arXiv:2301.00696v1 [math.GN] 2 Jan 2023

拓扑空间中使用$\mathcal{I}$-收敛的若干广义概念

PRATU LANANDA DAS*, UPASANA SAMANTA*, SHOU LIN†

Abstract. 本文探讨由理想收敛概念定义的这类空间的若干拓扑性质及某些类型的映射。为此，我们主要遵循早期研究的思路：这些研究通过使用函数（从无限集 S到 X）在 $[8,9,29]$,中考察理想收敛，因为这是最一般的视角；同时，我们使用函数而非序列、网、二重序列等。函数方法自动为此类研究提供了最一般的框架，因此拓展并统一了文献中关于序列空间、Fr´echet-Uryshon 空间，以及序列映射、商映射和覆盖映射的若干新旧结果的证明。特别地，我们引入并研究 $\mathcal{I}$-函数空间、$\mathcal{I}$-函数连续、商映射和覆盖映射，最后还研究 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间。为此，我们借助理想的一些集合论性质及其他性质。

关键词：理想、函数的理想收敛、 $\mathcal{I}$-函数空间、 $\mathcal{I}$-函数连续、商映射和覆盖映射、 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间。

1. 引言

。序列的统计收敛这一思想由 $[12,33]$ 提出，作为通常收敛概念的扩展。除了在可和性理论、测度论、泛函分析等领域的大量研究外，这一思想还推动了对拓扑空间中相关问题的各种研究（例如参见 $[4,5,10,24,25,34–36]$）。Kostyrko 等人 $[20]$ 提出了几乎所有类型收敛（包括统计收敛）的最重要推广：他们利用全体自然数集的理想，在度量空间中引入了 $\mathcal{I}$-收敛和$\mathcal{I}^*$-收敛的概念。沿着 Kostyrko 等人的思路，相关概念也已针对序列进行了研究

2010 *Mathematics Subject Classification.*主要分类：54A20、54B15、54C08；次要分类：40A05、26A03。第一作者感谢 NBHM 资助本项目（批准号：02011/9/2022/NBHM(RP)/RD II/10378），本研究即在该项目资助期间完成。

在一般拓扑空间中 [22], , 针对拓扑空间和一致空间中的网 [23]（随后在 [6, 7]中进行了研究），以及针对拓扑空间 [9, 29],和一致空间 [8] 中的函数 也开展了研究，例如参见相关文献。

另一方面，一个众所周知的事实是，一般而言，拓扑空间的拓扑无法由收敛序列确定；这与度量空间不同，在度量空间中，序列在刻画若干概念时发挥着更为重要的作用。从一开始，探讨哪些拓扑空间中序列能发挥更好的作用，就是一个内容丰富且颇具挑战性的研究课题。第一可数空间、Fr´echet-Uryshon 空间和序列空间，是一些可由序列的收敛性确定的空间的例子 [11, 28]。作者最初在 [32, 34] 中采用统计收敛而非通常的序列收敛，定义了 Fr´echet-Uryshon 空间和序列空间的统计对应概念。随后，序列理想收敛这一更一般的思想被广泛用于在拓扑背景下引入这些概念以及其他若干新思想（例如可参见 [3, 31, 32, 35, 36]）。

特别是在 [36], Zhou 及其合著者的工作中，他们定义了 $\mathcal{I}$-连续映射、 $\mathcal{I}$-商映射和 $\mathcal{I}$-覆盖映射，并考察了它们与 $\mathcal{I}$-序列、$\mathcal{I}$-Fr´echet 空间之间的相互关系。

因此，作为自然的延伸，本文通过考虑任意无限集 S 上的理想，进一步推广了这类研究的整体框架；同时，作为一种自然的替代，我们不再使用 X 中的序列，而是考虑从 S 到X. 的函数。这种方法统一了上述两个研究方向，并给出了最一般类型的结果。我们主要借助函数的 $\mathcal{I}$-收敛这一思想，引入 $\mathcal{I}$-函数开集、 $\mathcal{I}$-函数闭集、 $\mathcal{I}$-函数空间和 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间，并建立若干性质。我们还以同样的方式推广 $\mathcal{I}$-连续映射、$\mathcal{I}$-商映射和 $\mathcal{I}$-覆盖映射的概念，进而研究它们的对应概念，即 $\mathcal{I}$-函数连续映射、商映射和覆盖映射，以及它们对 $\mathcal{I}$-函数空间和 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间的影响。为消除歧义并保持术语一致，我们将所有定义域为 S 的映射称为“函数”（沿用 [8, 9, 29]的命名），而将从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的映射称为“映射”。

因此， [3, 31, 32, 35, 36] 的结果不仅成为我们结果的特例，整体论述也似乎大为简化，同时凸显了一个核心观点：若干拓扑概念实际上可以在不限制定义域集合的情况下加以研究。

2. 预备知识

令 $\mathbb{N}$ 表示所有自然数构成的集合，并令 $K \subset \mathbb{N}.$。回顾一下， K 的自然密度或渐近密度定义为 $d(K) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}|\{k \in \mathbb{N}: \ k \leq n\}|$，如果该极限存在。若 X 是一个拓扑空间，则当对于 x 在X中的每个邻域 U， $d(\{n \in \mathbb{N}: x_n \notin U\}) = 0$ [10]时，称 X 中的序列（x_n： $n \in \mathbb{N}$）统计收敛于 $x \in X$。

统计收敛后来被推广为 $\mathcal{I}$-收敛的概念，该概念基于子集的理想这一概念。设 Y 为非空集合， $\mathcal{P}(Y)$ 是 $Y.$ 的所有子集构成的族。若非空集合 Y 的子集族 $\mathcal{I}(\subset \mathcal{P}(Y))$ 是 Y 的理想，则称其为 Y 的理想，当且仅当：（i）若 A, $B \in \mathcal{I}$，则 $A \cup B \in \mathcal{I}$ (ii)；（ $A \in \mathcal{I}$）若 $B \subset A$，则 $B \in \mathcal{I}$。而 Y 的容许理想 $\mathcal{I}$ 覆盖 Y。这类理想也称为自由理想。若 $\mathcal{I}$ 是 Y 的真非平凡理想（即 $Y \notin \mathcal{I}, \mathcal{I} \neq \emptyset$），则集合族 $\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset Y: Y \setminus M \in \mathcal{I}\}$ 是 Y 的滤子（称为对偶滤子），而 $\mathcal{I}$ 的余理想为 $\mathcal{I}^+ = \{A \subset Y: A \notin \mathcal{I}\}.$。我们分别用 $\mathcal{I}_{fin}$ 和 $\mathcal{I}_d$ 表示由 $\mathbb{N}$ 的所有有限子集和零密度子集构成的理想。

如果 $\mathcal{I}$ 是一个极大理想，那么对于任意 $A \subset S$，我们都有 $A \in \mathcal{I}$ 或 $S \setminus A \in \mathcal{I}$.。对于 S 的每个理想 $\mathcal{I}$，满足 $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ 的 S 的所有极大理想 $\mathcal{J}$ 的集合记为 $\Theta(\mathcal{I})$。已知 $\mathcal{I} = \bigcap_{\mathcal{J}\in\Theta(\mathcal{I})} \mathcal{J}$ [17]。回忆一下，如果 $B \subset \mathbb{N}$ 满足，则称其为族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的伪并，当且仅当 $\mathbb{N} \setminus B$ 是无限的，且对于每个 $A \in \mathcal{A}$ [3]， $A \setminus B$ 是有限的。

拓扑空间 X 中的序列 $(x_n: n \in \mathbb{N})$ 被称为 $\mathcal{I}$-收敛于 $x \in X$，如果对于 x 的每个邻域 U，集合 $\{n \in \mathbb{N}: x_n \notin U\}$ 属于 $\mathcal{I}$ [22]。如果取 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{fin}$，则序列的 $\mathcal{I}$-收敛与序列的普通收敛一致；如果 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$.，则与统计收敛一致。

实数序列的 $\mathcal{I}^*$-收敛概念源于统计收敛的一个结果：实数序列 $(x_n: n \in \mathbb{N})$ 统计收敛于 x，当且仅当存在一个集合 $M = \{m_k: k \in \mathbb{N}\}$，满足 $m_1 < m_2 < \cdots m_k \cdots$，使得 $d(M) = 1$ 且 $\lim_{k\longrightarrow\infty} x_{m_k} = x.$。这一思想已推广至拓扑空间中序列的 $\mathcal{I}^*$-收敛：若序列 $(x_n: n \in \mathbb{N})$ 属于 X，则该序列 $\mathcal{I}^*$-收敛于 $x \in X$，当且仅当存在集合 $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，其中 $m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$，且满足 $\lim_{k\longrightarrow\infty} x_{m_k} = x$ [22]。

除非另有说明，全文中 X 表示一个拓扑空间， S 表示一个无限集，$\mathcal{I}$ 表示 S 的一个容许理想。此外，我们始终用“空间”指拓扑空间。我们的拓扑术语和记号均与书籍 [11] 中的用法相同。

3. $\mathcal{I}$-函数开集、 $\mathcal{I}$-函数闭集与 $\mathcal{I}$-函数空间

在介绍本节的主要概念之前，我们先阐述一些关于函数收敛的基本观察；这些观察恰好是这些推广背后的主要工具。

定义 3.1. 对于 $x \in X$，我们称函数 $f\colon S \to X$

- 收敛于 x，当且仅当对于每个包含 x 的开集 U，集合$f^{-1}(U)$ 是余有限的。
- $\mathcal{I}$-收敛于 x，当且仅当对于每个包含 x 的开集 U，集合 $f^{-1}(U)$ 属于 $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ *[29]*。
- $\mathcal{I}^*$-收敛于 x，当且仅当存在一个集合 $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，使得由“若 $s \in M$，则 g定义为 $g(s) = f(s)$；若 $s \notin M$，则 $g(s) = x$”定义的函数收敛于 x *[29]*。

假设 $g\colon S \longrightarrow X$， $\mathcal{I}$收敛于 $x.$。令 S' 为 S的无限子集，且满足 $|S'| = |S|.$。令 $h\colon S \longrightarrow S'$ 为双射函数，并令 $\Phi = g|_{S'}$。现在，若 $(\Phi \circ h)(s) = g(s)$ $\forall\, s \in S$ 收敛于 $x.$，则称 Φ 是 $\mathcal{I}$收敛于 x。

此外，若 $f\colon S \longrightarrow X$ 收敛于 $x \in X$，则对任意无限的 $S' \subset S$， $f|_{S'}$ 收敛于 $x.$。在 Hausdorff空间中，函数的 $\mathcal{I}$-极限是唯一的。对于 S上的两个理想 $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$，若 $f\colon S \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{I}$收敛于 x，则 $f\colon S \longrightarrow X$是 $\mathcal{J}$收敛于 x。

根据 [3]，我们可以说，若存在一个无限集 $A \subset S$，满足 $|S| = |S \setminus A|$，且对每个 $I \in \mathcal{I}.$， $I \setminus A$ 都是有限集，则 S 的理想 $\mathcal{I}$ 具有伪并。

引理 3.1. 若 $\mathcal{I}$ 有一个伪并，且 $f\colon S \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{I}$-收敛于 x，则存在一个从 S 到 X 的函数，它收敛于 $x.$

证明. 设 $f\colon S \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{I}$-收敛于 $x.$。由于 $\mathcal{I}$ 有一个伪并，存在一个满足 $S \setminus A \in \mathcal{I}^+$ 的无限集 $A \subset S$，使得对每个 $I \in \mathcal{I}.$， $I \cap (S \setminus A)$ 都是有限集。由于 f 是 $\mathcal{I}$-收敛于 x，对于每个包含x的开集 O，都有 $A_O = \{s \in S\colon f(s) \notin O\} \in \mathcal{I}.$。因此， $A_O \cap (S \setminus A)$ 是有限集。于是定义 $\Phi\colon S \longrightarrow X$，使得若 $s \in S \setminus A$，则 $\Phi(s) = f(s)$；若 $s \in A$，则 $\Phi(s) = x$，则其收敛于 $x.$ □

命题 3.1. 设给定 $g : S \to X$。那么 g 是 $\mathcal{I}$-收敛到 x，当且仅当对于每个 $\mathcal{J} \in \Theta(\mathcal{I})$， g 是 $\mathcal{J}$-收敛到 x。

例 3.1. 设 $\mathcal{I}$ 是 $S.$ 的一个理想。取 $\infty \notin S.$。我们在 $S \cup \{\infty\}$ 上定义一个拓扑：令每个 $s \in S$ 都是孤立点，并将 ∞ 的每个基本开邻域U 定义为 $(S \setminus I) \cup \{\infty\}$，其中 $I \in \mathcal{I}.$。这个空间记作 $\sum_S(\mathcal{I})$。显然，包含映射 $i\colon S \longrightarrow \sum_S(\mathcal{I})$ 是 $\mathcal{I}$-收敛到 $\infty.$ 的。注意，

若 $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_{fin}$，则 $\mathcal{I}$ 包含一个无限集 I （“也就是说”）。由此很容易推出，包含函数按通常意义并不收敛到 ∞ 。

现在让我们回顾一下，拓扑空间中闭集的概念是如何借助序列加以推广的。回顾一下，若子集 $F \subset X$满足：对于 F 中收敛到$x \in X$的每个序列（x_n : $n \in \mathbb{N}$），都有 $x \in F.$ X ，则称其为序列闭集；若空间 X 的每个序列闭子集都是闭集，则称 $x \in F.$ X 为空间 [13] 中的序列空间。若 $X \setminus U$是序列闭集，则称子集 $U \subset X$ 为序列开集。Di Maio 和 Koˇcinac 在 [10] 中引入了序列空间的统计版本，而 Pal [31] 则进一步将其推广为 $\mathcal{I}$-序列空间。最近，Zhou 等人在 [36] 中重新探讨了 $\mathcal{I}$-序列空间的概念，并引入了以下概念。若对于 F中的每个序列（x_n : $n \in \mathbb{N}$），当其 $\mathcal{I}$-收敛到 $x \in X$时，都有 $x \in F.$ ，则称子集 $F \subset X$ 为 $\mathcal{I}$-闭集。若 $X \setminus U$ 是 $\mathcal{I}$-闭集，则称子集 $U \subset X$ 为 $\mathcal{I}$-开集。若空间 X 的每个 $\mathcal{I}$-闭子集都是闭集，则称 X 为 $\mathcal{I}$-序列空间。受从序列空间的思想推广 $\mathcal{I}$-序列空间这一做法的启发，我们现在引入本节的核心概念。

定义 3.2. 设 X 是一个拓扑空间。(*i*) 若对于每个函数 g : $S \to F$ ，只要它 $\mathcal{I}$ 收敛于 $x \in X$ ，就有$x \in F.$，则称 $F \subset X$ 为 $\mathcal{I}$-函数闭。

(*ii*) 若 $X \setminus U$ 是 $\mathcal{I}$-函数闭，则称 $U \subset X$ 为 $\mathcal{I}$-函数开。(*iii*) 如果 X 的每个 $\mathcal{I}$-函数闭子集都是闭集，则称 X 为空间 $\mathcal{I}$。

如果我们考虑函数的“通常”收敛（见定义 3.1），而不是 $\mathcal{I}$-收敛，则分别将 $\mathcal{I}$-函数闭集、 $\mathcal{I}$-函数开集和$\mathcal{I}$-函数空间称为函数闭、函数开和函数空间。显然，每个 $\mathcal{I}$-函数闭集都是函数闭集，但下面的例子表明，反之一般并不成立。

例 3.2. 设 $\mathcal{I}$ 是 $S.$ 的一个极大理想。我们考虑例 3.1 中的空间 $\sum_S(\mathcal{I})$。那么，S 是 $\sum_S(\mathcal{I})$中的函数闭集，但不是 $\mathcal{I}$-函数闭集。

作为引理 3.1 的直接推论，我们可以看出

命题 3.2. $A \subset X$ 是 $\mathcal{I}$-函数闭的，当且仅当在 $\mathcal{I}$ 有伪并的条件下， A 是函数闭的。因此，在 $\mathcal{I}$ 有伪并的条件下， X 是 $\mathcal{I}$-函数空间，当且仅当 X 是函数空间。

我们可以将定义 3.2（ii）修改如下。

引理 3.2. 子集 O X 是 $\mathcal{I}$-函数开，当且仅当不存在函数h : $S \longrightarrow X \setminus O$ 是 $\mathcal{I}$-收敛到 $O.$中的某一点

证明. 充分性直接由定义 3.2(i)、(ii) 得出。由于 O 是 $\mathcal{I}$-函数开，因此 $X \setminus O$ 是 $\mathcal{I}$-函数闭。因此，对于每个函数 $h:\ S \longrightarrow X \setminus O$，若其 $\mathcal{I}$-收敛到 x，则必有 $x \in X \setminus O$. □

显然，每个开集（因此每个闭集）都是 $\mathcal{I}$-函数开（$\mathcal{I}$-函数闭）的。下面的例子说明，存在一个非 $\mathcal{I}$-函数空间。

例 3.3。考虑笛卡尔积 $S \times S$. 对于 $a \in S$，我们称子集 $S \times \{a\}$ 为 $S \times S$. 的第 a 行。设 $\mathcal{I}$ 有一个伪并，并设 ∞是 $S \times S$. 之外的一个元素。设 $X = (S \times S) \cup \{\infty\}$. 。我们在$X$ 上定义如下拓扑。设 $\tau_1 = \mathcal{P}(S \times S)$，并设 τ_2 为 X 的那些子集 A的集合，使得 $\infty \in A$ 且 $\{a \in S:\ (\{s \in S:\ (s,\ a) \in A\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}))\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。取$\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. 。那么可以验证，$\tau$ 是 X.上的一个拓扑。

没有函数能从 S 到 X 在 $\mathcal{I}$意义下收敛到 ∞. 。若 $g:\ S \longrightarrow X$ 在$\mathcal{I}$意义下收敛到 ∞，那么根据引理 3.1，存在一个函数 $f:\ S \longrightarrow X$，它收敛到 ∞. 。注意，每一行至多包含有限多个形如 $f(s)$ 的元素。从每一行中排除这些项后，我们得到一个包含 ∞ 的开集，其中不含任何形如 $f(s)$ 的项。此外，除非最终为常值函数，否则没有函数能从 S到 $S \times S$在 $\mathcal{I}$意义下收敛到 $S \times S$中的点。但 ∞是 $S \times S$.的一个极限点。因此，$S \times S$是 $\mathcal{I}$-函数闭的，但不是闭的，故 X 不是 $\mathcal{I}$-函数空间。

然而，存在一个理想，使得每个序列空间都是 $\mathcal{I}$-函数空间。

命题 3.3. 设 $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$，使得对于不同的 i、j，有 $S_i \cap S_j = \emptyset$；并设 $\mathcal{I}_0 = \{A \subset S:\ A \cap S_i \neq \emptyset$ 对有限多个 $i\}$. 成立。那么每个序列空间X 都是一个 $\mathcal{I}_0$-函数空间。

证明。设 $O \subset X$ 是 $\mathcal{I}$-函数开。若 O 不是开集，则存在一个序列$x_n \in X \setminus O$ 收敛到 $x \in O$. 定义函数 g: $S \longrightarrow X \setminus O$，使得 $g(s) = x_i$若 $s \in S_i$. 则 g 是 $\mathcal{I}$- 收敛到 $x \in O$. 因此 $X \setminus O$ 不是 $\mathcal{I}$- 函数闭，这与假设矛盾。□

命题 3.4. 对任意 $A \subset X$.，以下条件等价

(i) $A \subset X$ 是 $\mathcal{I}$-函数开 (ii) 对任意函数 $g:\ S \longrightarrow X$，若其 $\mathcal{I}$-收敛到 $x \in A$，则有$\{s \in S:\ g(s) \in A\} \in \mathcal{I}^+$.($iii$) $|\{s \in S:\ g(s) \in A\}| \geq \omega$ 对每个函数 $g:\ S \longrightarrow X$，若其$\mathcal{I}$-收敛到 $x \in A$.

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii) 令 $A \subset X$ 为 $\mathcal{I}$-函数开，并令 $g:\ S \longrightarrow X$ 为$\mathcal{I}$-收敛到 $x \in A$. 。若可能，令 $C = \{s \in S:\ g(s) \in A\} \in \mathcal{I}$. 。固定一个元素 $a \in X \setminus A$. 。定义函数 $h:\ S \longrightarrow X \setminus A$，使得 $h(s) = g(s)$ 对于 $s \in S \setminus C$，且当 $s \in C$. 时 $h(s) = a$ 。令 U 为 x. 的一个邻域。则

$\{s \in S\colon g(s) \in U\} \cap S \setminus C \subset \{s \in S\colon h(s) \in U\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。因此 $h\colon S \longrightarrow X \setminus A$ 是 $\mathcal{I}$-收敛到 x，这与 A 是 $\mathcal{I}$-函数开矛盾。因此 (ii) 成立。$(ii) \Longrightarrow (iii)$ 由于 $\mathcal{I}$ 是一个容许理想，因此 (iii) 成立。

$(iii) \Longrightarrow (i)$ 若可能，设 $A \subset X$ 不是 $\mathcal{I}$-函数开集。因此，$X \setminus A$ 不是$\mathcal{I}$-函数闭集。因此，存在一个函数 $g\colon S \longrightarrow X \setminus A$，它$\mathcal{I}$-收敛于 $x \in A$，显然 $\{s \in S\colon g(s) \in A\} = \emptyset$，这与 (iii). □矛盾

例 3.4。设 $\mathcal{I}$ 是 S 的一个极大理想，且设 $g\colon S \longrightarrow X$ $\mathcal{I}$-收敛于 $x.$。令 $Y = \{g(s)\colon s \in S\} \cup \{x\}.$。赋予 $\{g(s)\colon s \in S\} \subset Y$ 离散拓扑，并设 x 的一个基本邻域具有如下形式：$\{x\} \cup \{g(s)\colon s \in A\}$，其中 $A \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。赋予此拓扑的 $.Y$ 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间。为证明这一点，设 U 在 $Y.$中是 $\mathcal{I}$-函数开集。不失一般性，设 $x \in U.$。由于 $\mathcal{I}$ 是极大的，根据命题 3.4(ii)，我们有 $\{s \in S\colon g(s) \in U\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。因此 $\{x\} \cup \{g(s) \in U\} \subset U$，这意味着 U 在 $Y.$中是开集

引理 3.3. 设 $X = \prod X_i$ 具有乘积拓扑。那么，函数 $f :_{i \in \Lambda} S \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{I}$-收敛到 $x = (x_i)$ 的，当且仅当对于每个 $i \in \Lambda.$，$\pi_i \circ f$ 都是 $\mathcal{I}$-收敛到 x_i。

证明. 设对于每个 $i \in \Lambda.$，$\pi_i \circ f$ 都是 $\mathcal{I}$-收敛到 x_i。设 $O = \prod O_i$ 是 X 中包含 $x.$ 的一个基本$_{i \in \Lambda}$开集。令 $O_i = U_i$，其中 $i = m_1, m_2, \cdots, m_k$，否则取 $O_i = X_i$。那么对于每个 $i = m_1, m_2, \cdots, m_k.$，$\{s \in S\colon (\pi_i \circ f)(s) \in U_i\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。现在 $\bigcap_{i \in \{m_1, m_2, \cdots, m_k\}} \{s \in S\colon (\pi_i \circ f)(s) \in U_i\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。由此可得结论。显然，逆命题也成立。

□

命题 3.5. 设 $X = \prod X_i$ 具有乘积拓扑，且 O 是 $_{i \in \Lambda}\mathcal{I}$-函数开集。则对每个 $i \in \Lambda.$，$\pi_i(O)$ 在 X_i 中是 $\mathcal{I}$- 函数开集

证明. 若不然，设 $\pi_i(O)$ 在 $X_i.$ 中不是 $\mathcal{I}$-函数开集。那么存在函数 $g\colon S \longrightarrow X_i$，它 $\mathcal{I}$-收敛到 $x \in \pi_i(O)$，且 $\{s \in S\colon g(s) \in \pi_i(O)\} \in \mathcal{I}.$。现在固定某个 $a_j \in \pi_j(O)$，其中 $j \neq i.$。定义函数 $h\colon S \longrightarrow X$如下

$$(\pi_j \circ h)(s) = \begin{cases} a_j & \text{if} \quad j \neq i \\ g(s) & \text{if} \quad j = i. \end{cases}$$

令 $y =(y_i)$ 定义如下。

$$y_j = \begin{cases} a_j & \text{if} \quad j \neq i, \\ x & \text{if} \quad j = i. \end{cases}$$

则 $h: S \longrightarrow X$ 收敛于 y （根据引理 3.3）。此外， $\{s \in S: g(s) \in \pi_i(O)\} = \{s \in S: h(s) \in O\} \in \mathcal{I}$，这与 O 是 $\mathcal{I}$-函数开相矛盾。

□

现在我们陈述关于 $\mathcal{I}$-函数空间的一些基本结果，不再给出证明。

(i) 设 $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ 是 S 的两个理想，且 X 是一个空间。若 $U \subset X$ 是 $\mathcal{J}$-函数开集，则它是 $\mathcal{I}$-函数开集。

(ii) 设 $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ 是 $S.$ 的两个理想。若 X 是 $\mathcal{I}$-函数，则它是 $\mathcal{J}$-函数。

(iii) 假设 $\{\mathcal{I}_\alpha: \alpha \in A\}$ 是 $S.$ 的一族理想。若 X 是一个空间，且对某个 $\alpha \in A$， $U \subset X$ 是 $\mathcal{I}_\alpha$-函数开集，则 U 是 $\bigcap \mathcal{I}_\alpha$-函数$_{\alpha \in A}$ 开集。

引理 3.4. 设 $\mathcal{I}$ 是 $S.$ 的一个极大理想。若 U、 V 是 X 的两个 $\mathcal{I}$-函数开子集，则 $U \cap V$ 也是 $\mathcal{I}$-函数开集。

证明。令 $g: S \longrightarrow X$ be $\mathcal{I}$-收敛于 $x \in U \cap V.$ 因此， $\{s \in S: g(s) \in U\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$, 且 $\{s \in S: g(s) \in V\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$（由命题 3.4）。现在 $\{s \in S: g(s) \in U\} \cap \{s \in S: g(s) \in V\} = \{s \in S: g(s) \in U \cap V\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，因此 $U \cap V$是 $\mathcal{I}$-函数开集。□

$\mathcal{I}$-函数核反射空间 X 是集合 X ，其上赋予由 X 的 $\mathcal{I}$-函数开子集作为子基所生成的拓扑，该拓扑记为 $\mathcal{I}$-$fX.$显然，对于空间 X， $\mathcal{I}$-fX比 $X.$ 的拓扑更精细。此外，如果 $\mathcal{I}$ 是 S的极大理想，那么所有$\mathcal{I}$-函数开集的集合本身构成 X.上的一个拓扑

定义 3.3. 设 $\mathcal{I}$ 是 S 的一个理想，且 $A \subset X.$ 。若存在一个 $E \in \mathcal{I}$ ，使得对所有$s \in S \setminus E.$， $f(s) \in A$ ，则称函数 $f: S \longrightarrow X$ 为 $\mathcal{I}$-最终属于 A

命题 3.6. 设 $\mathcal{I}$ 是 S 的一个极大理想。则 $A \subset X$ 是 $\mathcal{I}$-函数开，当且仅当对于每个 $\mathcal{I}$-收敛到 A 中某一点的函数，它最终属于 $A.$

证明. 该结论由命题 3.4 得出。 □

定理 3.1. 每个 $\mathcal{I}$-函数空间关于 $\mathcal{I}$-函数开（$\mathcal{I}$-函数闭）子空间都是遗传的。

证明。设 X 是一个 $\mathcal{I}$函数空间。假设 Y 是 X中的一个 $\mathcal{I}$函数开集。那么 Y在 $X.$ 中是开集。设 $U(\subsetneq Y)$在 $Y.$ 中是 $\mathcal{I}$函数开集。我们需要证明 U 在 $X.$ 中是 $\mathcal{I}$函数开集。假设 $g: S \longrightarrow X$ 是

收敛于 $x \in U \subset Y.$。由于 Y 是开集，$\{s \in S: g(s) \in Y\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。设 $y \in Y \setminus U.$。定义函数 $h: S \longrightarrow Y$，使得 $h(s) = g(s)$，如果 $g(s) \in Y$，并且 $h(s) = y$，如果 $g(s) \notin Y.$。因此，$h: S \longrightarrow X$ 收敛于 $x.$。由于$|\{s \in S: g(s) \notin U\}| = |\{s \in S: h(s) \notin U\}|$，由命题 3.4可知，$U$ 在 $X.$ 中是 $\mathcal{I}$函数开集。由于 X 是 $\mathcal{I}$函数空间，所以 U 在 X 中是开集，因而在 Y.中也是开集。

设 Y 是 $\mathcal{I}$-函数闭子集，且 $X.$。则 Y 在 $X.$ 中是闭的。设 $F(\subsetneq Y)$ 是 $\mathcal{I}$-函数闭子集，且 $Y.$。我们需要证明 F 是 $\mathcal{I}$-函数闭子集。假设 $g: S \longrightarrow F$ $\mathcal{I}$-收敛于 $x.$。因此 $x \in Y$，因为 Y 是闭的。所以 $x \in F$，因为 F 是 $\mathcal{I}$-函数闭子集，且 $Y.$。因此 F 是 $\mathcal{I}$-函数闭子集，且 X，所以 F 是 X 的闭子集，从而也是 $Y.$　　□的闭子集

定理 3.2. $\mathcal{I}$-函数空间在拓扑和下保持不变。

定理3.3. $\mathcal{I}$-函数空间的任意商空间都是 $\mathcal{I}$-函数空间。

证明。设 X 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间，且设 $f: X \longrightarrow Y$ 是一个商映射。设 $F \subset Y$ 是 $\mathcal{I}$-函数闭集。若 F 不是闭集，则 $f^{-1}(F)$ 不是闭集（因为 f 是一个商映射），因此 $f^{-1}(F)$ 不是 $\mathcal{I}$-函数闭集。于是存在一个函数 $g: S \longrightarrow f^{-1}(F)$，其 $\mathcal{I}$-收敛于 $x \notin f^{-1}(F)$。由于 F 是 $\mathcal{I}$-函数闭集且 f 连续，我们得到 $f \circ g: S \longrightarrow F$ $\mathcal{I}$-收敛于 $f(x) \in F.$这与 $x \notin f^{-1}(F).$　　□矛盾

定理 3.4。每个 $\mathcal{I}$-函数空间都是某个度量空间的商，条件是 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$，即命题 3.3 中定义的理想。

证明。设 X 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间，且设 $t_n = \frac{1}{n+1}$，$n \in \mathbb{N}.$定义函数 $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$，使得 $f(s) = t_n$ 当 $s \in S_n.$ 时成立。则 f $\mathcal{I}$-收敛于 0。取 $Y = \{\frac{1}{n+1}: n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$。$Y$ 的拓扑由 $\mathbb{R}.$ 的通常度量拓扑诱导。显然，$O \subset Y$ 是开集，当且仅当 $0 \notin O$，或者若 $0 \in O$，则 $f(s) \in O$，其中 $s \in A$ 对某个 $A \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ 成立。令 $\mathcal{S} = \{g: S \longrightarrow X: g$ $\mathcal{I}$- 收敛于某个 $g_0 \in g(S)\}.$。记 $\{(g(s): s \in S)\} = Z$，令 d 为 $Z \times Y = \{$ 上的度量，其中 Z，$y: y \in Y\}$ 定义为 $d(Z, a)$，$(Z, b)) = |a - b|.$

现在考虑拓扑和

$$L = \bigoplus_{Z \in \mathcal{S}} Z \times Y.$$

我们注意到，$A \subset L$ 是开集当且仅当 $\{y \in Y: (Z, y) \in A\}$ 在 Y.中是开集。考虑由 Φ定义的映射 $\Phi: L \longrightarrow X$，其中 $\Phi(Z, 0) = g_0$ 且 $\Phi(Z, f(s)) = g(s)$。显然，Φ 是满射。现在我们证明 Φ 是商映射。

设 $U \subset X$ 是开集。则对每个 $g: S \longrightarrow X$，收敛于 $a \in$的 $\mathcal{I}$，U，$\{s \in S: g(s) \in U\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。若$(Z, 0) \in \Phi^{-1}(U)$，则 $g_0 \in U$，并且 $\{s \in S: g(s) \in U\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。记 $E = \{s \in S: g(s) \in U\}$.根据$\Phi$的定义，$\Phi(Z, f(s)) = g(s) \in U$对每个 $s \in E$.均成立。因此，$\Phi^{-1}(U)$是 L.中的开集。

再者，若 U 在 X 中不是开集，则存在函数 $g: S \longrightarrow (X \setminus U)$，其 $\mathcal{I}$-收敛于 $g_0 \in U$.。因此，$\{y \in Y: (Z, y) \in \Phi^{-1}(U)\} = \{0\}$，它在 Y. 中不是开集。因此，$\Phi^{-1}(U)$ 在 L. □中不是开集。

4. $\mathcal{I}$-函数连续性

本节主要研究 $\mathcal{I}$-函数连续性的概念。回顾一下，若映射 f 从空间 X 到另一个空间 Y，且对于 Y 中任意序列开集 U，$f^{-1}(U)$ 都是 X. 中的序列开集，则称该映射序列连续 [2] 。文献 [2] 证明，映射 $f: X \longrightarrow Y$ 序列连续，当且仅当 f 保持序列的收敛性；也就是说，对于 X 中收敛于 x 的每个序列 $(x_n: n \in \mathbb{N})$，序列 $(f(x_n): n \in \mathbb{N})$ 收敛于 $f(x)$。文献 [36], 的作者根据 $\mathcal{I}$-开集引入了 $\mathcal{I}$-连续性的概念。我们将这一概念扩展到函数的表述中，并给出以下定义。

定义 4.1. 设 $\mathcal{I}$ 是 S 的理想，且 $f: X \longrightarrow Y$ 是一个映射。若对于函数 $g: S \longrightarrow X$，$\mathcal{I}$收敛于 x，蕴含 $f \circ g$ 收敛于 $f(x)$，则称(i) f 是一个 $\mathcal{I}$-函数收敛保持映射。(ii) 若对 Y中的任意 $\mathcal{I}$-函数开集 U，$f^{-1}(U)$都是 X.中的 $\mathcal{I}$-函数开集，则称 f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。

若在定义 4.1 中用函数开集代替 $\mathcal{I}$-函数开集，我们就称 f 为简单函数连续。

引理 4.1. 设 $Y \subset X$，且 U 在 X. 中是 $\mathcal{I}$-函数开集，则 $U \cap Y$ 是 Y.中的$\mathcal{I}$-函数开集。

证明. 设 $g: S \longrightarrow Y$ $\mathcal{I}$收敛于 $y \in U \cap Y$.。则 $\{s \in S: g(s) \in U\} \in \mathcal{I}^+$（由命题 3.4），因此 $\{s \in S: g(s) \in U \cap Y\} \in \mathcal{I}^+$. □。

引理 4.2. 设 $\mathcal{I}$ 是 S 的极大理想，且 $U \subset Y \subset X$. 。假设 U 在 Y 中是 $\mathcal{I}$-函数开集，且 Y 在 X. 中是 $\mathcal{I}$-函数开集。那么 U 在 X. 中是 $\mathcal{I}$-函数开集。

证明。若 U 不是 $\mathcal{I}$-函数开于 X，则存在一个映射 $f: S \longrightarrow X$，$\mathcal{I}$-收敛于某个 $a \in U$，且 $f^{-1}(U) \in \mathcal{I}$.。由于 Y在 X中是 $\mathcal{I}$-函数开，且 $\mathcal{I}$是极大，故 $f^{-1}(Y) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。因此 $f^{-1}(Y \setminus U) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U) \in$

$\mathcal{F}(\mathcal{I})$。设 $F = f^{-1}(Y \setminus U)$。定义映射 $\phi\colon S \longrightarrow Y$如下:

$$\phi(s) = \begin{cases} f(s) & \text{if} \quad s \in F \\ a & \text{if} \quad s \notin F. \end{cases}$$

显然, ϕ 收敛于 $a.$ 。此外, $\phi^{-1}(U) \in \mathcal{I}$, 这与 U 在 $Y.$ □中是$\mathcal{I}$-函数开集相矛盾。

定理 4.1. 设 X 是一个空间, 且 $\mathcal{U}$ 是由 $\mathcal{I}$-函数开集构成的 X 的覆盖。那么, 映射 $f\colon X \longrightarrow Y$是 $\mathcal{I}$-函数连续的, 当且仅当对每个 $U \in \mathcal{U}$, 限制 $f|_U$ 是 $\mathcal{I}$-函数连续的, 条件是 $\mathcal{I}$ 为极大。

证明. 设映射 $f\colon X \longrightarrow Y$是 $\mathcal{I}$-函数连续的, 且设 $U \in \mathcal{U}.$ 。假设$V \subset Y$是 $\mathcal{I}$-函数开集。那么, $(f|_U)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U$在 $U.$ 中是 $\mathcal{I}$-函数开集。反过来, 设条件成立。那么, 根据引理 4.2, 对于任意$\mathcal{I}$-函数开集 $V \subset Y$, $f^{-1}(V) \cap U$在 $X.$中是 $\mathcal{I}$-函数开集。由于 $X = \bigcup \mathcal{U}$, $f^{-1}(V) = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} (f|_U)^{-1}(V)$, 并且是 $\mathcal{I}$-函数开集, 因为它们各自都是如此。

□

在 [36, 定理 4.2], 中, 已证明每个连续映射都保持序列的 $\mathcal{I}$-收敛; 若一个映射保持序列的 $\mathcal{I}$-收敛, 则该映射是 $\mathcal{I}$-连续的。这里也有类似的结果。

命题 4.1. 设 X、Y是两个空间, 且 $f\colon X \longrightarrow Y$是一个映射。

(i) 若 f 连续, 则 f 保持 $\mathcal{I}$-泛函收敛。(ii) 若 f 保持 $\mathcal{I}$-泛函收敛, 则 f 是 $\mathcal{I}$-泛函连续的。

下面给出的例子表明, 前述命题的逆命题一般而言并不成立。

例 4.1. 设 $\mathcal{I}$ 是一个极大理想。取例 3.1 中的 $X = \sum_S(\mathcal{I})$, 并赋予 $Y = X$ 离散拓扑。设 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是恒等映射。

显然, $i\colon S \longrightarrow X$, 包含函数不收敛到 $\infty.$ 。设 $S' \subset S$和 $i|_{S'}.$ 。若 $S' \in \mathcal{I}$, 则 i 不能收敛到 $\infty.$

否则, 取一个无限的 $S'' \subset S'$, 满足 $|S' \setminus S''| = |S'|.$ 。若 $S'' \in \mathcal{I}$, 则 $(S \setminus S'') \cup \{\infty\}$ 是 $\infty.$ 的一个邻域。因此, $i|_{S'}$ 同样不可能收敛到 ∞。

最后, 若 $S'' \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$, 则 $S'' \cup \{\infty\}$ 是 ∞ 的一个邻域, 但它不包含 $i|_{S'}.$ 中除有限项外的所有项。因此, $i|_{S'}$ 不收敛到 ∞。

因此, 从 S 到 X 不存在收敛函数, 除非是最终为常值的映射。所以 f 平凡地保持 $\mathcal{I}_{fin}$-函数收敛。因此

根据命题 4.1， f 也是函数连续的。但显然， f 不连续。

例 4.2. 设 $X = \sum_S(\mathcal{I})$，并设 $Y = \{1, 0\}$ 赋予离散拓扑。此外，设 $\mathcal{I}$ 是 $S.$ 的非极大理想。那么存在 $A \subset S$，使得 $A \in \mathcal{I}^+$ 和 $S \setminus A \in \mathcal{I}^+.$ 均成立。定义映射 $g : X \longrightarrow Y$，使得 $g(x) = 1$ 当 $x \in A$ 时成立，而 $g(x) = 0$ 在其他情况下成立。由于 $(S \setminus A) \cup \{\infty\}$ 是 $\mathcal{I}$-函数开集，因此 g 是$\mathcal{I}$-函数连续的。但 g 不保持 $\mathcal{I}$-函数收敛。

设 $f : X \longrightarrow Y$是一个 $\mathcal{I}$-函数连续映射，并设 $g : S \longrightarrow X$收敛于 $x.$（关于 $\mathcal{I}$）。若 $V \subset Y$是一个包含 $f(x)$ 的 $\mathcal{I}$-函数开集，则根据命题 3.4， $\{s \in S : g(s) \in f^{-1}(V)\} \in \mathcal{I}^+$，因此 $\{s \in S : (f \circ g)(s) \in V\} \in \mathcal{I}^+.$。这一观察立即导出以下结果。

定理 4.2. 设 $\mathcal{I}$ 是 $S.$ 的一个极大理想。那么映射 $f : X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{I}$-函数连续的，当且仅当它保持 $\mathcal{I}$-函数收敛。

对于下一个结果，我们回顾以下定义。若对于来自 $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ 的任意 $(A_n)_{n\in\omega}$，都存在 $A \in \mathcal{F}$，使得对每个 n [29]， $A \setminus A_n$ 都是有限的，则称 $\mathcal{I}$ 为一个 P-理想。

定理 4.3. 设 $\mathcal{I}$ 是一个 P-理想，且 X 是一个第一可数空间。那么，$f : X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{I}$-函数连续的，当且仅当它保持 $\mathcal{I}$-函数收敛。

证明. 由 [29]，可知， $\mathcal{I}$-收敛蕴含函数的 $\mathcal{I}^*$-收敛，因为 $\mathcal{I}$ 是一个 P-理想。设 $f : X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{I}$-函数连续的，并设 $g : S \longrightarrow X$ 收敛于 $x.$（相对于 $\mathcal{I}$）。那么存在 $A \in \mathcal{I}$，使得 $g \restriction_{S\setminus A} \longrightarrow X$ 收敛于 $x.$。设 U 是 $f(x)$ 的一个开邻域。那么， $f^{-1}(U)$ 在 X 中是 $\mathcal{I}$-函数开集，因此是一个包含 $x.$ 的函数开集。因此，对于所有 $s \in S \setminus (A \cup F)$，都有 $g(s) \in f^{-1}(U)$（对于 S 的某个有限子集 F），从而对于所有 $s \in S \setminus (A \cup F)$，都有 $(f \circ g)(s) \in U$。由 $\mathcal{I}$ 的可容许性可知， $\{s \in S : (f \circ g)(s) \in U\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。

反向结论可由命题 4.1 直接推出。 □

接下来，我们探讨连续性与 $\mathcal{I}$-f-连续性这两个概念之间的相互关系。

定理 4.4. 设 f 是从一个 $\mathcal{I}$-函数空间 X 到另一个空间 $Y.$ 的映射，则 f 连续，当且仅当 f 是 $\mathcal{I}$-函数连续。

证明. 设 $f : X \longrightarrow Y$连续。根据命题 4.1， f 是 $\mathcal{I}$-函数连续。

由于每个开集都是 $\mathcal{I}$-函数开，且 X 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间，因此逆命题立即成立。
□

推论 4.1. 设 f 是从函数空间 X 到另一个空间 Y. 的映射。则以下命题等价。

(1) f 是连续的。(2) f 保持 $\mathcal{I}$-函数收敛。
(3) f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。(4) f 是函数连续的。

证明。(1) $\Longrightarrow$ (2) 由命题 4.1(i) 得出。(2) $\Longrightarrow$ (3) 直接由命题 4.1(ii) 得出。由于每个函数空间都是 $\mathcal{I}$-函数空间，且连续性蕴含函数连续性，前述定理证明了 (3) $\Longrightarrow$ (4)。最后，(4) $\Longrightarrow$ (1)，因为 X 是一个函数空间。□

定理 4.5。设 X 是一个序列空间，且 $\mathcal{I}$ 如命题 3.3 中所定义。则对于映射 $f: X \longrightarrow Y$，当且仅当 f 保持$\mathcal{I}$-函数收敛时， f 是连续的。

证明。设 $V \subset Y$ 是一个开集。若 $f^{-1}(V)$ 不是开集，则 $f^{-1}(V)$ 不是 $\mathcal{I}$-函数开集（由命题 3.3）。于是存在一个函数 $g: S \longrightarrow X$，它 $\mathcal{I}$-收敛到 $x \in f^{-1}(V)$，使得 $\{s \in S: g(s) \in f^{-1}(V)\} \in \mathcal{I}.$。因此 $f \circ g: S \longrightarrow Y$ $\mathcal{I}$-收敛到 $f(x)$。但是 $\{s \in S: g(s) \in f^{-1}(V)\} \in \mathcal{I} \Longrightarrow \{s \in S : (f \circ g)(s) \in V\} \in \mathcal{I}$，这与 V 是 $\mathcal{I}$- 函数开集矛盾。反向显然。□

命题 4.2。若 $f: X \longrightarrow Y$ 对每个 $\mathcal{J} \in \Theta(\mathcal{I})$ 都保持 $\mathcal{J}$-函数收敛，则 f 保持 $\mathcal{I}$-函数收敛。

推论 4.2. 若对每个 $\mathcal{J} \in \Theta(\mathcal{I})$， $f: X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{J}$-函数连续的，则 f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。

证明. 该结果由命题 4.1 和 4.2 得出。 □

例 4.3. 存在一个映射，它保持 $\mathcal{I}_{fin}$-函数收敛，但对 $\mathcal{J} \in \Theta(\mathcal{I}_{fin})$ 而言并非 $\mathcal{J}$-函数连续。设 $X = \sum_S(\mathcal{J})$，并令 $Y = S$ 赋予离散拓扑。定义映射 $f: X \longrightarrow Y$，使得 $f(s) = s$ 当 $s \in S$，且对于某个特定的 $a \in S.$， $f(\infty) = a$。不存在从 S 到 X 的收敛函数。因此， f 保持 $\mathcal{I}_{fin}$-函数收敛，但并非 $\mathcal{J}$-函数连续，因为 $S \setminus \{a\}$ 是 $\mathcal{J}$-函数闭的，而 $f^{-1}(S \setminus \{a\}) = S$ 在 $X.$ 中不是 $\mathcal{J}$-函数闭的。

引理 4.3. 设 $X = \prod_{i \in \Lambda} X_i$ 具有乘积拓扑。则对每个 $i \in \Lambda.$， $\pi_i: X \longrightarrow X_i$ 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。

证明。由引理 3.3 可得。 □

命题 4.3。设 $X = \prod X_i$ 具有乘积拓扑，且 Y 是一个 $i\in\Lambda$ 空间。则映射 $f:$ $Y \longrightarrow X$ 是 $\mathcal{I}$-函数连续的，当且仅当对于每个 $i \in \Lambda$，$\pi_i \circ f$ 也是如此，前提是 $\mathcal{I}$ 是极大的。

证明。设 $\pi_i \circ f$ 对每个 $i \in \Lambda$. 都是 $\mathcal{I}$-函数连续的。设 $g:$ $S \longrightarrow Y$ 收敛于 y.（相对于 $\mathcal{I}$）。则 $\pi_i \circ f \circ g:$ $S \longrightarrow X_i$ 对每个 $i \in \Lambda$ 都收敛于 $(\pi_i \circ f)(y)$（相对于 $\mathcal{I}$）（由定理 4.2）。根据引理 3.3，可得 $f \circ g$ 收敛于 $f(y)$（相对于 $\mathcal{I}$）。因此，f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的（由定理 4.2）。

反之，设 f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。设 $U_\alpha \subset X_i$ 在 X_i 中是 $\mathcal{I}$-函数开集，其中 $i \in \Lambda$.。现在 $(\pi_i \circ f)^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_\alpha))$，其中 $\pi_i^{-1}(U_\alpha)$ 在 X 中是 $\mathcal{I}$-函数开集（由引理 4.3）。因此，$f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_\alpha))$ 在 Y 中是 $\mathcal{I}$-函数开集，因为 f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的 □

5. $\mathcal{I}$-函数商与 $\mathcal{I}$-函数覆盖映射

在文献中（参见论文 [2, 26–28]），商映射、序列商映射和序列覆盖映射的概念在序列空间的研究中发挥着重要作用。在 [36] 中，利用序列的理想收敛，这些概念已扩展为 $\mathcal{I}$-商映射和 $\mathcal{I}$-覆盖映射。本节旨在通过定义任意集合 S. 上的函数，进一步扩展这些概念

设 X、Y 是两个空间。回顾一下，满映射 $f: X \longrightarrow Y$ 称为商映射，当且仅当 U 在 Y 中是开集；$f^{-1}(U)$ 在 X 中是开集；f 称为序列商映射 [2]，当且仅当 U 在 Y 中是序列开集；$f^{-1}(U)$ 在 X 中是序列开集；f 称为 $\mathcal{I}$-商映射 [36]，若 U 在 Y 中是 $\mathcal{I}$-开集，则 $f^{-1}(U)$ 在 X 中是 $\mathcal{I}$-开集；f 称为序列覆盖映射 [2]，如果每当 $(y_n:$ $n \in \mathbb{N})$ 是 Y 中一个收敛到 $y \in Y$ 的序列时，就存在 X 中的一个序列 $(x_n: n \in \mathbb{N})$，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x_n \in f^{-1}(y_n)$，并且 $x \in f^{-1}(y)$，使得 x_n 收敛到 x；f 称为 $\mathcal{I}$-覆盖映射 [36]，如果每当 $(y_n: n \in \mathbb{N})$ 是 Y 中一个 $\mathcal{I}$-收敛到 $y \in Y$ 的序列时，就存在 X 中的一个序列 $(x_n: n \in \mathbb{N})$，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x_n \in f^{-1}(y_n)$，并且 $x \in f^{-1}(y)$，使得 $(x_n: n \in \mathbb{N})$ 是一个 $\mathcal{I}$-收敛到 x. 的序列

下面的定义将沿用这一思路给出。

定义 5.1. 设 f 是从空间 X 到另一个空间 Y.(i) 的满射。若且唯若 U 在 Y 中是 $\mathcal{I}$-函数开集，当且仅当 $f^{-1}(U)$ 在 X.(ii) 中是 $\mathcal{I}$-函数开集，则称 f 为 $\mathcal{I}$-函数商。若对任意 $g:$ $S \longrightarrow Y$，$\mathcal{I}$ 收敛到 $y \in Y$，都存在函数 $h:$ $S \longrightarrow X$，满足对所有 $s \in S$ 和 $x \in f^{-1}(y)$，均有 $(f \circ h)(s) = g(s)$，且 h 收敛到 x.，则称 f 为 $\mathcal{I}$-函数覆盖。

如果在定义 5.1 中用函数开集代替 $\mathcal{I}$-函数开集，我们就称 f 为简单函数商。

定理 5.1. 设 X 是一个空间， Y 是一个非空集合。再设 $f:X \longrightarrow Y$ 是一个满射，且 $\mathcal{I}$ 是 $S.$ 的极大理想。则 Y 上存在一个最强拓扑，使得相对于该拓扑， f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。

证明. 设 $\mathcal{J} = \{V \subset Y\colon\ f^{-1}(V)$ 在 $X\}.$ 中是 $\mathcal{I}$-函数开集。则 $\mathcal{J}$ 是 Y 上的一个拓扑，相对于该拓扑， f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。接下来，设 Y 上有任意另一个拓扑 $\mathcal{J}'$ ，相对于该拓扑， f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。于是，对每个 $\mathcal{J}'$-函数开集 $V \subset Y$， $f^{-1}(V)$ 在 $X.$ 中是 $\mathcal{I}$- 函数开集。因此，对每个 $V \in \mathcal{J}'$， $V \in \mathcal{J}$，从而 $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$，证毕。□

在上述定理中， f 是一个 $\mathcal{I}$-函数商映射。

定义 5.2. 若对于任何 U在 $X.$中为 $\mathcal{I}$-函数开集的情形， $f(U)$在 Y中都是 $\mathcal{I}$-函数开集，则称映射 $f\colon\ X \longrightarrow Y$为 $\mathcal{I}$-函数开。

命题 5.1. 每个 $\mathcal{I}$-函数连续、 $\mathcal{I}$-函数开且为满射的映射都是 $\mathcal{I}$-函数商映射。

命题 5.2. 设 $f\colon\ X \longrightarrow Y$ 和 $g\colon\ Y \longrightarrow Z$ 是两个映射。则以下结论成立。

(i) 若 f 和 g 是 $\mathcal{I}$-函数商映射，则 $g \circ f$ 是一个 $\mathcal{I}$-函数商映射。

(ii) 若 f 和 $g \circ f$ 是 $\mathcal{I}$-函数商映射，则 g 是一个 $\mathcal{I}$-函数商映射。

证明。(i) 若 g、 f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的，则 $g \circ f$ 也是 $\mathcal{I}$-函数连续的。再者，对于任意 $V \subset Z$， $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1}(g^{-1}(V)))$，因此 $g \circ f$ 是一个 $\mathcal{I}$-函数商映射。

(ii) 设 $V \subset Z$，使得 $g^{-1}(V)$ 在 $Y.$ 中是 $\mathcal{I}$-函数开集。因此， $(f^{-1}(g^{-1}(V)))$ 在 X 中是 $\mathcal{I}$- 函数开集，因为 f 是一个 $\mathcal{I}$- 函数商映射。现在， $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1}(g^{-1}(V)))$，并且 $g \circ f$ 是 $\mathcal{I}$-函数商映射，二者共同推出 V 在 $Z.$ 中是 $\mathcal{I}$-函数开集。接下来，设 V 在 $Z.$ 中是 $\mathcal{I}$-函数开集。由于 $g \circ f$ 是 $\mathcal{I}$-函数连续的，且 f 是 $\mathcal{I}$-函数商映射，因此 $g^{-1}(V)$ 在 $Y.$ □中是 $\mathcal{I}$-函数开集。

命题 5.3. 若 $\mathcal{I}$ 是 $S.$ 的极大理想，则 $\mathcal{I}$-函数商映射在有限乘积下保持不变

证明。设 $f_i\colon\ X_i \longrightarrow Y_i$ 是针对 $i = 1, 2, \cdots, N.N$ N 的 $\mathcal{I}$-函数商映射。我们定义映射 $f\colon \prod_{i=1} X_i \longrightarrow \prod_{i=1} Y_i$ ，使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_N(x_N)).$$

根据命题 4.3, f 是 $\mathcal{I}$-函数连续的。它也是满射。

N接下来，令 $U \subset \prod Y_i$满足： $f^{-1}(U)$ 是 $\mathcal{I}$函数开。于是$i=1N$存在一个函数 $g : S \longrightarrow \prod Y_i$, $\mathcal{I}$-收敛到 $y \in U$ ，并且 $\{s \in S : g(s) \in_{i=1} U\} \in \mathcal{I}$. 因此，对于 $i = 1, 2, \cdots, N$， $\pi_i \circ g : S \longrightarrow Y_i$ 是 $\mathcal{I}$-收敛到 $\pi_i(y)$（由引理 3.3）。若对每个 $i = 1, 2, \cdots, N$，都有 $\{s \in S : (\pi_i \circ g)(s) \in \pi_i(U)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，$N$那么 $\{s \in S : g(s) \in U\} = \bigcap \{s \in S : (\pi_i \circ g)(s) \in \pi_i(U)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，这就产生了矛盾。因此，存在 i 使得 $\{s \in S : (\pi_i \circ g)(s) \in \pi_i(U)\} \notin \mathcal{F}(\mathcal{I})$。 $\mathcal{I}$ 的极大性意味着 $\{s \in S : (\pi_i \circ g)(s) \in \pi_i(U)\} \in \mathcal{I}$. 因此，$\pi_i(U)$ 在 Y_i. 中不是 $\mathcal{I}$函数开。由于 $f_i^{-1}(\pi_i(U))$ 也是如此，它不是 $\mathcal{I}$函数开，而 $\mathcal{I}$ 是 f_i函数商。但 $(\pi_i \circ f^{-1})(U) = f_i^{-1}(\pi_i(U))$，这与 $f^{-1}(U)$ 是 $\mathcal{I}$函数开这一事实相矛盾（由命题 3.5）。

□

在 [36] 中研究过的 $\mathcal{I}$-商、商与 $\mathcal{I}$-覆盖映射之间的相互关系结果，可以进一步推广如下。

命题 5.4. 设 f 是从空间 X 到空间 Y. 的映射（i）。若 f 是 $\mathcal{I}$-函数连续且为 $\mathcal{I}$-函数覆盖映射，则 f 是 $\mathcal{I}$-函数商映射。（ii）若 f 是单射且为 $\mathcal{I}$-函数商映射，则当 $\mathcal{I}$ 是极大理想时， f 是 $\mathcal{I}$-函数覆盖。

证明. (1) 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{I}$-函数连续且为 $\mathcal{I}$-函数覆盖映射。假设 $U \subset Y$ 满足 $f^{-1}(U)$ 是 $\mathcal{I}$-函数开。若 U 不是 $\mathcal{I}$-函数开，则存在一个函数 $g : S \longrightarrow Y$， $\mathcal{I}$-收敛到 $y \in U$ ，使得 $\{s \in S : g(s) \in U\} \in \mathcal{I}$. 。由于 f 是 $\mathcal{I}$-函数覆盖，因此存在一个函数 $h : S \longrightarrow X$， $\mathcal{I}$-收敛到 $x \in X$ ，使得 $f \circ h = g$ 且 $f(x) = y$.。此外， $\{s \in S : g(s) \in U\} = \{s \in S : (f \circ h)(s) \in U\} = \{s \in S : h(s) \in f^{-1}(U)\}$，这意味着 $f^{-1}(U)$ 在 X. 中不是 $\mathcal{I}$-函数开

(ii) 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是一个单射且 $\mathcal{I}$-函数商映射。设 $g : S \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{I}$-收敛于 y. 。由于 f 是单射且满射，对于每个$s \in S$ ，存在唯一的 $x_s \in X$ ，使得 $f(x_s) = g(s)$。定义函数$h : S \longrightarrow X$ ，使 $h(s) = x_s$ ，并令 $f(x) = y$. 。若 h 不 $\mathcal{I}$-收敛于 x，则存在包含 x 的开集 O ，使得 $\{s \in S : h(s) \in O\} \notin \mathcal{F}(\mathcal{I})$。由于$\mathcal{I}$是极大的， $\{s \in S : h(s) \in O\} \in \mathcal{I}$，因此 $\{s \in S : (f \circ h)(s) \in f(O)\} \in \mathcal{I}$（因为 f是单射），即 $\{s \in S : g(s) \in f(O)\} \in \mathcal{I}$（因为 $f \circ h = g$）。现在 $f(O)$ 是

$\mathcal{I}$-函数开于 Y，因为 $f^{-1}(f(O)) = O$ 在 X 中是 $\mathcal{I}$-函数开集，并且 f是$\mathcal{I}$-函数商。此与命题 3.4 矛盾。□

接下来的结果确立了何时 $\mathcal{I}$-函数商映射成为商映射，反之亦然。

定理 5.2. 设 f 是从 $\mathcal{I}$-函数空间 X到另一个空间 Y. 的连续映射。那么，当且仅当 f 是 $\mathcal{I}$-函数商且 Y 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间时，f 才是商映射。

证明. 首先，设 $f\colon X \longrightarrow Y$是商映射，且 $F \subset Y$不是闭集。由于 f是商映射，$f^{-1}(F)$在 X中不是闭集。因此，$f^{-1}(F)$不是$\mathcal{I}$-函数闭的，因为 X 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间。于是，由定理 3.4，存在函数 $g\colon S \longrightarrow f^{-1}(F)$，它 $\mathcal{I}$-收敛于 $x \in X \setminus f^{-1}(F)$。因此，$f \circ g\colon S \longrightarrow F$是 $\mathcal{I}$-收敛于 $f(x) \in Y \setminus F$的，进而 F不是 $\mathcal{I}$-函数闭的。由此，Y是一个 $\mathcal{I}$-函数空间。设 $F \subset Y$满足 $f^{-1}(F)$是 $\mathcal{I}$-函数闭的。现在，若 F不是 $\mathcal{I}$-函数闭的，则 F不是闭集。因此，$f^{-1}(F)$不是闭集（因为 f是商映射）。由于 X是一个$\mathcal{I}$-函数空间，$f^{-1}(F)$不是 $\mathcal{I}$-函数闭的。

反之，设 f 是一个 $\mathcal{I}$-函数商映射，且 Y 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间。取 $F \subset Y$，使得 $f^{-1}(F)$ 在 X 中是闭集，因而是 $\mathcal{I}$-函数闭的。由于 f 是一个 $\mathcal{I}$-函数商映射，F 是 $\mathcal{I}$-函数闭的。Y 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间，因此 F 是闭集。由此可知，f 是一个商映射。□

一般而言，$\mathcal{I}$-函数商映射并非商映射，反之亦然。下一个结果通过考察 $\mathcal{I}$-函数空间与 $\mathcal{I}$-函数商映射和商映射之间的相互关系来刻画 $\mathcal{I}$-函数空间，其证明方法与 [36, 定理 5.6] 的证明相同。

定理 5.3. 设 X 是一个空间，$\mathcal{I}$ 是 $S.$ 的一个极大理想。那么，当且仅当每个到 X 的 $\mathcal{I}$-函数商满映射都是商映射时，X 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间。

定理 5.4. 设 $\mathcal{I}$ 是一个极大理想。满映射 $p\colon X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{I}$-函数商映射，当且仅当它具有如下性质：对于任意空间 W 和映射 $f\colon Y \longrightarrow W$，$f \circ p$ 的 $\mathcal{I}$-函数连续性蕴含 $f.$的 $\mathcal{I}$-函数连续性。

证明。首先，设 $p\colon X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{I}$-函数商，并设 f 是从 Y 到某个空间 $W.$ 的映射。取 $f \circ p$，它是一个 $\mathcal{I}$-函数连续映射。设 $F \subset W$ 是 $\mathcal{I}$-函数闭的。那么 $(f \circ p)^{-1}(F) = p^{-1}(f^{-1}(F))$ 在 $X.$ 中是 $\mathcal{I}$-函数闭的。由于 $p\colon X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{I}$-函数商，$f^{-1}(F)$ 在 $X.$中是 $\mathcal{I}$-函数闭的。

反过来，设该条件成立。考虑 $F \subset Y$，使得 $p^{-1}(F)$ 是$\mathcal{I}$-函数闭的。令 $W = \{0, 1\}.$。定义映射 $f\colon Y \longrightarrow W$，使得 $f(y) = 1$

若 $y \in F$ 且 $f(y) = 0$，则若 $y \in Y \setminus F$.。因此 $(f \circ p)(x) = 1$，若 $x \in p^{-1}(F)$ 且 $(f \circ p)(x) = 0$，则若 $x \notin p^{-1}(F)$。与定理 5.1 中一样，W上的拓扑由$f \circ p$.诱导。由于 $(f \circ p)^{-1}(\{1\}) = p^{-1}(F)$ 在 X 中是 $\mathcal{I}$-函数闭的，$\{1\}$在 W. 中是 $\mathcal{I}$-函数闭的。因此，由 f的 $\mathcal{I}$-函数连续性可知，F 在 Y. 中是 $\mathcal{I}$-函数闭的。因此，$p : X \longrightarrow Y$是 $\mathcal{I}$-函数商。

□

若 $\mathcal{I}$ 有伪并，则下一个定理可由命题 3.2 直接推出。

定理 5.5. 若 f 是从空间 X 到 Y 的映射，且 $\mathcal{I}$ 有伪并，则以下结论成立。

(1) f 是 $\mathcal{I}$-函数连续，当且仅当 f 函数连续。(2) f 是 $\mathcal{I}$-函数商，当且仅当 f 函数商。

定理 5.6. 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是一个映射，且 $\mathcal{I}$ 有伪并。那么 f 是 $\mathcal{I}$-函数商，当且仅当对于任意函数 $g : S \longrightarrow Y$，若其 $\mathcal{I}$-收敛于 p，则存在一个函数 $h : S \longrightarrow X$，它 $\mathcal{I}$-收敛于某个 $x \in X$，使得 $(f \circ h)(S) \subset g(S)$ 且 $f(x) = p$.

证明. 设 f 是一个 $\mathcal{I}$-函数商映射。那么 f 是函数商（由定理 5.5 得出）。设 $g : S \longrightarrow Y$ $\mathcal{I}$-收敛于 p.。由于 $\mathcal{I}$ 有伪并，根据引理 3.1，我们得到一个函数 $g' : S \longrightarrow Y$，它收敛于 p.。现在 $f^{-1}(g'(S) \setminus \{p\})$ 不是函数闭的，因此我们得到一个函数 $k : S \longrightarrow f^{-1}(g'(S) \setminus \{p\})$，它收敛于 $a \notin f^{-1}(g'(S) \setminus \{p\})$。现在 $(f \circ k) : S \longrightarrow g'(S)$ 收敛于 $f(a) = p$.

反之，设该条件成立，并设 $F \subset Y$，使得 $f^{-1}(F)$ 是 X. 中的一个$\mathcal{I}$-函数闭集。设 $g : S \longrightarrow F$ 是 $\mathcal{I}$-收敛于 $y \in Y$. 的。则存在一个无限集 $S' \subset S$，且 $g|_{S'}$ 收敛于 y.。设 $\Phi = g|_{S'}$，并设$h : S \longrightarrow S'$ 是满足对每个 $s \in S$.均有 $(\Phi \circ h)(s) = g(s)$ 的满映射。则 $(\Phi \circ h)$ 收敛于 y.。因此，存在一个函数 $k : S \longrightarrow f^{-1}((\Phi \circ h)(S))$，它 $\mathcal{I}$-收敛于 $x \in f^{-1}(y)$。由于 $f^{-1}(F)$ 是 $\mathcal{I}$-函数闭的，$x \in f^{-1}(F)$，因此 $y \in F$.

□

6. $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间

回顾一下，如果对于每个 $A \subset X$ 满足 $x \in cl(A)$，都存在一个位于 A 中的序列，该序列收敛（分别地，统计收敛、$\mathcal{I}$-收敛）于 x.，则称空间 X 是 Fr´échet-Uryshon [13]（分别为统计 Fr´échet-Uryshon [10]、$\mathcal{I}$-Fr´échet-Uryshon [36]）。我们可以按如下方式将这些概念推广到 $\mathcal{I}$-函数 Fr´échet-Uryshon 空间。

定义 6.1. 如果对于每个 $A \subset X$ 和每个 $x \in cl(A)$，都存在一个函数 $f : S \longrightarrow A$，其 $\mathcal{I}$-收敛于 x.，则称空间 X 为 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间。

命题 6.1. 每个 $\mathcal{I}$-函数 Fr ´echet-Uryshon 空间都是一个 $\mathcal{I}$-函数空间。

我们修改 [34, 例 3.1] ，以说明上述命题的逆命题对极大理想并不成立。

例 6.1. 设 $\mathcal{I}$ 是 S 的极大理想，且 X 是一个非空集合。对每个 $a \in S$，令 g_a 为从 S 到 X 的函数，并取 $G_a = g_a(S)$。固定 $a \in S$ ，假设 $g_a(x) \neq g_a(y)$ 对 $x \neq y \in S.$ 成立。取 $G = \{x_a : a \in S\}$，其中 $x_a \neq x_b$ 对 $a \neq b \in S.$ 成立。考虑 $\bigcup\{G_a$ 外的一点 $\infty : a \in S\}\bigcup G$，并取 $X = \bigcup\{G_a : a \in S\}\bigcup G\bigcup\{\infty\}$.。

X 上的拓扑定义如下：(1) 每个点 $g_a(s)$ 都是孤立点；(2) 对每个 $a \in S$，x_a 的一个开邻域取为形如 $\{x_a\} \cup M_a$ 的集合，其中 $M_a = \{g_a(s) : s \in F\}$ 对某个 $F \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ 成立；(3) ∞ 的每个开邻域都是形如 $\{\infty\}\cup M\cup\{M_a :$ $a \in M\}$ 的集合，其中 $M = \{x_a : a \in F\}$ 对某个 $F \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ 成立。

首先证明 X 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间，取一个 $\mathcal{I}$-函数闭的 $Y \subset X$ 。另设 $y \in cl(Y)$。此时可能出现以下三种情况之一。

情况 1：若 $y \in \bigcup\{G_a : a \in S\}$ ，则 $\{y\}$ 是 y 的一个开邻域，而 $y \in cl(Y)$ 蕴含 $y \in Y.$

情况 2：若 $y \in G$，则对某个 $a \in S.$ ，有 $y = x_a$ 。若可能，设 $y \notin Y.$ 。现在若 $\{s \in S : g_a(s) \in Y\} \in \mathcal{I}$，则 $U = (G_a \setminus Y)\cup\{x_a\}$ 是 $x_a.$ 的一个开邻域。此外，$U\cap Y = \emptyset$ 与 $y \in cl(Y)$ 矛盾。我们定义函数 $h : S \longrightarrow Y\cap G_a$，使得若 $g_a(s) \in Y$，则 $h(s) = g_a(s)$；对于某个固定的 $s_0 \in S.$ ，有 $h(s) = g_a(s_0)$。于是 h $\mathcal{I}$-收敛于 $x_a.$ 。由于 Y 是 $\mathcal{I}$-函数闭的， $x_a = y \in Y$，这就产生了矛盾。因此 $y \in Y.$

情形 3：考虑 $y = \infty.$ 的情形。若 $A = \{s \in S : x_s \in Y\} \in \mathcal{I}$，令 $V = X \setminus \bigcup\{G_a : a \in A\}.$ 。则 V 是 ∞ 和 $V \cap Y = \emptyset$ 的一个开邻域，这与 $\infty \in cl(Y)$ 矛盾。因此，如情形 2 所示，我们得到一个函数 $f : S \longrightarrow Y$，它 $\mathcal{I}$-收敛于 $\infty.$ 。由于 Y 是 $\mathcal{I}$- 函数闭的， $\infty \in Y.$

要证明 X 不是一个 $\mathcal{I}$-函数 Fr ´échet-Uryshon 空间，取 $\infty \in cl(X \setminus (\{x_a :$ $a \in S\} \cup \{\infty\}))$。令 $h : S \longrightarrow X \setminus (\{x_a : a \in S\} \cup \{\infty\})$，使其$\mathcal{I}$-收敛于 $\infty.$ 。定义 $A_a = h(S) \cap G_a$， $a \in S.$ 。若对每个 $a \in S$， $\{s \in S : g_a(s) \in h(S)\} \in \mathcal{I}$，则 $V = \{\infty\} \cup \{G_a \setminus A_a : a \in S\}$ 是一个包含 $\infty.$ 的开集。但 $V \cap h(S) = \emptyset$，这与 h $\mathcal{I}$-收敛于 $\infty.$ 矛盾。因此存在 $a \in S$ ，使得 $\{s \in S : g_a(s) \in h(S)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。如情形 2 所示，可以构造一个函数$k : S \longrightarrow h(S) \cap G_a$ ，使其 $\mathcal{I}$-收敛于 $x_a.$

接下来，如果 $\{s \in S : h(s) \in G_a\} \in \mathcal{I}$ 那么 $k : S \longrightarrow h(S) \cap G_a$ 可以使其 $\mathcal{I}$-收敛到不同于 $x_a.$ 的点。这与引理 ?? 矛盾。现在，如果$\{s \in S : h(s) \in G_a\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，那么 k 可以使其 $\mathcal{I}$-收敛到 $\infty \neq x_a$,

这再次产生矛盾，因为 X 是一个 Hausdorff空间。

考虑定义在 S 上而非定义在 $\mathbb{N}$ 上的函数，我们将 [36,定理 6.3] 重述如下。

定理 6.1. 空间 X 是 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间，当且仅当 X 的每个子集都是 $\mathcal{I}$-函数空间。

命题 6.2. $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间的子空间是 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间。

$\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间在拓扑和下保持不变。

证明. 设 $\{X_a : a \in \Lambda\}$ 是由 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间组成的不相交族，并设 $X = \bigoplus_{a\in\Lambda} X_a$ 是其拓扑和。由命题 6.1 和

定理 3.2， X 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间。对于每个 $Y \subset X$ 以及每个$a \in \Lambda$, $Y \cap X_a$ 在 X_a中是一个 $\mathcal{I}$-函数 Fr´échet-Urysohn 空间，因此也是 X_a. 中的一个 $\mathcal{I}$-函数空间。因此，拓扑和$\bigoplus_{a\in\Lambda} Y \cap X_a$ 成为
一个 $\mathcal{I}$-函数空间。由于 Y 是一个 $\mathcal{I}$-函数空间，因此根据定理 6.1，X 是一个 $\mathcal{I}$-函数 Fr´échet-Urysohn 空间。□

尽管下一个结果的证明思路与 [36,引理 6.9], 类似，但它有其自身的重要意义。

定理 6.3。每个空间都是一个 $\mathcal{I}$-函数覆盖映像，且该映像连续；只要 $\mathcal{I}$ 是 S.的极大理想，它便来自一个 $\mathcal{I}$-函数 Fr´échet-Urysohn 空间。

一般来说，两个 $\mathcal{I}$-函数 Fr´échet-Urysohn 空间的乘积未必是一个$\mathcal{I}$-函数 Fr´échet-Urysohn 空间。这可由对 [32]中的一个例子的修改得到。事实上，两个 $\mathcal{I}$-函数 Fr´échet-Urysohn 空间的乘积也未必是一个 $\mathcal{I}$-函数空间。

映射 $f : X \longrightarrow Y$ 称为伪开映射 [1] ，如果对于每个 $y \in Y$ 以及 X中的开子集 U，若 $f^{-1}(y) \subset U$，则 $f(U)$是 Y.中 y的一个邻域

定理 6.4. 设 f 是从一个 $\mathcal{I}$-泛函 Fr´échet-Uryshon 空间 X 到空间 Y.的伪开映射。如果 f 保持 $\mathcal{I}$-泛函收敛，则Y 是一个 $\mathcal{I}$-泛函 Fr´échet-Uryshon 空间。

证明。设 f 保持 $\mathcal{I}$-函数收敛。设 $A \subset Y$ 并选取 $y \in cl(A)$。若 $f^{-1}(\{y\}) \cap (cl(f^{-1}(A))) = \emptyset$，则 $f^{-1}(y) \in X \setminus (cl(f^{-1}(A)))$。由于$f$ 是伪开， $y \in int(f(X \setminus cl(f^{-1}(A)))) = int(f(int(X \setminus f^{-1}(A)))) \subset int(f(X \setminus f^{-1}(A))) = int(Y \setminus A) = Y \setminus cl(A)$。因此， $y \in Y \setminus cl(A)$，矛盾。

因此，存在 $x \in f^{-1}(\{y\}) \cap (cl(f^{-1}(A)))$。由于 X是一个 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间，存在一个函数 $g\colon S \longrightarrow f^{-1}(A)$ $\mathcal{I}$-收敛于 x。因此 $f \circ g\colon S \longrightarrow A$ 是 $\mathcal{I}$-收敛于 $f(x) = y$，这进而意味着 Y 是一个 $\mathcal{I}$-函数 Fr´echet-Uryshon 空间。□

推论 6.1. $\mathcal{I}$-函数型 Fr´échet-Urysohn 空间在连续伪开映射下保持不变。

定理 6.5. 若每个保 $\mathcal{I}$-函数型收敛的到 Y 的映射 $\mathcal{I}$: ´ 都是伪开映射，则空间 Y 是 $\mathcal{I}$-函数型 Fr´échet-Urysohn 空间，前提是 $\mathcal{I}$ 是 S. 的极大理想

证明. 设 Y 是一个空间，且 $g\colon S \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{I}$-收敛于 y_g. 。考虑 $S_g = g(S) \cup \{y_g\}$，并且 $\mathcal{S}$ 是 S 上所有在 Y. 中 $\mathcal{I}$-收敛的函数所组成的族。按照例 3.4 定义 S_g 上的一个拓扑，记为 $S_g^{\mathcal{I}}$. 。显然，g 在 $S_g^{\mathcal{I}}$. 中 $\mathcal{I}$-收敛于 y_g。根据例 3.4、定理 3.1 和定理 6.1，可以得出 $S_g^{\mathcal{I}}$ 是一个 $\mathcal{I}$-函数型 Fr´échet-Urysohn 空间，因为 $S_g^{\mathcal{I}}$. 的每个子集在其中都是开集或闭集。设 $Z = \bigoplus S_g^{\mathcal{I}}$ 为拓扑
由定理 6.2， Z 是一个 $\mathcal{I}$-泛函 Fr´échet-Uryshon 空间。我们定义映射 f: $Z \longrightarrow Y$，使得 $f|_{S_g}\colon S_g^{\mathcal{I}} \longrightarrow (S_g, \tau_{S_g})$ 是恒等映射。于是 f 保持 $\mathcal{I}$-泛函收敛，因此根据定理 6.4 Y，它是一个 $\mathcal{I}$-泛函 Fr´échet-Uryshon 空间。□

但对定理 6.7], 作适当修改，我们可以得到下面的定理。

定理 6.6。设 Y 是一个 $\mathcal{I}$-泛函 Fr´échet-Uryshon 空间。那么，从一个空间到 Y 的每个$\mathcal{I}$-泛函覆盖映射都是伪开的。

我们以以下有趣的观察结束本节。

定理 6.7。空间 X 是一个 $\mathcal{I}$-泛函 Fr´échet-Uryshon 空间，当且仅当每个到 X 上的连续 $\mathcal{I}$-泛函覆盖映射都是伪开的，前提是 $\mathcal{I}$ 是 S.的极大理想

证明。由定理 6.6、定理 6.3 和推论 6.1 可得。 □

References

[1] A.V. Arhangel'skiˇi, 《映射与空间》, 《俄罗斯数学评论》21（1966）, 115-162。[2] J.R. Boone 和 F. Siwice, 《序列商映射》, 《捷克斯洛伐克数学杂志》26（1976）, 174-182。[3] L. Bukovsk´y, P. Das 和 J. ˇSupina, 《理想拟正规收敛及相关概念》, 《数学讨论》146（2）（2017）, 265-281。[4] L.X. Cheng、G.C. Lin、Y.Y. Lan 和 H. Liu, 《统计收敛的测度论》, 《中国科学：A辑》51（2008）, 2285-2303。[5] L.X. Cheng、G.C. Lin 和 H.H. Shi, 《关于统计型实值测度及其在统计收敛中的应用》, 《数学与计算机建模》50（2009）, 116-122。

[6] P. Das 和 S. Ghosal, 《关于 I-柯西网与完备性》, Topology Appl. 157（2010）, 1152-1156。[7] P. Das 和 S. Ghosal, 《完备一致空间中的 $\mathcal{I}$-柯西网何时是 $\mathcal{I}$-收敛的》, Topology Appl. 158（2011）, 1529-1533。[8] P. Das、M. Sleziak、V. Toma, 《关于 $\mathcal{I}^{\mathcal{K}}$-柯西函数》, Topology Appl. 173（2014）, 9-27。[9] P. Das、S. sengupta、S. Glab、M. Bienias, 《拓扑空间中理想收敛的若干方面》, Topology Appl., 已接收。[10] G. Di Maio 和 Lj.D.R. Koˇcinac, 《拓扑学中的统计收敛》, Topology Appl. 156（2008）, 28-45。[11] R. Engelking, 《一般拓扑学》, Heldermann Verlag, 柏林, 1989。[12] H. Fast, 《论统计收敛》, 《数学讨论》2（3-4）（1951）, 241-244。[13] S.P. Franklin, 《序列足以刻画的空间》, Fund. Math. 57（1965）, 107-115。[14] S.P. Franklin, 《序列足以刻画的空间 II》, Fund. Math. 61（1967）, 51-56。[15] J.A. Fridy, 《关于统计收敛》, Analysis 5（4）（1985）, 301-313。[16] D.N. Georgiou、S.D. Iliadais、A.C. Megaritis 和 G.A. Prinos, 《理想收敛类》, Topology Appl. 222（2017）, 217-226。[17] S. Givant 和 P. Halmos, 《布尔代数导论》, 《数学本科教材》, 施普林格, 纽约, （2009）。[18] G. Gruenhage, 《广义度量空间》, 载于: K. Kunen 和 J.E. Vaughan（编）, 《集合论拓扑学手册》, 阿姆斯特丹, 北荷兰（1984）, 423-501。[19] J. Jasinski 和 I.Reclaw, 《连续函数的理想收敛》, Topology Appl. 153（2006）, 3511-3518。[20] P. Kostyrko、T. ˇSal´at 和 W. Wilczynski, 《 $\mathcal{I}$-收敛》, Real Anal. Exch. 26（2000/2001）, 669-686。[21] K. Kuratowski, 《拓扑学 I》, PWN, 华沙, 1962。[22] B.K. Lahiri 和 P. Das, 《拓扑空间中的 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{I}^*$-收敛》, Math. Bohemica 130（2）（2005）, 153-160。[23] B.K. Lahiri、Pratulananda Das, 《网的 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{I}^*$ 收敛》, Real Anal. Exchange 33（2）（2007-2008）, 431–442。[24] K. Li、S. Lin 和 Y. Ge, 《锥度量空间中的统计收敛》, Topol. Appl. 196（2015）, 641-651。[25] L. Liu、Z. Tang 和 S. Lin, 《统计序列空间与统计序列商映射》, Appl. Math. J. Chin. Univ. 30（4）（2015）, 485-493（中文）。[26] S. Lin 和 P. Yan, 《度量空间的序列覆盖映射》, Topology Appl. 109（2001）, 301-314。[27] S. Lin, 《关于序列覆盖映射的注记》, Acta Math. Hungar. 107（3）（2005）, 187-191。[28] S. Lin 和 Z.Q. Yun, 《广义度量空间与映射》, 《Atlantis 数学研究丛书》第6卷, Atlantis Press, 巴黎（2016）。[29] M. Macˆaj、M. Sleziak, 《 $\mathcal{I}^{\mathcal{K}}$-收敛》, Real Anal. Exchange 36（1）（2010-2011）, 177–194。[30] A.E. Michael, 《五重商映射探索》, Gen. Topol. Appl. 2（1972）, 91-138。[31] S.K. Pal, 《 $\mathcal{I}$-序列拓扑空间》, Appl. Math. E Not. 14（2014）, 236-241。[32] V. Renukadevi 和 B. Prakash, 《 $\mathcal{I}$-Fr´echet-Uryshon 空间》, Math. Morav. 20（2）（2016）, 87-97。[33] H. Steinhaus, 《论通常收敛与渐近收敛》, 《数学讨论》2（1951）, 73-74。[34] Z. Tang 和 F. Lin, 《序列空间与 Fr´echet-Urysohn 空间的统计版本》, Adv. Math. (China) 44（2015）, 945-954。[35] X.G. Zhou 和 M. Zhang, 《关于核收敛与理想收敛的更多结果》, Acta Math. Sin. Engl. Ser. 29（2013）, 2367-2372。

[36] X. Zhou、L. Liu 和 S. Lin，关于由 $\mathcal{I}$-收敛定义的拓扑空间，《伊朗数学学会公报》，（已录用），2019年7月。

* Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata-32, West Bengal, In-dia*Email address*: pratulananda@yahoo.co.in, samantaupasana@gmail.com

† Department of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde, 352100, Fujian,People's Republic of China*Email address*: shoulin60@163.com