arXiv:2301.00702v1 [math-ph] 2 Jan 2023

微扰代数量子场论中的霍普夫幺半群

WILLIAM NORLEDGE

摘要。我们基于 Joyal组合物种，为微扰量子场论（微扰量子场论）构建了一套代数形式体系。我们证明，微扰量子场论中的某些基本结构可恰当地视为物种内部的代数结构，并且是相对于柯西幺半群积构造的。这套形式体系的某些方面已见于物理学文献，尤其是 Bogoliubov-Shirkov、Steinmann、Ruelle 和 Epstein-Glaser-Stora 的研究。本文依据 Aguiar-Mahajan 发展的现代理论，对此作出全面而明确的阐述。我们将因果微扰理论的核心构造描述为一个同态：它把装饰有局域可观测量的集合组合 Hopf 幺半群映射到微因果多项式可观测量的 Wick 代数中。称为（广义）时序乘积和（广义）推迟乘积的算子值分布，是通过柯里化同态将该 Hopf 幺半群的基本元素映射所得。微扰 S 矩阵方案对应于所谓的泛级数，而因果分解这一性质则可自然地用 Hopf 幺半群通过 Hopf 幂（称为 Tits 乘积）对自身的作用来表达。给定一组完全重整化时间排序乘积，相应相互作用乘积的微扰构造可通过 Hopf 幺半群的上双导子实现，并由此得到 Bogoliubov公式。

目录

引言 1

第一部分：霍普夫幺半群 9
1. 代数 2. Σ 作为 Hopf E-代数 9
3. 乘积与级数 4. T-乘积的微扰 18
24
27

第二部分：微扰代数场论 30
5. 时空与场构型 30 6. 可观测量 31 7. 时间序乘积与 S 矩阵方案 33 8. 相互作用 35 9. 散射振幅 35 参考文献 37

引言

物种理论是对组合结构进行生成函数分析的一种更丰富、范畴化的版本，其渊源可追溯至 André Joyal [Joy81], [Joy86], [BLL98]。在这种方法中，

本文是《微扰量子场论的物种理论基础》的删节版，arXiv:2009.09969。

通过编码组合对象的重新标记 过程，可以看出更多结构；具体而言，就是将组合对象建模为有限集范畴 S 上的预层 I （标签）和双射 σ （重新标记）。本文关注取值于复向量空间的物种$\mathbf{p}$ ，即形如以下形式的函子

$$\mathbf{p} : \mathsf{S}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vec}, \qquad I \mapsto \mathbf{p}[I], \quad \sigma \mapsto \mathbf{p}[\sigma]$$

其中 Vec 是复向量空间范畴。具体而言，$\mathbf{p}$ 由以下数据组成：对于每个有限集 I，都有一个复向量空间$\mathbf{p}[I]$；对于每个双射 $\sigma : J \to I$，都有一个可逆线性映射$\mathbf{p}[\sigma] : \mathbf{p}[I] \to \mathbf{p}[J]$ ，并且双射的复合得以保持。

Aguiar-Mahajan 构建了一套高度结构化的理论，研究向量物种中的内部代数[1]，这一理论建立在 Barratt [AM10], [AM13], 的工作之上，并吸收了 Barratt [Bar78], Joyal [Joy86], Schmitt[Sch93], Stover [Sto93b], 等人的研究成果。要实现内部化，需要使用关于不交并和张量积的 Day 卷积幺半群乘积 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$，其定义如下：

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}[I] = \mathbf{p} \otimes_{\mathrm{Day}} \mathbf{q}[I] = \bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T].$$

这可以看作形式幂级数柯西积的一种范畴化。[2] 对 Aguiar-Mahajan 理论进行各种去范畴化，可得到大量已被研究的分次组合Hopf代数 [AM10，第 15]章。

另一方面，量子场论（QFT）可以被视为一种现代的无限维微积分。微扰量子场论（pQFT）是量子场论中研究光滑函数泰勒级数近似的部分。根据 Dyson 的论证 [Dys52], ，现实中的微扰量子场论（pQFT）的泰勒级数预计收敛半径为零。尽管如此，如果近似的是某个非微扰量子场论中的实际光滑函数，那么这些级数就是渐近级数，因此人们或许可以期待，它们的截断在合理精度内与实验结果相符。事实确实如此。

量子场论（QFT）主要有两种综合方法（适用于非微扰情形），它们都是因无法对路径积分作出解析意义上的解释而发展起来的。一种是函子量子场论（FQFT），它通过将时空之间的配边映射为时间演化算子，使薛定谔绘景形式化。另一种是代数量子场论（AQFT），其源头可追溯至 [HK64], ，它通过将 C*-可观测量代数赋予时空区域，使海森堡绘景形式化。Glimm-Jaffe 等人在开创性工作中严格构造了低维 AQFT/Wightman场论的实例 [GJ68], [CJ70], [GJS74]。

微扰代数量子场论（pAQFT） [Rej16], [Düt19], [Sch20，nLab], 由 Brunetti、Dütsch、Fredenhagen、Hollands、Rejzner、Wald 等人发展，是一种以因果微扰理论为基础的（数学上严谨且切合实际的）微扰量子场论 [Ste71], [EG73], [Sch95], 由 Stückelberg、Bogoliubov、Steinmann、Epstein、Glaser、Stora 等人发展。历史概述见 [Düt19，前言] 。按照 [IS78], [BF00], [DF01], 中通过取代数绝热极限来处理红外发散的做法，pAQFT 满足 AQFT 的 Haag-Kastler公理，但将 C*-代数替换为形式幂级数 $*$-代数，这反映了微扰量子场论处理的是泰勒级数近似。本文将展示，这些形式幂级数代数的构造和结构可自然地用物种内部的 gebra 理论来描述。

[1]意义（余/双/Hopf）代数和 Lie（余）代数[2] 从.....的视角来看 S-着色（余）运算子（定义见例如 [Pet13，第 3], 这些代数也可以等价地描述为运算子$\mathbf{Com}^{(*)}$、$\mathbf{Ass}^{(*)}$、$\mathbf{Lie}$AM10附录 B 中所定义的左（余）作用（余）单子上的（余）代数5], 这使本文中的代数与循环运算子等结构联系起来，而循环运算子早已出现在数学物理学中

为简便起见，我们仅考虑闵可夫斯基时空上的 Klein-Gordan 实标量场$\mathcal{X} \cong \mathbb{R}^{p,\,1}$，$p \in \mathbb{N}$（pAQFT 也适用于更一般的情形，例如参见 [Hol08]）。因此，对我们而言，壳外场构型 Φ 是一个光滑函数

$$\Phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \Phi(x).$$

特别是，我们不对 Φ 在无限时刻的渐近行为施加条件。令$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ 表示局域可观测量 $A \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$的空间；这些泛函是通过将关于 Φ及其导子的多项式对$\mathcal{X}$上的凸起函数积分而得到的。令 $\mathcal{F}$ 表示微因果多项式可观测量 $O \in \mathcal{F}$构成的交换 $*$-代数；这些是满足一种称为微因果性的微局部理论条件的场构型多项式泛函，其乘法是泛函的逐点乘法，有时称为正规序乘积。于是 $\mathcal{F}[[\hbar]]$ 是一个关于形式普朗克常数$\hbar$的形式幂级数 $*$-代数，称为（抽象的、非壳上）Wick 代数，其乘法是克莱因-戈尔登场的 Wightman 传播子 Δ_{H} 所对应的 Moyal 星乘积

$$\mathcal{F}[[\hbar]] \otimes \mathcal{F}[[\hbar]] \to \mathcal{F}[[\hbar]], \qquad O_1 \otimes O_2 \mapsto O_1 \star_{\mathrm{H}} O_2,$$

有时称为算符乘积。

Aguiar-Mahajan 理论中或许最基本的 Hopf 幺半群是余交换 Hopf 代数[3] 组合 $\mathbf{\Sigma}$，见第 1.2 节。它是一个定义在向量物种中的 Hopf 幺半群，其内部运算基于 Day 卷积。（或许更为人熟知的是 $\mathbf{\Sigma}$的某种去范畴化，它是非交换对称函数的分次 Hopf 代数$\mathbf{NSym}$，见 [AM10第 17 节。3]。）一个 F 的组合 I 是如下形式的满射

$$F : I \to \{1, \ldots, k\}, \qquad \text{for some} \quad k \in \mathbb{N}.$$

其排序 $1 > \cdots > k$ 是约定好的，因此 F表示带有 I个标记点的序数。我们将 $S_j = F^{-1}(j)$ 称为 F的块，并记作 $F = (S_1, \ldots, S_k)$。每个分量 $\mathbf{\Sigma}[I]$ 都是由 I的组合 F 构成的形式线性组合空间，

$$\mathbf{\Sigma}[I] = \Big\{ \mathtt{a} = \sum_F c_F \mathtt{H}_F \;\Big|\; c_F \in \mathbb{C} \Big\}.$$

乘法

$$\mu_{S,T} : \mathbf{\Sigma}[S] \otimes \mathbf{\Sigma}[T] \to \mathbf{\Sigma}[I], \qquad \mathtt{H}_F \otimes \mathtt{H}_G \mapsto \mathtt{H}_{FG}$$

是将组合进行拼接的线性化（通过序数和进行“粘合”），而余乘法

$$\Delta_{S,T} : \mathbf{\Sigma}[I] \to \mathbf{\Sigma}[S] \otimes \mathbf{\Sigma}[T], \qquad \mathtt{H}_F \mapsto \mathtt{H}_{F|_S} \otimes \mathtt{H}_{F|_T}$$

是将限制在子集上的组合线性化（“忘记标记点”），其中 $S \sqcup T = I$。

关于 $\mathbf{\Sigma}$ 的若干方面在物理学文献中有如下体现。首先，Epstein-Glaser-Stora 的适当序列代数 [EGS75，第 4 节。1] 是 $\mathbf{\Sigma}$ 通过 Hopf 幂作用于自身所得到的作用，称为 Tits 乘积 [AM13，第 13]，节；这一概念可追溯至 Tits [Tit74]。其次，本原部分$\mathbf{Zie} = \mathcal{P}(\mathbf{\Sigma})$[4]，是物种内部的一个李代数，本质上就是例如 [Rue61，第 6]，[BL75，第 III 节中所述的 Steinmann 代数。1]。更准确地说，Steinmann 代数是一个分次李代数，其基础是 $\mathbf{Zie}$的伴随实现的结构映射，见第 1.7 节。第三和第四方面则超出本文范围；关于 Losev-Manin 的工作和费曼积分，参见下文。

[3] 我们说“代数”而不是“幺半群”，因为向量物种构成一个线性范畴[4] 名称“Zie”来源于 [AM17]

本文的核心思想是将因果微扰理论中相互作用的时序乘积系统的构造形式化为一个同态$\widetilde{\mathrm{T}}$，该同态是物种内部代数之间的同态，形式为

$$\widetilde{\mathrm{T}} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to \mathbf{U}_{\mathcal{F}[[\hbar,g]]}.$$

我们在第 3.1 节的简洁抽象框架中描述这一构造，随后在第 7 节将其具体化到量子场论中。这里，$\otimes$是 Hadamard 幺半群积（=逐分量张量积），$\mathbf{E}^{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}$是由 $I \mapsto (\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]])^{\otimes I}$给出的物种，而 $\mathbf{U}^{\mathcal{F}[[\hbar,g]]}$ 是物种中的代数，其中每个 I-分量都附加了带形式耦合常数 g 的 Wick 代数，

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}[I] = (\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]])^{\otimes I}, \qquad \mathbf{U}_{\mathcal{F}[[\hbar,g]]}[I] = \mathcal{F}[[\hbar, g]].$$

由此可知，乘积系统 T 的数据等价于一个 $\mathbb{C}$-代数同态

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]) \to \mathcal{F}[[\hbar, g]]$$

其中 $\hat{\mathbf{\Sigma}}(-) : \mathrm{Vec} \to \mathrm{Vec}$是与 $\mathbf{\Sigma}$ [AM10 第 19.1 节相关联、作用于向量空间上的解析自函子（即 Schur 函子）。2]。[5] 这种形式化的去范畴化版本见于微扰量子场论的分次 Hopf 代数方法中 [Bro09], [Bor11，第 635] 页。特别是，Moyal 变形量子化可以用 Laplace 配对（= 余拟三角结构） [Fau01], [Bro09，第 2 节4]。

另一个相关概念是 Losev-Manin 上同调场论 [LM00，定理3.3。1], [SZ11，定义1。3], 其中有限序数被替换为在极点处粘合的黎曼球面串，从而在全排列多面体的环面簇上赋予 Hopf 幺半群结构，并且$\mathbf{\Sigma}$ 被替换为该环面簇的普通同调。该环面簇的 Hopf 幺半群结构也是现代费曼积分研究方法的核心 [Bro17，第6], [Sch18]页。我们将在未来的工作中研究这个 Hopf 幺半群。

具体而言，同态 $\widetilde{\mathrm{T}}$ 由各分量线性映射组成

$$\widetilde{\mathrm{T}}_I : \mathbf{\Sigma}[I] \otimes (\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]])^{\otimes I} \to \mathcal{F}[[\hbar, g]], \qquad \mathtt{H}_F \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_n} \mapsto \widetilde{\mathrm{T}}_I(\mathtt{H}_F \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_n})$$

对每个有限集 $I = \{i_1, \ldots\ldots, i_n\}$。这个同态还应满足因果分解，即

$$\widetilde{\mathrm{T}}_I(\mathtt{a} \otimes A_{i_1} \otimes \ldots A_{i_n}) = \widetilde{\mathrm{T}}_I(\underbrace{\mathtt{a} \triangleright \mathtt{H}_G}_{\text{Tits product}} \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_n}) \qquad \text{for all} \quad \mathtt{a} \in \mathbf{\Sigma}[I]$$

当局域可观测量 $A_{i_1}, \ldots\ldots, A_{i_n}$ 遵循由复合 G所诱导的 I次序时，参见命题7.1。通常还会纳入其他性质，例如平移等变性。

我们可以将 Hadamard 积的内 Hom $\mathcal{H}(-,-)$ 柯里化，从而得到一个代数同态

$$\mathbf{\Sigma} \to \mathcal{H}(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}, \mathbf{U}_{\mathcal{F}[[\hbar,g]]}), \qquad \mathtt{H}_F = \mathtt{H}_{(S_1,\ldots,S_k)} \mapsto \widetilde{\mathrm{T}}(S_1) \ldots \widetilde{\mathrm{T}}(S_k).$$

由此得到的线性映射

$$\widetilde{\mathrm{T}}(S_1) \ldots \widetilde{\mathrm{T}}(S_k) : (\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]])^{\otimes I} \to \mathcal{F}[[\hbar, g]]$$

称为相互作用广义时间序积。对于每个场多项式的选取，柯里化同态是一个将 $\mathbf{\Sigma}$ 表示为 $\mathcal{F}[[\hbar, g]]$ 值广义函数的“表示”，定义在$\mathcal{X}^I$上，

[5] 上方的帽子 $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ 意在表示一种范畴化傅里叶变换

称为算子值分布，因为 Wick 代数通常表示在希尔伯特空间上。~时间序乘积 T(I) 与 Hadamard 真空态的复合

$$\langle - \rangle_0 : \mathcal{F}[[\hbar, g]] \to \mathbb{C}[[\hbar, g]], \qquad O \mapsto O(\Phi = 0)$$

于是便是平移不变的、取值于 $\mathbb{C}[[\hbar, g]]$ 的广义函数

$$\mathrm{G}_I : \mathcal{X}^I \to \mathbb{C}[[\hbar, g]], \qquad (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \mapsto \mathrm{G}_I(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})^{6}$$

称为时间序 n 点关联函数。取绝热极限后，在真空稳定的条件下，这些函数可解释为微扰量子场论对散射实验结果所作的概率预测，称为散射振幅，见第 9 节。然而，它们的值是关于 $\hbar$ 和 g 的形式幂级数，因此必须截断。

Aguiar-Mahajan 的工作核心，是从类型 A 反射超平面构型的几何角度来解释 $\mathbf{\Sigma}$ （以及其他霍普夫幺半群）；该构型称为（本质化）辫子构型

$$\mathrm{Br}[I] = \{\{x_{i_1} - x_{i_2} = 0\} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^I/\mathbb{R} \twoheadleftarrow \mathbb{R}^I}_{\text{quotient by translations}} : (i_1, i_2) \in I^2,\ i_1 \neq i_2\}.$$

在因果微扰理论中，辫子构型表现为构型的时间分量空间$\mathcal{X}^I$ 模去平移对称性 [Rue61，第 2], 节，而反射超平面对应于重合的相互作用点。每个实超平面构型 A 都有一个相应的伴随超平面构型 A$^\vee$ [AM17，第 1.9 节。2]。自由向量空间 $\mathbb{R}I$ 在 I 上自然同构于$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^I, \mathbb{R})$，因此辫子超平面排列的伴随排列为

$$\mathrm{Br}^\vee[I] = \left\{ \left\{ \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in T} x_i = 0 \right\} \subseteq \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^I/\mathbb{R}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}I}_{\text{sum-zero subspace}} : (S, T) \in 2^I,\ S, T \neq \emptyset \right\}.$$

在因果微扰理论中，伴随辫子排列表现为能量分量的空间 [Rue61，第 2], 节；其中，超平面对应于变为“壳上”的子集。伴随辫子排列的球面表示称为 Steinmann 球面，或 Steinmann 行星，例如 [Eps16，图 A。4]。伴随辫子排列的区域由称为胞腔的组合构造索引$\mathcal{S}$ [EGS75，定义 6], 也称为极大不平衡族 [BMM$^+$12] 以及正和系统 [Bjo15]。

本原部分李代数 Zie $= \mathcal{P}(\mathbf{\Sigma})$（连同其对偶李余代数 Zie*）在伴随辫子排列上有一种自然的几何实现 [Rue61，第 6], [Ocn18，讲座33], [LNO19], [NO19], ，由此得到胞腔 S，它们对应于某些特殊的本原元$\mathtt{D}_\mathcal{S} \in$ Zie$[I]$，见第 1.5 节。Aguiar-Mahajan 将这些特殊元素称为 Dynkin 元素 [AM17，第 14.1 节和第 14.9 节。8]文献 [NO19] 证明，Dynkin 元素张成 Zie，但它们并不线性无关。Dynkin 元素所满足的关系称为 Steinmann 关系 [Ste60b，公式 44], 见第 1.6 节。Steinmann 最初研究这些关系时，$\mathbf{\Sigma}$ 被表示为算子值分布。近来，这些关系也在散射振幅的背景下得到研究，它们似乎与簇代数有关 [DFG18], [CHDD$^+$19]， [CHDD$^+$20]。

若将相互作用广义时间序乘积的柯里化系统限制到本原部分 **Zie**，则可得到一个李代数同态

$$\mathbf{Zie} \to \mathcal{H}(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}, \mathbf{U}_{\mathcal{F}[[\hbar, g]]}), \qquad \mathtt{D}_\mathcal{S} \mapsto \widetilde{\mathrm{R}}_\mathcal{S}.$$

[6] 我们使用了广义函数记号；G_I 并非单个函数，而可以用一列函数表示

	生成集	算子值分布	真空期望值
$\mathbf{E}^*$	泛级数 $\mathtt{G}_I$	时间序乘积 $\mathrm{T}(I)$	时间序的 n 点函数
$\mathbf{L}$	$\mathtt{H}$ 基线性序 $\mathtt{H}_\ell$	$\mathrm{T}(i_1)\dots\mathrm{T}(i_n)$	Wightman n 点函数
$\mathbf{\Sigma}$	$\mathtt{H}$-基集合组合 $\mathtt{H}_F$	广义时间序乘积 $\mathrm{T}(S_1)\dots\mathrm{T}(S_k)$	广义时间序函数
Zie	Dynkin 元素 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}}$	广义推迟乘积 $\mathrm{R}_{\mathcal{S}}$	广义推迟函数

图 1. 乘积／真空期望值与 Hopf 代数 $\mathbf{\Sigma}$ 中元素之间的对应关系。

~算子值分布 $\mathrm{R}_{\mathcal{S}}$（它们是 Dynkin 元素 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}}$ 的像）是该系统的相互作用广义推迟乘积，参见例如 [Ste60b], [Ara61], [EG73，方程79]。本文在第 1.4、1.5 和 1.6 节介绍 Steinman 代数与 Steinmann 关系。

设 $\mathbf{L} \to \mathbf{\Sigma}$ 为线性序的霍普夫子代数（=即由单元素块组成的组合），并设 $\mathbf{E}^* \hookrightarrow \mathbf{\Sigma}$ 为仅含一个块的组合所构成的子余代数。那么，乘积／真空期望值与 $\mathbf{\Sigma}$ 中元素之间的对应关系如图 1 所示。在 Moyal 变形量子化之前的交换情形中，物种 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{E}$ 与涂抹场和多项式可观测量有类似的对应关系，见第 6 节。

在第4.1节和第 8 节中，我们将因果微扰理论中时间序乘积的微扰形式化如下。我们的出发点是一个完全归一化的广义时间序乘积系统，也就是说，一个代数同态

$$\mathrm{T} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to \mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))}$$

满足因果 子，并且使得单点分量 $\mathrm{T}\{i\}$ 为自然嵌入

$$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]] \hookrightarrow \mathcal{F}((\hbar)), \qquad A \mapsto :A: .$$

相应的算子值分布在 $\mathbf{X}^I$ 上处处由因果分解确定，肥对角线（=相互作用点重合）上除外。特别地，在肥对角线之外，时序乘积 $\mathrm{T}(I)$ 由关于克莱因–戈尔登场的费曼传播子 Δ_{F} 的 Moyal 星乘积 $\star_{\mathrm{F}}$ 给出。乘积 $\star_{\mathrm{F}}$ 的各项可以用有限多重图（即费曼图）编码。剩余的内在歧义意味着，将 $\mathrm{T}(I)$ 延拓到肥对角线时必须作出选择，而这些选择构成 Stückelberg-Petermann 重整化群的一个扭子。这是 Stora 对 Stückelberg-Bogoliubov-Epstein-Glaser 归一化 [的阐述 [PS16]¸Sto93a], [BF00], 该归一化以归纳方式构造 $\mathrm{T}(I)$ $n = |I|$。关于重整化的物种理论方面，以及与 Connes-Kreimer 理论 [Pin00], [GBL00], [BK05], [DFKR14]，的可能联系，我们留待未来工作探讨。

在 Tomonaga、Schwinger、Feynman 和 Dyson 的原始表述中，所谓的时序乘积是通过非正式地将 Wick 代数乘积与阶跃函数相乘而得到的，但根据 Hörmander 判据，这种做法通常定义不良。这会导致形式幂级数中的各个项发散，这种发散称为紫外发散。随后，人们使用非正式方法从这些无穷项中得到有限值 [Sch95，序言和第 4 节。3]。

指数物种 $\mathbf{E}$，由 $\mathbf{E}[I] = \mathbb{C}$ 和 $1_{\mathbb{C}} \in \mathbf{E}[I]$ 表示，记作 $\mathtt{H}_I$，通过将集合的并集线性化，具有物种中的代数的结构，

$$\mu_{S,T} : \mathbf{E}[S] \otimes \mathbf{E}[T] \to \mathbf{E}[I], \qquad \mathtt{H}_S \otimes \mathtt{H}_T \mapsto \mathtt{H}_I.$$

E-模 E = (m ρ) 是一个结合含幺态射

$$\rho : \mathbf{E} \bullet \mathbf{m} \to \mathbf{m}$$

对于一个物种 m。此外，将 $\mu_{S,T}$ 的逆作为余乘法，会使 E 成为一个连通（余）交换双代数，因此 E- 模的范畴 Rep(E) 是一个对称幺半范畴，其幺半积为 E- 模的柯西积。特别地，我们可以考虑 Rep(E) 内部的霍普夫代数/李代数，并称之为 Hopf/Lie E-代数。

推迟箭头 $Y \downarrow(-)$ 和超前箭头 $Y \uparrow (-)$ Steinmann 箭头是 $\mathbf{\Sigma}$ 上的升算子（我们将其形式化为升算子），其精确定义归功于 Epstein-Glaser-Stora [EGS7583]，第 82 页。它们在 $\mathbf{\Sigma}$ 上定义了两种 E-模结构，

$$\mathbf{E} \bullet \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}, \quad \mathtt{H}_Y \otimes \mathtt{H}_F \mapsto Y \downarrow \mathtt{H}_F \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E} \bullet \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}, \quad \mathtt{H}_Y \otimes \mathtt{H}_F \mapsto Y \uparrow \mathtt{H}_F.$$

参见第 2.2 节。特别地，推迟箭头由置入 $\{*\} \downarrow \mathtt{H}_{(I)} = -\mathtt{H}_{(*,I)} + \mathtt{H}_{(*I)}$ 生成。[7]然后

$$Y \downarrow \mathtt{H}_{(I)} = \underbrace{\sum_{Y_1 \sqcup Y_2 = Y} \mu_{Y_1, Y_2 \sqcup I}\big(\mathtt{s}(\mathtt{H}_{(Y_1)}) \otimes \mathtt{H}_{(Y_2 \sqcup I)}\big)}_{\text{denoted } \mathtt{R}_{(Y;I)}}$$

其中 $\mathtt{s} : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 的对极。Steinmann 箭头最早由 Steinmann 研究 [Ste60b，第 3]，节，其中 $\mathbf{\Sigma}$ 表示为算子值分布。这里，与 $\mathtt{R}_{(Y;I)} \in \mathbf{\Sigma}[Y \sqcup I]$ 对应的算子值分布称为推迟乘积 R(Y; I)。[8]

由于 $\{*\} \downarrow(-)$ 是 $\mathbf{\Sigma}$（定理 2.1）上的交换双导子，因此推迟 Steinmann 箭头赋予 $\mathbf{\Sigma}$ Hopf E-代数的结构，而 Zie Lie E-代数的结构（超前箭头也类似）。关于这些 Lie E-代数，有一种以伴随辫子排列为基础的有趣描述，见第 2.4 节。Steinmann 箭头是受限伴随表示 $\mathbf{L} \bullet \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}$ 在 $\mathbf{\Sigma}$上的“两半”，这在 [Ste60b 的方程 13]中有所体现。这与推迟 Δ_- 和超前 Δ_+ 传播子是因果传播子的两半 $\Delta_S = \Delta_+ - \Delta_-$这一点直接对应。

令 $\mathcal{H}^{\bullet}(-,\ -)$ 表示物种柯西积的内 Hom，并令

$$(-)^{\mathbf{E}} = \mathcal{H}^{\bullet}(\mathbf{E}, -).$$

更明确的定义请参见第 2.3 节。另请参见 [Nor20，第 2] 节，其中更详细地讨论了 $\mathcal{J}$-有色集合 I（在物理上对应源场）与$\mathcal{G}$-有色集合 Y（在物理上对应耦合常数）之间的区别。于是$(-)^{\mathbf{E}}$ 是物种上的一个自函子，并且关于柯西积是宽松幺半的。因此，$\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{E}}$ 自然构成一个代数，其乘法继承自 $\mathbf{\Sigma}$。然后，将推迟 Steinmann 作用 $\mathbf{E} \bullet \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}$柯里化后，我们得到一个同态 $\mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{E}}$。对于带装饰的情形也类似，给定一个

[7] $(*I)$ 表示以下对象的复合：$\{*\} \sqcup I$ 它只有一个团块[8] 请注意，一些作者，例如 [Düt19], 将 R(Y; i) 称为推迟乘积，并将 R(Y; I) 称为广义推迟乘积

绝热切换相互作用作用泛函 $S_{\mathrm{int}} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]$，经推迟 Steinmann 箭头作用并柯里化后，我们得到同态

$$\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]})^{\mathbf{E}}$$

$$\mathtt{H}_F \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_n} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{\downarrow \ldots \downarrow}_{r \text{ times}} \mathtt{H}_F \otimes \underbrace{S_{\mathrm{int}} \otimes \cdots \otimes S_{\mathrm{int}}}_{r \text{ times}} \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_n}.$$

将其与 [AM10 第 19]章中关于产生湮灭算符的形式体系进行比较。接下来，~最后，相应的微扰相互作用时序乘积 T 系统可通过将此同态与自函子$(-)^{\mathbf{E}}$对 T 的像复合而得，

$$\widetilde{\mathrm{T}} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]})^{\mathbf{E}} \xrightarrow{\mathrm{T}^{\mathbf{E}}} (\mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))})^{\mathbf{E}} \cong \mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))[[g]]}.$$

参见第4.1节。微扰代数量子场论的一条定理表明，这确实映入$\mathbf{U}^{\mathcal{F}[[\hbar,g]]}$。

最后，在第3.3节和第7节中，我们将 S 矩阵，或称时间序指数，形式化如下。令 Hom(–, –) 表示物种的外部 hom，其值落在向量空间 Vec 中。令

$$\mathscr{S}(-) = \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, -).$$

相对于柯西积，这是宽松幺半的。对于具有一般乘积系统的代数$\mathbf{a}$,

$$\varphi : \mathbf{a} \otimes \mathbf{E}_V \to \mathbf{U}_{\mathcal{A}},$$

级数 $\mathtt{s} \in \mathscr{S}(\mathbf{a})$ 的$\mathbf{a}$

$$\mathtt{s} : \mathbf{E} \to \mathbf{a}, \qquad \mathtt{H}_I \mapsto \mathtt{s}_I$$

如下构造取值于 $\mathscr{S}(\mathbf{U}_{\mathcal{A}}) \cong \mathcal{A}[[\jmath]]$ 的函数 $\mathcal{S}_{\mathtt{s}}$：

$$\mathcal{S}_{\mathtt{s}} : V \to \mathcal{A}[[\jmath]], \qquad A \mapsto \mathcal{S}_{\mathtt{s}}(\jmath A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\jmath^n}{n!} \varphi_n(\mathtt{s}_n \otimes \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n \text{ times}}).$$

若 φ 是代数的同态，则

$$\mathcal{S}_{(-)} : \mathscr{S}(\mathbf{a}) \to \mathrm{Func}(V, \mathcal{A}[[\jmath]])$$

是 $\mathbb{C}$-代数的同态。作为一个基本例子，若令 $\mathbf{a} = \mathbf{E}$，$\mathcal{A} = C^\infty(V^*)$，并在最后设定$\jmath = 1$，便可由此得到经典指数函数。

对于 $c \in \mathbb{C}$，所谓的（缩放）泛级数 $\mathtt{G}(c)$ $\mathbf{\Sigma}$，是将每个有限集映射为仅含一个块的（缩放）复合，

$$\mathtt{G}(c) : \mathbf{E} \to \mathbf{\Sigma}, \qquad \mathtt{H}_I \mapsto \mathtt{G}(c)_I := c^n \, \mathtt{H}_{(I)}.$$

若令 $c = 1/\mathrm{i}\hbar$，则对于完全归一化的广义时间序乘积系统 T：$\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}^{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to \mathbf{U}^{\mathcal{F}((\hbar))}$，上面的函数 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathtt{G}(1/\mathrm{i}\hbar)}$ 可还原微扰代数量子场论中通常的微扰 S 矩阵方案，

$$\mathcal{S} : \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]] \to \mathcal{F}((\hbar))[[\jmath]], \qquad A \mapsto \mathcal{S}(\jmath A) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\right)^n \frac{\jmath^n}{n!} \mathrm{T}_n(\mathtt{H}_{(n)} \otimes \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n \text{ times}}).$$

在推迟 Steinmann 箭头作用下进行微扰并选择相互作用 $S_{\mathrm{int}} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]$ 后，$\mathcal{S}(\jmath A)$的像为

$$\mathcal{Z}_{gS_{\mathrm{int}}}(\jmath A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\right)^{r+n} \frac{g^r \jmath^n}{r!\, n!} \mathrm{R}_{r;n}(\underbrace{S_{\mathrm{int}} \otimes \cdots \otimes S_{\mathrm{int}}}_{r \text{ times}}; \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n \text{ times}})$$

其中，根据我们之前对 $\mathtt{R}_{(Y;I)} = Y \downarrow \mathtt{H}_{(I)}$ 的表达式（并令 T 表示 T写 $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}^{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}$ 的对极复合），我们有

$$\mathrm{R}_{Y;I}(S_{\mathrm{int}}^{Y}; A^{I}) = \mathrm{T}_{Y \sqcup I}(Y \downarrow \mathtt{H}_{(I)} \otimes S_{\mathrm{int}}^{Y} \otimes A^{I}) = \sum_{Y_1 \sqcup Y_2 = Y} \overline{\mathrm{T}}_{Y_1}(S_{\mathrm{int}}^{Y_1}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_{Y_2 \sqcup I}(S_{\mathrm{int}}^{Y_2} \otimes A^{I}).$$

那么，由于

$$\mathcal{S}_{(-)} : \mathscr{S}(\mathbf{\Sigma}) \to \mathrm{Func}(\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]], \mathcal{F}((\hbar))[[g]])$$

是 $\mathbb{C}$ 代数的同态，因此 $\mathcal{Z}_{gS_{\mathrm{int}}}$ 由下式给出

$$\mathcal{Z}_{gS_{\mathrm{int}}}(jA) = \mathcal{S}^{-1}(gS_{\mathrm{int}}) \star_{\mathrm{H}} \mathcal{S}(gS_{\mathrm{int}} + jA).$$

这是相互作用场可观测量的时序乘积的生成函数，亦称配分函数，参见例如 [EG73，第 8 节。1], [DF01，第 6 节。2], 其渊源可追溯至 Bogoliubov [BS59，第 4]章。本文通过纯粹的霍普夫代数理论考量，得到了生成函数 $\mathcal{Z}_{gS_{\mathrm{int}}}$。不过，它最初源于以合成方式理解路径积分的尝试。有关近期的一些进展，参见 [Col16], [HR20]。

结构。 本文分为两部分。第一部分着重发展组合的 Hopf 代数及其本原部分 **Zie**的理论 $\mathbf{\Sigma}$。第二部分则针对闵可夫斯基时空上的实标量场，将理论专门应用于微扰代数量子场论。

致谢。 我们感谢 Adrian Ocneanu 的支持和富有启发性的讨论。若非 Nick Early 发现 Ocneanu 的著作中出现的某些关系在量子场论中被称为 Steinmann 关系，本文便不可能完成。我们感谢 Yiannis Loizides 和 Maria Teresa Chiri 在本项目早期阶段给予的有益讨论。我们感谢 Arthur Jaffe 的支持、宝贵建议，以及鼓励我们探索这一课题。我们感谢宾夕法尼亚州立大学数学系一直以来的支持。

第 1 部分： 霍普夫幺半群

1. 代数

我们回顾组合的霍普夫代数 $\mathbf{\Sigma}$，以及其本原元构成的李代数**Zie** $\to \mathbf{\Sigma}$。我们证明， $\mathbf{\Sigma}$ 和**Zie** 自然地是指数物种**E**上的代数。这将对 Steinmann [Ste60b] 和 Epstein-Glaser-Stora [EGS75], 发现的数学结构进行物种理论形式化；结合使用**E**作用的某种“乘积系统的微扰”构造，便可恢复微扰代数量子场论中的相互作用场微扰构造，参见 [EG73第 8 节。1], [DF01第 6 节。2], 这一构造可追溯至 Bogoliubov [BS59第 4]章。

1.1. 组合。 令 I 为一个基数为 n的有限集。我们将 I 视为具有“颜色” $\jmath$（从物理角度看，即源场）。作为集合 I的一个具体例子，我们有整数集合$[n] := \{1, \ldots, n\}$（形式上，我们选取了去范畴化函子 $I \mapsto n$的一个截面）。对于$k \in \mathbb{N}$，令

$$(k) := \{1, \ldots, k\}$$

配备排序 $1 > \cdots > k$。 F I的长度 $l(F)$ 的 $= k$是一个满射 $F \colon I \to (k)$。 I 的所有组合的集合记作 $\Sigma[I]$,

$$\Sigma[I] := \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \{\text{surjective functions } F : I \to (k)\}.$$

我们通常用 k 元组表示组合

$$F = (S_1, \dots, S_k)$$

其中 $S_j := F^{-1}(j)$，$1 \le j \le k$。S_j 称为 F 的块。特别地，对于 $I \neq \emptyset$，我们有长度为一的复合 (I)，以及长度为零的复合 $()$，它是空集的唯一复合。F 的对偶 F 定义如下：

$$\bar{F} := (S_k, \dots, S_1), \qquad \text{i.e.} \quad \bar{F}^{-1}(j) = F^{-1}(k+1-j).$$

给定 I（S, T 可以为空）的一个分解 $I = S \sqcup T$，对于 $F = (S_1, \dots, S_k)$ ——S 的一个复合，以及 $G = (T_1, \dots, T_l)$ —— T 的一个复合，它们的连接 FG 是 I 的复合，定义如下：

$$FG := (S_1, \dots, S_k, T_1, \dots, T_l).$$

对于 $S \subseteq I$ 和 $F = (S_1, \dots, S_k) \in \Sigma[I]$，将 F 限制到 S 所得的限制 $F|_S$ 是 S 的复合，定义如下：

$$F|_S := (S_1 \cap S, \dots, S_k \cap S)_+$$

其中 $(-)_+$ 表示从列表中删除所有为空集的集合。

对于组合 $F, G \in \Sigma[I]$，我们记作 $G \le F$，若 G 可通过反复合并连续块由 F 得到。给定满足 $G = (T_1, \dots, T_l)$ 的组合 $G \le F$，我们令

$$l(F/G) := \prod_{j=1}^{k} l(F|_{T_j}) \qquad \text{and} \qquad (F/G)! := \prod_{j=1}^{k} l(F|_{T_j})!\,.$$

1.2. **组合的余交换 Hopf 幺半群**。令

$$\mathbf{\Sigma}[I] := \{\text{组合的形式 } \mathbb{C}\text{-线性组合}$$

向量空间 $\mathbf{\Sigma}[I]$ 自然地构成 I 上对称群的一个右模，并且这些作用扩张为从有限集及双射构成的范畴 S 到 $\mathbb{C}$ 上向量空间范畴 Vec 的反变函子，

$$\mathbf{\Sigma} : \mathsf{S}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vec}, \qquad I \mapsto \mathbf{\Sigma}[I].$$

对于 I 的一个组合 F，令 $\mathtt{H}_F \in \mathbf{\Sigma}[I]$ 表示对应于 F 的基元素。集合 $\{\mathtt{H}_F \colon F \in \Sigma[I]\}$ 构成 $\mathbf{\Sigma}$ 的 $\mathtt{H}$-基。

一般而言，函子 $\mathbf{p} : \mathsf{S}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vec}$ 称为（复）向量物种，这一概念可追溯至 Joyal [Joy81], [Joy86]。向量物种的态射 $\eta : \mathbf{p} \to \mathbf{q}$ 是自然变换；它们由每个有限集 I 上的一个线性映射 $\eta_I : \mathbf{p}[I] \to \mathbf{q}[I]$ 组成，并且与双射的作用相容。当 $I = [n] := \{1, \dots, n\}$ 时，我们简记为 $\eta_n := \eta_{[n]}$。

我们为向量物种赋予张量积 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$，称为柯西积 [AM10，定义 8。5], 其定义为

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}[I] := \bigoplus_{I = S \sqcup T} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T]. \tag{1}$$

这是关于集合的不交并和向量空间的张量积的 Day 卷积。本文研究物种上的代数结构，它们是利用这一张量积构造的。特别地，物种 $\mathbf{p}$ 上的乘法由线性映射组成

$$\mu_{S,T} : \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \to \mathbf{p}[I]$$

而 $\mathbf{p}$ 上的余乘法由线性映射组成

$$\Delta_{S,T} : \mathbf{p}[I] \to \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T],$$

其中，每一种分解方式都对应一个映射 $I = S \sqcup T (S, T$可以为空）。然后我们可以施加诸如（余）结合律之类的条件，参见例如 [Nor20，第 1 节。3]。

根据 [AM13，第 11]节， $\mathbf{\Sigma}$ 是一个连通[9]双代数，这意味着它自然带有结合的含幺乘法和余结合的余单位余乘法，且二者相容，即满足双幺半群公理。详情请参见 [AM10，第 8.3 节。1] 乘法和余乘法用 $\mathtt{H}$-基表示为

$$\mu_{S,T}(\mathtt{H}_F \otimes \mathtt{H}_G) := \mathtt{H}_{FG} \qquad \text{and} \qquad \Delta_{S,T}(\mathtt{H}_F) := \mathtt{H}_{F|_S} \otimes \mathtt{H}_{F|_T}.$$

有时 我们将 $\mathtt{H}_F\mathtt{H}_G := \mu_{S,\ T}(\mathtt{H}_F \otimes \mathtt{H}_G)$ 简记为。单位和余单位定义为

$$1_{\mathbf{\Sigma}} := \mathtt{H}_{()} \qquad \text{and} \qquad \epsilon_\emptyset(\mathtt{H}_{()}) := 1_{\mathbb{C}}.$$

Let

$$\bar{\mathtt{H}}_F := \sum_{G \geq \bar{F}} (-1)^{l(G)}\, \mathtt{H}_G. \tag{2}$$

那么 [AM10，定理 1138] （在 $\mathbf{q} = \mathbf{E}_+^*$ 且 $q = 1$ 的情形下）表明

$$\sum_{S \sqcup T = I} \mathtt{H}_{F|_S} \bar{\mathtt{H}}_{F|_T} = 0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{S \sqcup T = I} \bar{\mathtt{H}}_{F|_S} \mathtt{H}_{F|_T} = 0. \tag{3}$$

一般而言，连通双代数自动成为 Hopf 代数，并且由 (3) 可知，对极 $s:\ \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}$ 由下式给出

$$\mathrm{s}_I(\mathtt{H}_F) = \bar{\mathtt{H}}_F.$$

Hopf 代数 $\mathbf{\Sigma}$ 是正余代数 $\mathbf{E}_+^*$ [AM10，第 11.2 节中所述的自由余交换 Hopf 代数。5], 因此 $\mathbf{\Sigma} \cong \mathbf{L} \circ \mathbf{E}_+^*$ 其中“$\circ$”表示物种的复合，而 $\mathbf{L} \to \mathbf{\Sigma}$ 是单元素块组成（=线性序）的子物种。

$\mathbf{\Sigma}$还有一个重要的基，称为 $\mathtt{Q}$-基。 $\mathtt{Q}$-基也以组合为索引，并定义为

$$\mathtt{Q}_F := \sum_{G \geq F} (-1)^{l(G)-l(F)} \frac{1}{l(G/F)} \mathtt{H}_G \qquad \text{or equivalently} \qquad \mathtt{H}_F =: \sum_{G \geq F} \frac{1}{(G/F)!} \mathtt{Q}_G.$$

对于 $S \subseteq I$ 和 $F \in \Sigma[I]$，我们有 去交错

$$F \parallel_S := \begin{cases} F|_S & \text{if } S \text{ is a union of lumps of } F \text{[10]} \\ 0 \in \mathbf{\Sigma}[S] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\mathbf{\Sigma}$ 的乘法和余乘法用 $\mathtt{Q}$-基表示为

$$\mu_{S,T}(\mathtt{Q}_F \otimes \mathtt{Q}_G) = \mathtt{Q}_{FG} \qquad \text{and} \qquad \Delta_{S,T}(\mathtt{Q}_F) = \mathtt{Q}_{F\parallel_S} \otimes \mathtt{Q}_{F\parallel_T}.$$

1.3. 装饰。 给定一个复向量空间 V，我们可以用 V 来“装饰” $\mathbf{\Sigma}$ ，从而得到一个扩大的 Hopf 代数 $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V$。具体如下。

我们有物种，记作 $\mathbf{E}_V$，定义如下：

$$\mathbf{E}_V[I] := V^{\otimes I} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{\text{a copy of } V \text{ for each } i \in I}.$$

双射的作用是重新标记张量因子。

注 1.1。 注意，形如 $\mathbf{E}_V$ 的物种恰好是幺半函子 $\mathbf{E}_V\colon\ \mathsf{S}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ve}$ c.

[9] 一个物种 $\mathbf{p}$ 若连通，则称其为$\mathbf{p}$

[10] $[\emptyset] = \mathbb{C}$不一定连续

我们用 $A,\ S\in V$表示向量，并将 $V^{\otimes I}$ 的简单张量表示为

$$A_I = A_{i_1}\otimes\cdots\otimes A_{i_n}\in V^{\otimes I}$$

其中 $I=\{i_1,\dots,i_n\}$。若对所有 $i\in I$ 都有 $A_i=A$，则记为

$$A^I := A\otimes\cdots\otimes A\in V^{\otimes I}\qquad\text{and}\qquad A^n := A^{[n]}\in V^{\otimes[n]} \tag{4}$$

其中 $[n]=\{1,\dots,n\}$，与通常记法相同。

我们用「$\otimes$」表示物种的 Hadamard 积，它由逐分量张量积给出，参见例如 [Nor20，第 1 节。2]。于是， V-装饰组合 $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{E}_V$的物种由下式给出

$$\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{E}_V[I]=\mathbf{\Sigma}[I]\otimes\mathbf{E}_V[I]=\mathbf{\Sigma}[I]\otimes V^{\otimes I}.$$

根据 [AM10，第 8.13 节。4]， $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{E}_V$是一个连通双代数，其乘法定义为

$$\mu_{S,T}\big((\mathtt{H}_F\otimes A_S)\otimes(\mathtt{H}_G\otimes A_T)\big) := \mathtt{H}_F\mathtt{H}_G\otimes A_S\otimes A_T$$

余乘法定义为

$$\Delta_{S,T}(\mathtt{H}_F\otimes A_I) := (\mathtt{H}_{F|_S}\otimes A_I|_S)\otimes(\mathtt{H}_{F|_T}\otimes A_I|_T).$$

单位和余单位定义为

$$1_{\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{E}_V} := \mathtt{H}_{()}\otimes 1_{\mathbb{C}}\qquad\text{and}\qquad \epsilon_\emptyset(\mathtt{H}_{()}\otimes 1_{\mathbb{C}}) := 1_{\mathbb{C}}.$$

对于 $\mathtt{H}_F\otimes A_I\in\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{E}_V[I]$，我们有

$$\sum_{S\sqcup T=I}\mu_{S,T}\big((\mathtt{H}_{F|_S}\otimes A_I|_S)\otimes(\overline{\mathtt{H}}_{F|_T}\otimes A_I|_T)\big) = \underbrace{\sum_{S\sqcup T=I}\mathtt{H}_{F|_S}\overline{\mathtt{H}}_{F|_T}}_{=0\text{ by (3)}}\otimes A_I = 0$$

and

$$\sum_{S\sqcup T=I}\mu_{S,T}\big((\overline{\mathtt{H}}_{F|_S}\otimes A_I|_S)\otimes(\mathtt{H}_{F|_T}\otimes A_I|_T)\big) = \underbrace{\sum_{S\sqcup T=I}\overline{\mathtt{H}}_{F|_S}\mathtt{H}_{F|_T}}_{=0\text{ by (3)}}\otimes A_I = 0.$$

由此可得， $\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{E}_V$ 的对极为

$$\mathrm{s}_I(\mathtt{H}_F\otimes A_I)=\overline{\mathtt{H}}_F\otimes A_I. \tag{5}$$

1.4. **Steinmann 代数**。 Hopf 代数 $\mathbf{\Sigma}$ 是连通且余交换的，因此适用 CMM 定理，参见 [Nor20，第 1 节。4]现在我们来描述正的[11] 本原元李代数

$$\mathcal{P}(\mathbf{\Sigma})\subset\mathbf{\Sigma}.$$

对于 $I\in$S 一个有限集，令 $\mathcal{T}$ 上的一棵树 为一棵平面[12] 满二叉树，其叶子与 I 的一个划分的块双射标记（ P 的一个划分 I 是 I的互不相交的非空子集的集合，称为块，且它们的并集为 I）。这个划分的块称为 $\mathcal{T}$的块，按从左到右的出现顺序列出后构成一个复合，称为 $\mathcal{T}$的去括号 $F_{\mathcal{T}}$。我们用子集或树的嵌套积 $[\,\cdot,\ \cdot\,]$表示树，见图 2。我们约定，空集 $\emptyset$上不存在树。

[11] 若物种 $\mathbf{p}$ 满足 正性，则 $\mathbf{p}[\emptyset]=0$[12] 也就是说，在每个节点处都选择一个左子节点和一个右子节点



图 2。令 I 为 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 的各种子集。图中展示了树 $()$、。 的去括号结果是复合 $(24, 1, 9, 678)$。若令 $\mathcal{T}_1 = [24,[1,9]]$ 和 $\mathcal{T}_2 = [678]$，那么 $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ 也表示这棵树。

我们通过如下方式定义正物种 **Zie** ： 令 $\mathbf{Zie}[I]$ 表示由 $\mathbb{C}$上的树构成的形式线性组合的向量空间，再对通常意义下应用于树的反对称性和雅可比恒等式关系取商。具体而言，

(1)（反对称性）对于所有形如 $[\dots[\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2]\dots]$ 的树（以这种形式书写一棵树等价于选取一个节点），我们有

$$[\dots[\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2]\dots]+[\dots[\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_1]\dots]=0.$$

(2)（雅可比恒等式）对于所有形如 $[\dots[[\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2],\mathcal{T}_3]\dots]$ 的树，我们有

$$[\dots[[\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2],\mathcal{T}_3]\dots]+[\dots[[\mathcal{T}_3,\mathcal{T}_1],\mathcal{T}_2]\dots]+[\dots[[\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3],\mathcal{T}_1]\dots]=0.$$

于是，**Zie** 是物种中的正李代数，其李括号 ∂^* 由下式给出

$$\partial^*_{S,T}(\mathcal{T}_1\otimes\mathcal{T}_2):=[\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2].$$

注 1.2。 我们知道**Zie** 是由正指数物种 $\mathbf{E}^*_+$生成的自由李代数，因此物种**Zie** 也可表示为

$$\mathbf{Zie}[I]=\mathbf{Lie}\circ\mathbf{E}^*_+[I]=\bigoplus_P\mathbf{Lie}[P]$$

其中 **李** 是李歌剧的物种，直和取遍 P I的所有划分 .

物种中的李代数**Zie** 与物理学文献中的 Steinmann 代数密切相关 [BL75，第 III 节。1], [Rue61，第 6]。具体而言，Steinmann 代数是一个普通的分次李代数，其基础是 **Zie**的伴随编织超平面排列实现的结构映射。关于**Zie** 的伴随编织超平面排列实现，参见 [LNO19], ，其中该李代数确实是 **Zie** 这一事实已在 [NO19]中得到证明。

借助交换子括号， $\mathbf{\Sigma}$ 是物种中的李代数，其定义为

$$[\mathtt{H}_F,\mathtt{H}_G]=\mathtt{H}_F\mathtt{H}_G-\mathtt{H}_G\mathtt{H}_F.$$

Let

$$[I;2]:=\{\text{surjective functions } I\to\{1,2\}\}$$

表示由两个块组成的 I 的组合。由于 $\mathbf{\Sigma}$ 是连通的，其正向本原元李子代数 $\mathcal{P}\mathbf{(\Sigma)}\subset\mathbf{\Sigma}$ 在非空的 I 上定义为

$$\mathcal{P}(\mathbf{\Sigma})[I]=\bigcap_{(S,T)\in[I;2]}\ker(\Delta_{S,T}:\mathbf{\Sigma}[I]\to\mathbf{\Sigma}[S]\otimes\mathbf{\Sigma}[T]).$$

特别地，对于非空的 $\mathtt{Q}_{(I)}\in\mathcal{P}\mathbf{(\Sigma)}[I]$ I。由于**Zie** 由枝条树 $[I]$自由生成，我们可以定义一个李代数同态:

$$\mathbf{Zie}\to\mathcal{P}(\mathbf{\Sigma}),\qquad[I]\mapsto\mathtt{Q}_{(I)}.$$

为明确描述这一点，给定一棵树 $\mathcal{T}$，令 antisym($\mathcal{T}$) 表示通过交换 $\mathcal{T}$的节点处的左右分支而得到的$)_{-1}$ 棵树的集合。对于 $\mathcal{T}' \in$antisym($\mathcal{T}$)，令 $(\mathcal{T},\ \mathcal{T}') \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示将 $\mathcal{T}$ 变为 $\mathcal{T}'$所需的节点交换次数的奇偶性。那么，这个同态完整地定义为：

$$\mathbf{Zie} \to \mathcal{P}(\mathbf{\Sigma}), \qquad \mathcal{T} \mapsto \mathtt{Q}_{\mathcal{T}} := \sum_{\mathcal{T}' \in \mathrm{antisym}(\mathcal{T})} (-1)^{(\mathcal{T},\mathcal{T}')} \mathtt{Q}_{F_{\mathcal{T}'}}.$$

根据 [AM10，推论 11：46], 这是一个同构。此后，我们作如下等同

$$\mathbf{Zie} = \mathcal{P}(\mathbf{\Sigma})$$

并弃用记号 $\mathcal{P}(\mathbf{\Sigma})$。

1.5. **型 A Dynkin 元素。** 回顾一下，$\mathrm{SL}_I(\mathbb{C})$（其根数据）的极小权集合与 $[I;\ 2]$一一对应。我们将与 $(S,\ T)$对应的极小权记作 λ_{ST}。详见 [NO19，第 3 节。1] 了解更多详情。

一个 胞腔[13] [EGS75，定义 6] 上的 I （等价于）子集 $\mathcal{S} \subseteq [I;\ 2]$ 使得对所有$(S,\ T) \in [I;\ 2]$, 以下各项中恰有一项

$$(S,T) \in \mathcal{S} \qquad \text{and} \qquad (T,S) \in \mathcal{S}$$

成立，且其对应的极小权集合在锥组合下封闭，也就是说

$$\lambda_{UV} \in \mathrm{coni}\langle \lambda_{ST} : (S,T) \in \mathcal{S} \rangle \quad \Longrightarrow \quad (U,V) \in \mathcal{S}.$$

通过对由极小权生成的锥空间取对偶，胞腔与辫子超平面排列的伴随排列的区域自然双射，参见 [NO19，第 3 节。3], [Eps16，定义 2。5]。其数量是 OEIS 中的序列A034997 。我们将形式 $\mathbb{C}$-线性组合的胞腔物种记为$\mathbf{L}^\vee$。

与每个复合 F of I 相关联的是子集 $\mathcal{F}_F \subseteq [I;\ 2]$ 该子集由那些复合 $(S,\ T)$ 组成，它们是通过合并 F 的连续块得到的，

$$\mathcal{F}_F := \{(S,T) \in [I;2] : (S,T) \leq F\}.$$

从更几何的角度看，$\mathcal{F}_F$ 是对应于包含在 F 的辫子超平面排列的闭面中的极小权集合的子集。我们将 $F \subseteq \mathcal{S}$ 作为$\mathcal{F}_F \subseteq \mathcal{S}$的缩写。

考虑由下式给出的物种态射

$$\mathbf{L}^\vee \to \mathbf{\Sigma}, \qquad \mathcal{S} \mapsto \mathtt{D}_{\mathcal{S}} := -\sum_{\bar{F} \subseteq \mathcal{S}} (-1)^{l(F)} \mathtt{H}_F. \tag{6}$$

元素 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}}$ 称为与胞腔*Dynkin* 元相关联的$\mathcal{S}$。这些特殊元素由 Epstein-Glaser-Stora 在 [EGS75，方程 1，第26], 中定义，其名称源自 Aguiar-Mahajan [AM17，方程 14。1]（参见注 1.3）。事实上，$\mathtt{D}_{\mathcal{S}}$ 是一个本原元 [AM17，命题 14。1], 因此我们实际上有一个态射 $\mathbf{L}^\vee \to$**Zie**。

对于 $i \in I$，令$\mathcal{S}_i$ 表示由下式给出的胞腔

$$\mathcal{S}_i := \{(S,T) \in [I,2] : i \in S\}.$$

[13] 也称为极大不平衡族 [BMM+12] 和正和系统 [Bjo15]

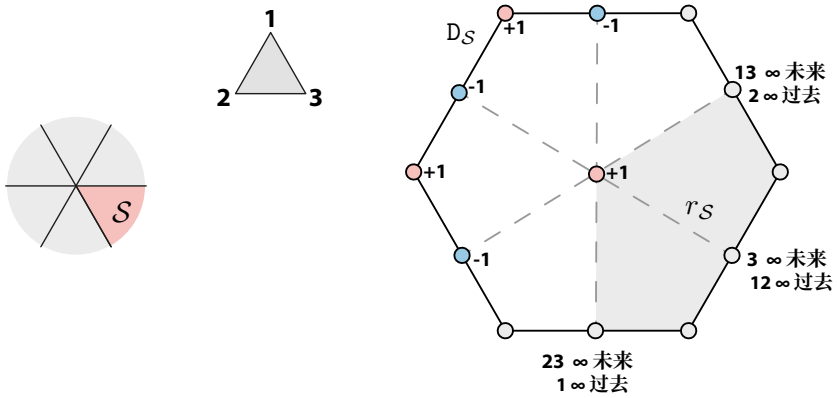


图 3. 胞腔 $\mathcal{S}$ 关于 $\{1,2,3\}$（在伴随辫子排列上）及其 Dynkin 元 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}}$（在 $\mathbf{\Sigma}$ 的热带几何实现上，其中乘法将面嵌入，余乘法将面投影出来，参见 [NO19，引言]））。在因果分解存在的情况下，相应广义推迟函数的时间分量 $r_{\mathcal{S}}$ 是一个取值于 $\mathbb{C}[[\hbar, g]]$ 的广义函数，定义在编织排列上，支集为灰色锥体。图示的 Dynkin 元为 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}} = \mathtt{D}_3 = \mathtt{R}_{(12;3)}$。其支集由满足以下条件的构型组成：标记为 3 的事件可受到标记为 1 和 2 的事件的因果影响。

这是与伴随辫子排列中包含基元素 $e_i \in \mathbb{R}I$ 在和为零超平面上的投影的室相对应的胞腔。令与 i 相关联的全迟滞Dynkin 元$\mathtt{D}_i$ 由下式给出

$$\mathtt{D}_i := \mathtt{D}_{\mathcal{S}_i} = -\sum_{\substack{F\in\Sigma[I]\\ i\in S_k}} (-1)^{l(F)}\mathtt{H}_F.$$

这些 Dynkin 元素见 [AM13，第 14 节。5]。对于 $i \in I$，令

$$\bar{\mathcal{S}}_i := \{(S,T) \in [I,2] : i \in T\}.$$

这是对应于伴随辫子排列中与$\mathcal{S}_i$的室对偶的室的胞腔。令与 i 相关联的全推迟 Dynkin 元 $\mathtt{D}_{\bar{i}}$ 为

$$\mathtt{D}_{\bar{i}} := \mathtt{D}_{\bar{\mathcal{S}}_i} = -\sum_{\substack{F\in\Sigma[I]\\ i\in S_1}} (-1)^{l(F)}\mathtt{H}_F.$$

注 1.3. 更一般地，Dynkin 元素是一般实超平面排列中某些 Zie 元素，它们由相应伴随排列的区域索引。Aguiar-Mahajan 在 [AM17，方程 14 中引入了这些元素。1]。将其特化到编织排列，就可以得到类型 A Dynkin 元素 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}}$。

在 [NO19], 中，给出了关于 Dynkin 元素的如下观点。Hopf 代数 $\mathbf{\Sigma}^*$ 它与 $\mathbf{\Sigma}$ 对偶，被实现为编织排列上的分段常值函数代数$\hat{}\mathbf{\Sigma}^*$。接着，根据多面体代数的意义，其对偶 [BP99，定理 2。7], 是一个代数$\check{}\mathbf{\Sigma}^*$，由伴随辫子排列上分段常值函数的某些泛函构成，即那些通过在排列多面锥上求值而得到的泛函。我们有物种态射

$$\check{\mathbf{\Sigma}}^* \to (\mathbf{L}^\vee)^*$$

其定义是将泛函映射到它们在超平面补集上的分段常值函数上的限制。由于$\check{}\mathbf{\Sigma}^*$ 的乘法对应于嵌入超平面，这个态射就是$\check{}\mathbf{\Sigma}^*$ [NO19，定理 4。5]的不可分解商。接着，在 [NO19，命题 5。1], 中我们看到，对这个态射取线性对偶即可恢复 Dynkin 元映射，

$$\mathbf{L}^\vee \to \mathbf{\Sigma}, \qquad \mathcal{S} \mapsto \mathtt{D}_{\mathcal{S}}.$$

（这里我们已将 $\mathbf{\Sigma}^* = \check{}\mathbf{\Sigma}^*$ 认作相同。）因此我们得到如下结果。

定理 1.1 ([NO19])。 物种态射 $\mathbf{L}^\vee \to$**Zie** 是满射。因此，Dynkin 元 $\{\mathtt{D}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}$ 是 I 上的胞腔$\}$ 张成 **Zie**。

1.6. **Steinmann 关系**。 Dynkin 元素张成**Zie**，但它们并非线性无关。Dynkin 元素所满足的关系由物理学中称为 Steinmann 关系的关系生成，该关系最初见于 [Ste60a], [Ste60b]。

称两个在 I 上的重叠通道 为一对 (S,T)，$(U,V) \in [I;2]$，它们是满足以下条件的 I 双块组合：

$$S \cap U \neq \emptyset \qquad \text{and} \qquad T \cap U \neq \emptyset.$$

设 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ 是 I 上的四个胞腔，其中 (S,T)，$(U,V) \in \mathcal{S}_1,$，并且满足 $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ 分别由 $\mathcal{S}_1$ 替换以下对象而得到：

$$(S,T),(U,V) \mapsto (T,S),(U,V)$$
$$(S,T),(U,V) \mapsto (T,S),(V,U)$$
$$(S,T),(U,V) \mapsto (S,T),(V,U).$$

接着，通过考察 Dynkin 元素(6)的定义，我们看到[14]

$$\mathtt{D}_{\mathcal{S}_1} - \mathtt{D}_{\mathcal{S}_2} + \mathtt{D}_{\mathcal{S}_3} - \mathtt{D}_{\mathcal{S}_4} = 0.$$

一般而言，*Steinmann* 关系是指以这种方式得到的 Dynkin 元之间的任意关系，即由四个 Dynkin 元素构成的交错和，这些元素彼此之间仅通过切换重叠通道而得到。Steinmann 关系的这一界定可见于 [EGS75，第 4 节。3] （该文针对副胞腔给出了稍微更一般的定义。）

关于对偶李余代数的李余括号，Steinmann 关系的另一种刻画见**Zie*** 的 [LNO19，定义 4。2]在这里，Steinmann 关系的出现方式与广义置换多面体的构造方式相同，即要求物种论余代数结构具有类型 A “因子化”。参见 [NO19，定理 4.2 和注释 4。2]。

因此，Dynkin 元素满足 Steinmann 关系。而且，这些关系也是充分的。

定理 1.2. Dynkin 元满足的关系由 Steinmann 关系生成。也就是说，如果

$$\mathbf{Stein}[I] := \langle \mathtt{D}_{\mathcal{S}_1} - \mathtt{D}_{\mathcal{S}_2} + \mathtt{D}_{\mathcal{S}_3} - \mathtt{D}_{\mathcal{S}_4} : \mathtt{D}_{\mathcal{S}_1} - \mathtt{D}_{\mathcal{S}_2} + \mathtt{D}_{\mathcal{S}_3} - \mathtt{D}_{\mathcal{S}_4} = 0 \text{ is a Steinmann relation} \rangle^{15}$$

then

$$\mathbf{Zie} \cong \mathbf{L}^\vee / \mathbf{Stein}.$$

证明。 这可由结合 [LNO19，定理 4。3]与 [NO19，定理 4.2 和 4。5]得到。 □

[14] 我们按照例 1.1 中基本 4点情形的论证进行，这足以展示一般现象[15] 尖括号表示 $\mathbb{C}$-线性张成

例 1.1。 我们给出基本的 4-点例子 $I=\{1、2、3、4\}$，它位于一类正方形面的胞腔实体 A coroot solid [LNO19，图 1]。考虑 I 上的以下四个胞腔（我们标出了它们的差异，名称“s-通道”和“u-通道”来自物理学，指的是曼德尔斯塔姆变量），

$$\mathcal{S}_1=\{\underbrace{(23,14)}_{u\text{-channel}},(12,34),(1,234),(13,24),(13,24),(134,2),(3,124)\}$$

$$\mathcal{S}_2=\{(23,14),\underbrace{(34,12)}_{s\text{-channel}},(1,234),(13,24),(13,24),(134,2),(3,124)\}$$

$$\mathcal{S}_3=\{\underbrace{(14,23)}_{u\text{-channel}},(34,12),(1,234),(13,24),(13,24),(134,2),(3,124)\}$$

$$\mathcal{S}_4=\{(14,23),\underbrace{(12,34)}_{s\text{-channel}},(1,234),(13,24),(13,24),(134,2),(3,124)\}.$$

s道和 u道重叠，因此现在应有

$$\mathtt{D}_{\mathcal{S}_1}-\mathtt{D}_{\mathcal{S}_2}+\mathtt{D}_{\mathcal{S}_3}-\mathtt{D}_{\mathcal{S}_4}=0.$$

为此，我们在下文中始终假设 $\mathtt{H}_F$ 出现在 H-基展开式 (6) 中，其中 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}_1}$，即 $F\subseteq\mathcal{S}_1$。于是我们有

(♠) $$\bar{F}\subseteq\mathcal{S}_1\setminus\{(12,34),(23,14)\}\implies\bar{F}\subseteq\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2,\ \mathcal{S}_3,\ \mathcal{S}_4.$$

若 $F\nsubseteq\mathcal{S}_1\setminus\{(12,34),(23,14)\}$，则 (12,34) $\in F$或 (23,14) $\in F$成立，但不能同时成立，因为这两个通道相互重叠。于是我们有

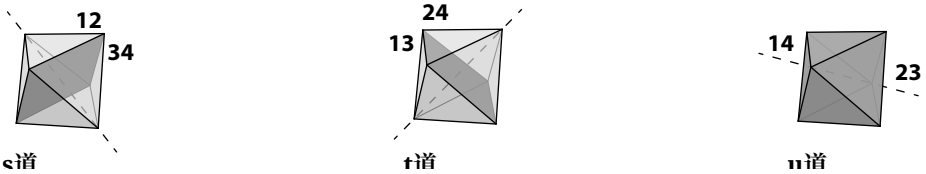
(♥) $$(12,34)\in\bar{F}\implies\bar{F}\subseteq\mathcal{S}_1,\ \bar{F}\nsubseteq\mathcal{S}_2,\ \bar{F}\nsubseteq\mathcal{S}_3,\ \bar{F}\subseteq\mathcal{S}_4.$$

我们还有

(♦) $$(23,14)\in\bar{F}\implies\bar{F}\subseteq\mathcal{S}_1,\ \bar{F}\subseteq\mathcal{S}_2,\ \bar{F}\nsubseteq\mathcal{S}_3,\ \bar{F}\nsubseteq\mathcal{S}_4.$$

注意，在这三种情形 (♠), (♥), (♦)中， $\mathtt{H}_F$ 在 Steinmann关系的四项交错和中，前置因子的和为零。

注 1.4. 在 [NO19], 可见，Steinmann条件等价于在某种局部（或球面）意义下对广义置换多面体的限制。Ocneanu [Ocn18] 和 Early [Ear19]研究了 Steinmann条件的仿射版本，背景是高阶结构和拟阵细分。在这里，我们观察到，曼德尔斯塔姆变量的伴随辫子排列的（平移后）超平面给出了超单纯形 $\Delta(2,4)$（八面体）的三种细分。



参见 [BC19], [CGUZ19] 关于广义双伴随理论中广义费曼图的密切相关研究， Φ^3-理论。

1.7. **Ruelle 恒等式**。由于 Dynkin 元素张成**Zie**，我们可以探究如何用 Dynkin 元素来描述**Zie** 的李括号。物理学文献中将答案称为 Ruelle 恒等式。

为了陈述 Ruelle 恒等式，我们需要注意以下几点。对于 $S \sqcup T = I$，如果 $\mathcal{S}_1$ 是位于 S 上的一个胞腔，并且 $\mathcal{S}_2$ 是位于 T 上的一个胞腔，那么 $\mathcal{S}_1 \sqcup \mathcal{S}_2$ 描述了伴随辫子排列的一组余维一面，这些面由正交于 λ_{ST} 的超平面支撑（在 [LNO19],中，此类面被称为 *Steinmann* 等价）。位于 $\mathcal{S}^{[S,T]}$ 上且满足 I 的一个胞腔

$$\mathcal{S}^{[S,T]} \supseteq \mathcal{S}_1 \sqcup \mathcal{S}_2 \qquad \text{and} \qquad (S,T) \in \mathcal{S}^{[S,T]}$$

对应于这样一个室：从 $\mathcal{S}_1 \sqcup \mathcal{S}_2$ 的某个面的内部点沿 λ_{ST} 方向移动（任意小的距离）即可到达该室。特别地，这样的胞腔总是存在，但并不唯一（Steinmann 关系恰好消除了这种歧义）。沿对偶方向移动所得到的室，对应于将 $\mathcal{S}^{[S,T]}$ 中的 (S,T) 替换为 (T,S) 后得到的胞腔。

命题 1.3 (Ruelle 恒等式 [Rue61，公式 6。6])。对于 $S \sqcup T = I$，设 $\mathcal{S}_1$ 是位于 S 上的一个胞腔，并设 $\mathcal{S}_2$ 是位于 T 上的一个胞腔。设 $\mathcal{S}^{[S,T]}$ 是位于 I 上且满足

$$\mathcal{S}^{[S,T]} \supseteq \mathcal{S}_1 \sqcup \mathcal{S}_2 \qquad \text{and} \qquad (S,T) \in \mathcal{S}^{[S,T]}.$$

令 $\mathcal{S}^{[T,S]}$ 表示在 $\mathcal{S}^{[S,T]}$ 中将 (S,T) 替换为 (T,S) 后得到的胞腔。**Zie** 的李括号由下式给出

$$[\mathtt{D}_{\mathcal{S}_1}, \mathtt{D}_{\mathcal{S}_2}] = \mathtt{D}_{\mathcal{S}^{[S,T]}} - \mathtt{D}_{\mathcal{S}^{[T,S]}}. \tag{7}$$

证明。由 [LNO19 第 5 节可知，2]其中赋予 **Zie** 的伴随编织超平面排列实现的李括号（在那里记作 $\mathbf{\Gamma}$）与 (7) 一致。或者，我们也可以像 [EGS75 第 4 节那样直接验证。3]□

2. $\mathbf{\Sigma}$ 作为 Hopf**E**-代数

现在我们回顾 Steinmann 箭头，它们是（或者我们将其解释为）指数物种**E** 在 $\mathbf{\Sigma}$ 上的作用。我们将通过两种方式证明，它们赋予 $\mathbf{\Sigma}$ Hopf **E**-代数的结构（即内在于 **E**-模范畴的 Hopf 幺半群结构），从而使本原部分**Zie** $= \mathcal{P}(\mathbf{\Sigma})$ 以两种方式具有 Lie**E**-代数的结构。

2.1. **的导子与余导子 $\mathbf{\Sigma}$**。令 $Y = \{y_1, \ldots, y_r\}$ 为基数为$r \in \mathbb{N}$的有限集。我们认为 Y 具有“颜色” g（物理上即耦合常数）。给定一个物种$\mathbf{p}$，我们有其 Y-导子 $\mathbf{p}^{[Y]}$，它是由下式给出的物种$\mathbf{p}$

$$\mathbf{p}^{[Y]}[I] := \mathbf{p}[Y \sqcup I] \qquad \text{and} \qquad \mathbf{p}^{[Y]}[\sigma] := \mathbf{p}[\mathrm{id}_Y \sqcup \sigma].$$

升算子 u 在$\mathbf{p}$ 上是形如[16]的物种态射

$$u : \mathbf{p} \to \mathbf{p}^{[Y]}, \qquad \mathtt{a} \mapsto u(\mathtt{a}).$$

注 2.1. 此外，还存在一个升算子自同态代数 [Nor20，第 2 节。4], 考虑物种中的内对象时会用到，参见 [Nor20，第 5 节。1]。

[16] 对于升算子，我们通常将 $u(\mathtt{a}) := u_I(\mathtt{a})$ 简写为

作为集合 Y 的一个具体例子，我们有形式符号集合 $[r]:=\{*_1、\ldots\ldots、*_r\}$（严格来说，我们选取了去范畴化函子 $Y\mapsto r$ 的一个截面）。我们通常将其简写为
$*=*_1$，也有 $*=\{*\}$ 和 $*I=\{*\}\sqcup I$。导子 $\mathbf{p}'$ 的$\mathbf{p}$ 导子是单元素情形 Y-导子 $Y=\{*\}$，因此

$$\mathbf{p}'[I]:=\mathbf{p}^{[*]}[I]=\mathbf{p}[*I].$$

参见 [AM10，第 8.12 节。1], 一个 升算子 u 作用于 $\mathbf{p}$ 时，是形如 $u\colon\ \mathbf{p}\to\mathbf{p}'$的升算子。为 $u_*(\mathsf{a})=u(\mathsf{a})$ 明确指定所添加单元素的名称，我们称升算子为交换的，如果

$$u_{*_2}(u_{*_1}(\mathsf{a}))=u_{*_1}(u_{*_2}(\mathsf{a})).$$

通过迭代应用交换升算子可以得到升算子，参见 [Nor20，第 5 节。4]。参见 [AM10，第 8.12 节。4], 代数上的升算子 $\mathbf{a}$ 称为升导子，如果

$$u(\mu_{S,T}(\mathsf{a}\otimes\mathsf{b}))=\mu_{*S,T}(u(\mathsf{a})\otimes\mathsf{b})+\mu_{S,*T}(\mathsf{a}\otimes u(\mathsf{b})) \tag{8}$$

（由此可知，若$\mathbf{a}$ 含幺，则 $u(1_{\mathsf{a}})=0$）而余代数 $\mathbf{c}$ 上的升算子称为升余导子，如果

$$(u\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes u)\circ\Delta_{S,T}(\mathsf{a})=\Delta_{*S,T}(u(\mathsf{a}))+\Delta_{S,*T}(u(\mathsf{a})). \tag{9}$$

一个上双导子定义在双代数$\mathbf{h}$ 上，是一种既是升导子又是升余导子的升算子。在连通物种$\mathbf{h}$上给定升（余/双）导子的资料，等价于赋予$\mathbf{h}$ 一个$\mathbf{L}$-（余/霍普夫）代数的$=$ 结构（即内蕴于$\mathbf{L}$-模的（余/霍普夫）幺半群）。在$\mathbf{h}$ 上给定交换升（余/双）导子的资料，等价于赋予$\mathbf{h}$ 一个$\mathbf{E}$-（余/霍普夫）代数的结构。更多细节和证明参见 [Nor20，第 5]节。

因此，升导子 u of $\mathbf{\Sigma}$ 是一个物种态射

$$u:\mathbf{\Sigma}\to\mathbf{\Sigma}',\qquad \mathtt{H}_F\mapsto u(\mathtt{H}_F)\qquad \text{such that}\qquad u(\mathtt{H}_F\mathtt{H}_G)=u(\mathtt{H}_F)\mathtt{H}_G+\mathtt{H}_F u(\mathtt{H}_G).$$

升导 子 $\mathbf{\Sigma}$ 由其在元素 $\mathtt{H}_{(I)}$, $I\in$S 上的取值确定，因为 n

$$u(\mathtt{H}_F)=u(\mathtt{H}_{(S_1)})\mathtt{H}_{(S_2)}\ldots\mathtt{H}_{(S_k)}+\ \cdots\ +\mathtt{H}_{(S_1)}\ldots\mathtt{H}_{(S_{k-1})}u(\mathtt{H}_{(S_k)}).$$

升导子必须满足 $u(\mathtt{H}_{(\,)})=0$，因为 $\mathtt{1}_{\mathbf{\Sigma}}=\mathtt{H}_{(\,)}$。升余导子 u of $\mathbf{\Sigma}$ 是一个物种态射

$$u:\mathbf{\Sigma}\to\mathbf{\Sigma}',\qquad \mathtt{H}_F\mapsto u(\mathtt{H}_F)\qquad \text{such that}\qquad \Delta_{*S,T}(u(\mathtt{H}_F))=u(\mathtt{H}_{F|_S})\otimes\mathtt{H}_{F|_T}.$$

特别地，升余导子必须满足

$$\Delta_{*S,T}(u(\mathtt{H}_{(I)}))=u(\mathtt{H}_{(S)})\otimes\mathtt{H}_{(T)}.$$

因此，$\mathbf{\Sigma}$ 的上双导子 u 必须满足

$$u(\mathtt{H}_{(i)})=a_1\mathtt{H}_{(*,i)}+a_2\mathtt{H}_{(*i)}+a_3\mathtt{H}_{(i,*)}\qquad \text{where}\qquad a_1+a_2+a_3=0\in\mathbb{C}.$$

受此启发，给定 $a,\ b\in\mathbb{C}$，我们将 $\mathbf{\Sigma}$ 的升导子$u_{a,\ b}$ 定义为

$$u_{a,b}:\mathbf{\Sigma}\to\mathbf{\Sigma}',\qquad u_{a,b}(\mathtt{H}_{(I)}):=-a\mathtt{H}_{(*,I)}+(a+b)\mathtt{H}_{(*I)}-b\mathtt{H}_{(I,*)}. \tag{10}$$

T为了给出明确的描述，考虑以下关于 $I=\{1,2,3$ 的例子 $\}$,

$$\begin{aligned}u_{a,b}(\mathtt{H}_{(12,3)})=&\ u_{a,b}(\mathtt{H}_{(12)})\mathtt{H}_{(3)}+\mathtt{H}_{(12)}u_{a,b}(\mathtt{H}_{(3)})\\ =&\ (-a\mathtt{H}_{(*,12)}+(a+b)\mathtt{H}_{(*12)}-b\mathtt{H}_{(12,*)})\mathtt{H}_{(3)}+\mathtt{H}_{(12)}(-a\mathtt{H}_{(*,3)}+(a+b)\mathtt{H}_{(*3)}-b\mathtt{H}_{(3,*)})\\ =&\ -a\mathtt{H}_{(*,12,3)}+(a+b)\mathtt{H}_{(*12,3)}-b\mathtt{H}_{(12,*,3)})-a\mathtt{H}_{(12,*,3)}+(a+b)\mathtt{H}_{(12,*3)}-b\mathtt{H}_{(12,3,*)}.\end{aligned}$$

由此可见，一般而言

$$u_{a,b}(\mathtt{H}_F) = \sum_{1\leq m\leq k} -a\mathtt{H}_{(S_1,\dots,*,S_m,\dots,S_k)} + (a+b)\mathtt{H}_{(S_1,\dots,*S_m,\dots,S_k)} - b\mathtt{H}_{(S_1,\dots,S_m,*,\dots,S_k)}.$$

定理 2.1。给定 a，$b\in\mathbb{C}$，物种态射

$$\mathbf{\Sigma}\to\mathbf{\Sigma}', \qquad \mathtt{H}_F\mapsto u_{a,b}(\mathtt{H}_F)$$

是 $\mathbf{\Sigma}$ 的上双导子（由此可得 $\mathbf{\Sigma}$ Hopf L-代数结构）。

证明。下文中，对于 $F=(S_1,\ \dots\dots,\ S_k)$ 这一 I 与 $S\subseteq I$ 的复合，我们记作

$$(U_1,\dots,U_k) := (S_1\cap S,\dots,S_k\cap S).$$

一般而言，$(U_1,\ \dots\dots,\ U_k)$ 是 I 的分解。

首先，根据构造，$u_{a,b}$ 定义了 $\mathbf{\Sigma}$ 上的一个导子。为了证明$u_{a,b}$ 也定义了一个余导子，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta_{*S,T}(u_{a,b}(\mathtt{H}_F)) &= \Delta_{*S,T}\left(\sum_{1\leq m\leq k} -a\mathtt{H}_{(S_1,\dots,*,S_m,\dots,S_k)} + (a+b)\mathtt{H}_{(S_1,\dots,*S_m,\dots,S_k)} - b\mathtt{H}_{(S_1,\dots,S_m,*,\dots,S_k)}\right)\\
&= \left(\sum_{1\leq m\leq k} -a\mathtt{H}_{(U_1,\dots,*,U_m,\dots,U_k)_+} + (a+b)\mathtt{H}_{(U_1,\dots,*U_m,\dots,U_k)_+} - b\mathtt{H}_{(U_1,\dots,U_m,*,\dots,U_k)_+}\right)\otimes\mathtt{H}_{F|_T}\\
&= \left(\sum_{\substack{1\leq m\leq k\\ U_m\neq\emptyset}} -a\mathtt{H}_{(U_1,\dots,*,U_m,\dots,U_k)_+} + (a+b)\mathtt{H}_{(U_1,\dots,*U_m,\dots,U_k)_+} - b\mathtt{H}_{(U_1,\dots,U_m,*,\dots,U_k)_+}\right)\otimes\mathtt{H}_{F|_T}\\
&\quad + \underbrace{\left(\sum_{\substack{1\leq m\leq k\\ U_m=\emptyset}} (-a+(a+b)-b)\,\mathtt{H}_{(U_1,\dots,U_{m-1},*,U_{m+1},\dots,U_k)_+}\right)\otimes\mathtt{H}_{F|_T}}_{=0}\\
&= u(\mathtt{H}_{F|_S})\otimes\mathtt{H}_{F|_T}.
\end{aligned}$$

因此，$u_{a,b}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$上的一个双导子。 □

2.2. **Steinmann 箭头**。现在我们回顾上的 Steinmann 箭头，其精确定义由 Epstein-Glaser-Stora [EGS75，第 82-83]页给出。Steinmann 最初在以下情形中考察了这些箭头：表示为算子值分布 [Ste60b，第 3]节。

令推迟 *Steinmann* 箭头 为 $\mathbf{\Sigma}$ 上的上双导子，其定义为

$$*\downarrow(-):\mathbf{\Sigma}\to\mathbf{\Sigma}', \qquad *\downarrow\mathtt{H}_F := u_{1,0}(\mathtt{H}_F) = \sum_{1\leq m\leq k} -\mathtt{H}_{(S_1,\dots,*,S_m,\dots,S_k)} + \mathtt{H}_{(S_1,\dots,*S_m,\dots,S_k)}. \tag{11}$$

令超前 *Steinmann* 箭头 为 $\mathbf{\Sigma}$ 上的上双导子，其定义为

$$*\uparrow(-):\mathbf{\Sigma}\to\mathbf{\Sigma}', \qquad *\uparrow\mathtt{H}_F := u_{0,1}(\mathtt{H}_F) = \sum_{1\leq m\leq k} \mathtt{H}_{(S_1,\dots,*S_m,\dots,S_k)} - \mathtt{H}_{(S_1,\dots,S_m,*,\dots,S_k)}. \tag{12}$$

从现在起，我们使用这种箭头记号来代替‘u’，以符合物理学文献的惯例。具体而言

$$*\downarrow\mathtt{H}_{(I)} = -\mathtt{H}_{(*,I)} + \mathtt{H}_{(*I)} \qquad \text{and} \qquad *\uparrow\mathtt{H}_{(I)} = \mathtt{H}_{(*I)} - \mathtt{H}_{(I,*)}.$$

我们有

$$*\uparrow \mathtt{H}_F \;-\; *\downarrow \mathtt{H}_F = u_{-1,1}(\mathtt{H}_F) = [\mathtt{H}_{(*)}, \mathtt{H}_F].$$

这个恒等式常见于算子值分布的物理学文献中，例如 [Ste60b，公式 13], [EG73，公式 83]。双导子 $u_{-1,\,1}$ 赋予 $\mathbf{\Sigma}$ Hopf $\mathbf{L}$-代数的结构。这个 $\mathbf{L}$-作用是 $\mathbf{\Sigma}$的伴随表示的限制。注意，Steinmann 箭头是交换升算子。根据 [Nor20，命题 5。4], 我们可以对它们加以限制，从而得到**Zie**的升导子，

$$*\downarrow(-)\colon\ \ \mathbf{Zie} \to \mathbf{Zie}', \qquad \mathtt{D}_{\mathcal{S}} \mapsto *\downarrow \mathtt{D}_{\mathcal{S}} \qquad \text{and} \qquad *\uparrow(-) : \mathbf{Zie} \to \mathbf{Zie}', \qquad \mathtt{D}_{\mathcal{S}} \mapsto *\uparrow \mathtt{D}_{\mathcal{S}}.$$

遵循 [Nor20，第 5], 节，Steinmann 箭头赋予 $\mathbf{\Sigma}$ Hopf $\mathbf{E}$-代数结构（并赋予 **Zie** Lie $\mathbf{E}$-代数结构），有两种方式。详情如下。首先，$\mathbf{E}$ 是指数物种，定义为

$$\mathbf{E}[I] := \mathbb{C} \qquad \text{for all} \quad I \in \mathsf{S}.$$

我们记作 $\mathtt{H}_I := 1_{\mathbb{C}} \in \mathbf{E}[I]$。指数物种配备平凡乘法后，成为物种中的代数

$$\mu_{S,T} : \mathbf{E}[S] \otimes \mathbf{E}[T] = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} = \mathbf{E}[I], \qquad \mathtt{H}_S \otimes \mathtt{H}_T \mapsto \mathtt{H}_I.$$

我们有以下由 Steinmann 箭头诱导的 $\mathbf{E}$-模，其定义见 [Nor20，公式23],

$$\mathbf{E} \bullet \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}, \qquad \mathtt{H}_Y \otimes \mathtt{a} \mapsto Y\downarrow \mathtt{a} := \underbrace{y_r \downarrow \circ \cdots \circ y_1 \downarrow}_{\text{invariant of the order}} (\mathtt{a})$$

and

$$\mathbf{E} \bullet \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}, \qquad \mathtt{H}_Y \otimes \mathtt{a} \mapsto Y\uparrow \mathtt{a} := \underbrace{y_r \uparrow \circ \cdots \circ y_1 \uparrow}_{\text{invariant of the order}} (\mathtt{a})$$

其中 $Y = \{y_1, \ldots\ldots, y_r\}$ 与通常一样。特别地，$Y\downarrow(-)$ 和 $Y\uparrow(-)$ 是通过迭代 Steinmann 箭头升算子 $*\downarrow(-)$ 和 $*\downarrow(-)$ 得到的 Steinmann 箭头提升算子，如第 2.1 节所述。例如，推迟箭头 $Y\downarrow(-)$ 由如下形式的线性映射组成

$$\mathbf{\Sigma}[I] \to \mathbf{\Sigma}[Y \sqcup I]$$

对每个有限集 I 的选择均成立。对于 $Y = [r] := \{*_1, \ldots\ldots, *_r\}$，我们将其简写为

$$\downarrow(-) := *\downarrow(-), \qquad \downarrow\downarrow(-) := \{*_1, *_2\}\downarrow(-), \quad \ldots$$

超前箭头也类似。由于这些箭头是导子，它们保持 $\mathbf{\Sigma}$ 的乘法；又由于这些箭头是余导子，它们保持 $\mathbf{\Sigma}$的余乘法。因此，这些 $\mathbf{E}$-作用赋予 $\mathbf{\Sigma}$ 一个在 $\mathbf{E}$-模范畴内部构造的 Hopf 幺半群结构。

通过考察定义，我们看到

(13) $$Y\downarrow \mathtt{H}_{(I)} = \mathtt{R}_{(Y;I)} := \sum_{Y_1 \sqcup Y_2 = Y} \overline{\mathtt{H}}_{(Y_1)} \mathtt{H}_{(Y_2 \sqcup I)} \qquad \text{and} \qquad Y\uparrow \mathtt{H}_{(I)} = \mathtt{A}_{(Y;I)} := \sum_{Y_1 \sqcup Y_2 = Y} \mathtt{H}_{(Y_1 \sqcup I)} \overline{\mathtt{H}}_{(Y_2)}.$$

由此可得

$$Y\downarrow \mathtt{H}_F = \sum_{Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_k = Y} \mathtt{R}_{(Y_1;S_1)} \ldots \mathtt{R}_{(Y_k;S_k)} \qquad \text{and} \qquad Y\uparrow \mathtt{H}_F = \sum_{Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_k = Y} \mathtt{A}_{(Y_1;S_1)} \ldots \mathtt{A}_{(Y_k;S_k)}.$$

求和遍及 Y 的所有长度为 $l(F)$ 的分解 $(Y_1, \dots, Y_k)$。我们分别称 $\mathtt{R}_{(Y;\, I)}\ \mathtt{A}_{(Y;\, I)} \in \mathbf{\Sigma}[Y \sqcup I]$ 为迟滞元素和超前元素。总迟滞元素和总超前元素定义为

$$Y\downarrow \mathtt{H}_{(i)} = \mathtt{R}_{(Y;i)} = \sum_{Y_1 \sqcup Y_2 = Y} \overline{\mathtt{H}}_{(Y_1)}\, \mathtt{H}_{(Y_2 i)} \qquad \text{and} \qquad Y\uparrow \mathtt{H}_{(i)} = \mathtt{A}_{(Y;i)} = \sum_{Y_1 \sqcup Y_2 = Y} \mathtt{H}_{(Y_2 i)}\, \overline{\mathtt{H}}_{(Y_1)}$$

分别。

注 2.2。 如果我们置 $I = J \sqcup \{i\}$，那么有

$$\mathtt{R}_{(J;i)} = \sum_{\substack{S \sqcup T = I \\ i \in T}} \overline{\mathtt{H}}_{(S)}\, \mathtt{H}_{(T)} = -\sum_{\substack{F \in \Sigma[I] \\ i \in S_k}} (-1)^{l(F)} \mathtt{H}_F = \mathtt{D}_i$$

and

$$\mathtt{A}_{(J;i)} = \sum_{\substack{S \sqcup T = I \\ i \in T}} \mathtt{H}_{(T)}\, \overline{\mathtt{H}}_{(S)} = -\sum_{\substack{F \in \Sigma[I] \\ i \in S_1}} (-1)^{l(F)} \mathtt{H}_F = \mathtt{D}_{\bar{i}}.$$

2.3. **Steinmann 箭头的柯里化**。 给定一个物种 $\mathbf{p}$，我们令 $\mathbf{p}^{\mathbf{E}}$ 表示由下式给出的物种

$$\mathbf{p}^{\mathbf{E}}[I] := \prod_{r=0}^{\infty} (\mathbf{p}^{[r]}[I])^{\mathsf{S}_r}.$$

这里，$\mathbf{p}^{[r]}$ 是 $\mathbf{p}$ 的 Y-导子（$Y = [r]$），而 $(-)^{\mathsf{S}_r}$ 表示 S_r-不变元构成的子空间，其中 S_r 是作用在 $[r]$上的对称群。我们使用形式幂级数记法表示 $\mathbf{p}^{\mathbf{E}}[I]$ 中的元素

$$\sum_{r=0}^{\infty} \mathtt{x}_r, \qquad \mathtt{x}_r \in \mathbf{p}^{[r]}[I].$$

具体而言，$\mathtt{x}_r$ 是向量空间 $\mathbf{p}[\{*_1, \dots, *_r\} \sqcup I]$ 中的一个元素，在置换 $\{*_1, \dots, *_r\}$ 的作用下保持不变，同时固定 I。

映射 $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}^{\mathbf{E}}$ 扩展为物种上的一个自函子。特别地，给定物种态射 $\eta : \mathbf{p} \to \mathbf{q}$，我们有由 $\eta^{\mathbf{E}}$ 给出的态射

$$\eta^{\mathbf{E}} : \mathbf{p}^{\mathbf{E}} \to \mathbf{q}^{\mathbf{E}}, \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \mathtt{x}_r \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \eta_{[r] \sqcup I}(\mathtt{x}_r). \tag{14}$$

物种 p 的级数 是 形如 $s : \mathbf{E} \to \mathbf{p}$ 的物种态射。注意，$\mathbf{p}^{\mathbf{E}}[I]$中的元素自然地就是物种 $Y \mapsto \mathbf{p}^{[Y]}[I]$的级数。详见 [Nor20，第 3 节。2] 关于 $\mathbf{p}^{\mathbf{E}}$ 与柯西积的内 Hom 之间的联系，参见 [Nor20，第 2 节。3]。

若 $\mathbf{a}$ 是物种中的代数，那么 $\mathbf{a}^{\mathbf{E}}$也是物种中的代数，见 [Nor20，公式 12]。特别地，$\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{E}}$ 是一个代数，其乘法定义为

$$\sum_{r=0}^{\infty} \mathtt{x}_r \otimes \sum_{r=0}^{\infty} \mathtt{y}_r \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r_1 + r_2 = r} \frac{r!}{r_1!\, r_2!} \mu_{[r_1] \sqcup S, [r_2] \sqcup T}(\mathtt{x}_{r_1} \otimes \mathtt{y}_{r_2}).$$

定理 2.2. 我们有以下物种中代数的同态 ,

$$\mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{E}}, \qquad \mathtt{H}_F \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_k = [r]} \mathtt{R}_{(Y_1;S_1)} \cdots \mathtt{R}_{(Y_k;S_k)}$$

and

$$\mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{E}}, \qquad \mathtt{H}_F \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_k = [r]} \mathtt{A}_{(Y_1;S_1)} \cdots \mathtt{A}_{(Y_k;S_k)}.$$

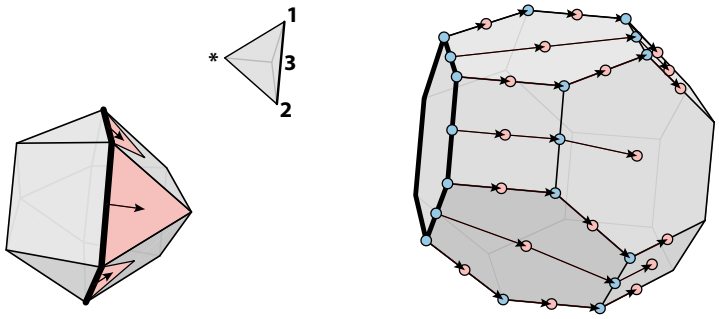


图 4. 推迟 Steinmann 箭头 $*\downarrow$ 对$I=\{1,\ 2,\ 3\}$ 作用于 Steinmann 球面（左图）以及其热带几何实现的示意图$\mathbf{\Sigma}$ （右图，参见 [NO19，引言]）。

证明. Steinmann 箭头是 $\mathbf{\Sigma}$ 的交换上双导子，因此赋予 $\mathbf{\Sigma}$ Hopf $\mathbf{E}$-代数的结构。于是，该结果是 [Nor20 定理 5 的特例。1]. □

定理 2.2 的同态是以下映射的唯一扩张

$$\mathtt{H}_{(I)} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \mathtt{R}_{(r;I)} \qquad \text{and} \qquad \mathtt{H}_{(I)} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \mathtt{A}_{(r;I)}$$

为同态。在因果微扰理论的应用中，我们将关注这些同态的带装饰的类比，参见第4.1节。

注 2.3. 这些同态 $\mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{E}}$ 来自对 Steinmann 箭头的$\mathbf{E}$-作用进行柯里化。详见 [Nor20，第 5 节。1] 。

2.4. **Steinmann 箭头与 Dynkin 元**。现在我们证明，Steinmann 箭头在**Zie**上的限制是其李括号的导子，并且可以用胞腔（即伴随辫子排列的区域）作出有趣的描述。

根据 [Eps16第 2]，节，我们定义交换升算子

$$*\downarrow(-) : \mathbf{L}^{\vee} \to \mathbf{L}^{\vee\prime}, \qquad *\downarrow\mathcal{S} := \{(*S,T),(S,*T),(I,*) : (S,T)\in\mathcal{S}\}$$

and

$$*\uparrow(-) : \mathbf{L}^{\vee} \to \mathbf{L}^{\vee\prime}, \qquad *\uparrow\mathcal{S} := \{(*S,T),(S,*T),(*,I) : (S,T)\in\mathcal{S}\}.$$

这些定义确实良好；$*\downarrow\mathcal{S}$ 对应于超平面 I 一侧的伴随辫子排列中的室$\lambda_{*,\ I}=0$ 该室以 $\mathcal{S}$ 的面为一个面，而 $*\uparrow\mathcal{S}$ 对应于超平面 $*$ 另一侧的室$\lambda_{*,\ I}=0$ 该室以 $\mathcal{S}$ 的面为一个面。参见 [LNO19，注 2。2] 更多细节。由此，根据命题 1.3（Ruelle 恒等式），可得

$$[\mathtt{H}_{(*)}, \mathtt{D}_{\mathcal{S}}] = \mathtt{D}_{*\uparrow\mathcal{S}} - \mathtt{D}_{*\downarrow\mathcal{S}}.$$

诱导的$\mathbf{E}$-模由下式给出

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{L}^{\vee} \to \mathbf{L}^{\vee}, \qquad \mathtt{H}_Y \otimes \mathcal{S} \mapsto Y\downarrow\mathcal{S} := \{(Y_1\sqcup S, Y_2\sqcup T)\in[Y\sqcup I;2] : (S,T)\in\mathcal{S} \text{ or } S=I\}$$

和

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{L}^{\vee} \to \mathbf{L}^{\vee}, \qquad \mathtt{H}_Y \otimes \mathcal{S} \mapsto Y\uparrow\mathcal{S} := \{(Y_1\sqcup S, Y_2\sqcup T)\in[Y\sqcup I;2] : (S,T)\in\mathcal{S} \text{ or } T=I\}.$$

命题 2.3。 给定一个位于 I 上的胞腔 $\mathcal{S}$，我们有

$$Y \downarrow \mathtt{D}_{\mathcal{S}} = \mathtt{D}_{Y\downarrow\mathcal{S}} \qquad \text{and} \qquad Y \uparrow \mathtt{D}_{\mathcal{S}} = \mathtt{D}_{Y\uparrow\mathcal{S}}.$$

证明。 我们只考虑推迟情形 $Y \downarrow \mathtt{D}_{\mathcal{S}} = \mathtt{D}_{Y\downarrow\mathcal{S}}$，因为超前情形的证明类似。只需考虑情形 $Y = \{*\}$。我们有

$$\downarrow \mathtt{D}_{\mathcal{S}} = -\sum_{\bar{F}\subseteq\mathcal{S}} (-1)^{l(F)} \downarrow \mathtt{H}_F \qquad \text{and} \qquad \mathtt{D}_{\downarrow\mathcal{S}} = -\sum_{\bar{F}\subseteq\downarrow\mathcal{S}} (-1)^{l(F)} \mathtt{H}_F.$$

因此，只要有以下等式，结论便成立

$$\sum_{\bar{F}\subseteq\mathcal{S}} (-1)^{l(F)} \sum_{1\leq m\leq k} -\mathtt{H}_{(S_1,\dots,*,S_m,\dots,S_k)} + \mathtt{H}_{(S_1,\dots,*S_m,\dots,S_k)} \stackrel{?}{=} \sum_{\bar{G}\subseteq\downarrow\mathcal{S}} (-1)^{l(G)} \mathtt{H}_G.$$

确实，请注意，左端出现的 $\mathtt{H}$-基元素 $\mathtt{H}_G \in \mathbf{\Sigma}[*I]$ 恰好是满足以下条件的那些元素

$$\bar{G} \subseteq\downarrow \mathcal{S}.$$

还要注意，每个 $\mathtt{H}_G$ 出现时的总符号为 $(-1)^{l(G)}$，因为当 $*$ 作为单元素块插入时，$l(G)$便增加一，因此它也带有负号。 □

注记 2.4。 这种对$\mathbf{E}$-模结构的解释 $\mathbf{\Sigma}$ 限制在本原部分上$\mathbf{Zie} = \mathcal{P}(\mathbf{\Sigma})$ 以伴随辫子排列的方式来理解，表明 Steinmann 箭头在 [AM17], [AM20], 方向上存在显而易见的推广，因为 Hopf 幺半群在此处是通过超平面排列来推广的。

推论 2.3.1。 我们有以下物种中的李代数同态，

$$\mathbf{Zie} \to \mathbf{Zie}^{\mathbf{E}}, \qquad \mathtt{D}_{\mathcal{S}} \mapsto \mathtt{D}_{(-)\downarrow\mathcal{S}} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathtt{D}_{[r]\downarrow\mathcal{S}} = \mathtt{D}_{\mathcal{S}} + \mathtt{D}_{\downarrow\mathcal{S}} + \mathtt{D}_{\downarrow\downarrow\mathcal{S}} + \cdots$$

and

$$\mathbf{Zie} \to \mathbf{Zie}^{\mathbf{E}}, \qquad \mathtt{D}_{\mathcal{S}} \mapsto \mathtt{D}_{(-)\uparrow\mathcal{S}} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathtt{D}_{[r]\uparrow\mathcal{S}} = \mathtt{D}_{\mathcal{S}} + \mathtt{D}_{\uparrow\mathcal{S}} + \mathtt{D}_{\uparrow\uparrow\mathcal{S}} + \cdots.$$

证明。 Steinmann 箭头是 **Zie** 的交换上双导子，因此赋予 **Zie** 李$\mathbf{E}$-代数结构。该结果于是成为 [Nor20定理 5 的一个特例。1]。 □

3. 乘积与级数

现在，我们在当前这种简洁、抽象的框架下回顾因果微扰理论的若干基本构造。我们暂时不施加因果分解/因果可加性。我们暂且称其为“ T-乘积”和“ R-乘积”，而在存在因果分解时，再将其改称为“时间序乘积”和“推迟乘积”。

3.1. T-乘积、广义 T-乘积与广义 R-乘积。令 V 为 $\mathbb{C}$上的一个向量空间。令 $\mathcal{A}$ 为一个 $\mathbb{C}$-代数，其乘法记为 $\star$。令 $\mathbf{U}_{\mathcal{A}}$ 为由下式给出的物种中的代数：

$$\mathbf{U}_{\mathcal{A}}[I] := \mathcal{A}.$$

Th双射的作用是平凡的，而乘法就是$\mathcal{A}$的乘法 .

该正指数物种$\mathbf{E}_+^*$ 定义为

$$\mathbf{E}_+^*[I] := \mathbb{C} \qquad \text{if} \quad I \neq \emptyset \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E}_+^*[\emptyset] = 0.$$

设乘积T-乘积系统$\mathbf{T}$是正指数物种的一个乘积系统$\mathbf{E}_+^*$，定义见 [Nor20，第 6 节。2]这意味着 T 是一个形式如下的物种态射[17]

$$\mathrm{T}:\mathbf{E}_+^*\otimes\mathbf{E}_V\to\mathbf{U}_{\mathcal{A}},\qquad \mathtt{H}_{(I)}\otimes A_I\mapsto \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_{(I)}\otimes A_I)$$

其中回顾一下，$\mathbf{E}_+^*\otimes\mathbf{E}_V$是物种的 Hadamard 积，定义如下：

$$\mathbf{E}_+^*\otimes\mathbf{E}_V[I]:=\mathbf{E}_+^*[I]\otimes\mathbf{E}_V[I].$$

因此，若 $I\neq 0$，则有

$$\mathbf{E}_+^*\otimes\mathbf{E}_V[I]\cong V^{\otimes I}.$$

我们将其简记为

$$\mathrm{T}_I(A_I):=\mathrm{T}_I(\mathtt{H}_{(I)}\otimes A_I). \tag{15}$$

令 $\mathcal{H}(\mathbf{E}_V,\ \mathbf{U}_{\mathcal{A}})$ 表示分量之间的线性映射物种，定义如下：

$$\mathcal{H}(\mathbf{E}_V,\mathbf{U}_{\mathcal{A}})[I]:=\mathrm{Hom}_{\mathsf{Vec}}(\mathbf{E}_V[I],\mathbf{U}_{\mathcal{A}}[I])=\mathrm{Hom}_{\mathsf{Vec}}(V^{\otimes I},\mathcal{A}).$$

我们有，$\mathcal{H}(-,\ -)$ 是 Hadamard 积的内部同态。因此，我们可以对 T 进行柯里化，得到物种态射

$$\mathbf{E}_+^*\to\mathcal{H}(\mathbf{E}_V,\mathbf{U}_{\mathcal{A}}),\qquad \mathtt{H}_{(I)}\mapsto \mathrm{T}(I)$$

其中 $\mathrm{T}(I)$ 是线性映射

$$\mathrm{T}(I):V^{\otimes I}\to\mathcal{A},\qquad A_I\mapsto \mathrm{T}_I(A_I).$$

线性映射 $\mathrm{T}(I)$ 称为 T-乘积。注意，T-乘积是交换的，即

$$\mathrm{T}_I(\mathbf{E}_V[\sigma](A_I))=\mathrm{T}_I(A_I)\qquad \text{for all bijections}\quad \sigma:I\to I.$$

该性质成立是因为系统 T 是物种态射，并且双射对$\mathbf{U}_{\mathcal{A}}$的作用是平凡的。尽管代数$\mathcal{A}$ 通常是非交换的，这种交换性仍然存在。

注 3.1。 在量子场论的应用中，我们还将在 V 上具有因果结构。于是，T 的含义是首先根据因果结构对A_I 中的向量进行排序，然后在$\mathcal{A}$中相乘，从而产生这种交换性。

令 广义 T-乘积 系统与一个 T-乘积系统相关联，指的是将其唯一扩展为 $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{L}\circ\mathbf{E}_+^*$ 上的乘积系统，并且该扩展是内部同态，定义见 [Nor20，第 6 节。2]于是

$$\mathrm{T}:\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{E}_V\to\mathbf{U}_{\mathcal{A}},\qquad \mathtt{H}_F\otimes A_I\mapsto \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_F\otimes A_I):=\mathrm{T}_{S_1}(A_{S_1})\star\cdots\star\mathrm{T}_{S_k}(A_{S_k}).$$

T 的柯里化记为

$$\mathbf{\Sigma}\to\mathcal{H}(\mathbf{E}_V,\mathbf{U}_{\mathcal{A}}),\qquad \mathtt{H}_F\mapsto \mathrm{T}(S_1)\dots\mathrm{T}(S_k).$$

线性映射

$$\mathrm{T}(S_1)\dots\mathrm{T}(S_k):V^{\otimes I}\to\mathcal{A},\qquad A_I\mapsto \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_F\otimes A_I)$$

称为广义 T-乘积。设与一组 T-乘积相关联的广义 R-乘积系统 为对本原元李代数$\mathbf{Zie}$的限制，

$$\mathrm{R}:\mathbf{Zie}\otimes\mathbf{E}_V\to\mathbf{U}_{\mathcal{A}},\qquad \mathtt{D}_{\mathcal{S}}\otimes A_I\mapsto \mathrm{R}_I(\mathtt{D}_{\mathcal{S}}\otimes A_I):=\mathrm{T}_I(\mathtt{D}_{\mathcal{S}}\otimes A_I).$$

[17] 回顾第 1.3 节中 $\mathbf{E}_V$ 的定义和记号

这是一个李代数态射，其中$\mathbf{U}_{\mathcal{A}}$ 配备了交换子括号。R 的柯里化记为

$$\mathbf{Zie} \to \mathcal{H}(\mathbf{E}_V, \mathbf{U}_{\mathcal{A}}), \qquad \mathtt{D}_{\mathcal{S}} \mapsto \mathrm{R}_{\mathcal{S}}.$$

这些线性映射

$$\mathrm{R}_{\mathcal{S}} : \mathbf{E}_V[I] \to \mathcal{A}, \qquad A_I \mapsto \mathrm{R}_I(\mathtt{D}_{\mathcal{S}} \otimes A_I)$$

称为广义R-乘积。根据 Dynkin 元素 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}}$ 关于H-基的展开式，我们重新得到 [EG73，方程 79]，

$$\mathrm{R}_{\mathcal{S}} = -\sum_{\mathcal{F}_F \subseteq \bar{\mathcal{S}}} (-1)^k \, \mathrm{T}(S_1) \dots \mathrm{T}(S_k).$$

注 3.2。 考虑如下形式的乘积系统

$$\mathrm{Z} : \mathbf{E}_+^* \otimes \mathbf{E}_V \to \mathbf{U}_V, \qquad \mathtt{H}_{(I)} \otimes A_I \mapsto \mathrm{Z}_I(A_I).$$

于是我们得到一个新的 T-乘积 T′, ，定义为

$$\mathrm{T}' : \mathbf{E}_+^* \otimes \mathbf{E}_V \to \mathbf{U}_{\mathcal{A}}, \qquad \mathrm{T}'_I(A_I) := \sum_P \mathrm{T}_P(\mathrm{Z}_{S_1}(A_{S_1}) \dots \mathrm{Z}_{S_k}(A_{S_k})).$$

求和遍及所有划分 $P = \{S_1, \dots, S_k\}$ 的 I。此构造是微扰代数量子场论中重整化的基础 [Düt19，第 3.6 节。2], 该节讨论的是在施加因果分解及其他可能的重整化条件后 T-乘积仍然存在的歧义。

3.2. **反向 T-乘积**。广义 反向 T-乘积 系统 T 是将系统的广义 T-乘积 T 与对极 (5)$^{\overline{\ }}$ $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V$ 复合而得，具体如下：

$$\overline{\mathrm{T}} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V \to \mathbf{U}_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}, \qquad \overline{\mathrm{T}}_I(\mathtt{H}_F \otimes A_I) := \mathrm{T}_I(\overline{\mathtt{H}}_F \otimes A_I).$$

由于对极是一个同态 $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V \to (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V)^{\mathrm{op},\ \mathrm{cop}}$ [AM10，命题 1.22 (iii)],这是一个取值于对偶代数 $\mathbf{U}_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}$ 的广义 $\overline{\mathrm{T}}$-乘积系统。T 经柯里化后所得的像称为反向 T-乘积

$$\overline{\mathrm{T}}(I) : \mathbf{E}_V[I] \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}.$$

由(2)，我们得到

$$\overline{\mathrm{T}}(I) = \sum_{F \in \Sigma[I]} (-1)^k \, \mathrm{T}(S_1) \dots \mathrm{T}(S_k).$$

请注意， [EG73 中的反向 T-乘积在方程 11] 中定义为 $(-1)^n \mathrm{T}(I)$。我们的定义与 [Sch20，定义 1535] 一致。

3.3. **T-指数**。 关于物种中的级数的详细介绍，参见 [AM10，第 12] 节。缩放后的泛级数 $\mathtt{G}(c)$ 是由 $\mathbf{\Sigma}$ 给出的类群级数

$$\mathtt{G}(c) : \mathbf{E} \to \mathbf{\Sigma}, \qquad \mathtt{H}_I \mapsto \mathtt{G}(c)_I := c^n \, \mathtt{H}_{(I)} \qquad \text{for} \quad c \in \mathbb{C}.$$

该级数的基本性质见 [AM13第 13 节。6]。级数 $\mathtt{s} \circ \mathtt{G}(c)$ 是 $\mathtt{G}(c)$ 与 $\mathbf{\Sigma}$ 的对极 s 的复合，定义如下：

$$\mathtt{s} \circ \mathtt{G}(c) : \mathbf{E} \to \mathbf{\Sigma}, \qquad \mathtt{H}_I \mapsto \big(\mathtt{s} \circ \mathtt{G}(c)\big)_I = c^n \, \overline{\mathtt{H}}_{(I)}. \tag{16}$$

令$\mathcal{A}[[\jmath]]$ 表示以形式符号 $\jmath$ 为自变量、系数取自$\mathcal{A}$的形式幂级数 $\mathbb{C}$-代数。给定一个广义 T-乘积系统

$$\mathrm{T} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V \to \mathbf{U}_{\mathcal{A}}$$

令该系统的 T-指数函数 $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{\mathtt{G}(c)}$ 为定义在向量空间 V上的 $[[\jmath]]\mathcal{A}$值函数，它与级数 $\mathtt{G}(c)$相关，构造方法见 [Nor20第 6 节。3]因此，我们有[18]

$$\mathcal{S} : V \to \mathcal{A}[[\jmath]], \qquad A \mapsto \mathcal{S}(\jmath A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \mathrm{T}_n \underbrace{(\jmath A \otimes \cdots \otimes \jmath A)}_{n \text{ times}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\jmath^n c^n}{n!} \mathrm{T}_n(A^n). \tag{17}$$

根据 [Nor20，方程 34]和(16)，反向T-乘积系统的 T-指数是 $\mathcal{S}$ 作为函数 $\mathbb{C}$-代数 $\mathrm{Func}(V, \mathcal{A}[[\jmath]])$ 中一个元素的逆元，由下式给出

$$\mathcal{S}^{-1} : V \to \mathcal{A}[[\jmath]], \qquad A \mapsto \mathcal{S}^{-1}(\jmath A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\jmath^n c^n}{n!} \overline{\mathrm{T}}_n(A^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\jmath^n c^n}{n!} \mathrm{T}_n(\overline{\mathtt{H}}_{(n)} \otimes A^n).$$

因此

$$\mathcal{S}(\jmath A) \star \mathcal{S}^{-1}(\jmath A) = \mathcal{S}^{-1}(\jmath A) \star \mathcal{S}(\jmath A) = 1_{\mathcal{A}}$$

对于所有 $A \in V$。例如，这见于 [EG73，方程 2]。

4. Perturbation of T-Products

关于通过 $\mathbf{E}$ 的某个升余导子对 T-乘积进行微扰，该导子给出 S矩阵方案 $\mathcal{S}_{g\mathcal{S}}(\jmath A) = \mathcal{S}(g\mathcal{S} + \jmath A)$，参见 [Nor20，第 10 节。1]。

4.1. 通过 Steinmann 箭头对 T-乘积进行微扰。设我们有一个广义 T-乘积系统

$$\mathrm{T} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V \to \mathbf{U}_{\mathcal{A}}, \qquad \mathtt{H}_F \otimes A_I \mapsto \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_F \otimes A_I).$$

根据 [Nor20，第 6 节。4], 给定一个装饰向量 $S \in V$，我们可以使用推迟 Steinmann 箭头 (11) 按如下方式对 T 作微扰。

回顾第 1.3 节中的装饰Hopf代数 $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V$。再回顾第 2.1 节中的导子 $(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V)'$，其定义为

$$(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V)'[I] = \mathbf{\Sigma}[*I] \otimes V \otimes V^{\otimes I}.$$

我们有 $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V$ 的升导子，它是推迟 Steinmann 箭头的带装饰的类比，定义为

$$\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V \to (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V)', \qquad \mathtt{H}_F \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes \otimes A_{i_n} \;\mapsto\; * \downarrow \mathtt{H}_F \otimes S \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes \otimes A_{i_n}.$$

根据 [Nor20，命题 6，4]这确实仍是一个升导子。与无装饰的情形类似，我们可以通过迭代得到诱导的升算子及相应的$\mathbf{E}$-作用；经柯里化后，它们给出同态

$$\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V \to (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V)^{\mathbf{E}}$$

$$\mathtt{H}_F \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes \otimes A_{i_n} \;\mapsto\; \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{\downarrow \ldots \downarrow}_{r \text{ times}} \mathtt{H}_F \otimes \underbrace{S \otimes \cdots \otimes S}_{r \text{ times}} \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes \otimes A_{i_n}.$$

根据 [Nor20，定理 5，1]这是一个同态。于是，将此同态与 T 复合，即得到一个新的“受扰动的”广义 T-乘积系统$^{\mathbf{E}}$ (定义见 (14))，

$$\widetilde{\mathrm{T}} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V \to (\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V)^{\mathbf{E}} \xrightarrow{\mathrm{T}^{\mathbf{E}}} (\mathbf{U}_{\mathcal{A}})^{\mathbf{E}} \cong \mathbf{U}_{\mathcal{A}[[g]]}.$$

关于结果 $(\mathbf{U}_{\mathcal{A}})^{\mathbf{E}} \cong \mathbf{U}^{\mathcal{A}[[g]]}$，参见 [Nor20，第 4] 节。

[18] 我们使用缩写(4) 和(15)，以及 $\mathrm{T}_n := \mathrm{T}^{[n]}$

~**备注 4.1**。 T 仍然是一个同态，因而仍然是一个广义乘积系统，这一事实至关重要地依赖于 Steinmann 箭头是一个导子这一点 [Nor20，定理 5。1]，并且 $(-)^{\mathbf{E}}$ 是一个幺半函子 [Nor20，第 2 节。5]。我们也可以类似地扰动一个广义 R-乘积系统，这依赖于 Steinmann 箭头是一个双导子这一点。

现在，我们将详细展开上述形式体系，对新的扰动乘积系统作出完全明确的描述。记

$$S_Y A_I = S_{y_1} \otimes \cdots \otimes S_{y_r} \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_n} \in \mathbf{E}_V[Y \sqcup I].$$

Let

$$\mathrm{R}_{Y;I}(S_Y; A_I) := \underbrace{\mathrm{T}_{Y\sqcup I}(\mathtt{R}_{(Y;I)} \otimes S_Y A_I) = \sum_{Y_1 \sqcup Y_2 = Y} \overline{\mathrm{T}}_{Y_1 \sqcup \emptyset}(S_{Y_1}) \star \mathrm{T}_{Y_2 \sqcup I}(S_{Y_2} A_I)}_{\text{by (13)}} \tag{18}$$

于是，新的扰动乘积系统由[19]给出

$$\widetilde{\mathrm{T}} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_V \to \mathbf{U}_{\mathcal{A}[[g]]}, \quad \mathtt{H}_F \otimes A_I \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r_1 + \cdots + r_k = r} \frac{g^r}{r!} \mathrm{R}_{r_1;S_1}(S^{r_1}; A_{S_1}) \star \cdots \star \mathrm{R}_{r_k;S_k}(S^{r_k}; A_{S_k}).$$

特别地，对$\mathbf{E}_+^* \otimes \mathbf{E}_V$的限制，即新的扰动 T-乘积，由下式给出

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{T}}_I(A_I) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g^r}{r!} \mathrm{R}_{r;I}(S^r; A_I) \\ &= \mathrm{T}_I(A_I) + \underbrace{g\,\mathrm{T}_{*_1 I}(\downarrow \mathtt{H}_{(I)} \otimes SA_I) + \frac{g^2}{2!} \mathrm{T}_{*_2 *_1 I}(\downarrow\downarrow \mathtt{H}_{(I)} \otimes SSA_I) + \cdots}_{\text{perturbation}} . \end{aligned}$$

类似地，我们可以使用超前 Steinmann 箭头对广义 T-乘积系统进行扰动。

我们令 $\mathcal{V}_{gS}$ 和 $\mathcal{W}_{gS}$ 分别表示使用滞后和超前 Steinmann 箭头对新的扰动广义 T-乘积系统定义的 T-指数（定义见 (17)）。于是

$$\mathcal{V}_{gS} : V \to \mathcal{A}[[g, j]], \qquad \mathcal{V}_{gS}(jA) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n c^n}{n!} \widetilde{\mathrm{T}}_n(A^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g^r j^n c^{r+n}}{r!\, n!} \mathrm{R}_{r;n}(S^r; A^n)$$

and

$$\mathcal{W}_{gS} : V \to \mathcal{A}[[g, j]], \qquad \mathcal{W}_{gS}(jA) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n c^n}{n!} \widetilde{\mathrm{T}}_n(A^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g^r j^n c^{r+n}}{r!\, n!} \mathrm{A}_{r;n}(S^r; A^n)$$

其中

$$\mathrm{A}_{Y;I}(S_Y; A_I) := \underbrace{\mathrm{T}_{Y\sqcup I}(\mathtt{A}_{(Y;I)} \otimes S_Y A_I) = \sum_{Y_1 \sqcup Y_2 = Y} \mathrm{T}_{Y_1 \sqcup I}(S_{Y_1} A_I) \star \overline{\mathrm{T}}_{Y_2 \sqcup \emptyset}(S_{Y_2})}_{\text{by (13)}} .$$

定理 4.1。我们有

$$\mathcal{V}_{gS}(jA) = \mathcal{S}^{-1}(gS) \star \mathcal{S}(gS + jA) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{W}_{gS}(jA) = \mathcal{S}(gS + jA) \star \mathcal{S}^{-1}(gS).$$

[19] we abbreviate $\mathrm{R}_{r;I}(S^r; A_I) := \mathrm{R}_{[r];I}(S^{[r]}; A_I) = \mathrm{R}_{[r];I}(\underbrace{S \otimes \cdots \otimes S}_{r \text{ times}}; A_I)$

证明。我们有

$$\mathrm{R}_{r;I}(S^r;A_I)=\sum_{Y_1\sqcup Y_2=[r]}\overline{\mathrm{T}}_{Y_1\sqcup\emptyset}(S^{Y_1})\star\mathrm{T}_{Y_2\sqcup I}(S^{Y_2}A_I).$$

Then

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{gS}(jA)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{g^r j^n c^{r+n}}{r!\,n!}\mathrm{R}_{r;n}(S^r;A^n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{g^r j^n c^{r+n}}{r!\,n!}\sum_{Y_1\sqcup Y_2=[r]}\overline{\mathrm{T}}_{Y_1\sqcup\emptyset}(S^{Y_1})\star\mathrm{T}_{Y_2\sqcup[n]}(S^{Y_2}A^n)\\&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{g^r c^r}{r!}\overline{\mathrm{T}}_{r+0}(S^r)\star\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\mathrm{T}_{r+n}(S^rA^n)\\&=\mathcal{S}^{-1}(gS)\star\mathcal{S}(gS+jA)\end{aligned}$$

$\mathcal{W}_{gS}(jA)$ 的证明类似。 □

推论 4.1.1 (Bogoliubov公式 [BS59，第 4]章)。我们有

$$\widetilde{\mathrm{T}}_i(A)=\frac{1}{c}\frac{d}{dj}\Big|_{j=0}\mathcal{V}_{gS}(jA). \tag{19}$$

证明。我们有

$$\frac{d}{dj}\mathcal{V}_{gS}(jA)=\frac{d}{dj}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j^n c^n}{n!}\widetilde{\mathrm{T}}_n(A^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j^{n-1}c^n}{(n-1)!}\widetilde{\mathrm{T}}_n(A^n).$$

然后，代入 $j=0$，得到

$$\frac{d}{dj}\Big|_{j=0}\mathcal{V}_{gS}(jA)=c\,\widetilde{\mathrm{T}}_1(A).$$ □

这个公式最初受路径积分启发式的启发，参见例如 [Sch20，注 15。16]。

4.2. **R-乘积与 A-乘积**。 由.....给出的线性映射 $\mathrm{R}(Y;I)$ y

$$\mathrm{R}(Y;I):\mathbf{E}_V^{[Y]}[I]\to\mathcal{A},\qquad S_YA_I\mapsto\mathrm{R}_{Y;I}(S_YA_I)$$

称为 R-乘积。对于单元素集合 $I=\{i\}$，映射 $\mathrm{R}(Y;i)$ 称为全R-乘积。根据(13)，R-乘积可用 T-乘积和反向T-乘积表示如下：

$$\mathrm{R}(Y;I)=\sum_{Y_1\sqcup Y_2=Y}\overline{\mathrm{T}}(Y_1)\star\mathrm{T}(Y_2\sqcup I).$$

Then

$$\widetilde{\mathrm{T}}(I)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c^r}{r!}\mathrm{R}(r;I).$$

类似地，我们可以定义 A-乘积 $\mathrm{A}(Y;I)$，使得

$$\mathrm{A}(Y;I)=\sum_{Y_1\sqcup Y_2=Y}\mathrm{T}(Y_1\sqcup I)\star\overline{\mathrm{T}}(Y_2).$$

总推迟乘积既是 R-乘积，也是广义 R-乘积，这源于注 2.2 中出现的双重描述。一个相关结果见 [AM13，命题 109]。

注 4.2。 在文献中，我们所说的总推迟乘积有时被称为推迟乘积，而我们所说的推迟乘积则被称为广义推迟乘积，例如 [Pol58], [Düt19，练习 3.3。16]。

第2. 部分 微扰代数量子场论

现在，我们将所发展的理论应用于闵可夫斯基时空上的实标量量子场情形，如微扰代数量子场论所描述。[20]从数学上看，重要的额外性质是装饰向量空间上的因果结构 V，它使得施加因果分解成为可能。量子场论与物种之间的联系此前已在 [Abd04], [Far11], [GK18]中研究。

关于微扰代数量子场论，我们参考 [DF01], [Rej16], [Düt19], [Sch20]。我们主要采用 [Sch20]的记号和表述。微扰代数量子场论的关键特征包括其局部的，即层论的，方法；使用绝热切换相互作用项（与前者密切相关），以避免红外发散；以及将重整化解释为把分布延拓到肥对角线，以避免紫外发散。威尔逊截断有时也称为启发式量子场论，可以在微扰代数量子场论中得到严格表述 [BDF09], [Düt12], [Düt19，第 3 节。8], [Sch20，第 16]节。

5. 时空与场构型

令 $\mathcal{X} \cong \mathbb{R}^{1,p}$ 表示一个 $(p+1)$ 维闵可夫斯基时空，其中 $p \in \mathbb{N}$。因此，$\mathcal{X}$是一个实向量空间，配备了一个度量张量，该度量张量是一个对称非退化双线性形式 $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，其签名为 $(1, p)$。该双线性形式在 $\mathcal{X}$ 上诱导出一个体积形式，我们将其记为 $\mathrm{dvol}_{\mathcal{X}} \in \Omega^{p+1}(\mathcal{X})$。对于时空区域 $X_1, X_2 \subset \mathcal{X}$，我们记作

$$X_1 \vee\wedge X_2$$

如果无法沿未来指向的类时或类光曲线从 X_1 到达 X_2。我们有如下集合值物种 $\mathcal{X}^{(-)}$

$$I \mapsto \mathcal{X}^I := \{\text{functions } I \to \mathcal{X}\}.$$

为简单起见，我们仅考虑 $\mathcal{X}$上的 Klein-Gordan 实标量场。因此，令$E \to \mathcal{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个光滑实向量丛，其纤维为一维。一个（壳外）场构型 Φ 是丛 $E \to \mathcal{X}$的一个光滑截面，

$$\Phi : \mathcal{X} \hookrightarrow E, \qquad x \mapsto \Phi(x).$$

所有场构型组成的空间，记作 $\Gamma(E)$，具有弗雷歇拓扑（实）向量空间的结构。

注 5.1. 我们总可以选取一个同构 $(E \to \mathcal{X}) \cong (\mathcal{X} \times \mathbb{R} \to \mathcal{X})$，它会诱导出一个同构 $\Gamma(E) \cong C^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{R})$，从而将场构型建模为光滑函数$\mathcal{X} \to \mathbb{R}$。

令 $E^* \to \mathcal{X}$ 表示 E的对偶向量丛，并将典范配对记为 b

$$\langle -, - \rangle : E^* \otimes E \to \mathbb{R}.$$

令一个紧支撑分布截面 α 为场构型的一个分布

$$\alpha : \Gamma(E) \to \mathbb{R},$$

[20] 尽管微扰代数量子场论更一般地研究弯曲时空上的微扰杨-米尔斯规范理论

即 $\Gamma(E)$ 的拓扑对偶向量空间中的一个元素，该元素表示为由对偶丛 $E^* \to \mathcal{X}$ 的光滑紧支撑截面组成的序列 $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$,

$$\alpha_j : \mathcal{X} \hookrightarrow E^*, \qquad j \in \mathbb{N},$$

其中，模型化的分布可由积分的以下极限恢复,

$$\Gamma(E) \to \mathbb{R}, \qquad \Phi \mapsto \underbrace{\int_{x\in\mathcal{X}} \langle \alpha(x), \Phi(x)\rangle \mathrm{dvol}_{\mathcal{X}} := \lim_{j\to\infty} \int_{x\in\mathcal{X}} \langle \alpha_j(x), \Phi(x)\rangle \mathrm{dvol}_{\mathcal{X}}}_{\text{sometimes called } \textit{generalized function} \text{ notation}}.$$

所有紧支撑分布截面的空间记为 $\Gamma'_{\mathrm{cp}}(E^*)$。例如，参见 [Bär15，引理 2。15], 所有分布 $\Gamma(E) \to \mathbb{R}$ 都可以通过这种方式作为紧支撑分布截面获得。

我们可以沿着每个典范投影，将向量丛 E^* 拉回到$\mathcal{X}^I$

$$\mathcal{X}^I \to \mathcal{X}^{\{i\}} \cong \mathcal{X}, \qquad i \in I.$$

这些 n 个拉回丛的张量积就是外张量积丛 $(E^*)^{\boxtimes I}$。这在 S 上定义了一个光滑向量丛预层,

$$\mathsf{S}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Diff}_{/\mathcal{X}}, \qquad I \mapsto (E^*)^{\boxtimes I}.$$

通过取复化的紧支撑分布截面 $\Gamma'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(-) := \Gamma'_{\mathrm{cp}}(-) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$，我们得到复向量物种 $\mathbf{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*)$，其定义为

$$\mathbf{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*)[I] := \Gamma'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}\Big((E^*)^{\boxtimes I}\Big).$$

当然， $\mathbf{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*)$并不会以这样的意义“分解”：它不是一个幺半函子 ,

$$\mathbf{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*)[I] \ncong \mathbf{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*)[i_1] \otimes \cdots \otimes \mathbf{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*)[i_n] \tag{20}$$

其中 $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$。除了来自张量积的分布截面之外，还有更多分布截面。

6. Observables

非壳层的可观 量O 是一个从场构型到复数的光滑泛函,

$$O : \Gamma(E) \to \mathbb{C}, \qquad \Phi \mapsto O(\Phi).$$

所有可观测量组成的空间记为 Obs。我们可以对可观测量进行逐点相乘，这有时称为正规序乘积，因此可观测量构成一个交换的 $\mathbb{C}$-代数,

$$\mathrm{Obs} \otimes \mathrm{Obs} \to \mathrm{Obs}, \qquad O_1 \otimes O_2 \mapsto O_1 \cdot O_2$$

其中

$$O_1 \cdot O_2(\Phi) := \underbrace{O_1(\Phi) O_2(\Phi)}_{\text{multiplication in } \mathbb{C}}.$$

因此，w e 可以构成物种中的交换代数 $\mathbf{U}_{\mathrm{Obs}}$，定义为 $\mathbf{U}_{\mathrm{Obs}}[I] =$Obs。

线性可观测量 $O \in$Obs 是一种同时也是线性泛函的可观测量，也就是说 s

$$O(\Phi_1 + \Phi_2) = O(\Phi_1) + O(\Phi_2) \qquad \text{and} \qquad O(c\Phi) = cO(\Phi) \qquad \text{for} \quad c \in \mathbb{C}.$$

线性可观测量的空间记为 LinObs $\subset$Obs。特别地，对于每个时空事件$x \in \mathcal{X}$，都有由下式给出的场可观测量 $\mathbf{\Phi}(x) \in$ LinObs:

$$\mathbf{\Phi}(x) : \Gamma(E) \to \mathbb{C}, \qquad \Phi \mapsto \Phi(x).$$

现在，我们将展示线性可观测量和所谓的多项式可观测量如何通过物种理论的方式，借助物种$\mathbf{E}$和$\mathbf{X} = \mathcal{P}(\mathbf{E})$的（广义）乘积系统而产生。

令$\mathbf{X}$表示如下定义的物种：对于单元素集合，$\mathbf{X}[\{i\}] := \mathbb{C}$；其他情况下，$\mathbf{X}[I] := 0$。我们将$\mathtt{H}_i := 1 \in \mathbf{X}[\{i\}]$记作。我们有以下物种态射，

$$\mathbf{X} \otimes \boldsymbol{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*) \to \mathbf{U}_{\mathrm{Obs}}, \qquad \mathtt{H}_i \otimes \alpha \mapsto \left(\Phi \mapsto \int_{x \in \mathcal{X}} \langle \alpha(x), \Phi(x) \rangle \mathrm{dvol}_{\mathcal{X}}\right).$$

这类似于$\mathbf{X}$的乘积系统，但$\boldsymbol{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*)$不能将(20)分解，因此不能写成$\mathbf{E}_V$的形式。由[Bär15引理2可知，15]该物种（如[AM10备注157]中所定义）的像的余极限就是线性可观测量空间LinObs。此映射的柯里化形式为

$$\mathbf{X} \to \mathcal{H}(\boldsymbol{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*), \mathbf{U}_{\mathrm{Obs}}), \qquad \mathtt{H}_i \mapsto \boldsymbol{\Phi}_i = \boldsymbol{\Phi}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}(\alpha) := \left(\Phi \mapsto \int_{x \in \mathcal{X}} \langle \alpha(x), \Phi(x) \rangle \mathrm{dvol}_{\mathcal{X}}\right).$$

若我们将$\boldsymbol{\Phi}$限制为凸起函数$b \in \Gamma_{\mathrm{cp}}(E^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$，也称为“涂抹函数”，那么可以将线性映射称为

$$\boldsymbol{\Phi} : \Gamma_{\mathrm{cp}}(E^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathrm{Obs}, \qquad b \mapsto \boldsymbol{\Phi}(b)$$

一种“取值于可观测量的分布”，有时也称为“（涂抹）场”。通过将场可观测量$\boldsymbol{\Phi}(x)$作用于支撑在x处的狄拉克δ函数δ_x，即可得到它$\boldsymbol{\Phi}$。人们将b视为对狄拉克δ函数的涂抹，因此有涂抹函数和涂抹场。

我们将$\mathbf{X}$替换为$\mathbf{E}$，以此扩展涂抹场，从而定义如下物种态射，

$$\mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*) \to \mathbf{U}_{\mathrm{Obs}}, \qquad \mathtt{H}_I \otimes \alpha_I \mapsto \left(\Phi \mapsto \int_{\mathcal{X}^I} \langle \alpha_I(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}), \Phi(x_{i_1}) \dots \Phi(x_{i_n}) \rangle \mathrm{dvol}_{\mathcal{X}^I}\right).$$

这类似于$\mathbf{E}$的乘积系统，但同样没有因子化。该态射像所对应物种的余极限，就是多项式可观测量的向量空间，定义见例如[Sch20，定义7。13],记作

$$\mathrm{PolyObs} \subset \mathrm{Obs}.$$

（或者，若将此映射的极限限制为有限级数$\mathscr{S}(\boldsymbol{\Gamma}'^{\mathbb{C}}_{\mathrm{cp}}(E^*)) \to \mathrm{Obs}[[\jmath]]$并令$\jmath = 1$，则可得到[Düt19，定义1.2。1]。）微因果多项式可观测量$\mathcal{F}$的空间是子空间

$$\mathcal{F} \subset \mathrm{PolyObs}$$

由满足某种称为微因果性的微局部理论条件的多项式可观测量构成，参见[Düt19，定义1.2.1（ii）]。遵循[Düt19，定义1.3。4]，局域可观测量空间局域可观测量

$$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{Obs}$$

由将场及其导子中的实系数多项式（“场多项式”）与凸起函数$b \in \Gamma_{\mathrm{cp}}(E^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$相乘后积分得到的可观测量构成。重要的是，我们有一个自然的包含映射

$$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \hookrightarrow \mathcal{F}, \qquad A \mapsto :A:.$$

令$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]$和$\mathcal{F}[[\hbar]]$分别表示系数取自$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$和$\mathcal{F}$的关于$\hbar$的形式幂级数空间，并令$\mathcal{F}((\hbar))$表示系数取自$\mathcal{F}$的关于$\hbar$的洛朗级数空间。

应用形式普朗克常数 $\hbar$， $\mathcal{F}[[\hbar]]$ 构成一个形式幂级数 $*$-代数，称为（抽象的、非壳上的）*Wick* 代数，其乘法为 Moyal 星乘积 [Düt19，定义 2.1。1] 该星乘积是相对于克莱因-戈尔登场 [的 Wightman 传播子 Δ_{H} Düt19，第 2 节。2],

$$\mathcal{F}[[\hbar]] \otimes \mathcal{F}[[\hbar]] \to \mathcal{F}[[\hbar]], \qquad O_1 \otimes O_2 \mapsto O_1 \star_{\mathrm{H}} O_2.$$

我们可以构造物种中的代数 $\mathbf{U}^{\mathcal{F}[[\hbar]]}$；若允许出现 $\hbar$ 的负次幂，则可构造 $\mathbf{U}^{\mathcal{F}((\hbar))}$。

7. 时序乘积与 S矩阵方案

对于 $A \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]$，令 supp($A$) 表示 A 的时空支集。给定 I 的一个复合 G，若 $A_I \in \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}[I]$ *respects* G，则称其满足

$$\mathrm{supp}(A_{i_1}) \vee\wedge \mathrm{supp}(A_{i_2}) \qquad \text{for all} \quad (i_1, i_2) \quad \text{such that} \quad G|_{\{i_1,i_2\}} = (i_1, i_2).^{21}$$

考虑如下形式的 T-乘积系统（定义见第 3.1 节）

$$\mathrm{T} : \mathbf{E}_+^* \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to \mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))}, \qquad \mathtt{H}_{(I)} \otimes A_I \mapsto \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_{(I)} \otimes A_I) = \mathrm{T}_I(A_I).$$

由于 $\mathbf{\Sigma}$ 是自由的 在$\mathbf{E}_+^*$上的代数中，我们有唯一扩展为一个广义T乘积系统 s

$$\mathrm{T} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to \mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))}, \qquad \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_F \otimes A_I) := \mathrm{T}_{S_1}(A_{S_1}) \star_{\mathrm{H}} \cdots \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_{S_k}(A_{S_k}).$$

那么：

1. （微扰）如果单元素分量 T_i 同态于包含映射 $\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]], \to \mathcal{F}((\hbar))$，即

$$\mathrm{T}_i(A) =: A:$$

2. （因果分解）对于 I的所有具有两个块的组合（S， T），如果$A_I \in \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}[I]$ 满足（S, T）[22]，则称 T 满足因果分解

$$\mathrm{T}_I(\mathtt{H}_{(I)} \otimes A_I) = \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_{(S,T)} \otimes A_I).^{23} \tag{21}$$

称满足微扰和因果分解的 T-乘积系统为一个（完全归一化的）时间序乘积系统。将 T 唯一扩展到 $\mathbf{\Sigma}$ 所得到的相应系统称为相关的广义时间序乘积系统。经过柯里化

$$\mathbf{\Sigma} \to \mathcal{H}(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}, \mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))}), \qquad \mathtt{H}_F \mapsto \mathrm{T}(S_1) \dots \mathrm{T}(S_k)$$

线性映射

$$\mathrm{T}(S_1) \dots \mathrm{T}(S_k) : \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]^{\otimes I} \to \mathcal{F}((\hbar)), \qquad A_I \mapsto \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_F \otimes A_I)$$

称为广义时间序乘积。线性映射 T(I) 称为时间序乘积。固定一个场多项式后，使得每个A^{i_j} 中的 A_I 都由一个凸起函数 b_{i_j}确定，通常会用广义函数记号将其表示如下，

$$\mathrm{T}_I(A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_n}) = \int_{\mathcal{X}^I} \mathrm{T}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) b_{i_1}(x_{i_1}) \dots b_{i_n}(x_{i_1}) dx_{i_1} \dots dx_{i_n}$$

其中 $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \mapsto \mathrm{T}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ 是一个“算子值”广义函数。参见例如 [EG73，第 1 节2]。

[21] $G|_{\{i_1,i_2\}} = (i_1, i_2)$ 表示 i_1 和 i_2 属于不同的块，其中包含 i_1 的块位于包含 i_2的块左侧[22] 明确地说，对于所有 $i_1 \in S$ 和 $i_2 \in T$，$\mathrm{supp}(A^{i_1}) \vee\wedge \mathrm{supp}(A^{i_2})$[23] 或者等价地，$\mathrm{T}_I(A_I) = \mathrm{T}_S(A_S) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_T(A_T)$

给定 I的组合 $F=(S_1,\dots,S_k)$ 和 $G=(U_1,\dots,U_l)$，令

$$\mathtt{H}_F \triangleright \mathtt{H}_G := \mathtt{H}_{(U_1\cap S_1,\dots,U_l\cap S_1,\dots\dots,U_1\cap S_k,\dots,U_l\cap S_k)_+}.$$

这称为*Tits* 乘积，其概念可追溯至 Tits [Tit74]。参见 [AM13，第 13]节，了解更多关于 Tits 乘积结构的内容，其中证明了它是由 $\mathbf{\Sigma}$ 通过 Hopf 幂对自身的作用给出的。另见 [AB08，第 1.4 节。6]了解其他 Coxeter系统和 Dynkin类型的相关背景。

命题7.1。设

$$\mathrm{T} : \mathbf{E}_+^* \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to \mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))}$$

是一个满足因果分解的 T-乘积系统。给定 I 的一个复合 $G=(U_1、\dots\dots、U_k)$，以及尊重 G 的$A_I \in \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}[I]$，则

$$\mathrm{T}_I(\mathtt{a}\otimes A_I) = \mathrm{T}_I(\mathtt{a}\triangleright \mathtt{H}_G \otimes A_I) \qquad \text{for all} \quad \mathtt{a}\in \mathbf{\Sigma}[I].$$

证明。我们有

$$\mathrm{T}_I(\mathtt{H}_G\otimes A_I) = \underbrace{\mathrm{T}_{U_1}(A_{U_1}) \star_{\mathrm{H}} \cdots \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_{U_k}(A_{U_k}) = \mathrm{T}_I(A_I)}_{\text{by repeated applications of causal factorization}}.$$

注意，对于 $F\in\Sigma[I]$，作用 $\mathtt{H}_F\mapsto \mathtt{H}_F\triangleright\mathtt{H}_G$ 会将 F 的块替换为它们与 G 的交集。但我们刚才看到 $\mathrm{T}_I(A_I) = \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_G\otimes A_I)$，因此可得

$$\mathrm{T}_I(\mathtt{H}_F\otimes A_I) = \mathrm{T}_I(\mathtt{H}_F\triangleright\mathtt{H}_G\otimes A_I).$$

由于该断言对 $\mathtt{H}$-基成立，因此对所有 $\mathtt{a}\in\mathbf{\Sigma}[I]$ 都成立。 □

推论7.1.1。如果 $\mathtt{a}\triangleright\mathtt{H}_G=0$，那么

$$\mathrm{T}_I(\mathtt{a}\otimes A_I)=0$$

对于所有 $A_I\in\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}[I]$ 满足 G。

将 T 限制在本原部分李代数上所得的对象称为相应的广义推迟乘积系统，

$$\mathrm{R} : \mathbf{Zie}\otimes\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}\to\mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))}.$$

Dynkin 元 $\mathtt{D}_{\mathcal{S}}$ 在对 R 进行柯里化后所得的像是广义推迟乘积$\mathrm{R}_{\mathcal{S}}$，例如参见 [EG73，公式 79]。由推论7.1.1以及 Dynkin 元在 Tits 乘积下的结构可知，广义推迟乘积具有良好的支撑性质。相关描述见 [EGS75]。

给定一个广义时间序乘积系统

$$\mathrm{T} : \mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}\to\mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))}$$

T-指数 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_{\mathtt{G}(1/\mathrm{i}\hbar)}$（定义于（17））对应类群级数

$$\mathtt{G}(1/\mathrm{i}\hbar) : \mathbf{E}\to\mathbf{\Sigma}, \qquad \mathtt{H}_I\mapsto \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\mathtt{H}_{(I)}$$

称为相应的微扰论*S*矩阵方案。因此，$\mathcal{S}$ 是该函数 n

$$\mathcal{S} : \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]\to\mathcal{F}((\hbar))[[\jmath]], \qquad A\mapsto \mathcal{S}(\jmath A) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\right)^n\frac{\jmath^n}{n!}\mathrm{T}_n(A^n).$$

8. 相互作用

给定一种绝热切换的相互作用 $S_{\mathrm{int}} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]$，以及一组完全归一化的广义时间序乘积

$$\mathrm{T} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to \mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))},$$

我们得到了一个新的相互作用广义时间序乘积系统，它是通过第4.1节的构造得到的，

$$\widetilde{\mathrm{T}} : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]} \to \mathbf{U}_{\mathcal{F}((\hbar))[[g]]}.$$

与之相关的相互作用场可观测量的生成函数方案 $\mathcal{Z}_{g S_{\mathrm{int}}}$，更一般地说，相互作用场可观测量的时间序乘积的生成函数方案，是针对类群级数 $\mathfrak{G}(1/\mathrm{i}\hbar)$ 的新 T-指数，记作 $\mathcal{V}_{g S_{\mathrm{int}}}$（见第4.1节）。因此，$\mathcal{Z}_{g S_{\mathrm{int}}}$ 是函数

$$\mathcal{Z}_{g S_{\mathrm{int}}} : \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]] \to \mathcal{F}((\hbar))[[g, j]], \qquad A \mapsto \mathcal{Z}_{g S_{\mathrm{int}}}(jA)$$

其中

$$\mathcal{Z}_{g S_{\mathrm{int}}}(jA) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\right)^n \frac{j^n}{n!} \widetilde{\mathrm{T}}_n(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\right)^{r+n} \frac{g^r j^n}{r!\, n!} \mathrm{R}_{r;n}(S_{\mathrm{int}}^r; A^n) = \mathcal{S}^{-1}(g S_{\mathrm{int}}) \star_{\mathrm{H}} \mathcal{S}(g S_{\mathrm{int}} + jA).$$

Then

$$A_{\mathrm{int}} := \widetilde{\mathrm{T}}_i(A) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\right)^r \frac{g^r}{r!} \mathrm{R}_{r+1}(S_{\mathrm{int}}^r; A) \in \mathcal{F}((\hbar))[[g]]$$

是A 的局域相互作用场可观测量。Bogoliubov公式(19) 现在写作

$$A_{\mathrm{int}} = \mathrm{i}\hbar \frac{d}{dj}\Big|_{j=0} \mathcal{Z}_{g S_{\mathrm{int}}}(jA).$$

我们将 A_{int} 视为局域可观测量 A 在相互作用 S_{int}作用下的形变。可以~证明，T 确实映入 $\mathbf{U}_{\mathcal{F}[[\hbar,g]]}$ [DF01，命题 2 (ii)]。因此，微扰相互作用量子场论具有经典极限 [Col16], [HR20]。

9. 散射振幅

最后，我们将微扰代数量子场论中的一项标准结果（参见 [Sch20，例 15。12]）转换为我们的记号。该结果将第 7 节所述的 S矩阵方案与用于计算散射振幅的 S 矩阵联系起来。散射振幅是微扰代数量子场论的预测，并通过粒子加速器上的散射实验进行检验。

根据 [Düt19，定义 2.5。2], ，*Hadamard* 真空态 $\langle - \rangle_0$ 是由下式给出的线性映射：

$$\langle - \rangle_0 : \mathcal{F}[[\hbar, g]] \to \mathbb{C}[[\hbar, g]], \qquad O \mapsto \langle O \rangle_0 := O(\Phi = 0).$$

设 $S_{\mathrm{int}} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]$。若对于所有 $O \in \mathcal{F}[[\hbar, g]]$，都有下式成立，则称 Hadamard 真空态 $\langle - \rangle_0$ 关于相互作用 S_{int} 是稳定的：

(22) $$\langle O \star_{\mathrm{H}} \mathcal{S}(g S_{\mathrm{int}}) \rangle_0 = \langle O \rangle_0 \langle \mathcal{S}(g S_{\mathrm{int}}) \rangle_0 \qquad \text{and} \qquad \langle \mathcal{S}^{-1}(g S_{\mathrm{int}}) \star_{\mathrm{H}} O \rangle_0 = \frac{1}{\langle \mathcal{S}(g S_{\mathrm{int}}) \rangle_0} \langle O \rangle_0.$$

在某些情况下

$$S_{\mathrm{int}} \otimes A_I \in \mathbf{E}'_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}[I] \qquad \text{respects the composition} \qquad (S, *, T)$$

我们可以将标记为 T、从遥远过去到来的自由粒子/波包解释为：它们按照绝热切换相互作用 S_{int} 在一个紧致区域内发生相互作用，随后进入遥远未来，并标记为 S。对于 $A_I \in \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}[I]$，令

$$\mathrm{G}_I(A_I) := \langle \widetilde{\mathrm{T}}(A_I) \rangle_0.$$

若将局域可观测量的场多项式固定为 $\mathrm{P}(\Phi) = \Phi$，那么 $A_I \mapsto \mathrm{G}_I(A_I)$ 就是按时间排序的 n 点关联函数，也就是格林函数。它们通常以下列广义函数记法表示，

$$\mathrm{G}_I(b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_n}) = \int_{\mathcal{X}^I} \Big\langle \mathrm{T}(\boldsymbol{\Phi}(x_{i_1}) \dots \boldsymbol{\Phi}(x_{i_n})) \Big\rangle_0 b_{i_1}(x_{i_1}) \dots b_{i_n}(x_{i_n}) dx_{i_1} \dots dx_{i_n}.$$

请注意，要得到实际的格林函数，我们仍需取绝热极限。

命题 9.1. 若 Hadamard 真空态 $\langle - \rangle_0$ 关于 $S_{\mathrm{int}} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]$ 稳定，且 $S_{\mathrm{int}} \otimes A_I \in \mathbf{E}'_{\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}[[\hbar]]}[I]$ 保持复合 $(S, *, T)$，则

$$\mathrm{G}_I(A_I) = \frac{1}{\Big\langle \mathcal{S}(gS_{\mathrm{int}}) \Big\rangle_0} \Big\langle \mathrm{T}_S(A_S) \star_{\mathrm{H}} \mathcal{S}(gS_{\mathrm{int}}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_T(A_T) \Big\rangle_0.$$[24]

证明。我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_I(A_I) &= \langle \widetilde{\mathrm{T}}(A_I) \rangle_0 \\ &= \Big\langle \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g^r}{r!} \mathrm{R}_{r;I}(S_{\mathrm{int}}^r; A_I) \Big\rangle_0 \\ &= \Big\langle \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r_1+r_2=r} \frac{g^r}{r_1!\, r_2!} \overline{\mathrm{T}}_{[r_1]\sqcup\emptyset}(S_{\mathrm{int}}^{r_1}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_{[r_2]\sqcup I}(S_{\mathrm{int}}^{r_2} A_I) \Big\rangle_0. \end{aligned}$$

为得到最后一行，我们根据 (18) 展开了推迟乘积。然后，由因果分解(21)，可得

$$\mathrm{T}_{[r_2]\sqcup I}(S_{\mathrm{int}}^{r_2} A_I) = \mathrm{T}_S(A_S) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_{[r_2]\sqcup\emptyset}(S_{\mathrm{int}}^{r_2}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_T(A_T).$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_I(A_I) &= \Big\langle \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r_1+r_2=r} \frac{g^r}{r_1!\, r_2!} \overline{\mathrm{T}}_{[r_1]\sqcup\emptyset}(S_{\mathrm{int}}^{r_1}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_S(A_S) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_{[r_2]\sqcup\emptyset}(S_{\mathrm{int}}^{r_2}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_T(A_T) \Big\rangle_0. \\ &= \Big\langle \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g^r}{r!} \overline{\mathrm{T}}_{[r]\sqcup\emptyset}(S_{\mathrm{int}}^{r}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_S(A_S) \star_{\mathrm{H}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g^r}{r!} \mathrm{T}_{[r]\sqcup\emptyset}(S_{\mathrm{int}}^{r}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_T(A_T) \Big\rangle_0. \\ &= \Big\langle \mathcal{S}^{-1}(gS_{\mathrm{int}}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_S(A_S) \star_{\mathrm{H}} \mathcal{S}(gS_{\mathrm{int}}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_T(A_T) \Big\rangle_0 \\ &= \frac{1}{\Big\langle \mathcal{S}(gS_{\mathrm{int}}) \Big\rangle_0} \Big\langle \mathrm{T}_S(A_S) \star_{\mathrm{H}} \mathcal{S}(gS_{\mathrm{int}}) \star_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_T(A_T) \Big\rangle_0. \end{aligned}$$

最后一步，我们使用了真空稳定性(22)。 □

[24] 元素 $\mathcal{S}(gS_{\mathrm{int}}) \in \mathcal{F}((\hbar))[[g]]$ 称为微扰 S-矩阵

参考文献

[AB08] Peter Abramenko 和 Kenneth S. Brown。《建筑》，《数学研究生教材》第248卷。施普林格，纽约，2008年。理论与应用。34[Abd04] Abdelmalek Abdesselam。代数组合学中的费曼图。Lothar组合研讨班，49：第 B49c 篇，45页，2002/04年。30[AM10] Marcelo Aguiar 和 Swapneel Mahajan。《幺半函子、物种与霍普夫代数》，CRM专著丛书第29卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年。附 Kenneth Brown、Stephen Chase 和 André Joyal 撰写的序言。2, 3, 4, 8, 10, 11, 12, 14, 19, 26, 32[AM13] Marcelo Aguiar 和 Swapneel Mahajan。物种范畴中的霍普夫幺半群。载于《霍普夫代数与张量范畴》，《当代数学》第585卷，第17–124页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2013年。2, 3, 11, 15, 26, 29, 34[AM17] Marcelo Aguiar 和 Swapneel Mahajan。《超平面排列专题》，《数学调查与专著》第226卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017年。3, 5, 14, 15, 24[AM20] Marcelo Aguiar 和 Swapneel Mahajan。《超平面排列的双幺半群》，第173卷。剑桥大学出版社，2020年。24[Ara61] Huzihiro Araki。量子场论中动量空间里的广义推迟函数与解析函数。《数学物理学杂志》，2(2)：163–177，1961年。6[Bar78] M. G. Barratt。扭曲李代数。载于《同伦论的几何应用》（会议录，伊利诺伊州埃文斯顿，1977年），II，《数学讲义》第658卷，第9–15页。施普林格，柏林，1978年。2[Bär15] Christian Bär。整体双曲时空上的格林双曲算子。《数学物理通讯》， 333 3 1585 1615, 2015 31, 32 ( ): – 。BC Francisco Borges 和 Freddy Cachazo。广义平面费曼图：集合。[19] arXiv预印本 arXiv:1910.10674，2019年。17[BDF09] R. Brunetti、M. Dütsch 和 K. Fredenhagen。微扰代数量子场论与重整化群。《理论与数学物理进展》，13(5)：1541–1599，2009年。30[BF00] Romeo Brunetti 和 Klaus Fredenhagen。微局部分析与相互作用量子场论：物理背景上的重整化。《数学物理通讯》， 208 3 623 661, 2000 2, 6 ( ): – 。Bjo[15] Anders Bjorner。正和系统。载于《拓扑与代数中的组合方法》，《Springer INdAM丛书》第12卷，第157–171页。施普林格，施普林格，2015年。5, 14[BK05] Christoph Bergbauer 和 Dirk Kreimer。Epstein-Glaser 重整化中的根树的霍普夫代数。《亨利·庞加莱年刊》，6(2)：343–367，2005年。6[BL75] J. Bros 和 M. Lassalle。一般量子场论中的解析性与多粒子结构。II. 单粒子不可约 n 43 3 279 309, 1975 3, 13 -[98] 点函数。《数学物理通讯》，( ): – 。BLL F. Bergeron、G. Labelle 和 P. Leroux。《组合物种与树状结构》，《数学及其应用百科全书》第67卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998年。由 Margaret Readdy 从1994年法文原版翻译，序言由 Gian-Carlo Rota 撰写。1[BMM+12] L.J. Billera 、 J. Tatch Moore 、 C. Dufort Moraites 、 Y. Wang 和 K. Williams。极大不平衡族。arXiv预印本 arXiv:1209.2309，2012年。5, 14[Bor11] Richard E. Borcherds。重整化与量子场论。《代数与数论》，5 658，2011年 5 627 4 ( ): – 。[BP99] Alexander Barvinok 和 James E. Pommersheim。多面体中格点的算法理论。载于《代数组合学新视角》（伯克利，CA，1996–97），《数学科学研究所出版物》第38卷，第91–147页。剑桥大学出版社，剑桥，1999年。15[Bro09] Christian Brouder。量子场论与霍普夫代数相遇。《数学通讯》，282(12)：1664–1690，2009年。4[Bro17] Francis Brown。费曼振幅、余作用原理与宇宙伽罗瓦群。《数论与物理通讯》，11(3)：453–556，2017年。4[BS59] N. N. Bogoliubov 和 D. V. Shirkov。《量子化场论导论》。授权英文版。作者修订并扩充。由 G. M. Volkoff 从俄文翻译。《Interscience物理与天文学专著》，第III卷。Interscience Publishers, Inc.，纽约；Interscience Publishers Ltd.，伦敦，1959年。9, 29[CGUZ19] Freddy Cachazo、Alfredo Guevara、Bruno Umbert 和 Yong Zhang。平面矩阵与费曼图阵列。arXiv预印本 arXiv:1912.09422，2019年。17

[CHDD+19] Simon Caron-Huot、Lance J Dixon、Falko Dulat、Matt Von Hippel、Andrew J McLeod 和 Georgios Papathanasiou。平面 N=4 SYM 振幅的宇宙伽罗瓦群与扩展施泰因曼关系。《高能物理学杂志》，2019 9 61, 2019 5 ( ): 。CHDD Simon Caron-Huot、[+20] Lance J. Dixon、James M. Drummond、Falko Dulat、Jack Foster、Ömer Gürdoğan、Matt von Hippel、Andrew J. McLeod 和 Georgios Papathanasiou。 $N = 4$ 超杨-米尔斯振幅的施泰因曼簇自举。PoS，CORFU2019:003，2020。5[CJ70] John T. Cannon 和 Arthur M. Jaffe。 $\lambda(\varphi^4)_2$ 量子场论的洛伦兹协变性。《数学物理通讯》，17:261–321，1970。2[Col16] Giovanni Collini。费多索夫量子化与微扰量子场论。arXiv 预印本 arXiv:1603.09626，2016。9，35[DF01] M. Dütsch 和 K. Fredenhagen。代数量子场论、微扰理论与圈展开。《数学物理通讯》，219 1 5 30, 2001 2, 9, 30, 35 ( ): – 。DF Michael [04] Dütsch 和 Klaus Fredenhagen。以推迟乘积表述的因果微扰理论及作用量沃德恒等式的证明。《数学物理评论》，16(10):1291–1348，2004。[DFG18] James Drummond、Jack Foster 和 Ömer Gürdoğan。N=4 超对称杨-米尔斯理论中散射振幅的簇邻接性质。《物理评论快报》，120(16):161601，2018。5[DFKR14] Michael Dütsch、Klaus Fredenhagen、Kai Johannes Keller 和 Katarzyna Rejzner。位置空间中的维数正规化及 Epstein-Glaser 重整化的森林公式。《数学物理杂志》，55(12):122303，37，2014。6[Düt12] Michael Dütsch。Stückelberg-Petermann 与 Wilson 重整化群之间的联系。《Confluentes Mathematica》，4 1 1240001, 16, 2012 30 ( ): 。Düt Michael Dütsch。从经典场论到微扰量子场论，[19] 数学物理进展第 74 卷。Birkhäuser/Springer，施普林格，2019。序言由 Klaus Fredenhagen 撰写。2，7，26，30，32，33，35[Dys52] F. J. Dyson。量子电动力学中微扰理论的发散。《物理评论》（2），85:631–632，1952。2[Ear19] Nick Early。平面运动学不变量、拟阵细分与广义费曼图。arXiv 预印本 arXiv:1912.13513，2019。17[EG73] H. Epstein 和 V. Glaser。局域性在微扰理论中的作用。《亨利·庞加莱研究所年刊 A 辑》（新系列），19 211 295 1974 1973 2, 6, 9, 21, 26, 27, 33, 34 : – ( )，。EGS H. Epstein、V. Glaser 和 R. [75] Stora。局域量子场论中 n 点函数的一般性质。载于：相对论量子理论中多粒子碰撞振幅结构分析研究所，法国莱乌什，1975年6月3日至28日，第5–93页，1975年。3，5，7，9，14，16，18，20，34[Eps16] Henri Epstein。树。《核物理 B》，912:151–171，2016。5，14，23[Far11] William G. Faris。组合物种与费曼图。Lothar组合研讨班，61A:文章 B61An, 37, 2009 11 30 / 。Fau Bertfried Fauser。维克正规序的霍普夫代数起源。《物理学杂志 A》，[01] 34(1):105–115，2001。4[GBL00] Jose M Gracia-Bondia 和 Serge Lazzarini。Connes-Kreimer-Epstein-Glaser 重整化。arXiv 预印本 hep-th/0006106v2，2000。6[GJ68] James Glimm 和 Arthur Jaffe。无截断 $\lambda\phi^4$ 量子场。I。《物理评论》（2），176:1945–1951，1968。2[GJS74] James Glimm、Arthur Jaffe 和 Thomas Spencer。$\mathscr{P}(\phi)_2$ 量子场模型的怀特曼公理与粒子结构。《数学年刊》（2），100:585–632，1974。2[GK18] John Gough 和 Joachim Kupsch。量子场与过程，剑桥高等数学研究第 171 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018。组合方法。30[GLZ57] V. Glaser、H. Lehmann 和 W. Zimmermann。场算符与推迟函数。《新科学》（10），6:1122–1128，1957。[HK64] Rudolf Haag 和 Daniel Kastler。量子场论的代数方法。《数学物理杂志》，5:848–861，1964。2[Hol08] Stefan Hollands。弯曲时空中的重整化量子杨-米尔斯场。《数学物理评论》，20(9):1033–1172，2008。3[HR20] Eli Hawkins 和 Kasia Rejzner。相互作用量子场论中的星积。《数学物理快报》，110(6):1257–1313，2020。9，35

[IS78] V. A. Ilyin 和 D. A. Slavnov。 S-矩阵方法中的可观测量代数。《理论与数学物理》，
36 1 32 41, 1978 2 ( ): – 。Joy André Joyal。形式幂级数的组合理论。《数学进展》，42(1):1–82,
[81]
1981。1，10[Joy86] André Joyal。解析函子与结构物种。载于《枚举组合学》（蒙特利尔，魁北克，1985/魁北克市，1985），数学讲义第 1234 卷，第126–159页。施普林格，柏林，1986。1，2，10[LM00] A. Losev 和 Y. Manin。带标记点的曲线的新模空间与平坦联络铅笔。第48卷，第443–472页。2000。献给 William Fulton 六十寿辰。4[LNO19] Zhengwei Liu、WilliamNorledge 和 Adrian Ocneanu。通过施泰因曼关系，将伴随辫子排列视为组合李代数。arXiv 预印本 arXiv:1901.03243，2019。5，13，16，17，18，23[NO19] William Norledge 和 Adrian Ocneanu。霍普夫幺半群、排列多面锥与广义推迟函数。即将在 IHP D 年鉴：组合、物理及其相互作用发表，2019。5，13，14，15，16，17，23[Nor20] William Norledge。微扰量子场论的物种理论基础。arXiv 预印本 arXiv:2009.09969，2020。7，11，12，18，19，21，22，23，24，25，27，28[Ocn18] Adrian Ocneanu。高阶表示论。Physics 267，哈佛大学2017年秋季课程及补充材料与演讲，2017–2018。课程可在 YouTube 上观看，补充材料正在准备出版。5，17[Pet13] Dan Petersen。可容许 G-覆盖的歌剧代数结构。《代数与数论》，7(8):1953–1975，2013。2[Pin00] G. Pinter。Connes 和 Kreimer 的霍普夫代数结构在 Epstein-Glaser 重整化中的应用。《数学物理快报》，54(3):227–233，2000。6
[58] 247 557 561, 1958 30
[16]

Pol J. C. Polkinghorne。广义推迟乘积。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，: – 。PS G. Popineau 和 R. Stora。关于微扰重整化理论主定理的一则教学性说明。《核物理 B》，912:70–78，2016。6[Rej16] Kasia Rejzner。微扰代数量子场论。数学物理研究。施普林格，施普林格，2016。数学家的入门读物。2，30[Rue61] D. Ruelle。Wightman 函数与 p-空间中的格林函数之间的联系。《新科学》（ *10* 19 356 376, 1961 3, 5, 13, 18 ），: – 。Sch William R.
[93]
Schmitt。组合结构的霍普夫代数。《加拿大数学杂志》，45(2):412–428，1993。2[Sch95] G. Scharf。有限量子电动力学。物理学文本与专著。施普林格出版社，柏林，第二版，1995。因果方法。2，6[Sch18] Konrad Schultka。环面几何与费曼积分正则化。arXiv 预印本 arXiv:1806.01086，2018。4[Sch20] Urs Schreiber。物理几何——微扰量子场论。https://ncatlab.org/nlab/show/ geometry+of+physics+--+perturbative+quantum+field+theory，2020年9月。修订版197。2，26，29，30，32，35[Ste60a] Othmar Steinmann。Wightman 函数与推迟对易子的关系。《瑞士物理学报》，33:257–298，1960。16[Ste60b] Othmar Steinmann。Wightman 函数与推迟对易子。II。《瑞士物理学报》，33:347–362，1960。5，6，7，9，16，20，21[Ste71] Othmar Steinmann。公理化场论中的微扰展开。施普林格出版社，柏林—纽约，1971。物理学讲义，第11卷。2
[93] 1993 6 Sto a R Stora。
[93]
拉格朗日场论中的微分代数。苏黎世联邦理工学院讲义，。Sto b Christopher R. Stover。交换环上某些扭李代数与霍普夫代数范畴的等价性。《纯粹与应用代数杂志》，86(3):289–326，1993。2[SZ11] Sergey Shadrin 和 Dimitri Zvonkine。Losev-Manin 上同调场论上的群作用。载于《傅里叶研究所年刊》，第61卷，第2719–2743页，2011。4[Tit74] Jacques Tits。球型建筑与有限 BN 对。数学讲义，第386卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1974。3，34

宾夕法尼亚州立大学电子邮件地址：
wxn39@psu.edu