arXiv:2301.00729v1 [stat.ME] 2 Dec 2022

多项数据生成过程的 EVSI 闭式表达式

Adam Fleischhacker*，Pak-Wing Fok†，Mokshay Madiman‡，Nan Wu§

2023年1月3日

摘要

本文推导了样本信息期望价值（EVSI）、分布信息期望价值（EVDI）以及最优样本量的解析表达式，适用于数据由有界整数序列中的独立抽样构成的情形。由于难以构造易于处理的 EVSI 表达式，现有的大多数数据价值评估工作采用以下三种方式之一：1）通过数据价值的上界 闭式表达式进行解析评估；2）通过数值比较，计算使用模拟数据作出的决策与已知底层数据分布时的最优决策之间的数据期望价值；或 3）将方差缩减作为更多数据带来不确定性降低的替代指标。针对使用具有狄利克雷先验的多项式数据生成过程对整数值观测进行建模这一极为灵活的情形，本文提出的表达式：1）推广了现有的贝塔-二项计算；2）无需预先了解某种底层“真实”分布；3）可在收集任何样本数据之前计算。

1 引言

.....的开创性研究 [34] 提出了预后验分析，这是一种贝叶斯方法，可在尚不知晓信息

*特拉华大学工商管理系，特拉华州纽瓦克市 19716，电子邮箱：ajf@udel.edu

†特拉华大学数学科学系，特拉华州纽瓦克市 19716，电子邮箱：pakwing@udel.edu

‡特拉华大学数学科学系，特拉华州纽瓦克市 19716，电子邮箱：madiman@udel.edu§特拉华大学金融服务分析研究所，特拉华州纽瓦克市 19716，电子邮箱：nanw@udel.edu

内容之前估算信息价值（VOI）。样本信息期望价值（EVSI）是一种尤为重要的信息价值计算方法，用于评估样本观测在收集之前所包含的信息。[34] 收录了许多在二次损失假设下计算 EVSI 的闭式表达式和常用公式。其中一个公式适用于具有贝塔先验分布的数据生成过程，即伯努利数据生成过程（又称贝塔-二项模型）；每个观测值均为 0 或 1 [34, 表 6.2，第 191]。本文将贝塔-二项 EVSI 表达式从二元观测值推广到每个数据点均取自某个有界整数序列的情形。这些结果拓展了可处理的信息价值表达式的适用范围，使其能够用于一种实用情形：以往在需要闭式表达式时，只能对信息价值进行近似估计或求界。

根据建模者对行动、不确定状态、损失（或效用）函数以及概率模型的选择，信息价值（VOI）的计算有时可以处理，但更常见的是难以处理的公式，尤其是样本信息期望价值（EVSI）的公式。事实上，著名统计学家丹尼斯·林德利曾指出，由于计算 EVSI 存在困难，样本量问题“难以回答，令人尴尬” [26]。更一般地说，[14] 表明，仅仅刻画信息与价值之间的关系就颇具挑战；[14]的研究则消除了这样一种看法：信息价值与其决定因素（如行动灵活性、风险厌恶或决策者财富）之间必然呈现稳定的单调关系。

虽然某些 EVSI 和 VOI 问题可以得到闭式解 [34, 5, 4], ，但信息价值的解往往难以构建。因此，许多论文着重刻画 VOI 表达式的某些特征，例如完全信息期望价值（EVPI）的分布性质 [28], 、外生变量对 EVPI 的影响 [20], ，以及存在多个不确定性来源时信息价值的可加性 [21]。尤其是 EVSI 计算，往往会得到难以处理的多重积分表达式，只有借助数值方法才能求得结果 [25]。即便如此，许多数值方法仍然需要进一步的简化假设（例如，见 [36]）。虽然可以通过正态近似（例如，见[30, 19]）或计算量巨大的基于模拟的方法（例如，见 [10, 37]）来近似计算 VOI，但闭式表达式能够即时、准确地计算价值，并更清晰地揭示先验信念和样本量的影响。

本文提出一种新的样本信息期望价值计算方法，适用于灵活的（即多项式）数据生成过程，并满足 [34, p.44]中概述的三个期望标准：

易于处理 EVSI 可通过闭式表达式轻松计算。

Rich 决策者的先验信念和信息都很容易纳入计算。

易于解释 EVSI 的表达式揭示了先验信念和样本量选择对样本期望价值的影响。

生成过程	共轭先验	来源
伯努利分布(θ)	(θ) ~贝塔分布	[34] [32]
泊松分布(λ)	λ ~伽马分布	[34]
正态分布(μ, σ)	$\mu \sim$ 正态分布, σ 已知	[34]
	μ 已知, $\sigma^2 \sim$ 逆伽马分布	[34]
	$\sigma^2 \sim$ 逆伽马分布, $\mu\|\sigma^2 \sim$ 正态分布	[34]
多项分布(t)[1]	$t \sim$ 狄利克雷分布	本文

表1：与其他可解析的样本信息期望价值计算相比，本文的定位。

如表1所示，我们的出发点是将伯努利数据生成过程（带有贝塔先验分布，又称贝塔-二项模型）的样本信息期望价值计算推广至多项分布数据生成过程（带有狄利克雷先验分布）的情形。关于贝塔-二项共轭性的样本信息期望价值计算，已有丰富的论述和说明性示例，参见 [15]。此外， [32] 为贝塔-二项式情形提供了明确的闭式信息价值计算，其研究思路与本文十分接近，但并未探讨狄利克雷-多项分布情形。就本文研究的多项抽样过程而言，现有工作主要采用非效用方法，根据数据将感兴趣参数限定在特定精度范围内的能力来评估数据价值 [1, 6]。相比之下，我们的方法将基于效用的抽样价值评估扩展到多项抽样环境，从而得出样本信息期望价值（EVSI）和分布信息期望价值（EVDI）的闭式表达式。发表这些解析上易于处理的表达式，有望

取代多项分布设置中仍被广泛使用的蒙特卡洛模拟（例如，参见 [38]）。

当无法获得样本信息期望价值（EVSI）的闭式表达式时，对通过不确定性降低所创造价值的量化通常依赖于以下三种技术之一：1）基于数据价值上界的闭式表达式；2）模拟比较：将知晓底层数据分布的“全知者”所作决策的价值，与信息较少的决策者所作决策的价值进行比较；或 3）使用方差缩减，作为衡量数据如何降低数据生成过程中底层不确定性的代理指标。第一类方法的示例包括： [27] bound 针对风险规避型决策者的完全信息期望价值（EVPI），以及 [40] place 在已知该分布均值和方差的情况下，为知晓真实分布的价值设定上界。第二类方法的示例通常会将贝叶斯更新程序与已知的最优解进行比较 [8, 29, 7, 35]。最后，在不依赖具体数据量的情况下计算方差缩减的价值，在相关文献中也较为常见 [11, 22]。

2 问题设定

尽管人们付出了大量努力，预后验分析的符号表示仍未实现标准化，并且通常取决于个人偏好 [33]。为了帮助读者理解本文围绕随机变量及其实现值所采用的符号表示，我们将以下摘要按三个分析层次划分：

1. 数据/样本。数据是一个支撑集为$\{0, 1, \ldots, M\}$的整数值随机变量。样本是一个随机向量，指的是 n 数据观测值的序列，或者表示在 n 次观测中记录的每个潜在数据值出现次数的计数向量。

D：表示单个数据观测值的随机变量。d：具有整数值支撑集的 D 的单个实现值：$d \in \{0, 1, \ldots, M\}$。$X \equiv (X_1, \ldots, X_n)$：由 D的 n 个观测值组成的随机向量。$x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$：数据向量 X 的一个实现值。$\mathcal{D}^n$：当观测到 n 个实现值时，X 的支撑集。n_k：$k \in \{0, 1, \ldots, M\}$ 在 x中出现的次数。$(n_0, n_1, \ldots, n_M)$：表示每个潜在数据值出现次数的计数向量。

2. 数据分布/抽样分布。数据分布和抽样分布是含义相同的术语，均指决定数据生成过程的概率分布。谈到生成单个数据点时，通常使用“数据分布”；谈到观测序列时，则通常使用“抽样

[1]其中，支撑集被解释为整数值序列。

谈论观测序列时首选的分布。

$T \equiv (T_0, T_1, \ldots\ldots, T_M)$：表示数据分布的随机向量。随机元素 T_k 是数据分布参数，表示数据实现值为 k的概率。$t \equiv (t_0, t_1, \ldots\ldots, t_M)$：随机向量 T的一个实现值，使得对于 $k \in \{0, 1, \ldots, M\}$，$t_k = p(D = k)$。$t^*$：“真实”的数据分布或抽样分布；只有神谕才能知晓。$\mathcal{T}$：所有可能数据分布构成的空间或集合。 T， t， $t^* \in \mathcal{T}$。

3. 先验分布/后验分布。定义域为所有可能数据分布的连续多元概率分布。

π：生成数据分布的先验分布。π_X：根据数据 X更新 π 的后验分布。

2.1 数据与损失建模

考虑一个数据生成过程，该过程从一个有界整数序列中生成独立同分布的样本， $M + 1$ 。为简化记号，我们将该序列重新缩放为 $[M] \equiv \{0, 1, \ldots, M\}$。从实际应用角度来看，这些数据可以表示产品需求，目标是为库存控制做出准确预测 [39]。对于需求不确定性的具体情形，我们注意到，相较于此处采用的二次损失函数，人们可能更倾向于使用非对称损失函数或其他损失函数；但对于这些情形，目前尚无法得到闭式表达式。

数据生成过程由一个未知的数据分布 t 控制，其支撑集为离散有限集 $[M]$。因此，数据生成过程的统计模型由标准的 M 维概率单纯形参数化

$$\mathcal{T} = \{t = (t_0, \ldots, t_M) \in \mathbb{R}_+^{M+1} : t_0 + \ldots + t_M = 1\};$$

这个无限（但有限维）的参数空间描述了我们如何标记潜在的数据分布。如果数据的样本量为 n，则有 n 个值 x_1、……、$x_n \in [M]$ 由数据生成过程生成。对于给定的 $t \in \mathcal{T}$，相应的数据生成过程 $p_t^{(n)}$ 为这一特定的数据值序列赋予概率

$$p_t^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} t_{x_i} \tag{1}$$

赋予这一特定的数据值序列。特别是，如果样本量为 1，数据生成过程可简单表示为

$$p_t(d) \equiv p_t^{(1)}(d) = t_d, \qquad d \in [M].$$

显然，样本中特定数据值出现的次数是该模型的充分统计量，而该充分统计量的抽样分布就是多项模型。具体而言，若 $n_d = |\{1 \le i \le n : x_i = d\}|$，则 $(n_0, \ldots, n_M)$ 是充分统计量，并且采用显而易见的宽松记法，我们有，

$$p_t(n_0, \ldots, n_M) = \binom{n}{n_0 \cdots n_M} \prod_{d=0}^{M} t_d^{n_d}. \tag{2}$$

请注意，$n_0 + \ldots + n_M = n$ 根据定义成立；因此，使用充分统计量表示数据时，我们不写上标 (n)。

对未来数据进行预测时，理想情况下，行动（或预测）应接近实际数据实现值。为便于处理，我们考虑如下形式的单次预测二次终端机会损失函数：

$$\ell(d, a) = k(d - a)^2 \tag{3}$$

其中，$k > 0$ 是已知常数，a 是行动/预测，$d \in [M]$ 是实际数据实现值。

为了简要地将上述符号具体化，我们设想预测某种产品的需求，该产品的销量介于 0 到 5 件之间（$M = 5$）。每一期的独立同分布需求 $d \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ 都有相应的发生概率 $p_t(0)$ $p_t(1) \ldots, p_t(5)$，更简洁地可表示为 $t_0, t_1, \ldots, t_5$。任何行动的效果都将通过乘以因子 k 缩放后的二次损失来衡量；因此，如果 $k = 5$, $d = 4$，且 $a = 1$，那么 $\ell(4, 1) = 45$。决策者正在考虑获取 $n = 3$ 个观测值的价值；生成的数据 (x_1, x_2, x_3) 可能是 (0, 5, 0) 这样的取值，而相应的计数充分统计量 $(n_0, \ldots, n_5)$ 则为 (2, 0, 0, 0, 0, 1)。请注意，$t \equiv t_0, t_1, \ldots, t_5$ 既对式 (1) 中产生 (x_1, x_2, x_3) 的数据生成过程进行参数化，也对式 (2) 中产生 $(n_0, \ldots, n_5)$ 的等价抽样过程进行参数化。因此，根据上下文，我们将 t 称为数据分布或抽样分布。

2.2 预后验分析

对于任意数据分布 t，将损失的期望定义为:

$$R(t,a) = \mathbb{E}_{D|T=t}\left[\ell(D,a)\right] = \sum_{d=0}^{M} p_t(d)\ell(d,a). \tag{4}$$

其中，$R(t,\ a)$称为贝叶斯风险。由于决策者（DM）不知道潜在的"真实" $t^* \in \mathcal{T}$ 数据分布，因此最小贝叶斯风险 $\min_a R(t^*,\ a)$ 很可能无法达到。

对于决策者而言，风险是根据其在单纯形 $\mathcal{T}$ 上赋予的概率分布取平均来评估的。在没有任何样本观测的情况下，该分布是对 $\mathcal{T}$ 中所有可能数据分布的先验分布 π 。采取行动 a 并使用先验分布 π 时的平均风险为

$$\bar{R}(\pi,a) = \mathbb{E}_T\left[R(T,a)\right], \tag{5}$$

其中 $T \sim \pi$。对于 π，贝叶斯行动为

$$a^*(\pi) = \arg\min_{a\in\mathcal{A}} \bar{R}(\pi,a). \tag{6}$$

π 的贝叶斯风险为

$$\bar{R}(\pi,a^*(\pi)) = \min_{a\in\mathcal{A}} \bar{R}(\pi,a). \tag{7}$$

获取样本 $X \equiv (X_1,\ \ldots\ldots,\ X_n)$ 会导致不同的决策和不同的风险。有了样本观测后，决策者运用贝叶斯法则将 π 更新为 π_X （后验分布），并计算相应的最优贝叶斯行动 $a^*(\pi_X)$。由于在实际收集样本之前，X 是未知的，因此 π_X 的贝叶斯风险本身是一个随机变量。因此，我们计算决策者在所有可能样本 X 上、利用样本信息得到的损失先验期望，

$$\mathbb{E}_X\left[\bar{R}(\pi_X,a^*(\pi_X))\right] = \mathbb{E}_T\mathbb{E}_{X|T}\left[R(T,a^*(\pi_X))\right], \tag{8}$$

其中，$T \sim \pi$ 右侧表达式则是将 π_X代入 π 式（5）并应用全期望定律推导得到的。

因此，样本信息的期望价值（EVSI），$V_n(\pi)$，是在先验分布 π 下，有样本与无样本时损失的先验期望之差X：

$$\begin{aligned} V_n(\pi) &= \bar{R}(\pi,a^*(\pi)) - \mathbb{E}_X\left[\bar{R}(\pi_X,a^*(\pi_X))\right] &(9)\\ &= \mathbb{E}_T\left[R(T,a^*(\pi))\right] - \mathbb{E}_T\mathbb{E}_{X|T}\left[R(T,a^*(\pi_X))\right] &(10)\end{aligned}$$

其中 $T \sim \pi$，式（10）由式（5）和（8）可得。命题 2.1 形式化地表达了我们的直觉：样本信息的这一期望价值应当是非负的。

命题 2.1。 假设数据分布 $T \equiv (T_0, \ldots, T_M)$ 来自给定的先验分布 π。进一步假设，决策者获得 n 个样本 $X \equiv (X_1, \ldots, X_n)$，并将其先验分布更新为后验分布 π_X。那么，在二次损失下，这些 n 个样本的期望价值非负，即

$$V_n(\pi) = \mathbb{E}_T \left[R(T, a^*(\pi)) \right] - \mathbb{E}_T \mathbb{E}_{X|T} \left[R(T, a^*(\pi_X)) \right] \geq 0. \tag{11}$$

证明。 见附录。 □ □

由于样本 X 中的顺序无关紧要，式 (11) 中的内层期望是针对 $(n_0, n_1, \ldots, n_M) \sim$ 多项分布(t) 在给定 $T = t$ 的条件下计算的，其中 n_j 是 $j \in [M]$ 在样本中出现的次数，而外层期望则针对 $T \sim \pi$计算。

3 样本信息的可处理估值

为得到式 (10) 的可处理估值，我们基于三个原因采用狄利克雷分布作为先验分布：1）它是类别/多项分布结果的共轭先验；2）其支撑集是 M维单纯形 $\mathcal{T}$；3）它能够灵活地对决策者的多种先验信息进行建模。在狄利克雷分布假设下，本文的主要结果——定理3.1——可以表述如下：

定理 3.1。 对于支撑集为 $[M]$ 的数据分布 T，以及狄利克雷分布$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ 先验分布 $\pi =$，在观测到 n 个数据样本后，二次损失的期望降低量（也称为样本信息期望价值（*EVSI*））为：

$$V_n(\pi) = \frac{kn(c_2 - c_1^2)}{(n + \alpha)(1 + \alpha)}. \tag{12}$$

其中 $\alpha = \sum_{d=0}^{M} \alpha_d$ 是狄利克雷分布的精度/集中度参数（见 *[16]*），且 $c_1 = \frac{1}{\alpha} \sum_{d=0}^{M} d\alpha_d$ 和 $c_2 = \frac{1}{\alpha} \sum_{d=0}^{M} d^2 \alpha_d$分别是数据在边际似然$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M)/\alpha$ 下的一阶矩和二阶矩。

证明。 见附录。 □ □

定理 3.1 给出了在狄利克雷先验下，观测一个 n 次试验的多项式样本的期望价值，其中底层数据生成过程的支撑集是有界整数序列 $[M] = \{0, 1, \ldots, M\}$。这是对以下情形进行价值评估的自然推广：在贝塔先验下观测一个 n 次试验的二项式样本，且底层数据生成过程的支撑集受到限制，满足 $[M] = \{0, 1\}$。只需稍微改变记号，我们便可由 [32]得知，贝塔-二项式情形下样本信息期望价值的闭式表达式为：

$$\frac{kn}{n+\alpha_0+\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_1}{(\alpha_0+\alpha_1)^2(\alpha_0+\alpha_1+1)} \tag{13}$$

其中 $\pi \sim Beta(\alpha_0, \alpha_1)$。将此先验分布替换为等价的狄利克雷参数化形式 $\pi \sim Dirichlet(\alpha_0, \alpha_1)$，并使用定理 3.1 可得到相同的结果：

$$\begin{aligned} V_n(\pi) &= \frac{kn(c_2 - c_1^2)}{(n+\alpha)(1+\alpha)} \\ &= \frac{kn}{(n+\alpha_0+\alpha_1)} \cdot \frac{\frac{\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1} - \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_0+\alpha_1)^2}}{(\alpha_0+\alpha_1+1)} \\ &= \frac{kn}{(n+\alpha_0+\alpha_1)} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_1}{(\alpha_0+\alpha_1)^2(\alpha_0+\alpha_1+1)} \end{aligned} \tag{14}$$

根据定理 3.1，直接可知，当 $n \to \infty$ 时，我们可以得到分布信息期望价值(EVDI) 的表达式，因为无限样本能够精确给出数据分布：

$$V_\infty(\pi) = \lim_{n\to\infty} V_n(\pi) = \frac{k(c_2 - c_1^2)}{1+\alpha}. \tag{15}$$

最后，我们可以利用式（η12）与式（12）的比值，将样本信息的效率表示为样本点数量的函数：

$$\eta = \frac{n}{n+\alpha}. \tag{16}$$

因此，通过抽样获得的价值百分比等于数据点数量 n 与 n 狄利克雷分布的 α 数据点数量和浓度参数之和的比值。该抽样效率计算可直接简化为 [34]中贝塔-二项式情形的已知公式（采用我们的记号）： $\eta = n/(\alpha_0 + \alpha_1)$，其中$\pi \sim Beta(\alpha_0, \alpha_1)$。

再来具体化一下记号，重新考察§2.1末尾的产品需求预测示例。回想一下，我们有一种产品

其销量介于 0 到 5 件之间（$M = 5$），且损失按 $k = 5$ 缩放。决策者正在考虑 $n = 3$ 观测值的价值。引入一个零膨胀先验 $\pi \sim Dirichlet(10, 1, 1, 1, 1, 1)$ 意味着 $c_1 = \frac{6}{15} \cdot 0 \cdot \frac{10}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = 1.5$，$c_2 = \frac{6}{15} \cdot (0 \cdot \frac{10}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6}) = \frac{11}{3}$。代入公式 (12) 得到样本信息期望价值 $V_3(\pi) = \frac{160}{77} \approx 2.08$。以及 EVDI $V_\infty(\pi) = \frac{80}{21} \approx 3.81$。根据公式 (16)，我们得到 $\eta = \frac{6}{11} \approx 54.5\%$，因此，预计通过学习 $n = 3$ 样本可实现超过最大可能损失降幅一半的效果。π 由公式 (26) - (31) 可得，$a^*(\pi) = 1$ 以及先验期望损失 $\bar{R}(\quad, a^*(\,)) = 5 \cdot (-1^2 \cdot \frac{10}{15} + 0^2 \cdot \frac{1}{15} + 1^2 \cdot \frac{1}{15} + 2^2 \cdot \frac{1}{15} + 3^2 \cdot \frac{1}{15} + 4^2 \cdot \frac{1}{15}) = \frac{40}{3} \approx 13.33.$。因此，我们还可以得到后验损失的先验期望 $\mathbb{E}_X\left[\bar{R}(\pi_X, a^*(\pi_X))\right] = \bar{R}(\pi, a^*(\pi)) - V_3(\pi) = \frac{40}{3} - \frac{160}{77} \approx 11.26.$

4 关于建模假设丰富性与可解释性的说明

上一节中，我们表明，对于采用狄利克雷先验的多项式数据生成过程，三项样本信息期望价值的期望属性之一——可处理性——是可以实现的。多项分布足够灵活，能够对任何离散（有限）数据分布进行建模。其先验分布——狄利克雷分布——在对单纯形上的各种分布进行建模方面也具有很强的灵活性。然而，为了实现可处理性，在先验信念建模的丰富性方面仍有所取舍。最值得注意的是，单纯形上更丰富、更灵活的替代先验分布是逻辑正态分布 [3, 讨论见]。狄利克雷分布最明显的缺点，是无法对数据观测值之间存在某种相关结构的先验信念进行建模。例如，观测到一个较大的数据值（比如 100）后，人们会认为 101 和 99 也比离它们更远的数据值更有可能出现。然而，作为多项分布数据的先验分布，狄利克雷分布无法捕捉这种结构。值得注意的是，Kaplan-Meier估计量的分布无关理论基础同样忽略了数据观测值之间可能存在的这种相关性，但在类似的重复报童模型情境中仍表现出良好结果 [17] 。

通过直观的重新参数化 [16]，可以最清楚地看出狄利克雷先验的丰富性。设浓度参数为 $\alpha = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i$，向量 $\mathbf{m} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}, \frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_M}{\alpha}\right)$ 表示均值，其中数据观测值的期望均值记为 $c_1 = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{M} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{M} i m_i$。当 α 较小时，例如 $\alpha \leq M$，单纯形上的先验分布可能与 $\mathbf{m}$ 相差很大，并反映决策者的不确定性

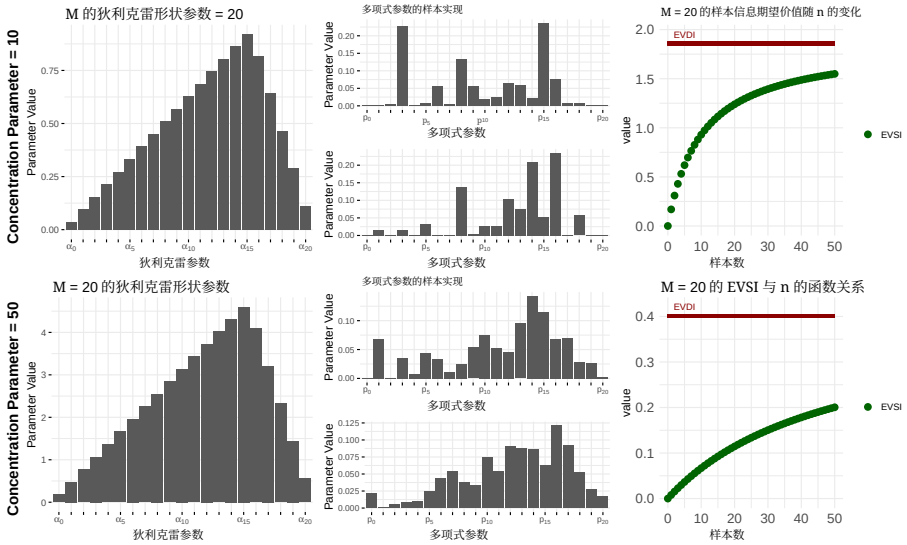

图1：狄利克雷先验参数、该先验的可能实现值（即多项分布参数），以及针对给定先验、随 n 样本数变化的 EVSI/EVDI 计算结果的图示。上排对应浓度参数 $\alpha = 10$，下排对应浓度参数 $\alpha = 50$

围绕其期望值。当 α 增大时，先验分布会将概率密度集中在$\mathbf{m}$附近，体现出更高的置信度。图1 以两个不同的浓度参数为例，图示了这一现象。如图所示，当 α 较小时（图1上排），实际生成的多项分布参数（上排中间图）可能与均值$\mathbf{m}$ 相差更远（该均值与左上图中的参数成正比）。随着 α增大（下排），先验分布所含的信息会显著增加，多项分布参数也更可能与先验狄利克雷分布参数相一致。

在可解释性方面，定理3.1 将我们对数据价值驱动因素的直觉形式化。具体而言，以下情况会使数据更有价值：1）样本包含大量数据（ n较高）；2）数据分布的期望方差较大（ $c_2 - c_1^2$较高）；3）对真实数据分布存在很大的不确定性（α 较小）。此外，EVDI 的计算式（式15）给出了数据价值的一个可解释上界：较高的方差会提高样本的价值，而较高的浓度参数则会降低样本的价值。最后，效率公式（式16）进一步揭示了数据价值接近该上界的速度；基本而言，狄利克雷浓度参数越小，每增加一个数据点，EVDI 就越快趋近于该上界。

5 说明性示例

在本节中，我们将展示 EVSI 的可处理形式（公式（12））如何作为构建模块，应用于其他研究工作。第一个示例探讨样本量优化，第二个示例展示可处理的 EVSI 计算如何在两阶段生产计划问题中导出可处理的决策策略。在第三个（也是最后一个）示例中，EVSI 公式为基准比较启发式更新程序奠定基础，这些程序旨在估计潜在的未知数据分布。

5.1 样本量的选择

现在，我们来探讨决策者如何选择要收集的样本点数量，以便在假设期望抽样成本 $C_s(n)$ 是所抽取样本点数量 n 的线性函数时，使其期望损失最小：

$$C_s(n) = K + sn \tag{17}$$

其中， s 是一个样本的成本， K 表示抽样的固定成本。

待最小化的损失函数 $\ell_s(n)$，结合了方程（12）和（17）：

$$\ell_s(n) = -\frac{kn(c_2 - c_1^2)}{(n+\alpha)(1+\alpha)} + K + sn \tag{18}$$

并且出于实际考虑，假设 n 可以视为连续变量，我们得到最优样本量：

$$n^* = \sqrt{\frac{\alpha}{(1+\alpha)}\frac{k}{s}(c_2 - c_1^2)} - \alpha \tag{19}$$

对于 n^* 取正值且抽样的固定成本 K可以收回的情形，即 $V_n(\pi) > C_s(n^*)$。在其他所有情况下， $n^* = 0$。方程（19）具有简明的经济学解释，其中三项分别表示先验分布的强度、二次损失成本与单位抽样成本的缩放比，以及数据分布的预测方差。

5.2 两阶段生产计划

所示例子是一个简单的两阶段生产计划问题（参见，例如 [9]），其中决策者希望优化安排 2^{nd}生产批次。

假设 J 个时期构成一个销售季。每个时期， $j \in J$ 面临独立且同分布的类别需求，该需求服从狄利克雷先验并采用二次损失（即具有二次损失的重复报童模型情境），且每个时期均安排相同的交货量。决策者可以选择：1）为整个销售季安排每个时期的交货量；或 2）支付 K，指定一个时期 j^*，在该时期之后可以更改已安排的交货量。假设该变更日期将在销售季开始前以合同形式预先确定，求 j^*，以最小化整个销售季的预期净成本 J。

该问题的净成本函数为：

$$C(j) = \begin{cases} 0, & \text{if } j = 0, \\ K - (J-j)\dfrac{kj(c_2 - c_1^2)}{(j+\alpha)(1+\alpha)}, & \text{if } j \in (0, J] \end{cases} \tag{20}$$

当 $j \in (0, J]$ 时，净成本函数 $C(\cdot)$ 严格凸，且具有唯一的全局最小值。最优周期 j^* 为

$$j^* = \underset{j \in \{0,1,\ldots,J\}}{\arg\min} \; C(j)$$

当 $\min\ C(j) = 0$ for $0 < j \leq J$ 时，我们选择 $j^* = 0$。

对于 $\min C(j) < 0$ 的情况，我们有

$$j^* = \sqrt{\alpha(J+\alpha)} - \alpha$$

考虑到 j^* 必须是非负整数，总结不同情况后，我们得到最优 j^* 为

$$j^* = \begin{cases} 0, & \text{if } \min\limits_{j \in [0,J]} C(j) = 0, \\ \underset{j \in \{\lfloor j_0 \rfloor, \lceil j_0 \rceil\}}{\arg\min} \; C(j), & \text{if } \min\limits_{j \in [0,J]} C(j) < 0. \end{cases} \tag{21}$$

其中 $j_0 = \sqrt{\alpha(J+\alpha)} - \alpha$。

5.3 对数据驱动算法进行基准测试

一个活跃的研究方向是针对重复决策场景提出算法，而在这类场景中，人们对底层数据分布的假设尽可能少。这些方法包括样本均值近似（SAA）[24, 23], 凹自适应价值估计（CAVE） [12], 以及二阶信念最大熵（SOBME） [35]。对这些算法进行基准测试时，通常会选取少数几个“真实”分布，让算法与已知的最优解进行比较。

在引入狄利克雷先验情境下的闭式EVSI计算后，我们可以建立一个更稳健的基准测试场景。我们不再选取一个“真实”的数据分布，而是从狄利克雷族中选取一个“真实先验分布”，其支撑集与所关注的问题相匹配。随后，我们可以利用该先验分布模拟“真实”的数据分布（数量不限），并据此估算平方损失的减少量如何随 n（即数据样本数）变化。在此设定下，可以将所提出的算法与已知的最优更新程序进行比较。毕竟，我们要验证的是更新程序；因此，用于与新算法进行基准比较的最优更新程序，就是定理证明中详述的贝叶斯更新程序3.1 （见附录）。

作为概念验证，图 2 展示了一个示例，将广为人知的样本均值近似（SAA）（见 [24]）与已知最优的贝叶斯更新程序（ BAYES ）进行基准比较，该程序使用狄利克雷分布$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M)$

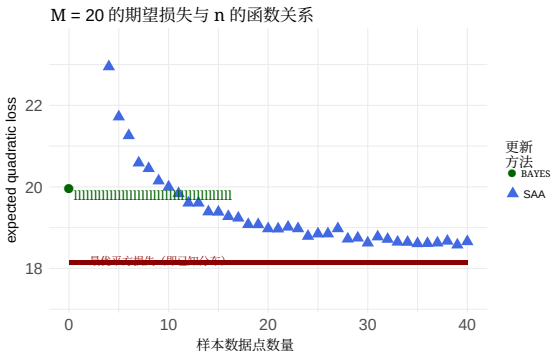

图2：比较样本均值近似（SAA）更新程序与已知的贝叶斯（BAYES）最优更新程序。

先验分布，其中 $M = 20$、 $\alpha = 10$ 和 $\mathbf{m} \propto \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1\}$（设定为略微偏斜）。在这种情形下，我们看到先验信息在小样本数据场景中的价值，因为 BAYES 的表现优于 SAA。图中还显示，随着数据量增加，非参数样本均值近似算法的表现不断提升，并逐渐接近最优贝叶斯更新程序。

6 结论

本文采用预后验分析，为数据收集前评估其价值提供了一种正式方法，因此未来应能成为许多系统和模型的构建基础。通过将底层数据生成过程的支撑集从 $[M] = \{0, 1\}$ 扩展到$[M] = \{0, 1, \ldots, M\}$，贝塔-二项分布 EVSI 计算成功推广到了狄利克雷-多项分布情形。借助这种新的 EVSI 计算方法，本文展示了三个在数据收集前评估其价值的说明性示例；此外，这种易于处理的公式在许多其他情境中也可能派上用场。众所周知，两个特定领域的研究者——医疗决策和主动（机器）学习领域的研究者——都对 EVSI 类计算感兴趣（例如，参见 [2, 13, 18, 31]）。我们也期待听到这一数据收集前价值评估方法在其他方面的有益应用。

命题 2.1 和定理3.1 的证明

A.1 命题 2.1 的证明

样本信息期望价值为

$$V_n(\pi) = \mathbb{E}_T[R(T, a^*(\pi))] - \mathbb{E}_T\mathbb{E}_{X|T}[R(T, a^*(\pi_X))]. \tag{22}$$

对于式（22）中的第一项，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_T[R(T, a^*(\pi))] &= k\mathbb{E}_T\left[\mathbb{E}_{D|T}\left[(D - a^*(\pi))^2\right]\right] \\
&= k\mathbb{E}_T\left[\mathbb{E}_{D|T}\left[(D - \mathbb{E}[D])^2\right]\right] \\
&= k\mathbb{E}_D\left[(D - \mathbb{E}[D])^2\right] \\
&= k\mathrm{Var}[D].
\end{aligned} \tag{23}$$

第二行是因为平方损失下的最优行动为均值（见式（30））。式（23）的第三行由全期望定律得出。因此，在二次损失（3）下，不含样本信息时的最优贝叶斯风险是 D 的边际方差乘以因子 k。

类似地，对于式（22）中的第二项，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_T\left\{\mathbb{E}_{X|T}[R(T, a^*(\pi_X))]\right\} &= k\mathbb{E}_T\left\{\mathbb{E}_{X|T}\left[\mathbb{E}_{D|T}\left[(D - a^*(\pi_X))^2\right]\right]\right\} \\
&= k\mathbb{E}_T\left\{\mathbb{E}_{X|T}\left[\mathbb{E}_{D|T}\left[(D - \mathbb{E}_{D|X}[D])^2\right]\right]\right\} \\
&= k\mathbb{E}_X\left\{\mathbb{E}_{D|X}\left[(D - \mathbb{E}_{D|X}[D])^2\right]\right\} \\
&= k\mathbb{E}_X\left[\mathrm{Var}_{D|X}[D]\right].
\end{aligned} \tag{24}$$

若收集大小为 n 的样本，则二次损失（3）下的最优贝叶斯风险为 D 的预测后验分布的期望方差，乘以因子 k。

结合（22）、（23）和（24），证明完成：

$$\begin{aligned}
V_n(\pi) &= \mathbb{E}_T[R(T, a^*(\pi))] - \mathbb{E}_T\left\{\mathbb{E}_{X|T}[R(T, a^*(\pi_X))]\right\} \\
&= k\mathrm{Var}[D] - k\mathbb{E}_X\left[\mathrm{Var}_{D|X}[D]\right] \\
&= k\left\{\mathrm{Var}[D] - \mathbb{E}_X\left[\mathrm{Var}_{D|X}[D]\right]\right\} \\
&= k\mathrm{Var}_X\left[\mathbb{E}_{D|X}[D]\right] \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

等式（25）中的最后一个等号由全方差公式得出。由于 $k > 0$ 以及 $\mathrm{Var}_X\left[\mathbb{E}_{D|X}[D]\right] \geq 0$ 对于任意 X，我们有 $V_n(\pi) \geq 0$ 对于任意样本量 n。□

A.2 定理 3.1的证明

考虑数据生成过程的先验分布

$$\pi = \mathrm{Dirichlet}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M).$$

假设我们的信息由数据分布的 n 个样本组成。令n_j、 $j \in [M]$ 分别表示数据为 j 的频数，使得n_j 为满足 $\sum_{j=0}^{M} n_j = n$的整数。由于多项分布与狄利克雷分布共轭，

$$\pi_X \quad = \quad \mathrm{Dirichlet}(\alpha_0 + n_0, \alpha_1 + n_1, \ldots, \alpha_M + n_M).$$

由于 π 和 π_X 都属于同一分布类，我们可以对信息 X推导出闭式估值。 π 和 π_X 对应的边际似然为

$$\begin{aligned} q_\pi(d) &= \frac{\alpha_d}{\alpha}, \\ q_{\pi_X}(d) &= \frac{\alpha_d + n_d}{\alpha + n}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i$。如果信息恰好以这样的方式出现，即对于每个 j都有 $n_j \propto \alpha_j$，则更新后的边际似然保持不变：$q_d(\pi) = q_d(\pi_X)$， $d \in [M]$。

为方便起见，定义以下量

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{M} d n_d, \\ c_1 &= \frac{1}{\alpha} \sum_{d=0}^{M} d \alpha_d, \\ c_2 &= \frac{1}{\alpha} \sum_{d=0}^{M} d^2 \alpha_d, \end{aligned}$$

其中， Z 表示样本的平均频数， c_1 表示样本值的先验期望， c_2 表示样本值的先验二阶矩。

给定式（3）中的损失函数，不考虑样本信息时的贝叶斯风险和行动可以显式计算

$$\begin{aligned}
\bar{R}(\pi, a) &= \mathbb{E}_{T\sim\pi}[R(T, a)], && (26)\\
&= \mathbb{E}_{T\sim\pi}\left[\sum_{d=0}^{M} p_T(d)\ell(d, a)\right], && (27)\\
&= \sum_{d=0}^{M} \ell(d, a)\mathbb{E}_{T\sim\pi}[p_T(d)], && (28)\\
&= \sum_{d=0}^{M} \ell(d, a)q_\pi(d), && (29)
\end{aligned}$$

其中 $\{q_\pi(0)\ q_\pi(1)\ldots, q_\pi(M)\}$ 是边际似然。贝叶斯行动使式（29）达到最小值：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{R}(\pi, a)}{\partial a} &= -2k\sum_{d=0}^{M}(d-a)q_\pi(d) = -2k\left(\sum_{d=0}^{M} dq_\pi(d) - a\sum_{d=0}^{M} q_\pi(d)\right) = 0,\\
\Rightarrow a^*(\pi) &= \sum_{d=0}^{M} dq_\pi(d),\\
&= \mathbb{E}_{q_\pi}[D], && (30)\\
&= c_1. && (31)
\end{aligned}$$

先验边际似然下的数据结果均值。相应的贝叶斯风险为

$$\begin{aligned}
\bar{R}(\pi, a^*(\pi)) &= k\sum_{d=0}^{M}(d - a^*(\pi))^2 q_\pi(d),\\
&= k\mathrm{Var}_{q_\pi}[D],\\
&= k(c_2 - c_1^2).
\end{aligned}$$

同样，利用样本信息可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{R}(\pi_X, a)}{\partial a} &= -2k \sum_{d=0}^{M} (d-a) q_{\pi_X}(d), \\
&= -2k \left(\sum_{d=0}^{M} d q_{\pi_X}(d) - a \sum_{d=0}^{M} q_{\pi_X}(d) \right) = 0, \\
\Rightarrow a^*(\pi_X) &= \sum_{d=0}^{M} d q_{\pi_X}(d), \\
&= \mathbb{E}_{q_{\pi_X}}[D], \\
&= \frac{\alpha c_1 + nZ}{\alpha + n}, \qquad (32)
\end{aligned}$$

即为后验边际似然下的数据结果均值。现在将样本信息期望价值表示为

$$V_n(\pi) = \bar{R}(\pi, a^*(\pi)) - \mathbb{E}_T \mathbb{E}_{X|T} R(T, a^*(\pi_X)), \qquad (33)$$

请注意，内层期望是对数据频率取的，该频率服从多项分布：(n_0，……，n_M) ～多项分布($p_t(0)$……，$p_t(M)$)；外层期望则是对所有可能的分布 p_{t^*} ～狄利克雷分布(α_0，……，α_M) 取的。

(33)中的第一项已计算为 $k(c_2 - c_1^2$。现在计算第二项。

$$\begin{aligned}
R(t, a^*(\pi_X)) &= k \sum_{d=0}^{M} p_t(d) (d - a^*(\pi_X))^2 \\
&= k \sum_{d=0}^{M} p_t(d) \left[d - \frac{\alpha c_1 + nZ}{\alpha + n} \right]^2 \\
\Rightarrow \mathbb{E}_{X|T=t} [R(t, a^*(\pi_X))] &= k \sum_{d=0}^{M} p_t(d) \left[d^2 - \left(\frac{2nd}{\alpha + n} - \frac{2n\alpha c_1}{(\alpha + n)^2} \right) \mathbb{E}_X[Z] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2d\alpha c_1}{\alpha + n} + \frac{\alpha^2 c_1^2}{(\alpha + n)^2} + \frac{n^2}{(\alpha + n)^2} \mathbb{E}_X[Z^2] \right]. \qquad (34)
\end{aligned}$$

由于 $Z(n_0,\ldots,n_M)=\frac{1}{n}\sum_{d=0}^{M}dn_d$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{X|T=t}[Z] &= \sum_{d=0}^{M} dp_t(d),\\ \mathbb{E}_{X|T=t}[Z^2] &= \mathrm{Var}_{X|T=t}[Z]+\left(\mathbb{E}_{X|T=t}[Z]\right)^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{d=0}^{M} d^2p_t(d)+\frac{(n-1)}{n}\left(\sum_{d=0}^{M} dp_t(d)\right)^2,\end{aligned}$$

其中，最后一行是由以下事实得出的

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{X|T=t}[Z] &= \mathrm{Var}_{X|T=t}\left[\frac{1}{n}\sum_{d=0}^{M} dn_d\right]\\ &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}_{X|T=t}\left[\sum_{d=0}^{M} dn_d\right]\\ &= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{d=0}^{M} d^2\mathrm{Var}_{X|T=t}\left[n_d\right]+2\sum_{0=i<j}^{M} ij\mathrm{Cov}_{X|T=t}\left(n_i,n_j\right)\right\}\\ &= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{d=0}^{M} d^2np_t(d)\left(1-p_t(d)\right)-2\sum_{0=i<j}^{M} ijnp_t(i)p_t(j)\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{d=0}^{M} d^2p_t(d)-\frac{1}{n}\left\{\sum_{d=0}^{M} d^2p_t^2(d)+2\sum_{0=i<j}^{M} ijp_t(i)p_t(j)\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{d=0}^{M} d^2p_t(d)-\frac{1}{n}\left(\sum_{d=0}^{M} dp_t(d)\right)^2. \qquad (35)\end{aligned}$$

式（34）变为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{X|T=t}[R(t,a^*(\pi_X))] &= k\left\{\left(1+\frac{n}{(\alpha+n)^2}\right)\sum_{d=0}^{M} d^2p_t(d)+\left(\frac{2\alpha nc_1}{(\alpha+n)^2}-\frac{2\alpha c_1}{\alpha+n}\right)\sum_{d=0}^{M} dp_t(d)\right.\\ &\quad\left.+\left[\frac{n(n-1)}{(\alpha+n)^2}-\frac{2n}{\alpha+n}\right]\left[\sum_{d=0}^{M} dp_t(d)\right]^2+\frac{\alpha^2c_1^2}{(\alpha+n)^2}\right\}.\end{aligned}$$

最后一步是对所有可能的信念取期望 $p_t\sim$

狄利克雷分布(α_0、.....、 α_M)。利用以下事实

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{T\sim\pi}[p_T(i)] &= \frac{\alpha_i}{\alpha},\\
\mathbb{E}_{T\sim\pi}[p_T(i)^2] &= \mathrm{Var}[p_T(i)] + \mathbb{E}_T[p_T(i)]^2\\
&= \frac{\alpha_i(\alpha-\alpha_i)}{\alpha^2(\alpha+1)} + \frac{\alpha_i^2}{\alpha^2}\\
&= \frac{\alpha_i(\alpha_i+1)}{\alpha(\alpha+1)},\\
\mathbb{E}_{T\sim\pi}[p_T(i)p_T(j)] &= \mathrm{Cov}[p_T(i),p_T(j)] + \mathbb{E}_T[p_T(i)]\mathbb{E}_T[p_T(j)], \qquad i\neq j,\\
&= -\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha^2(\alpha+1)} + \frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha^2}\\
&= \frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{T\sim\pi}\left[\left(\sum_{d=0}^{M} d p_T(d)\right)^2\right] &= \mathbb{E}_{T\sim\pi}\left[\sum_{d=0}^{M} d^2 p_T^2(d) + 2\sum_{0=i<j}^{M} ij\, p_T(i)p_T(j)\right]\\
&= \sum_{d=0}^{M} d^2 \mathbb{E}_{T\sim\pi}\left[p_T^2(d)\right] + 2\sum_{0=i<j}^{M} ij\, \mathbb{E}_{T\sim\pi}\left[p_T(i)p_T(j)\right]\\
&= \sum_{d=0}^{M} d^2 \frac{\alpha_d\left(\alpha_d+1\right)}{\alpha\left(\alpha+1\right)} + 2\sum_{0=i<j}^{M} ij\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha\left(\alpha+1\right)}\\
&= \frac{1}{\alpha+1}\sum_{d=0}^{M}\frac{d^2\alpha_d}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\left(\alpha+1\right)}\left(\sum_{d=0}^{M} d^2\alpha_d^2 + 2\sum_{0=i<j}^{M} ij\alpha_i\alpha_j\right)\\
&= \frac{c_2}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha\left(\alpha+1\right)}\left(\sum_{d=0}^{M} d\alpha_d\right)^2\\
&= \frac{c_2}{\alpha+1} + \frac{\alpha c_1^2}{\alpha+1}, \qquad (36)
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_T\mathbb{E}_{X|T}[R(T,a^*(\pi_X))] &= k\left\{\left(1+\frac{n}{(\alpha+n)^2}\right)\sum_{d=0}^{M}\frac{d^2\alpha_d}{\alpha}+\left(\frac{2\alpha n c_1}{(\alpha+n)^2}-\frac{2\alpha c_1}{\alpha+n}\right)\sum_{d=0}^{M}\frac{d\alpha_d}{\alpha}\right.\\ &\quad\left.+\left[\frac{n(n-1)}{(\alpha+n)^2}-\frac{2n}{\alpha+n}\right]\left[\frac{c_2}{\alpha+1}+\frac{\alpha c_1^2}{\alpha+1}\right]+\frac{\alpha^2 c_1^2}{(\alpha+n)^2}\right\}\\ &= k(c_2-c_1^2)\frac{\alpha(1+\alpha+n)}{(1+\alpha)(n+\alpha)}.\end{aligned}$$

因此，来自数据分布的 n 样本的价值为

$$\begin{aligned}V_n(\pi) &= k(c_2-c_1^2)-k(c_2-c_1^2)\frac{\alpha(1+\alpha+n)}{(1+\alpha)(n+\alpha)}\\ &= \frac{kn(c_2-c_1^2)}{(n+\alpha)(1+\alpha)}. \qquad (37)\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] C. J. Adcock。改进的贝叶斯程序：计算多项抽样的样本量。《皇家统计学会杂志》。*D*辑（《统计学家》），42(2):91–95，1993。[2] AE Ades、G Lu 和 K Claxton。医疗决策建模中的样本信息期望价值计算。《医疗决策》，24(2):207–227，2004。[3] J. Aitchison 和 S. M. Shen。逻辑正态分布：一些性质及应用。《生物计量学》，67(2):261–272，1980。[4] Debarun Bhattacharjya、Jo Eidsvik 和 Tapan Mukerji。相关项目投资组合问题中的信息价值。《决策分析》，10(4):341–351，2013。[5] J Eric Bickel。双行动风险敏感问题中完美信息与不完美信息之间的关系。《决策分析》，5(3):116–128，2008。[6] Jing Cao、J Jack Lee 和 Susan Alber。贝叶斯样本量准则比较：ACC、ALC 和 WOC。《统计规划与推断期刊》，139(12):4111–4122，2009。

[7]Li Chen 和 Erica L Plambeck。在学习需求分布与替代概率的情况下进行动态库存管理。《制造与服务运营管理》，10(2):236–256，2008。[8] Gary D. Eppen 和 Ananth. V. Iyer。利用贝叶斯更新改进时尚产品采购。《运筹学》，45(6):805–819，1997。[9] Marshall Fisher、Kumar Rajaram 和 Ananth Raman。优化零售时尚产品的库存补货。《制造与服务运营管理》，3(3):230–241，2001。[10] Adam J. Fleischhacker 和 Pak-Wing Fok。基于熵的需求不确定性降低价值评估方法。《决策科学》，46(6):1165–1198，2015。[11] Yigal Gerchak 和 David Mossman。需求随机性对库存与成本的影响。《运筹学》，40(4):804–807，1992。[12] Gregory A. Godfrey 和 Warren B. Powell。一种用于删失需求报童问题的自适应、无分布假设算法，并应用于库存与配送。《管理科学》，47:1101–1112，2001。[13] Robbie A Haertel、Kevin D Seppi、Eric K Ringger 和 James L Carroll。主动学习的投资回报。载于《NIPS 成本敏感学习研讨会论文集》，第72卷，2008。[14] Ronald W Hilton。信息价值的决定因素：综合若干一般性结果。《管理科学》，27(1):57–64，1981。[15] Ronald A Howard。决策分析：关于推断、决策与实验的观点。《IEEE 论文集》，58(5):632–643，1970。[16] Jonathan Huang。狄利克雷分布参数的最大似然估计。卡内基梅隆大学技术报告，2005年。http://jonathan-huang.org/research/dirichlet/dirichlet.pdf，访问日期：2017-09-19。[17]Woonghee Tim Huh、Retsef Levi、Paat Rusmevichientong 和 James B. Orlin。自适应数据驱动库存控制与删失

基于Kaplan-Meier估计量的删失需求。《运筹学》，59(4):929–941，2011。[18]Christopher Jackson、Anne Presanis、Stefano Conti和Daniela De Angelis。贝叶斯证据综合中的信息价值：敏感性分析与研究设计。美国统计学会杂志，2019。[19] Hawre Jalal和Fernando Alarid-Escudero。用于信息价值分析的高斯近似方法。《医疗决策》，38(2):174–188，2018。[20] Jeffrey Keisler。典型决策问题中信息价值的比较静态分析。工程经济学家，49(4):339–349，2004。[21] Jeffrey M Keisler。正态先验下两阶段线性损失决策中信息价值的可加性。国际风险分析杂志，25(2):351–359，2005。[22] Jin Kyung Kwak和Srinagesh Gavirneni。零售商策略、不确定性降低与供应链绩效。《国际生产经济学杂志》，132(2):271–278，2011。[23] Retsef Levi、Georgia Perakis和Joline Uichanco。数据驱动的报童问题：新界限与新见解。《运筹学》，63(6):1294–1306，2015。[24]Retsef Levi、Robin O. Roundy和David B. Shmoys。随机库存控制模型中可证明近乎最优的基于抽样的策略。运筹学数学，32(4):821–839，2007。[25] Chi-Yuan Lin。评估样本信息的数值技术。《技术计量学》，16(3):447–454，1974。[26] Dennis V Lindley。英国皇家统计学会杂志：*D*辑（统计学家）中的样本量选择，46(2):129–138，1997。[27] Abraham Mehrez。风险厌恶对完全信息期望价值的影响。《运筹学》，33(2):455–458，1985。[28] Avraham Mehrez和Alan Stulman。完全信息期望价值（EVPI）分布性质的若干方面。《运筹学会杂志》，33(9):827–836，1982。

[29] Joseph M. Milner和Panos Kouvelis。供应链中的订货量与时机灵活性：需求特征的作用。《管理科学》，51(6):970–985，2005。[30] Satoshi Morita、Peter F Thall和Peter Müller。确定参数先验的有效样本量。《生物统计学》，64(2):595–602，2008。[31] Jeremy Muesing、Nisar Ahmed、Luke Burks、Michael Iuzzolino和Danielle Albers Szafir。用于稳健在线动态目标表征的全贝叶斯人机数据融合。《航空航天信息系统杂志》，18(2):26–49，2021。[32] T. Pham-Gia和N. Turkkan。贝叶斯分析中的样本量确定。英国皇家统计学会杂志：*D*辑（统计学家），41(4):389–397，1992。[33] Howard Raiffa和Stephen E Fienberg。统计学的早期年代：1947—1967年——与Howard Raiffa的对话。《统计科学》，第136–149页，2008。[34] Howard Raiffa和Robert Schlaifer。应用统计决策理论。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，1961。[35] Soroush Saghafian和Brian Tomlin。需求模糊性下的报童问题：结合数据、矩信息与尾部信息。《运筹学》，64(1):167–185，2016。[36] Mark Strong、Jeremy E. Oakley、Alan Brennan和Penny Breeze。利用概率敏感性分析样本估计样本信息期望价值：一种快速的非参数回归方法。《医疗决策》，35(5):570–583，2015。[37]Zhiyuan Wang、Zhiqiang Zheng、Wei Jiang和Shaojie Tang。供应链中的区块链赋能数据共享：模型、实施与教程。《生产与运营管理》，30(7):1965–1985，2021。[38] Wei Xiang和Wenxing Zhou。基于贝叶斯可靠性与信息价值确定最优样本量。载于第*13*届土木工程统计与概率应用国际会议，2019。

[39] Phillip M Yelland. 使用状态空间模型对低计数时间序列进行贝叶斯预测：库存管理的实证评估。《国际生产经济学杂志》，118(1):95–103，2009。[40] Jinfeng Yue、Bintong Chen 和 Min-Chiang Wang。报童问题的分布信息期望价值。《运筹学》，54(6):1128–1136，2006。