}[(Z_1 - c_{0,1})^2 I_{(c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda,\infty)}(Z)] \\ &\quad + p_1 E_{\underline{\theta}}[((Z_2 + \lambda - c_{0,2}) - \alpha(Z + \lambda + c_{0,1} - c_{0,2}))^2 I_{(-\infty, c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)}(Z)] \\ &\quad + p_2 E_{\underline{\theta}}[(Z_2 - c_{0,2})^2 I_{(c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda,\infty)}(Z)] \\ &\quad + p_2 E_{\underline{\theta}}\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\alpha(Z + \lambda + c_{0,1} - c_{0,2}) - \frac{p_1}{p_2}(Z + \lambda + c_{0,1} - c_{0,2}) + Z_2 - c_{0,2}\right)^2 I_{(-\infty, c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)}(Z)\right], \ \underline{\theta} \in \Theta_0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中，对于任意集合 A，$I_A(\cdot)$ 表示其示性函数。风险函数 $R(\theta,\ \delta_\alpha^M)$ 仅通过 $\lambda = \theta_2 - \theta_1$ (≥ 0) 依赖于 $\underline{\theta} \in \Theta_0$。令 $f_Z(\cdot)$ 表示 Z 的概率密度函数，则 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,\ s+z)\ ds$, $-\infty < z < \infty$。显然，对于任意固定的 $\theta \in \Theta_0$（或 $\lambda \ge 0$），$R(\theta,\ \delta_\alpha^M)$ 在 $\alpha = \alpha_1(\lambda)$ 处达到最小值，其中，对于 $\lambda \ge 0$,

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda) &= \frac{p_1}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \frac{\lambda\, E_{\underline{\theta}}[(Z + \lambda + c_{0,1} - c_{0,2}) I_{(-\infty, c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)}(Z)]}{E_{\underline{\theta}}[(Z + \lambda + c_{0,1} - c_{0,2})^2 I_{(-\infty, c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)}(Z)]} \\ &= \frac{p_1}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \alpha_1^*(\lambda); \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\text{here}\quad \alpha_1^*(\lambda)=\frac{\lambda\, E_{\underline{\theta}}[(Z+\lambda+c_{0,1}-c_{0,2})I_{(-\infty,c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)}(Z)]}{E_{\underline{\theta}}[(Z+\lambda+c_{0,1}-c_{0,2})^2 I_{(-\infty,c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)}(Z)]},\quad \lambda\geq 0.$$

$$=\frac{\lambda\int_{-\infty}^{0} z\, f_Z(z+c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)dz}{\int_{-\infty}^{0} z^2\, f_Z(z+c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)dz},\quad \lambda\geq 0,$$

$$=E_\lambda[k(S_\lambda,\lambda)],\quad \lambda\geq 0, \tag{4.9}$$

其中 $k(z,\ \lambda)=\frac{\lambda}{z}$，$z<0,\ \ \lambda\geq 0$，且 S_λ 是一个具有如下概率密度函数的随机变量。

$$h_\lambda(z)=\begin{cases}\frac{z^2 f_Z(z+c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)}{\int_{-\infty}^{0} s^2 f_Z(s+c_{0,2}-c_{0,1}-\lambda)\,ds}, & \text{if } z<0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases},\quad \lambda\geq 0. \tag{4.10}$$

利用 (2.1)，容易验证，若 $f_Z(\cdot)$ 在 $(-\infty, c_{0,2}-c_{0,1})$ 上对数凹，则$S_{\lambda_1}\leq_{lr} S_{\lambda_2}$，因此，只要 $0\leq\lambda_1<\lambda_2<\infty$，$S_{\lambda_1}\leq_{st} S_{\lambda_2}$ 也成立。
以下引理有助于证明本小节的主要结果。

引理 4.1。假设 $f_Z(\cdot)$ 在 $(-\infty, c_{0,2}-c_{0,1})$ 上对数凹。那么 $\alpha_1^*(\lambda)$（因此 $\alpha_1(\lambda)$）是 $\lambda\in[0,\infty)$ 的递减函数，$\inf_{\lambda\geq 0}\alpha_1(\lambda)=\frac{p_1}{p_1+p_2}+\frac{p_2}{p_1+p_2}\lim_{\lambda\to\infty}\alpha_1^*(\lambda)=\alpha_\infty$，记作，且 $\sup_{\lambda\geq 0}\alpha_1(\lambda)=\frac{p_1}{p_1+p_2}+\frac{p_2}{p_1+p_2}\alpha_1^*(0)=\frac{p_1}{p_1+p_2}$.

证明。令 $0\leq\lambda_1<\lambda_2<\infty$、$T_i=S_{\lambda_i}$、$i=1$、2 和 $m_i(z)=k(z,\ \lambda_i)=\frac{\lambda_i}{z}$、$z<0$、$i=1$、2，其中 S_λ 是一个随机变量，其概率密度函数由 (4.10) 给出。于是 $\alpha_1^*(\lambda_i)=E_{\lambda_i}[m_i(T_i)]$、$i=1$、2。假设 $f_Z(\cdot)$ 在 $(-\infty$、c_0、$_2-c_0$、1) 上是对数凹的，这意味着 $T_1\leq_{lr} T_2$，从而 $T_1\leq_{st} T_2$。此外，$m_1(t)\geq m_2(t)\ \ \forall\, t<0$，且 $m_i(t)$ 是 $t\in(-\infty$、0) 的递减函数。现在，利用命题 2.1 (a)，可得

$$\alpha_1^*(\lambda_1)=E_{\lambda_1}[m_1(T_1)]\geq E_{\lambda_2}[m_2(T_2)]=\alpha_1^*(\lambda_2).$$

□

在下面的定理中，我们约定 $[a_\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]=(a_\infty,\ \frac{p_1}{p_1+p_2}]$，如果 $a_\infty=-\infty$。

定理 4.1。假设 $f_Z(\cdot)$ 在 $(-\infty, c_{0,2}-c_{0,1})$ 上是对数凹的。那么，在类 $\mathcal{D}=\{\delta_\alpha^M=(\delta_{1,\alpha}^M,\delta_{2,\alpha}^M):\ \alpha\in\Re\}$ 中可容许的估计量为 $\{\delta_\alpha^M=(\delta_{1,\alpha}^M,\delta_{2,\alpha}^M):\alpha\in[\alpha_\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$。此外，对于 $-\infty<\alpha_1<\alpha_2\leq\alpha_\infty<\infty$ 或 $\frac{p_1}{p_1+p_2}\leq\alpha_2<\alpha_1<\infty$，估计量 $\delta_{\alpha_2}^M(X)$ 支配估计量 $\delta_{\alpha_1}^M(X)$，对任意 $\theta\in\Theta_0$ 均成立。

证明。设 $\alpha_1(\lambda)$ 如 (4.8) 中所定义，因此，对于任意固定的 $\theta\in\Theta_0$（或固定的 $\lambda\geq 0$），由 (4.7) 给出的风险函数 $R(\theta,\delta_\alpha^M)$ 在 $\alpha=\alpha_1(\lambda)$ 处取得唯一最小值。由于对任意 $\lambda\geq 0$，$\alpha_1(\lambda)$ 是 $\lambda\in[0,\infty)$ 的连续函数，故随着 λ 在 $[0,\infty)$ 上变化，它会取遍 $\Re$ 中介于 $\inf_{\lambda\geq 0}\alpha_1(\lambda)=\alpha_\infty$ 与 $\sup_{\lambda\geq 0}\alpha_1(\lambda)=\frac{p_1}{p_1+p_2}$ 之间的所有值。由此可知，每个 $\alpha\in(\alpha_\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]$ 都会在某个 $\theta\in\Theta_0$（或某个 $\lambda\geq 0$）处使风险函数 $R(\theta,\delta_\alpha^M)$ 取得唯一最小值。这证明，估计量 $\{\delta_\alpha^M:\ \alpha\in(\alpha_\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$ 在估计量类 $\mathcal{D}$ 中是可容许的。当 $\alpha_\infty>-\infty$ 时，估计量 $\delta_{\alpha_\infty}^M$ 在保序回归估计量类 $\mathcal{D}$ 中的可容许性可用反证法证明。此外还需注意，对任意固定的 $\lambda\geq 0$，$R(\theta,\delta_\alpha^M)$ 关于 α 在 $(-\infty,\alpha_1(\lambda))$ 上严格递减，而关于 α 在 $(\alpha_1(\lambda)\ \infty)$ 上严格递增。由于 $\alpha_1(\lambda)\in[\alpha_\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]\ \forall\,\lambda\geq 0$，上述讨论意味着，对于任意 $\theta\in\Theta_0$（或任意 $\lambda\geq 0$），$R(\theta,\delta_\alpha^M)$ 是一个递减

函数，关于 α 在 $(-\infty, \alpha_\infty]$ （若 $\alpha_\infty > -\infty$）上递减，并且关于 α 在 $[\frac{p_1}{p_1+p_2}, \infty$ 上递增。这就证明了第二个断言。□

注 4.1 注意，$\delta_0(X) = (\delta_{1,0}(X), \delta_{2,0}(X)) = (X_1 - c_{0,1}, X_2 - c_{0,2})$ 是 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ 的最佳线性无偏估计量。如果对于某个 $\theta \in \Theta_0$，$P_\theta[\delta_{1,0}(X) > \delta_{2,0}(X)] = P_\theta[X_1 - c_{0,1} > X_2 - c_{0,2}] > 0$，那么混合估计量 $\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M)$ 优于 $\delta_0(X)$，前提是 $\max\{0, \frac{p_1-p_2}{p_1}\} \le \alpha < 1$。

4.1. 应用。

现在我们举例说明第 3 节和第 4 节结果的一些应用。

例 4.1.1. 设 $X = (X_1, X_2) \sim N_2(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，其中 $-\infty < \theta_1 \le \theta_2 < \infty$、$\theta_1$ 和 θ_2 未知，而 $\sigma_i > 0$、$i = 1$、2 和 $\rho \in (-1, 1)$ 已知。考虑在平方误差和损失函数下估计 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$，该损失函数由式 (4.2) 给出。这里，$(X_1, X_2)$ 是 (θ_1, θ_2) 的最佳线性无偏估计量，即 $c_{0,i} = 0$，$i = 1$, 2。此外，我们有 $Z_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2$，以及 $Z \sim N(0, \tau^2)$，其中 $\tau^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$。此外，$f_Z(z)$ 在 $\Re$ 上是对数凹的。对于 $c_{0,1} = c_{0,2} = 0$，我们有

$$\sup_{\lambda \ge 0} \alpha_1(\lambda) = \frac{p_1}{p_1 + p_2}.$$

可以验证

$$\alpha_\infty = \frac{p_1}{p_1+p_2} + \frac{p_2}{p_1+p_2} \lim_{\lambda\to\infty} (\alpha_1^*(\lambda)) = \frac{p_1}{p_1+p_2} + \frac{p_2}{p_1+p_2} \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\int_{-\infty}^0 \lambda z \frac{1}{\tau}\phi\left(\frac{z-\lambda}{\tau}\right) dz}{\int_{-\infty}^0 z^2 \frac{1}{\tau}\phi\left(\frac{z-\lambda}{\tau}\right) dz} = -\infty.$$

利用定理 4.1，可知估计量 $\{\delta_\alpha^M : \alpha \in (-\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$ 在由 $\mathcal{D} = \{\delta_\alpha^M : -\infty < \alpha < \infty\}$ （如（4.5）和（4.6）所定义）的保序回归估计量类中是可容许的，该类估计量用于估计 (θ_1, θ_2)。此外，估计量 $\{\delta_\alpha^M : \alpha > \frac{p_1}{p_1+p_2}\}$ 是不可容许的，并且对于 $\frac{p_1}{p_1+p_2} \le \alpha_2 < \alpha_1$，估计量 $\delta_{\alpha_2}^M$ 支配估计量 $\delta_{\alpha_1}^M$。另外，利用定理 3.1，我们得出估计量 $\{\delta_\alpha^M : \max\{0, \frac{p_1-p_2}{p_1}\} \le \alpha < 1\}$ 支配用于同时估计 (θ_1, θ_2) 的最佳线性无偏估计量 (X_1, X_2)。对于特殊情形 $p_1 = p_2 = 1$，上述可容许估计量类也由 Patra 和 Kumar（2017）得到。更早之前，Kumar 和 Sharma（1988）也针对 $\rho = 0$ 和 $p_1 = p_2$ 得到了类似结果。对于 $\alpha_0 = \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}, p_1 = \alpha_0, p_2 = 1 - \alpha_0$ 和 $\rho < \min\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\}$，$\theta$ 的受限最大似然估计量（MLE）为 $\delta_{\alpha_0}^M$ （见 Patra 和 Kumar（2017）），并且它在 $\mathcal{D}$ 的保序回归估计量类中是可容许的。在此情形下，受限最大似然估计与 Hwang 和 Peddada（1994）估计量以及 Tan 和 Peddada（2000）估计量相同。在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ （设为）和 $p_1 = p_2 = 1$下，θ的受限最大似然估计量为 $\delta_{\nu_0}^M$，其中 $\nu_0 = \frac{1}{2}$，并且它在 $\mathcal{D}$ 的 (θ) 保序回归估计量类中是可容许的。对于 $\rho = 0$，Kumar 和 Sharma（1988）也讨论了这一结果。一般而言（即 $p_1 \ne p_2$），(θ_1, θ_2) 的受限最大似然估计量为

$$\underline{\delta}_R(\underline{X}) = \begin{cases} (X_1, X_2), & \text{if } X_1 \le X_2 \\ (\alpha_0 X_1 + (1-\alpha_0)X_2, \alpha_0 X_1 + (1-\alpha_0)X_2), & \text{if } X_1 > X_2 \end{cases}, \tag{4.11}$$

Hwang 和 Peddada（1994）估计量为

$$\underline{\delta}_{HP}(\underline{X}) = (\min\{X_1, \alpha_0 X_1 + (1-\alpha_0)X_2\}, \max\{X_1, \alpha_0 X_1 + (1-\alpha_0)X_2\}) \tag{4.12}$$

而 Tan 和 Peddada（2000）估计量为

$$\underline{\delta}_{PDT}(\underline{X}) = (\min\{X_1, \alpha_0^+ X_1 + (1-\alpha_0^+)X_2\}, \max\{X_1, \alpha_0^+ X_1 + (1-\alpha_0^+)X_2\}) \tag{4.13}$$

其中 $\alpha_0 = \frac{\sigma_2}{(\sigma_2 - \rho\sigma_1)\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$ 且 $\alpha_0^+ =$ 最大$\{0, \alpha_0\}$。显然，$\delta_R(X)$ $\delta_{HP}(X)$ $\delta_{PDT}(X) \notin \mathcal{D}$，除非 $\rho <$ 最小$\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\}$、$p_1 = \alpha_0$ 和 $p_2 = 1 - \alpha_0$。

例 4.1.2. 设 X_1 和 X_2 独立同分布，且X_i 服从位置参数 θ_i 未知、尺度参数 $\sigma_i > 0$已知的指数分布，$i = 1$、2，并且已知先验信息 $-\infty < \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$。则，$f(z_1, z_2) = f_1(z_1)f_2(z_2)$ $z = (z_1, z_2) \in \Re^2$，其中，对于已知正常数 $\sigma_1 > 0$和$\sigma_2 > 0$，若 $z > 0$ $i = 1$、2，则 $f_i(z) = \frac{1}{\sigma_i} e^{-\frac{z}{\sigma_i}}$。这里 $c_0, _i = \sigma_i$、$i = 1$、2，且 (θ_1, θ_2) 的最佳线性无偏估计量为 $(X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$。此外，

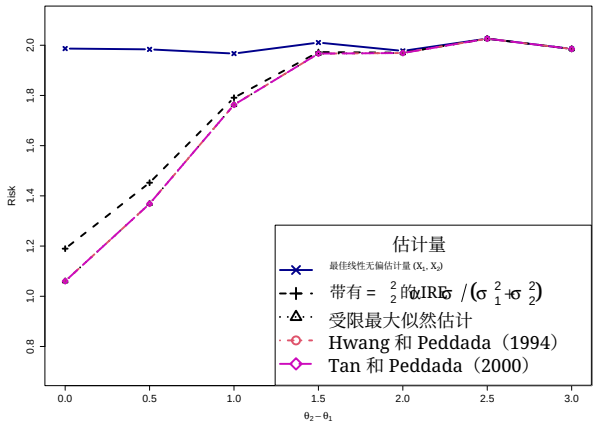
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} e^{\frac{z}{\sigma_1}}, & \text{if } z < 0 \\ \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} e^{-\frac{z}{\sigma_2}}, & \text{if } z \geq 0 \end{cases}$$

在 $\Re$ 上是对数凹的。这里，容易验证 $\alpha_\infty = \frac{p_1}{p_1+p_2} + \frac{p_2}{p_1+p_2} \lim_{\lambda \to \infty} \alpha_1^*(\lambda) = -\infty$。利用定理 4.1，我们得出结论：估计量 $\{\delta_\alpha^M : \alpha \in (-\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$ 在保序回归估计量类 $\{\delta_\alpha^M : -\infty < \alpha < \infty\}$ 中对 (θ_1, θ_2) 是可容许的。此外，对于 $\frac{p_1}{p_1+p_2} \leq \alpha_2 < \alpha_1 < \infty$，保序回归估计量 $\delta_{\alpha_2}^M$ 支配估计量 $\delta_{\alpha_1}^M$。特别地，最佳线性无偏估计量 $\delta_0(X) = (X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$ 在估计 (θ_1, θ_2) 时不可容许，并且被保序回归估计量 $\delta_\alpha^M(X) = (\delta_{1,\alpha}^M(X) \delta_{2,\alpha}^M(X))$ $\frac{p_1}{p_1+p_2} \leq \alpha < 1$ 支配。此外，利用定理 3.1，对于 $\max\{0, \frac{p_1 - p_2}{p_1}\} \leq \alpha < 1$，保序回归估计量 δ_α^M 支配最佳线性无偏估计量 $(X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$。

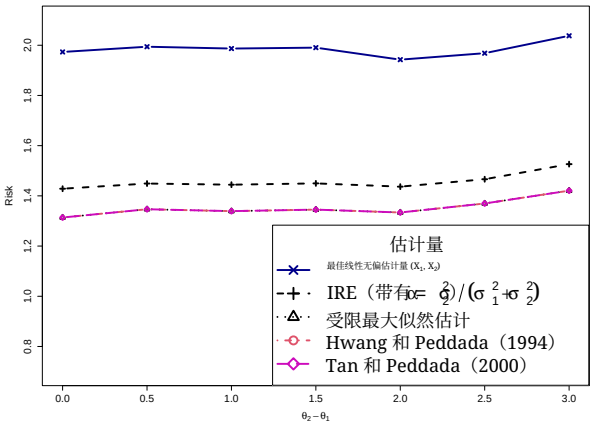
4.2. 位置参数(θ_1, θ_2)估计的模拟研究。

在例 4.1.1 中，我们考虑了对具有序约束位置参数（即 $\theta_1 \leq \theta_2$）、已知方差和已知相关系数（$\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ 和 $\rho \in (-1, 1)$）的二元正态分布的位置参数 (θ_1, θ_2) 进行估计。我们证明，保序回归估计量类 (IRE) $\{\delta_\alpha^M : \alpha \in (-\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$在类 $\mathcal{D} = \{\delta_\alpha^M : -\infty < \alpha < \infty\}$ 中是可容许的，并且类 $\{\delta_\alpha^M : \max\{0, \frac{p_1 - p_2}{p_1}\} \leq \alpha < 1\}$ 中的估计量支配最佳线性无偏估计量 $\delta_0(X) = (X_1, X_2)$。为进一步评估各种估计量在损失函数 $L(\theta, a) = \frac{1}{\sigma_1^2}(a_1 - \theta_1)^2 + \frac{1}{\sigma_2^2}(a_2 - \theta_2)^2$, $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0$, $a = (a_1, a_2) \in \Re^2$（即 $p_1 = \frac{1}{\sigma_1^2}$和 $p_2 = \frac{1}{\sigma_2^2}$）下的表现，本节通过蒙特卡洛模拟，对最佳线性无偏估计量 (X_1, X_2)、保序回归估计量 (IRE) $\delta_\alpha^M(X) = (\delta_{1,\alpha}^M(X) \delta_{2,\alpha}^M(X))$（其中 $\alpha = \frac{p_1}{p_1+p_2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$）、受限最大似然估计量$\delta_R(X)$（定义见 (4.11)）、Hwang 和 Peddada（1994）估计量 $\delta_{HP}(X)$（定义见 (4.12)）以及 Tan 和 Peddada（2000）估计量 $\delta_{PDT}(X)$（定义见 (4.13)）的风险表现进行数值比较。注意，当 $\rho <$ min$\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\}$ 时，受限最大似然估计量 $\delta_R(X)$、Hwang 和 Peddada（1994）估计量 $\delta_{HP}(X)$ 与 Tan 和 Peddada（2000）估计量 $\delta_{PDT}(X)$ 相同。

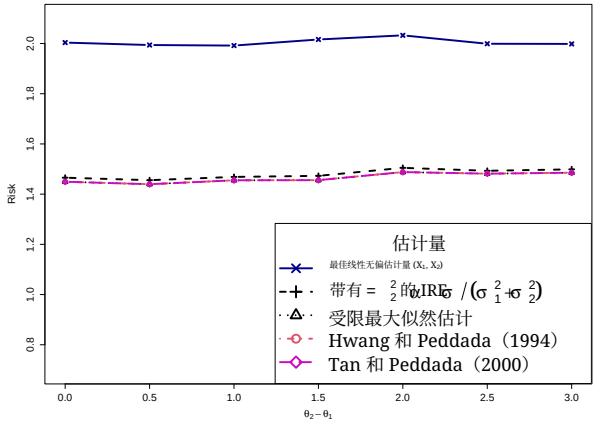
在模拟中，我们从相关的二元分布中各生成了 50000 个大小为 1 的样本，并计算了各种估计量的模拟风险。



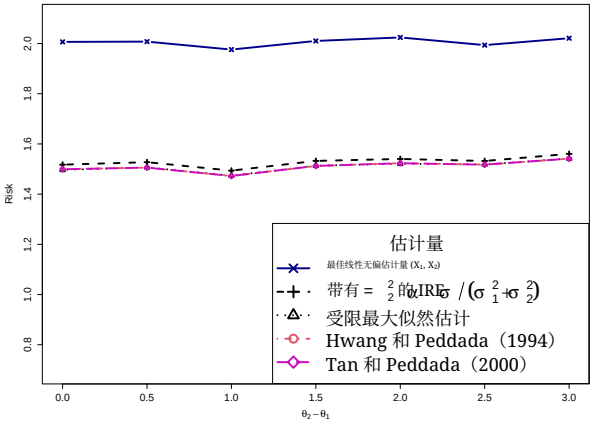
(A) $\sigma_1 = 0.2$、 $\sigma_2 = 0.5$ 和 $\rho = -0.9$。



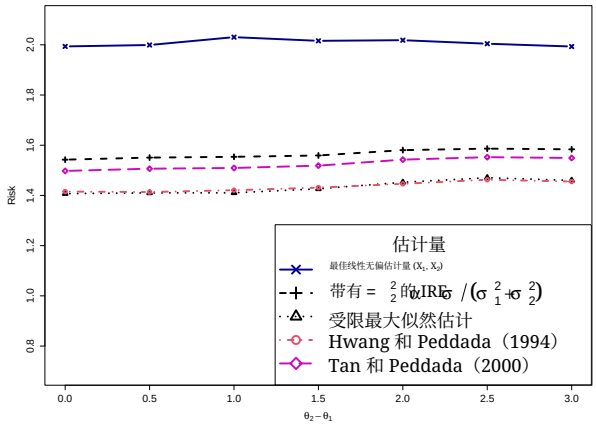
(B) $\sigma_1 = 10$、 $\sigma_2 = 1$ 和 $\rho = -0.5$。



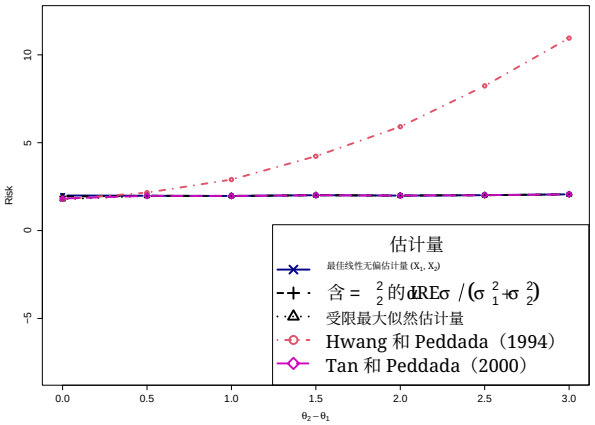
(C) $\sigma_1 = 2$、 $\sigma_2 = 10$ 和 $\rho = -0.2$。



(D) $\sigma_1 = 1$、 $\sigma_2 = 10$ 和 $\rho = 0.2$。



(E) $\sigma_1 = 10$、 $\sigma_2 = 1$ 和 $\rho = 0.5$。



(F) $\sigma_1 = 0.5$、 $\sigma_2 = 0.4$ 和 $\rho = 0.9$。

FIGURE 1. 最佳线性无偏估计量（X_1、 X_2）、具有 $\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ 的 IRE 以及受限最大似然估计量的风险图。

图1绘出了各种估计量风险的模拟值。由图1可明显看出以下结论:

(i) 带有 $\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ 的 IRE 和受限最大似然估计量始终支配最佳线性无偏估计量（X_1, X_2）。

(ii) 受限最大似然估计量的表现始终优于其他估计量。

在平方误差和损失函数 (4.2) 下，我们在例 4.1.2 中考察了两个独立指数分布的位置参数（θ_1, θ_2）的估计，其中序约束位置参数未知（即 $\theta_1 \le \theta_2$），尺度参数（$\sigma_1 > 0$ 和 $\sigma_2 > 0$）已知。我们证明，保序回归估计量类（IRE）$\{\delta_\alpha^M : \alpha \in (-\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$ 在类 $\mathcal{D} = \{\delta_\alpha^M : -\infty < \alpha < \infty\}$ 中可容许。此外，估计量类 $\{\delta_\alpha^M : \max\{0, \frac{p_1-p_2}{p_1}\} \le \alpha < 1\}$ 支配最佳线性无偏估计量 $\delta_0(X) = (X_1-\sigma_1, X_2-\sigma_2)$。为进一步评估在损失函数 (4.2) 且 $p_1 = p_2 = 1$ 条件下各种估计量的表现，本节通过蒙特卡洛模拟，对保序回归估计量（IRE）$\delta_1^M(X) = (\delta_1^M{}_{,1}(X)\delta_2^M{}_{,1}(X)) = (X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$、$\delta_{0.75}^M(X) = (\delta_1^M{}_{,0.75}(X)\delta_2^M{}_{,0.75}(X))$、$\delta_{0.5}^M(X) = (\delta_1^M{}_{,0.5}(X)\delta_2^M{}_{,0.5}(X))$、$\delta_0^M(X) = (\delta_1^M{}_{,0}(X)\delta_2^M{}_{,0}(X))$ 以及受限最大似然估计量 $\delta_R(X) = (\min\{X_1, X_2\}, X_2)$ 的风险表现进行数值比较；这里

$$\delta_{1,\alpha}^M(X) = \begin{cases} X_1 - \sigma_1, & \text{if } X_1 - \sigma_1 \le X_2 - \sigma_2 \\ \alpha(X_1 - \sigma_1) + (1-\alpha)(X_2 - \sigma_2), & \text{if } X_1 - \sigma_1 > X_2 - \sigma_2 \end{cases},$$

$$\text{and } \delta_{2,\alpha}^M(X) = \begin{cases} X_2 - \sigma_2, & \text{if } X_1 - \sigma_1 \le X_2 - \sigma_2 \\ (1-\alpha)(X_1 - \sigma_1) + \alpha(X_2 - \sigma_2), & \text{if } X_1 - \sigma_1 > X_2 - \sigma_2 \end{cases}.$$

对于模拟，我们从相关指数分布中各生成了 50000 个样本，每个样本的样本量为 1，并计算估计量 $\delta_1^M(X) = (X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$,$\delta_{0.75}^M(X)$, $\delta_{0.5}^M(X)$, $\delta_0(X)$ 和 $\delta_R(X)$ 的模拟风险。

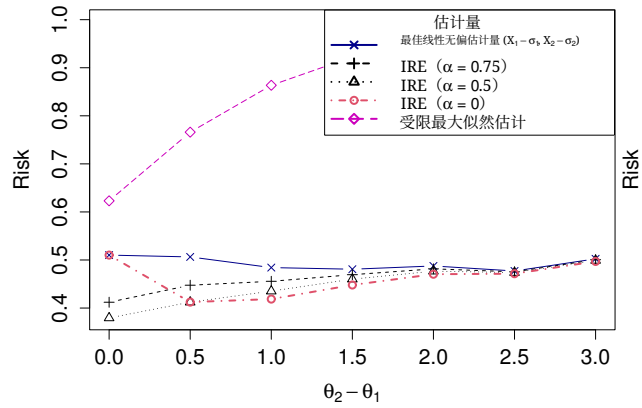
各种估计量的模拟风险值绘于图2中。从图2可以明显看出以下几点:

(i) IRE $\delta_{0.75}^M(X)$、$\delta_{0.5}^M(X)$、$\delta_{0.25}^M(X)$ 和 $\delta_0^M(X)$ 的风险函数值在任何情况下都不大于最佳线性无偏估计量 $(X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$ 的风险函数值，这与例 4.1.2 的理论结果一致。

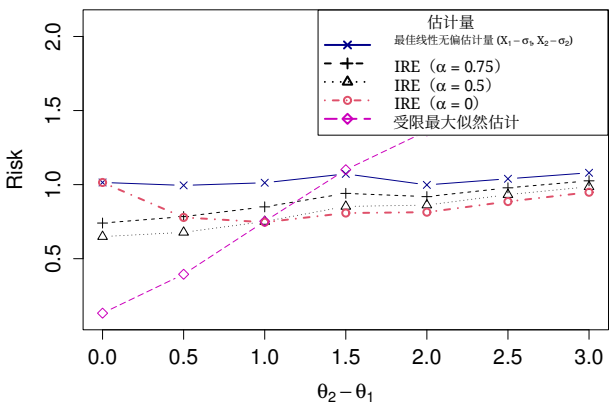
(ii) 从图2可以看出，IRE $\delta_{0.5}^M(X)$、$\delta_0^M(X)$ 和 $\delta_R^M(X)$ 之间不可比较，而 IRE $\delta_1^M(X)$ 和 $\delta_{0.75}^M(X)$ 不可容许。这与例 4.1.2 的理论结果一致。

(iii) 当 $\sigma_1 >> \sigma_2$ 时，对于较小和中等的 $\theta_2 - \theta_1$ 值，受限最大似然估计量优于其他估计量。

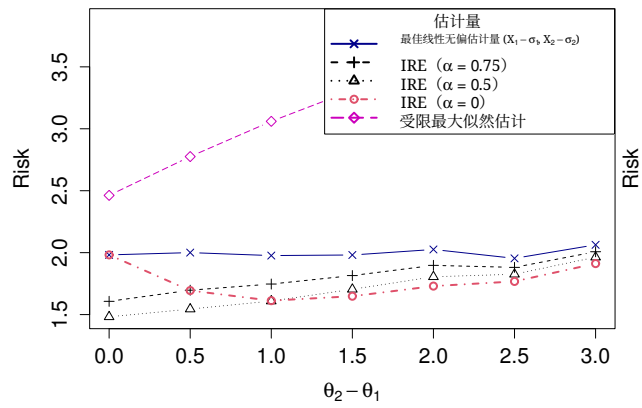
(iv) 各种估计量之间没有明显的优胜者，但最佳线性无偏估计量 $\delta_1^M(X) = (X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$ 和 $\delta_{0.75}^M(X)$ 的表现逊于其他估计量。此外，当 $\sigma_1 \le \sigma_2$ 时，受限最大似然估计量的表现是所有估计量中最差的。



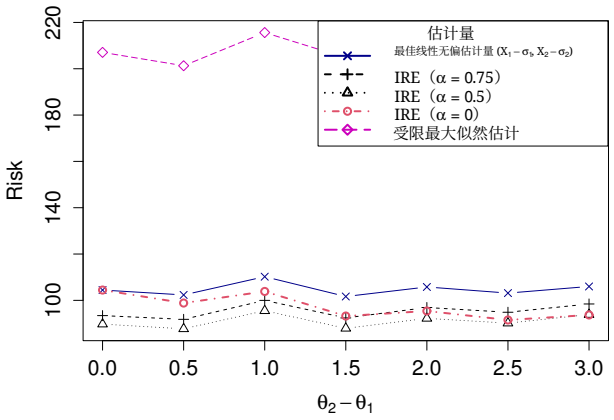
(A) $\sigma_1 = 0.5$ 和 $\sigma_2 = 0.5$。



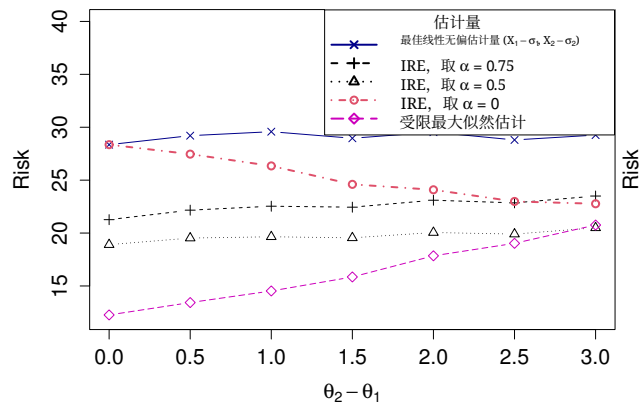
(B) $\sigma_1 = 1$ 和 $\sigma_2 = 0.2$。



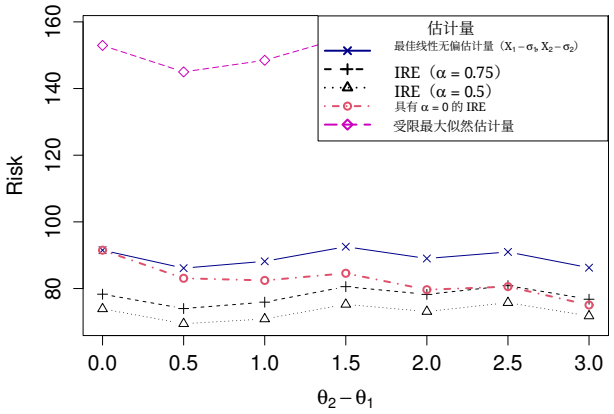
(C) $\sigma_1 = 1$ 和 $\sigma_2 = 1$。



(D) $\sigma_1 = 2$ 和 $\sigma_2 = 10$。



(E) $\sigma_1 = 5$ 和 $\sigma_2 = 2$。



(F) $\sigma_1 = 5$ 和 $\sigma_2 = 8$。

FIGURE 2. 估计量的风险图 $\delta_1^M(X) = (X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$、$\delta_{0.75}^M(X)$、$\delta_{0.5}^M(X)$、$\delta_0^M(X)$ 和 $\delta_R^M(X)$ 随 $\lambda = \theta_2 - \theta_1$ 取值变化的图。

5. **加权平方误差和损失下尺度参数保序回归估计量的可容许性**

设随机向量 $X = (X_1, X_2)$ 的勒贝格概率密度函数属于尺度族

$$f_{\underline{\theta}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\theta_1\theta_2} f\left(\frac{x_1}{\theta_1}, \frac{x_2}{\theta_2}\right),\ (x_1, x_2) \in \Re^2,\ \underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0, \tag{5.1}$$

其中 $\Theta_0 = \{(\theta_1, \theta_2) \in \Re^2_{++} : \theta_1 \le \theta_2\}$。在全文中，我们假设 $X = (X_1, X_2)$ 的分布支撑集是 $\Re^2_{++}$ 的子集。通常，$X = (X_1, X_2)$ 是基于双变量随机样本或两个独立随机样本的最小充分统计量。

为估计 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$，考虑损失函数

$$L(\underline{\theta}, \underline{a}) = p_1(a_1 - \theta_1)^2 + p_2(a_2 - \theta_2)^2,\ \underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0,\ \underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathcal{A} = \Re^2_{++}, \tag{5.2}$$

其中 $p_1 > 0$ 和 $p_2 > 0$ 是预先指定的常数。

在（无约束）参数空间 $\Theta = \Re^2_{++}$下，使用损失函数 (5.2) 同时估计 θ_1 和 θ_2的问题，在乘法变换群 $\mathcal{G} = \{g_{c_1,c_2} : (c_1, c_2) \in \Re^2_{++}\}$ 下是不变的，其中 $g_{c_1,c_2}(x_1, x_2) = (c_1x_1, c_2x_2), (x_1, x_2) \in \Re^2_{++}, (c_1, c_2) \in \Re^2_{++}$。群 $\mathcal{G}$在参数空间 Θ 和行动空间 $\mathcal{A}$上分别诱导变换群$\mathcal{G}$= $\{g_{c_1,c_2} : (c_1, c_2) \in \Re^2_{++}\}$ 和 $\tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{g}_{c_1,c_2} : (c_1, c_2) \in \Re^2_{++}\}$，其中 $g_{c_1,c_2}(\theta_1, \theta_2) = (c_1\theta_1, c_2\theta_2), \tilde{g}_{c_1,c_2}(a_1, a_2) = (c_1a_1, c_2a_2), (\theta_1, \theta_2) \in \Theta, (a_1, a_2) \in \mathcal{A} = \Re^2_{++}, (c_1, c_2) \in \Re^2_{++}$。在变换群 $\mathcal{G}$ 下，估计量 $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ 是用于估计 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ 的不变（尺度不变）估计量，当且仅当

$$\underline{\delta} = (\delta_1(\underline{X}), \delta_2(\underline{X})) = (c_1X_1, c_2X_2),$$

对于某个 $\underline{c} = (c_1, c_2) \in \Re^2_{++}$。$(\theta_1, \theta_2)$ 的最佳尺度等变估计量（BSEE）为

$$\underline{\delta}_0(\underline{X}) = (\delta_{0,1}(\underline{X}), \delta_{0.2}(\underline{X})) = (c_{0,1}X_1, c_{0,2}X_2),$$

其中，对于 $Z_i = \frac{X_i}{\theta_i},\ c_{0,i} = \frac{E[Z_i]}{E[Z_i^2]},\ i = 1, 2$。

基于 BSEE $(c_{0,1}X_1, c_{0,2}X_2)$，定义保序回归估计量 $\delta^M_\alpha(X) = (\delta^M_{1,\alpha}(X)\delta^M_{2,\alpha}(\underline{X}))$，其中

$$\delta^M_{1,\alpha}(\underline{X}) = \begin{cases} c_{0,1}X_1, & \text{if} \quad c_{0,1}X_1 \le c_{0,2}X_2 \\ \alpha c_{0,1}X_1 + (1-\alpha)c_{0,2}X_2, & \text{if} \quad c_{0,1}X_1 > c_{0,2}X_2 \end{cases} \tag{5.3}$$

and

$$\delta^M_{2,\alpha}(\underline{X}) = \begin{cases} c_{0,2}X_2, & \text{if} \quad c_{0,1}X_1 \le c_{0,2}X_2 \\ \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha)c_{0,1}X_1 + (1 - \frac{p_1}{p_2}(1-\alpha))c_{0,2}X_2, & \text{if} \quad c_{0,1}X_1 > c_{0,2}X_2 \end{cases},\ \alpha \in \Re. \tag{5.4}$$

令 $\mathcal{D} = \{\delta^M_\alpha = (\delta^M_{1,\alpha}(X)\delta^M_{2,\alpha}(X)) : \alpha \in \Re\}$ 为基于最佳平移等变估计量（$c_{0,1}X_1$, $c_{0,2}X_2$）的保序回归估计量（IRE）类。估计量 δ^M_α, $\alpha \in \Re$ 的风险函数为

$$
\begin{aligned}
R(\underline{\theta},\underline{\delta}_{\alpha}^{M}) &= p_1 E_{\underline{\theta}}\left[(c_{0,1}\theta_1 Z_1-\theta_1)^2 I_{\left(\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda},\infty\right)}(Z)\right] \\
&+ p_1 E_{\underline{\theta}}\left[\{\alpha(c_{0,1}\theta_1 Z_1 - c_{0,2}\theta_2 Z_2)+c_{0,2}\theta_2 Z_2-\theta_1\}^2 I_{\left(0,\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda}\right)}(Z)\right] \\
&+ p_2 E_{\underline{\theta}}\left[(c_{0,2}\theta_2 Z_2-\theta_2)^2 I_{\left(\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda},\infty\right)}(Z)\right] \\
&+ p_2 E_{\underline{\theta}}\left[\left\{\alpha\frac{p_1}{p_2}(c_{0,2}\theta_2 Z_2 - c_{0,1}\theta_1 Z_1)-\frac{p_1-p_2}{p_2}c_{0,2}\theta_2 Z_2+\frac{p_1}{p_2}c_{0,1}\theta_1 Z_1-\theta_2\right\}^2 I_{\left(0,\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda}\right)}(Z)\right],\ \underline{\theta}\in\Theta_0,
\end{aligned}
$$

其中 $Z_1=\frac{X_1}{\theta_1}$, $Z_2=\frac{X_2}{\theta_2}$ 和 $Z=\frac{Z_2}{Z_1}$。定义 $\lambda=\frac{\theta_2}{\theta_1}(\lambda\geq 1)$，并令 $f_Z(\cdot)$ 表示 $Z=\frac{Z_2}{Z_1}$ 的概率密度函数，从而 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|s|f(s,\ sz)\,ds,\ -\infty<z<\infty$。显然，对于任意固定的 $\theta\in\Theta_0$（或 $\lambda\geq 1$），$R(\theta,\ \delta_{\alpha}^{M})$ 在以下取到最小值

$$
\begin{aligned}
\alpha=\alpha(\lambda) &= \frac{p_1}{p_1+p_2}-\frac{p_2}{p_1+p_2}\frac{(\lambda-1)\,E_{\underline{\theta}}[Z_1(c_{0,1}-c_{0,2}\lambda Z)I_{(0,\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda})}(Z)]}{E_{\underline{\theta}}[Z_1^2(c_{0,1}-c_{0,2}\lambda Z)^2 I_{(0,\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda})}(Z)]} \\
&= \frac{p_1}{p_1+p_2}-\frac{p_2}{p_1+p_2}\alpha_1(\lambda),\quad (say), \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

其中，对于 $h_1(z)=E[Z_1|Z=z]$ 和 $h_2(z)=E[Z_1^2|Z=z]$,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)\,E_{\underline{\theta}}[h_1(Z)(c_{0,1}-c_{0,2}\lambda Z)I_{(0,\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda})}(Z)]}{E_{\underline{\theta}}[h_2(Z)(c_{0,1}-c_{0,2}\lambda Z)^2 I_{(0,\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda})}(Z)]} \\
&= \frac{(\lambda-1)\int_0^{\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda}} h_1(z)\,(c_{0,1}-c_{0,2}\lambda z)\,f_Z(z)\,dz}{\int_0^{\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}\lambda}} h_2(z)\,(c_{0,1}-c_{0,2}\lambda z)^2\,f_Z(z)\,dz} \\
&= \frac{(\lambda-1)\int_0^1 h_1\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)(1-t)\,f_Z\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)dt}{c_{0,1}\int_0^1 h_2\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)(1-t)^2\,f_Z\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)dt} \\
&= \frac{1}{c_{0,1}}E_{\lambda}[k(S_{\lambda},\lambda)],\quad \lambda\geq 1;
\end{aligned}
$$

这里 $k(t,\lambda)=\frac{(\lambda-1)h_1\left(\frac{c_0,c_0{}^{1\,t}}{,2^{\lambda}}\right)(1-t)\,h_2\left(\frac{c_0,c_0{}^{1\,t}}{,2^{\lambda}}\right)}{}$, $0<t<1$, $\lambda\geq 1$, 且 S_{λ} 是一个具有如下概率密度函数的随机变量。

$$
h_{\lambda}(z)=\begin{cases}\dfrac{(1-t)^2 h_2\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)f_Z\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)}{\int_0^1(1-s)^2 h_2\left(\frac{c_{0,1}s}{c_{0,2}\lambda}\right)f_Z\left(\frac{c_{0,1}s}{c_{0,2}\lambda}\right)ds}, & \text{if } 0<t<1 \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases},\quad \lambda\geq 1. \qquad (5.6)
$$

显然，若对每个 $\theta \in (0,\ 1)$，$\frac{h_2(\theta z) f_Z(\theta z)}{h_2(z) f_Z(z)}$ 关于 $z \in \left(0, \frac{c_{0,1}}{c_{0,2}}\right)$ 单调递增（递减），则 $S_{\lambda_1} \leq_{lr} S_{\lambda_2}$ （$S_{\lambda_2} \leq_{lr} S_{\lambda_1}$）也如此，因此，只要 $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$，$S_{\lambda_1} \leq_{st} S_{\lambda_2}$ （$S_{\lambda_2} \leq_{st} S_{\lambda_1}$）也如此。

下面的引理可由命题 2.1 直接证明，将有助于证明本节的主要结果。

引理 5.1.(a) 假设，对于每个 $\theta \in (0, 1)$，$\frac{h_2(\theta z) f_Z(\theta z)}{h_2(z) f_Z(z)}$ 关于 $z \in \left(0, \frac{c_{0,1}}{c_{0,2}}\right)$ 是递增（递减）的。此外，假设对于每个固定的 $z \in (0, 1)$，$k(z, \lambda)$ 关于 $\lambda \in [1, \infty)$ 是递增的，并且对于每个固定的 $\lambda \geq 1$，$k(z, \lambda)$ 关于 $z \in (0, 1)$ 是递增（递减）的。那么 $\alpha_1(\lambda)$ 是 $\lambda \in [1, \infty)$ 的递增函数（因此 $\alpha(\lambda)$ 是递减函数），$\inf_{\lambda \geq 1} \alpha(\lambda) = \frac{p_1}{p_1+p_2} - \frac{p_2}{p_1+p_2} \lim_{\lambda \to \infty} \alpha_1(\lambda) = \alpha_\infty$，记为，并且 $\sup_{\lambda \geq 1} \alpha(\lambda) = \frac{p_1}{p_1+p_2} - \frac{p_2}{p_1+p_2} \alpha_1(1) = \frac{p_1}{p_1+p_2}$.

(b) 假设对于每个 $\theta \in (0, 1)$，$\frac{h_2(\theta z) f_Z(\theta z)}{h_2(z) f_Z(z)}$ 关于 $z \in \left(0, \frac{c_{0,1}}{c_{0,2}}\right)$ 递增（递减）。此外，假设对于任意固定的 $z \in (0, 1)$，$k(z, \lambda)$ 关于 $\lambda \in [1, \infty)$ 递减；并且对于任意固定的 $\lambda \geq 1$，$k(z, \lambda)$ 关于 $z \in (0, 1)$ 递减（递增）。那么 $\alpha_1(\lambda)$ 是 $\lambda \in [1, \infty)$ 的递减函数（因此 $\alpha(\lambda)$ 是递增函数），$\inf_{\lambda \geq 1} \alpha(\lambda) = \frac{p_1}{p_1+p_2} - \frac{p_2}{p_1+p_2} \alpha_1(1) = \frac{p_1}{p_1+p_2}$，记作 say，而 $\sup_{\lambda \geq 1} \alpha(\lambda) = \frac{p_1}{p_1+p_2} - \frac{p_2}{p_1+p_2} \lim_{\lambda \to \infty} \alpha_1(\lambda) = \alpha_\infty$.

现在我们给出本节的主要结果。约定 $[\frac{p_1}{p_1+p_2}, \alpha_\infty] = [\frac{p_1}{p_1+p_2}, \infty)$，当且仅当 $\alpha_\infty = \infty$。由于该定理的证明与定理 4.1 的证明类似，故略去。

定理 5.1. (a) 假设引理 5.1 (a) 的条件成立。则在类 $\mathcal{D} = \{\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M) : \alpha \in \Re\}$ 中可容许的估计量为 $\{\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M) : \alpha \in [\alpha_\infty, \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$。此外，对于 $-\infty \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_\infty$ 或 $\frac{p_1}{p_1+p_2} \leq \alpha_2 < \alpha_1 < \infty$，估计量 $\delta_{\alpha_2}^M(X)$ 支配估计量 $\delta_{\alpha_1}^M(X)$，对任意 $\theta \in \Theta_0$ 均成立。

(b) 假设引理 5.1 (b) 的条件成立。那么，在类 $\mathcal{D} = \{\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M) : \alpha \in \Re\}$ 内可容许的估计量为 $\{\delta_\alpha^M = (\delta_{1,\alpha}^M, \delta_{2,\alpha}^M) : \alpha \in [\frac{p_1}{p_1+p_2}, \alpha_\infty]\}$。此外，对于 $-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{p_1}{p_1+p_2}$ 或 $\alpha_\infty \leq \alpha_2 < \alpha_1 < \infty$，估计量 $\delta_{\alpha_2}^M(X)$ 支配估计量 $\delta_{\alpha_1}^M(X)$，对任意 $\theta \in \Theta_0$ 均成立。

5.1. 应用。

现在我们通过一些应用来说明定理 5.1。

例 5.1.1。 设 $X = (X_1, X_2)$ 是一个具有概率密度函数 (5.1) 的随机向量，其中 $f(z_1, z_2) = f_1(z_1) f_2(z_2)$ $z = (z_1, z_2) \in \Re^2$ 且

$$f_i(z) = \begin{cases} \frac{e^{-z} z^{\alpha_i - 1}}{\Gamma \alpha_i}, & \text{if } z > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad i = 1, 2.$$

其中 $\alpha_1 > 0$ 和 $\alpha_2 > 0$ 是已知的形状参数。我们有 $c_{0,i} = \frac{E[Z_i]}{E[Z_i^2]} = \frac{1}{\alpha_i + 1}$, $i = 1, 2$，且 θ_i 的最佳平移等变估计量为 $\delta_{i,0}(X) = \frac{X_i}{\alpha_i + 1}$, $i = 1, 2$。$Z = \frac{Z_2}{Z_1}$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma\alpha_1\Gamma\alpha_2}\frac{z^{\alpha_2-1}}{(1+z)^{\alpha_1+\alpha_2}}, & \text{if } 0<z<\infty\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases},$$

且在给定 $Z=z\,(0<z<\infty)$ 的条件下， Z_1 的条件概率密度函数为

$$f_{Z_1|Z}(z_1|z)=\begin{cases}\frac{(1+z)^{\alpha_1+\alpha_2}\,z_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,e^{-(1+z)z_1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}, & \text{if } 0<z_1<\infty\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}.$$

显然， $h_1(z)=E[Z_1|Z=z]=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1+z}$, $z>0$， $h_2(z)=E[Z_1^2|Z=z]=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)}{(1+z)^2}$, $z>0$，并且，对于 $0<\theta<1$， $\frac{h_2(\theta z)f_Z(\theta z)}{h_2(z)f_Z(z)}$ 关于 $z\in\left(0,\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}}\right]$ 递增。对于任意固定的 $\lambda\geq 1$,

$$k(z,\lambda)=\frac{(\lambda-1)h_1\left(\frac{c_{0,1}z}{c_{0,2}\lambda}\right)}{(1-z)\,h_2\left(\frac{c_{0,1}z}{c_{0,2}\lambda}\right)}=\frac{(\lambda-1)}{(1-z)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\left(1+\frac{c_{0,1}z}{c_{0,2}\lambda}\right)$$

关于 $z\in(0,1)$ 递增，并且对于任意固定的 $z\in(0,1)$， $k(z,\lambda)$ 关于 $\lambda\geq 1$ 递增。利用引理 5.1 (a)，我们有

$$\sup_{\lambda\geq 1}\alpha(\lambda)=\frac{p_1}{p_1+p_2},$$

$$\begin{aligned}\text{and}\quad \inf_{\lambda\geq 1}\alpha(\lambda)&=\frac{p_1}{p_1+p_2}-\frac{p_2}{p_1+p_2}\lim_{\lambda\to\infty}\alpha_1(\lambda)\\&=\frac{p_1}{p_1+p_2}-\frac{p_2}{p_1+p_2}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{(\lambda-1)\int_0^1 h_1\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)(1-t)\,f_Z\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)dt}{c_{0,1}\int_0^1 h_2\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)(1-t)^2\,f_Z\left(\frac{c_{0,1}t}{c_{0,2}\lambda}\right)dt}\\&=-\infty.\end{aligned}$$

根据定理 5.1 (a)，可知估计量 $\{\delta_\alpha^M:\ \alpha\in(-\infty,\ \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$ 在保序回归估计量类 $\{\delta_\alpha^M:\ -\infty<\alpha<\infty\}$ 中是可容许的。再者，估计量 $\{\delta_\alpha^M:\ \alpha>\frac{p_1}{p_1+p_2}\}$ 不可容许，并且对于 $\frac{p_1}{p_1+p_2}\leq\alpha_2<\alpha_1$，估计量 $\delta_{\alpha_2}^M$ 支配估计量 $\delta_{\alpha_1}^M$。根据定理 3.1，我们得出估计量 $\{\delta_\alpha^M:\ \max\{0,\frac{p_1-p_2}{p_1}\}\leq\alpha<1\}$ 支配最佳平移等变估计量 $(\frac{1}{\alpha_1+1}X_1,\ \frac{1}{\alpha_2+1}X_2)$。 –

例 5.1.2. 设 $X=(X_1,\ X_2)$ 为一个随机向量，其概率密度函数为 (5.1)，其中 $f(z_1,\ z_2)=f_1(z_1)\,f_2(z_2)$ $z=(z_1,\ z_2)\in\Re_{++}^2$，且对于正常数 α_1 和 α_2,

$$f_i(z)=\begin{cases}\alpha_i z^{\alpha_i-1}, & \text{if } 0<z<1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases},\quad i=1,2.$$

这里 $c_{0,\,i}=\frac{E[Z_i]}{E[Z_i^2]}=\frac{\alpha_i+2}{\alpha_i+1}$, $i=1,\ 2$，且 θ_i 的最佳平移等变估计量为 $\delta_{i,0}(X)=\frac{\alpha_1+2}{\alpha_i+1}X_i$, $i=1,\ 2$。 $Z=\frac{Z_2}{Z_1}$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}z^{\alpha_2-1}\left(\min\left\{1,\frac{1}{z}\right\}\right)^{\alpha_1+\alpha_2},\quad z>0,$$

给定 $Z=z\,(0<z<\infty)$时 Z_1 的条件概率密度函数为

$$f_{Z_1|Z}(z_1|z)=\begin{cases}\dfrac{(\alpha_1+\alpha_2)\,z_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\left(\min\left\{1,\frac{1}{z}\right\}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}, & \text{if } 0<z_1<\min\left\{1,\frac{1}{z}\right\}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases},$$

$h_1(z)=E[Z_1|Z=z]=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+1}$最小值 $\left\{1,\frac{1}{z}\right\}$, $z>0$, 以及 $h_2(z)=E[Z_1^2|Z=z]=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+2}$(最小值 $\left\{1,\frac{1}{z}\right\}$)^2, $z>0$. 显然, 对于 $0<\theta<1$, $\frac{h_2(\theta z)f_Z(\theta z)}{h_2(z)f_Z(z)}$关于 $z\in\left(0,\frac{c_{0,1}}{c_{0,2}}\right]$递增。对于任意固定的 $\lambda\geq 1$,

$$k(z,\lambda)=\frac{(\lambda-1)h_1\left(\frac{c_{0,1}z}{c_{0,2}\lambda}\right)}{(1-z)\,h_2\left(\frac{c_{0,1}z}{c_{0,2}\lambda}\right)}=\frac{(\lambda-1)(\alpha_1+\alpha_1+2)}{(1-z)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\max\left\{1,\frac{c_{0,1}z}{c_{0,2}\lambda}\right\}$$

关于 z递增，并且对于任意固定的 $z\in(0,1)$, $k(z,\lambda)$ 关于 $\lambda\geq 1$递增。利用引理 5.1 (a), 我们得到

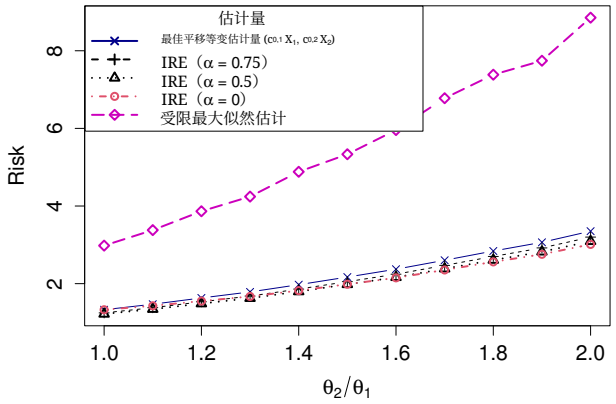
$$\sup_{\lambda\geq 1}\alpha(\lambda)=\frac{p_1}{p_1+p_2},\qquad\text{and}\qquad\inf_{\lambda\geq 1}\alpha(\lambda)=-\infty.$$

现在，根据定理 5.1 (a)，可知估计量 $\{\delta_\alpha^M:\ \alpha\in(-\infty,\ \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$ 在 $(\theta_1,\ \theta_2)$ 的保序回归估计量类 $\{\delta_\alpha^M:\ -\infty<\alpha<\infty\}$ 中是可容许的。此外，估计量 $\{\delta_\alpha^M:\ \alpha>\frac{p_1}{p_1+p_2}\}$ 是不可容许的，并且对于 $\frac{p_1}{p_1+p_2}\leq\alpha_2<\alpha_1$，估计量 $\delta_{\alpha_2}^M$ 支配估计量 $\delta_{\alpha_1}^M$。此外，根据定理 3.1，我们得出结论，估计量类 $\{\delta_\alpha^M:\max\{0,\frac{p_1-p_2}{p_1}\}\leq\alpha<1\}$ 支配最佳平移等变估计量 $(\frac{\alpha_1+2}{\alpha_1+1}X_1,\ \frac{\alpha_2+2}{\alpha_2+1}X_2)$。

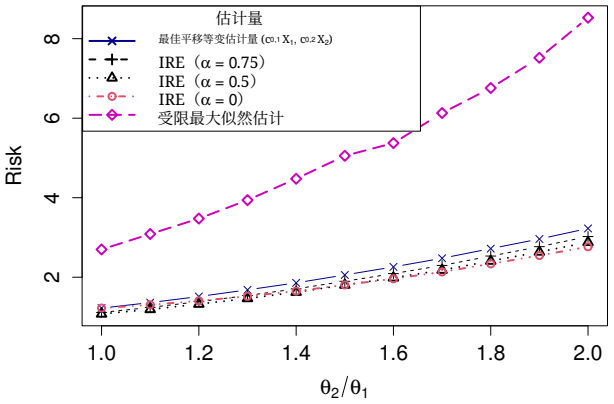
5.2. 尺度参数估计的模拟研究 $(\theta_1,\ \theta_2)$.

在例 5.1.1 中，我们考虑了两个独立伽马分布，其序约束尺度参数未知（即 $\theta_1\leq\theta_2$），而形状参数已知（$\alpha_1>0$ 和 $\alpha_2>0$）。对于尺度参数（θ_1,θ_2）的同时估计，在平方误差损失函数（5.2）之下，我们证明保序回归估计量（IRE） $\{\delta_\alpha^M:\ \alpha\in(-\infty,\ \frac{p_1}{p_1+p_2}]\}$ 在类 $\mathcal{D}=\{\delta_\alpha^M:\ -\infty<\alpha<\infty\}$中是可容许的。此外，估计量 $\{\delta_\alpha^M:\max\{0,\frac{p_1-p_2}{p_1}\}\leq\alpha<1\}$ 支配最佳平移等变估计量 $\delta_0(X)=(c_{0,1}X_1,c_{0,2}X_2)$，其中 $c_{0,i}=\frac{1}{\alpha_i+1}$, $i=1,2$。本节为简便起见，取 $p_1=1$ 和 $p_2=1$。为了进一步评估各种估计量在损失函数 $L(\theta,a)=(a_1-\theta_1)^2+(a_2-\theta_2)^2$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_0$, $a=(a_1,a_2)\in\Re_{++}^2$下的表现，本节通过蒙特卡洛模拟，对保序回归估计量（IRE） $\delta_1^M(X)=(\delta_1^M,1(X)\delta_2^M,1(X))=(c_{0,1}X_1,c_{0,2}X_2)$, $\delta_{0.75}^M(X)=(\delta_1^M,0.75(X)\delta_2^M,0.75(X))$,$\delta_{0.5}^M(X)=(\delta_1^M,0.5(X)\delta_2^M,0.5(X))$, $\delta_0^M(X)=(\delta_1^M,0(X)\delta_2^M,0(X))$以及受限最大似然估计量 $\delta_R(X)=\left(\min\left\{\frac{X_1}{\alpha_1},\frac{X_1+X_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right\},\max\left\{\frac{X_2}{\alpha_2},\frac{X_1+X_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right\}\right)$ 的风险表现进行数值比较。

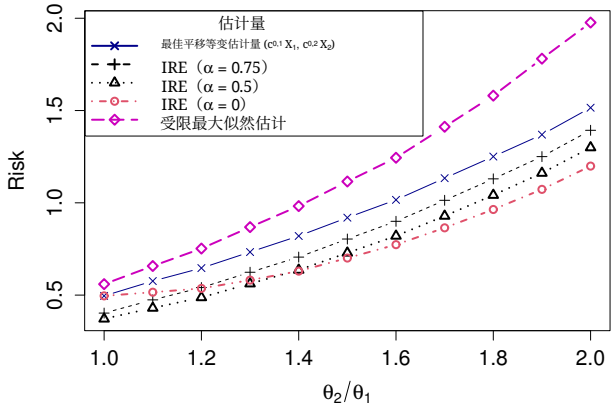
在模拟中，我们从相关的伽马分布中生成了 50000 个样本，每个样本的大小为 1，并计算了估计量 $\delta_1^M(X)=(X_1-\sigma_1,X_2-\sigma_2)$、$\delta_{0.75}^M(X)$、$\delta_{0.5}^M(X)$、 $\delta_0^M(X)$ 和 $\delta_R^M(X)$ 在不同形状参数取值 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ 下的模拟风险。



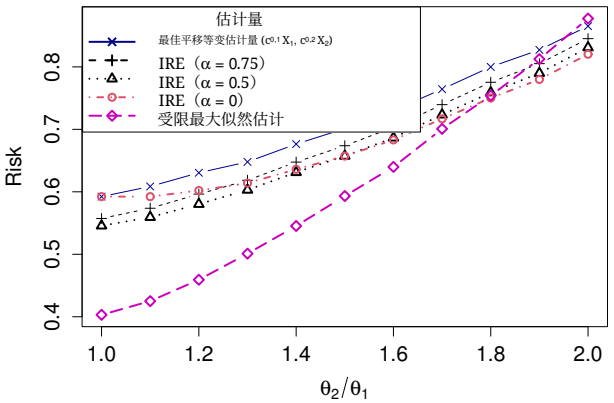
(A) $\alpha_1 = 0.5$ 和 $\alpha_2 = 0.5$。



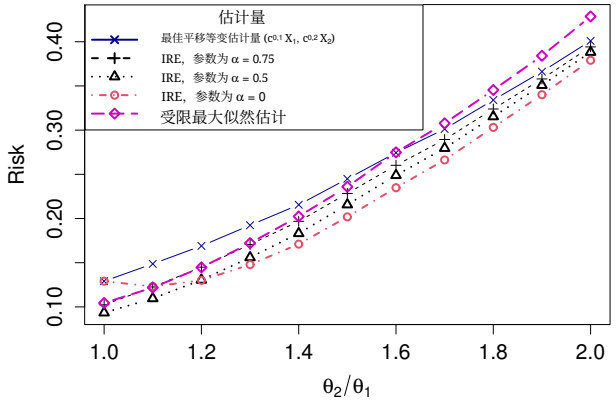
(B) $\alpha_1 = 0.8$ 和 $\alpha_2 = 0.5$。



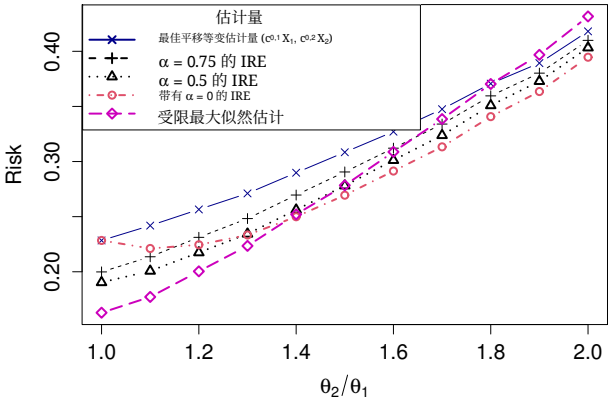
(C) $\alpha_1 = 5$ 和 $\alpha_2 = 2$。



(D) $\alpha_1 = 1$ 和 $\alpha_2 = 10$。



(E) $\alpha_1 = 25$ 和 $\alpha_2 = 10$。



(F) $\alpha_1 = 5$ 和 $\alpha_2 = 10$。

FIGURE 3. 估计量 $\delta_1^M(X) = (c_{0,1}X_1, c_{0,2}X_2)$、$\delta_{0.75}^M(X)$、$\delta_{0.5}^M(X)$、$\delta_0^M(X)$ 和 $\delta_R^M(X)$ 的风险图，与 $\lambda = \theta_2/\theta_1$ 的取值相对应。

图3展示了各种估计量的模拟风险值。图3中可以明显看出以下几点：

(i) 估计量 $\delta^M_{0.75}(X)$、 $\delta^M_{0.5}(X)$ 和 $\delta^M_0(X)$ 的风险函数值低于最佳平移等变估计量 $(X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$ 的风险函数值，这与例 5.1.1 和定理 5.1 的理论发现一致。

(ii) 从图3中可以观察到，IRE $\delta^M_{0.5}(X)$、 $\delta^M_0(X)$ 和 $\delta^M_R(X)$ 彼此不可比较，而 IRE $\delta^M_1(X)$ 和 $\delta^M_{0.75}(X)$ 不可容许。这与例 5.1.1 的理论发现一致。

(iii) 当 α_1 和 α_2 的值较大且 $\alpha_1 << \alpha_2$ 时，对于较小的 θ_2/θ_1 值，受限最大似然估计量优于其他估计量。

(iv) 各种估计量之间没有明显的优胜者，但最佳线性无偏估计量 $\delta^M_1(X) = (X_1 - \sigma_1, X_2 - \sigma_2)$ 和 $\delta^M_{0.75}(X)$ 的表现不如其他估计量。此外，当 $\alpha_1 \leq 1$ 和 $\alpha_2 \leq 1$时，受限最大似然估计量的表现是所有估计量中最差的。

利益披露声明

作者不存在利益冲突。

资助

本研究得到 [科学与工业研究委员会（CSIR）]资助，拨款 [编号为 09/092(0986)/2018]。

References

Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. 和 Brunk, H. D.（1972）。序约束下的统计推断：保序回归理论与应用。约翰·威立父子出版公司。Brewster, J. F. 和 Zidek, J. V.（1974）。改进等变估计量。《统计年刊》，2：21–38。Brunk, H. D.（1955）。单调参数的最大似然估计量。《数学统计年刊》，26：607–616。Chang, Y.-T. 和 Shinozaki, N.（2015）。修正的皮特曼接近准则下两个有序正态均值的估计。《统计数学研究所年报》，67(5)：863–883。Cohen, A. 和 Sackrowitz, H. B.（1970）。单调序列末项均值的估计。《数学统计年刊》，41：2021–2034。Garren, S. T.（2000）。位置-尺度族中受序约束的位置参数的改进估计。*Sankhy¯a Ser. B*，62(2)：189–201。Gupta, R. D. 和 Singh, H.（1992）。两个有序正态均值估计量的皮特曼接近性比较。《澳大利亚统计学杂志》，34(3)：407–414。Hwang, J. T. G. 和 Peddada, S. D.（1994）。受序约束的置信区间估计。《统计年刊》，22(1)：67–93。

Jin, C. 和 Pal, N.（1991）。序约束下两个指数分布的位置参数的注记。《统计学理论与方法通讯》，20(10)：3147–3158。Katz, M. W.（1963年）。有序概率的估计。《数学统计年刊》，34：967–972。Kaur, A. 和 Singh, H.（1991）。两个指数总体有序均值的估计。《统计数学研究所年刊》，43(2)：347–356。Kelly, R. E.（1989年）。通过保序回归估计正态均值时损失的随机降低。《统计年刊》，17(2)：937–940。Kubokawa, T. 和 Saleh, A. K. M. E.（1994）。序约束下位置参数和尺度参数的估计。《统计研究杂志》，28(1-2)：41–51。Kumar, S. 和 Sharma, D.（1988年）。有序参数的同时估计。《统计学理论与方法通讯》，17(12)：4315–4336。Kumar, S. 和 Sharma, D.（1989年）。有序正态均值的Pitman估计量。《统计学理论与方法通讯》，18(11)：4163–4175。Kumar, S. 和 Sharma, D.（1992年）。仿射等变估计量的不可容许性结果。《统计决策》，10(1-2)：87–97。Kushary, D. 和 Cohen, A.（1989年）。有序位置参数和尺度参数的估计。《统计决策》，7(3)：201–213。Lee, C. I. C.（1981年）。正态性下保序回归的二次损失。《统计年刊》，9(3)：686–688。Misra, N. 和 Dhariyal, I. D.（1995年）。有序均匀分布尺度参数估计的一些不可容许性结果。《统计学理论与方法通讯》，24(3)：675–685。Misra, N.、Dhariyal, I. D. 和 Kundu, D.（2002年）。具有共同未知尺度参数的两个指数分布位置参数中较大者的自然估计量。《统计决策》，20(1)：67–80。Misra, N.、Iyer, S. K. 和 Singh, H.（2004）。均值受序约束的正态总体参数最大似然估计量的LINEX风险。$Sankhy\bar{}a$，66(4)：652–677。Misra, N. 和 van der Meulen, E. C.（2003）。关于(m)间隔的随机性质。《统计规划与推断杂志》，115(2)：683–697。Patra, L. K. 和 Kumar, S.（2017年）。二维正态分布有序均值的估计。《美国数学与管理科学杂志》，36(2)：118–136。Peddada, S. D.、Dunson, D. B. 和 Tan, X.（2005年）。相关数据中序约束均值的估计。《生物计量学》，92(3)：703–715。Pe˘cari´c, J. E.、Proschan, F. 和 Tong, Y. L.（1992）。凸函数、偏序与统计应用，第187卷，属《科学与工程中的数学》丛书。Academic Press, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿。Robertson, T.、Wright, F. T. 和 Dykstra, R. L.（1988年）。序约束统计推断。约翰·威立父子出版公司。Tan, X. 和 Peddada, S.（2000）。受序约束参数的若干估计量的渐近分布。《统计应用》，2：7–25。van Eeden, C.（1956a）。有序概率的最大似然估计。《荷兰皇家科学院论文集 A 辑》 $\mathbf{59}$ = 《数学研究》，18：444–455。van Eeden, C.（1956b）。部分或完全有序参数的最大似然估计。统计部，报告 S 207（VP 9）。阿姆斯特丹数学中心。van Eeden, C.（1957）。部分或完全有序参数的最大似然估计。II。《荷兰皇家科学院论文集 A 辑》 $\mathbf{60}$ = 《数学研究》，19：201–211。

van Eeden, C. (1958). 概率分布有序参数的检验与估计. 数学中心，阿姆斯特丹。van Eeden, C. (2006). 受限参数空间估计问题：可容许性与极小极大性，《统计学讲义》第188卷。施普林格，纽约。Vijayasree, G., Misra, N., 和 Singh, H. (1995). k (≥ 2) 指数总体有序参数的逐分量估计。《统计数学研究所年刊》，47(2):287–307。Vijayasree, G. 和 Singh, H. (1991). 两个有序指数参数的同时估计。《统计学通讯：理论与方法》，20(8):2559–2576。Vijayasree, G. 和 Singh, H. (1993). 两个有序指数均值的混合估计量。《统计规划与推断杂志》，35(1):47–53。