Feuerbach定理与Poncelet定理在空间中相遇（值此二百周年之际）

E. A. Avksentyev

*2022*年*12*月*29*日

摘要

我们提出了Feuerbach定理的三维推广：第一种涉及欧拉圆的四面体类比，第二种则通过“Up-in-ex-touch”构造实现。随后，我们给出Grace定理（一条经典但至今仍鲜为人知的三维Feuerbach定理）的几何证明，并说明它与Poncelet闭合定理之间的关系。我们的初等证明基于球面上虚母线的性质以及圆锥曲线的等方切线性质。接着，我们证明Grace定理蕴含Laguerre定理，而后者推广了Euler-Chapple公式。此外，我们还考察了Poncelet定理的一个空间类比。我们还证明，在双心四面体进行Poncelet旋转时，Grace球面与一个固定球面相切。最后，提升到三维空间后，我们得到了Feuerbach定理的一种新证明，也可能是Euler-Chapple公式最简短的证明。

arXiv:2301.00731v2 [math.DS] 5 Jan 2023

引言

本文探讨两个著名的几何定理。它们似乎毫无关联，唯一的联系或许是两百年前的同一年发表 [6, 15]。下面给出它们的表述

定理 (Feuerbach, 1822)。 任意三角形的九点圆与其内切圆及三个旁切圆相切。

定理 (Poncelet, 1822)。 设给定的两条圆锥曲线之间存在一个既内接于其中一条、又外切于另一条的多边形。那么，该多边形可以在这两条给定的圆锥曲线间动态地“旋转”，同时始终保持对其中一条内接、对另一条外切。

这两个定理都有大量推广，但据我们所知，只有庞塞列定理有空间类比。此类结果相当多（例如，参见 [7,9,10,16]），其中有许多精彩却鲜为人知的成果。

将费尔巴哈定理推广到三维空间的问题，早在一百多年前就已由柯立芝在专著 [3] 中提出：

> “四面体几何远远落后于三角形几何……是否存在费尔巴哈定理的类比？尤其是，什么对应于 *Hart* 系统？……这些困难却重要而有趣的问题，为严肃研究提供了广阔空间”（第247页）。

费尔巴哈定理包含两个令人惊叹的几何事实。第一，三角形的四个特殊圆——一个内接圆和三个旁切圆——有一个共同的切圆。第二，这个共同的切圆同时还是九点圆，而九点圆本身也十分特殊。

在空间中寻找费尔巴哈定理的类比，首先会引出这样一个问题：是否存在一个球面，能够同时与内接球和旁切球相切？

不过，这里我们将迎来第一个“惊喜”：除了与三角形的三个旁切球类似的四个普通旁切球外，任意四面体还存在另外三个双重旁切球面，或称阁楼球面（源自英语“roof”），这是 [22] 中采用的名称（另见 [23]）。

也就是说，总共有八个球面（见图1）与四面体的各个面相切！我们称它们为相切球。如果期待这八个相切球都能与同一个球面相切，那未免过于乐观了。

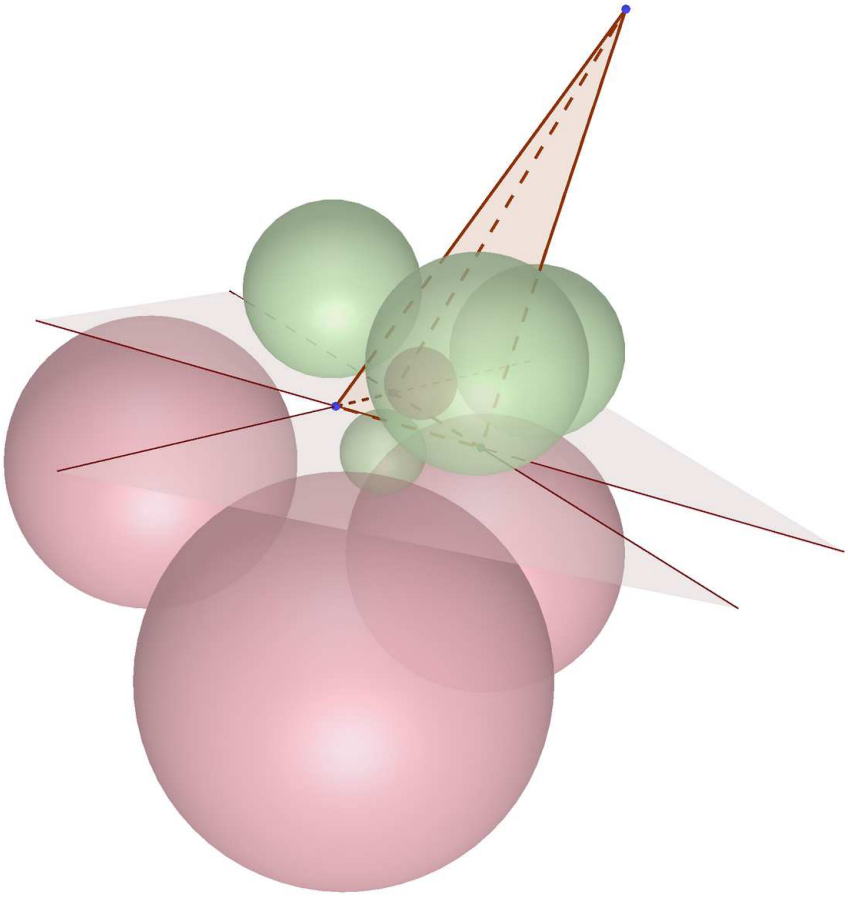

图 1： 四面体的八个相切球

而事实上，对所提问题的回答是否定的：一般而言，对于任意四面体，并不存在这样的球面。

验证这一点非常容易：只需考察一个合适的四面体，例如等面四面体。毫无疑问，像 Coolidge 这样的几何学专家很清楚，一般情况下并不存在这样的球面。然而，他仍然提出了寻找费尔巴哈定理三维类比的问题，认为这是一个重要、有趣且为“严肃研究提供广阔可能性”的问题。

那么，在空间中寻找费尔巴哈定理的类比应当沿着什么方向进行呢？看来，剩下的似乎只有描述这样一些四面体的特殊情形：它们存在一个以内部或外部方式与五个、六个、七个或全部八个相切球相切的球面。在文献 [12] 中，这一问题取得了一定进展，并在与四面体相关的特殊五球坐标中，得到了该球面存在的解析条件。遗憾的是，这些条件非常繁复，从中完全无法看出这样的四面体是否存在，以及它们具有怎样的结构。因此，以这种方式提出的问题仍未解决。

于是又产生了一个想法：沿着这样的方向寻找费尔巴哈定理的空间类比：是否存在一个实圆或虚圆，与所有八个相切球都相切？答案似乎不太可能是肯定的，但这个问题很有意思。

暂且搁下这些问题，下面我们将给出三个费尔巴哈定理的三维类比。我们拟在§ 1中提出的第一个类比，作为费尔巴哈定理的三维推广，是一个颇有意思的事实。它的证明非常简单，却

揭示了这一构造与非欧几何之间的联系，并导出了欧拉圆的三维推广。因此，在这三个类比中，它最为地道。

第二个是一个非常优美的四面体几何学定理，早在一百二十五年前便已发现，但似乎至今仍鲜为人知。它唯一的原始证明非常复杂，以至于有人专门撰写了一篇文章重构该证明。在 § 2 中，我们将给出这个定理的一个初等证明，并由此发现它与庞塞列定理之间的联系。第二个类似定理看起来最不像原作，但在我们看来，它比另外两个更接近、也更契合费尔巴哈定理。

第三个类似定理是一种相当有趣的相切球构造，我们称之为“Up-in-ex-touch”构造。我们将在 § 3 末尾介绍它，并在该节中给出欧拉–查普尔公式或许最简短的证明。

借助格雷斯定理，我们将在 §4 中给出拉盖尔定理的一个简短而简单的证明，该定理推广了欧拉–查普尔公式。§5 专门讨论欧拉–查普尔公式的三维类比。

接下来在 §6 中，我们将考察庞塞列定理的空间类比。我们将证明，当庞塞列内接—旁切四面体旋转时，它的格雷斯球面与某个固定球面相切。

最后，通过“进入空间”，我们将给出费尔巴哈定理的新证明。

1 四面体的第一个费尔巴哈定理类比

现在，考虑一个具有一般形状、拥有八个相切球的任意四面体。作为费尔巴哈定理对四面体的第一个类比，我们提出以下定理。

定理 1.1. 存在四个圆锥，每个圆锥都与这八个相切球相切。

证明。考虑球面 ζ_D，其中心位于四面体 $ABCD$ 的顶点 D，并从中心 D 向球面 ζ_D 投影所有八个相切球。它们的投影是球面 ζ_D上的四个圆，因为每一对关于 D 位似的球都会投影成同一个圆。这四个圆与球面三角形的各边相切，其边是顶点 D处三面角各平面的投影。根据球面三角形的费尔巴哈定理，存在一个与这四个圆相切的圆。以 D为顶点、包含该圆的圆锥显然满足定理的断言。每个顶点都有这样一个圆锥。□

球面几何中的费尔巴哈定理，按照我们在证明中采用的简化形式，与哈特定理等价（见 [3]）。因此，在某种程度上，我们回答了柯立芝在引言中引用的两个问题。事实上，若应用阿科皮扬的结果 [21], ，还可以在这一方向上进一步推进；他发现了哈特圆的一些性质，这些性质在很大程度上类似于九点圆的性质。虽然 [21] 中的所有命题都是针对罗巴切夫斯基平面表述的，但我们可以将其自然地改用于四面体的三面角。

三面角的盈量定义为其两个面角之和与 $180°$ 之间的差值。我们将包含三面角的一条棱，且将其分成两个盈量相等的三面角的平面称为该三面角的等盈分面。对于上文所考察的三面角在球面上的投影，该等盈分面映射为一条球面切瓦线，将相应三角形的面积平分（在 [21] 中，这条切瓦线称为平分线或平分线段）。三个等盈分面交于一条直线，可称为伪重心线，因为它对应于球面三角形的伪重心。

若同一线束中的四条直线都是同一个圆锥的母线，则称它们为内接四元组。下述命题是 [21] 中引理 5 的类似命题。

命题 1.2. 设 a, b, c 是以 D 为顶点的三面角的棱。那么存在唯一的一组三条直线 $\mathfrak{h}_a, \mathfrak{h}_b, \mathfrak{h}_c$，它们分别位于平面 $\langle bc\rangle, \langle ac\rangle, \langle ab\rangle$ 内，且四元组 $\{a, b, \mathfrak{h}_a, \mathfrak{h}_b\}$、$\{a, c, \mathfrak{h}_a, \mathfrak{h}_c\}$、$\{b, c, \mathfrak{h}_b, \mathfrak{h}_c\}$ 都是内接四元组。

平面 $a\mathfrak{h}_a$, $b\mathfrak{h}_b$, $c\mathfrak{h}_c$ 是所谓伪高线的类似物，在 [21] 中还通过角度给出了另一种定义。这三个平面交于一条公共直线，仿照双曲三角形的伪垂心，我们将其称为伪垂心线。

将包含三面角三条棱并以它们为母线的圆锥称为外接圆锥。

在 [21, §§4-6] 中证明了，三条伪高线和三条角平分线切线的垂足位于同一个圆上。该圆的中心与外接圆锥的中心、伪质心和伪垂心共线。我们来为四面体表述类似的命题。

定理 1.3 (三面角的欧拉圆锥**)**。 任意三面角的三条中线和三条伪高的底点都位于同一个圆锥面上。

定理 1.4 (三面角的欧拉平面**)**。 任意三面角的四条直线——伪重心线、伪垂心线、外接圆锥轴和欧拉圆锥轴——共面。

而本文的主要结果 [21]是费尔巴哈定理的双曲类比：双曲三角形的欧拉圆与其内切圆及三条旁切圆相切。应用于四面体，我们得到定理 1.1 的如下加强

定理 1.5 （四面体的费尔巴哈定理类比）。 四面体各三面角的四个欧拉圆锥都与它的八个相切球相切。

我们指出一些与所讨论构造相关的问题。

问题 1.6。 四面体的以下四组特殊直线中，是否有任何一组共点：伪重心线、伪垂心线、四个外接圆锥轴、四个欧拉圆锥轴？

问题 1.7。 是否还存在其他与所有相切球相切的二次曲面，不同于四个欧拉圆锥和四个面平面？

问题 1.8。 任意三个一般位置圆锥相交于八个点。四面体的四个欧拉圆锥是否也可能有八个公共点？欧拉圆锥相交所得的双二次曲线是否具有某些显著性质？

2 格雷斯定理：作为费尔巴哈定理的三维类比

一百多年前，英国数学家约翰·希尔顿·格雷斯在其论文 [8] 中发现并证明了四面体相切球的一项非凡性质。

定理 2.1 (Grace,1897)。 四面体的相切球 $ABCD$ 可以分成四对，使每对球都以 D 为中心位似，并且每一对都存在一个与这两个球相切、且经过顶点 A、B、C 的球面。

注记 2.2. 所有切球可分为两组，每组四个球面。一组包括内接球面和三个双重旁切球，另一组则包括四个旁切球。来自不同组的任意两个球面都关于四面体的某个顶点位似。对于每一对这样的球面，都存在唯一一个与它们相切的格雷斯球，该球经过与这对切球所位似的顶点相对的那个面的顶点。对于每

这样的球面对，都存在唯一一个与它们相切的格雷斯球，该球经过与这对切球所位似的顶点相对的那个面的顶点。因此，总共得到十六个格雷斯球：对于四面体的每个面，都有四个不同的格雷斯球经过其顶点。

格雷斯定理借助与四面体的相切球及其特殊点（即顶点）相切的球面，将二者联系起来。这使它与费尔巴哈定理颇为相似；在我们看来，它的优美程度可与后者媲美，也有几分相似之处。从这个意义上说，可以将格雷斯定理视为费尔巴哈定理的三维类比。

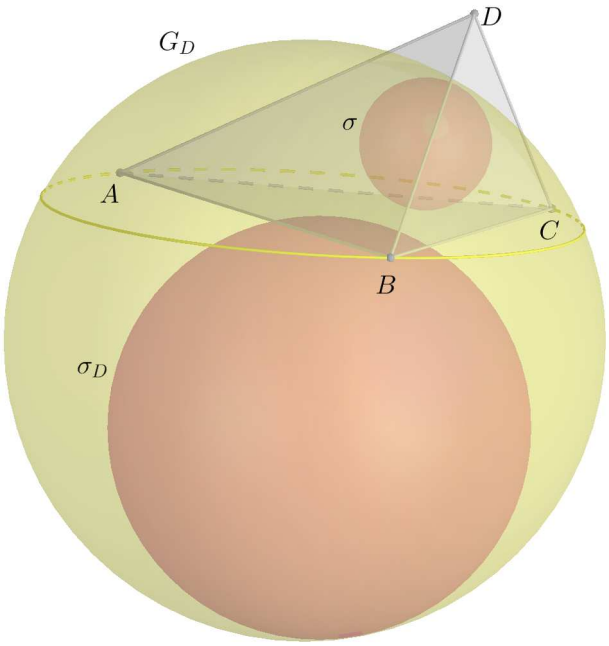

图 2：格雷斯球面 a G_D，与内切球 σ、旁切球 σ_D 相切，并经过 A，B，C .

在最近的一篇文章中， [14] Maehara 和Martini 指出：“这条定理似乎鲜为人知，迄今仍没有初等证明。”他们给出了一个证明作为结果，但仅适用于三正交四面体这一特殊情形，并且采用了解析方法。

格雷斯原来的证明非常优美且具有几何性，但相当困难。由于格雷斯只给出了证明提纲，Maehara 和 Tokushige 在论文 [13] 中详细重构了这一证明。

我们将给出格雷斯定理一个初等且足够简短的几何证明，不过首先回顾射影几何的一些定义和事实。

设 $\mathbb{E}^3$ 是一个实三维欧几里得空间。我们将考虑在其中添加“无穷远”平面所得到的射影扩充。这个射影空间模型是通过将 $\mathbb{E}^3$ 中的笛卡尔坐标（x, y, z）转换为齐次坐标（$x:\ y:\ z:\ w$）得到的，其中无穷远平面上的点对应坐标为（$x:\ y:z:0$）的点。此外，我们还考虑该空间的复化，允许坐标取复数值。添加的点称为虚点。

将球面的一般方程写成齐次坐标（$x:\ \ y:z:w$）形式

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2axw + 2byw + 2czw + dw^2 = 0,$$

лег可以看出，它与无穷远平面 $w = 0$ 相交于一条曲线

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ w = 0,$$

кот这条曲线是所有球面的公共曲线，称为绝对圆 .

任意平面都与绝对圆交于两个点——该平面的圆点 。在平面的齐次坐标（$x:\ y:\ z$）中，其圆点为点$I=(1:\ i:\ 0)$和 $J=(1:\ -i:\ 0)$。平面上的所有圆都经过其圆点，而平面上任何经过其圆点的圆锥曲线都是圆（见 $[17, \S 4{\cdot}8]$）。

与绝对圆相交的直线称为各向同性的。每条这样的直线要么是无穷远直线，要么是虚直线。

命题 2.3 （ $[25,$ 第 12 章，$\S 2]$）。 从非退化圆锥曲线的任一焦点引出的切线都是各向同性的。

因此，任何经过圆锥曲线的焦点及其所在平面的圆点的直线都是各向同性的。对于圆而言，这意味着从其中心引出的切线经过圆点。

母线是指完全位于二次曲面上的直线。在复射影空间中，所有非退化二次曲面都是等价的。

命题 2.4 （ $[10, \S 2]$）。

(i) 经过非退化二次曲面上的每一点，恰有两条母线，可以是实的，也可以是虚的。切平面与二次曲面的交线是经过切点的两条母线。

(ii) 二次曲面的所有母线分成两个族：同一族中的任意两条母线不相交，而不同族中的任意两条母线相交。经过一个族中任意一条母线上的每一点，都有且仅有另一族的一条母线。

(iii) 任何经过二次曲面的母线的平面，都在该母线上的某一点处与此二次曲面相切。

设有两个球面 γ 和 η。考虑与这两个球面γ 和 η都相切的球面集合 $\mathcal{M}(\gamma,\eta)$。注意，集合 $\mathcal{M}(\gamma,\eta)$按相切类型分为两个等价类。如果球面 α与 γ 和 η 以相同方式相切（均为内切或均为外切），那么 α 属于同一个类。如果 α 与 γ 和 η 以不同方式相切（与一个球面内切，与另一个外切，或反之），那么 α 属于另一个类。同一类球面的切点 γ 和 η 的连线都经过同一个点。对于同一类的球面，该点是将 γ 和 η 互相映射的两个反演中心之一；对于另一类球面，该点则是另一个反演中心（这两个点是球面 γ 和 η的位似中心）。

注释2.5. 即使球面 η 退化为平面 π （半径无限大的球面），上述结论也成立。此时，上文讨论的反演中心 γ和 π 是球面 γ上的点，它们处的切平面与 π平行。

下一个定理是本节的主要结果。它描述了圆锥曲线族 σ，这些圆锥曲线与给定的圆 Σ 一起构成庞塞列*3*对 (Σ,σ)，也就是说，对于它们，存在一个内接于 Σ且外切于 σ的三角形。从该定理几乎可以立即推出格雷斯定理，我们将在陈述该定理后马上证明这一点。

定理2.6 （关于庞塞列三对）。 设给定平面 π 及其上的圆 Σ 。固定一个包含圆 Σ的球面 γ，并考察集合 $\mathcal{M}(\gamma,\ \pi)$ 中与球面γ 及平面 π相切的球面。那么，如果球面 α 和 β 分别遍历集合 $\mathcal{M}(\gamma,\ \pi)$中的不同类，则与它们相切的圆锥 $\mathcal{K}$ 在平面 π 上截出一个圆锥曲线族 σ，该曲线族与圆 Σ构成庞塞列三对。

格雷斯定理的证明。设 α 和 β 是四面体 $ABCD$的两个相切球，它们关于顶点 D位似。考虑一个与球面 α 和 β 相切，且经过顶点 A 和 B的球面 γ。一般来说，这样的球面共有四个。但在此情形下，其中两个退化为平面 $\langle DAB\rangle$ 和 $\langle ABC\rangle$，它们属于集合 $\mathcal{M}(\alpha,\beta)$中的不同类。于是，剩下的两个球面也分别属于不同类；我们选择其中属于与平面 $\langle ABC\rangle$不同类的那个作为 γ。设它与平面 $\langle ABC\rangle$相交于圆 Σ。与 α 和 β 相切、顶点为 D 的圆锥与平面 $\langle ABC\rangle$ 相交于圆锥曲线 σ，该曲线与三角形 ABC 的边相切。根据庞塞列三对定理，顶点 C 也必须位于圆 Σ上。

□

庞塞列 3 对的定理 2.6 的证明。

设 F_α 和 F_β 是球面 α 和 β 与平面 π的切点，根据丹德林定理（1822, [4]），它们是圆锥曲线 σ的焦点。下面假设点 F_α 和 F_β 彼此不重合，且都不与圆 Σ的中心重合。这些特殊情况可通过轻微移动球面 α 和 β 化归为一般情况，而相应的定理命题可由极限过程得到。若 I 是平面 π上的一个圆点，则 $I\in\Sigma$。将直线 IF_α 和 IF_β 与圆锥曲线 Σ的第二交点分别记为 P_α 和 P_β。于是，三角形 $IP_\alpha P_\beta$ 内接于圆 Σ，直线 IP_α 和 IP_β 与圆锥曲线 σ相切。根据庞塞列定理，我们只需证明直线 $P_\alpha P_\beta$ 也与圆锥曲线 σ相切。

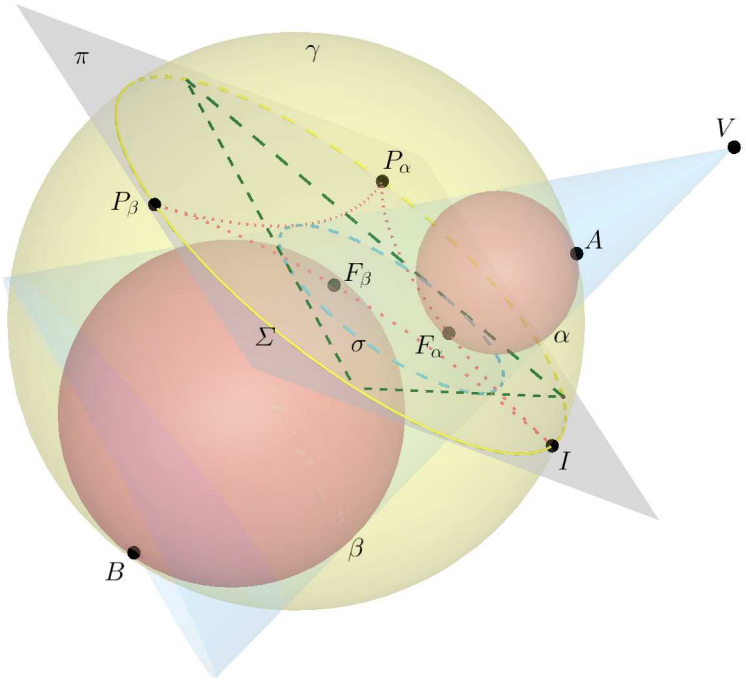

图 3：庞塞列三元组 （Σ， σ）。虚切线以弧形粉色线段表示 .

设 A和 B 是球面 γ 与球面 α 和 β的切点。注意，直线 IF_α 是球面 α的一条母线。用 l_A 表示球面 α 在点 A处的两条母线之一，它与母线 IF_α 相交（即， l_A 和 IF_α 属于球面 γ的不同母线族）。由于 l_A 也是球面 γ的一条母线，交点 $l_A\cap IF_\alpha$ 是直线 IF_α 与球面 γ的两个交点之一，也就是说，它要么是点 I，要么是点 P_α。

请注意，根据我们的约定，点 F_α 不可能是圆 Σ 的中心。事实上， I 将位于球面 α 在点 A 和 F_α 处的切平面的交线上，也就是说，相对于 α 与 AF_α 极共轭的直线将包含圆点 I。由于该直线是实的，因此不可能是各向同性的，所以它将是

无穷远直线，也就是说，球面 α 在点 A 和 F_α 处的切平面将彼此平行，而点 F_α 将与圆 Σ 的中心重合。

因此，直线 AP_α 是球面 α 和 γ 在点 A处的一条公共母线 l_A；类似地，直线 BP_β 与 l_B 重合——它是球面 β 和 γ 在点 B处的两条公共母线之一。下面证明l_A 和 l_B 共面。

为此，考虑以 A为中心、将 α 映射到 γ的位似变换。设 g_A 是球面 γ的一条母线，它是球面 α的母线 IF_α 在该变换下的像。注意，

1) $I \in g_A$，因为 $g_A \parallel IF_\alpha$，

2) 直线 g_A 与直线 l_A相交，因为直线 l_A 在所讨论的位似变换下不变，且与直线 IF_α相交。也就是说， g_A 和 l_A 是球面 γ的两条母线，属于不同的母线族。

类似地，若 g_B 是球面 γ的球的母线，它是球面 β 的母线 IF_β 在以 B为中心、将 β 映射到 γ的位似变换下的像，则

3) $I \in g_B$，

4) g_B 和 l_B 也是球面 γ的两条母线，且属于不同族 м.

由注记2.5可知，直线 g_A 和 g_B 分别经过球面 γ 和 π的不同反演中心，因此二者不同。于是由1)和3)可知，球面α 的母线 g_A 和 g_B 有一个公共点，因此属于不同族；进而由2)和4)可知，母线 l_A 和 l_B 也属于不同族，因此共面。

现在考察平面 $\langle l_A;\, l_B\rangle$，根据命题2.4的断言 [iii]，该平面与球面 α 和 β都相切。注意，圆锥顶点 $\mathcal{K}$ 包含直线 AB。事实上，由于圆锥 $\mathcal{K}$ 与 π 相交于一条非退化圆锥曲线，其圆锥顶点不在 π上。由于 α 和 β 属于集合 $\mathcal{M}(\gamma,\pi)$的不同类，因此 γ和 π属于集合 $\mathcal{M}(\alpha,\beta)$的不同类。故直线$AB$ 经过球面 α 和 β的反演中心，该中心不在平面 π上。

因此， $\langle l_A; l_B\rangle$ 是圆锥 $\mathcal{K}$的切平面，故与平面 π 相交于一条与圆锥曲线 σ相切的直线。只需注意，$\langle l_A;\, l_B\rangle$与 π相交于直线 $P_\alpha P_\beta$，由此可知，三角形 $IP_\alpha P_\beta$ 是内接且外切的。

□

3 欧拉–查普尔公式与费尔巴哈定理的 Up-in-ex-touch 类比

定理 3.1 (欧拉，查普尔). 设 R， r 和 r_a 分别为任意三角形的外接圆、内切圆和旁切圆的半径， d 和 d_a 分别为外接圆圆心到内切圆圆心和旁切圆圆心的距离。则有以下关系式

$$d^2 = R^2 - 2Rr \tag{1}$$

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a \tag{2}$$

我们将给出这一定理的两个大概最简短的证明。为此，考虑球面 Δ，它以外接圆为直径构造而成，称其为三角形的外接球面；再考虑半径为 r的球面 δ，它与三角形所在平面相切于内切圆圆心，称其为内接抬升球面；最后考虑半径为 r_a的球面 δ_a，它与三角形所在平面相切于相应旁切圆的圆心，称其为旁接抬升球面。

注意，关系式 (1)、(2) 可以改写为等式

$$d^2 + r^2 = (R-r)^2, \quad d^2 + r_a^2 = (R+r_a)^2,$$

这等价于球面 Δ 和 δ、 Δ和 δ_a相切。

证明 1. 根据格雷斯定理， Δ和 δ、 Δ和 δ_a 相切是显而易见的。事实上，考虑一个四面体，其底面为 ABC ，顶点 D 位于无穷远处，方向垂直于平面 (ABC)。那么，球面δ 是它的内切球；与之关于平面 (ABC)对称的球面是它的旁切球，因此，球面 Δ就是它的格雷斯球。对于 Δ 和 δ_a这一对，推理类似。□

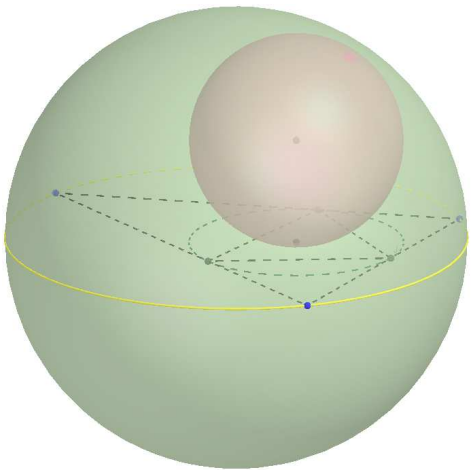

图 4：球面 Δ 和 δ 彼此相切

这个证明以简洁优美著称，但使用复杂的格雷斯定理，可能有点像“杀鸡用牛刀”。因此，我们给出另一种证明

证明 2. 以在内切圆上作出的球面为反演球面进行反演。注意，球面 Δ 变为球面 Δ'，后者以圆为直径，该圆经过热尔贡三角形各边中点（该三角形的顶点是内切圆 $\triangle ABC$ 与各边的切点）。而球面 δ变为平面 δ'，它与平面（ABC）平行，距离为 $\frac{r}{2}$。由于球面 Δ'的半径显然也等于 $\frac{r}{2}$，球面 Δ' 和 δ'，因而球面 Δ 和 δ 彼此相切。□

注意，已证明的球面 Δ 与四个球面 $\delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c$ 相切这一性质，在某种程度上也可视为费尔巴哈定理在空间中的一种类比。

定理 3.2 (Up-in-ex-touch). 三角形的外接球与其内切上升球以及四个旁切上升球相切。

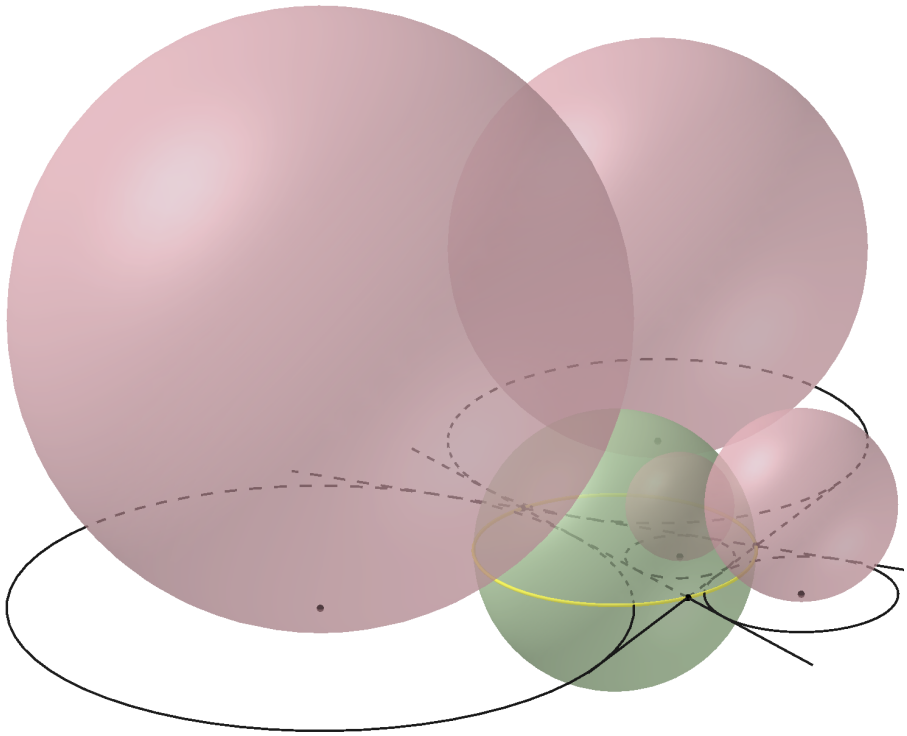

图 5：*Up-in-ex-touch*-费尔巴哈定理的类比。

还要注意，球面 Δ 不仅与球面 δ、 δ_a、 δ_b、 δ_c相切，也与相对于三角形所在平面对称的另外四个球面相切，也就是说，它与总共八个球面相切。

4 拉盖尔定理及其在四面体中的应用

定理 4.1 (拉盖尔 [11], 1879)。 半径为 R 、中心为点 O 的圆 Σ 与焦点为 F_α、 F_β 、短半轴为 b 的圆锥曲线 σ 构成一组 *3*-庞塞列对，当且仅当满足关系式

$$(R^2 - d_\alpha^2)(R^2 - d_\beta^2) = 4R^2b^2, \tag{3}$$

其中 $d_\alpha = |OF_\alpha|$， $d_\beta = |OF_\beta|$。

注 4.2。 短半轴 b 可以是实数（对于椭圆），也可以是虚数（对于双曲线）。在前一种情况下，由拉盖尔公式可知，椭圆的焦点必须要么都在圆内，要么都在圆外。在后一种情况下，对于双曲线，一个焦点必须在圆内，另一个在圆外。

注释 4.3. 如果圆锥曲线 σ 是抛物线，那么对于点对 (Σ, σ) ，内接外切三角形存在的条件会变得非常简单: $d = R$，其中 $d = |OF|$，也就是说，抛物线的焦点 F必须位于圆上。这可由著名的兰伯特定理推出。

拉盖尔定理的证明($\Rightarrow$) 设 γ是任意一个经过圆 Σ的球面，而球面 α 在点 F_α 处与包含圆 Σ的平面 π 相切，并且也与球面 γ相切。考虑任意一个内外切三角形 ABC ，并作经过其各边且与球面 α相切的平面。这些平面交于某点 D，构成一个四面体 $ABCD$。其中，球面 α 是一个相切球，而 γ 是格雷斯球；它也与四面体 $ABCD$的另一个相切球 β 相切，后者是 α 关于顶点 D的位似图形。众所周知，球面 α 和 β 与平面 π 相切于相对于$\triangle ABC$等角共轭的点。此外，由于 F_α 和 F_β 是内切于圆锥曲线 σ的 $\triangle ABC$ 的焦点，它们也互为等角共轭。因此，我们得出结论：球面 β 与平面 π 相切于点 F_β。

我们需要一个非常简单的引理

引理 4.4 (Thebault [18], 1922)。 对于圆锥在球面 α 和 β 的公共切平面上截得的圆锥曲线 b 的短半轴，满足关系式

$$|b^2| = r_\alpha r_\beta \tag{4}$$

设 S_α 和 S_β 是 γ 上两个直径两端的对径点，方向垂直于平面 π ；它们分别是球面 γ 和平面 π 的反演中心（见注记 2.5）。考虑到球面 α 和 β 属于集合 $\mathfrak{M}(\gamma, \pi)$ 的不同类（见格雷斯定理的证明），很容易表示出球面 α 和 β 的半径:

$$r_\alpha = \left|\frac{\Sigma(F_\alpha)}{2\pi(S_\alpha)}\right|, \quad r_\beta = \left|\frac{\Sigma(F_\beta)}{2\pi(S_\beta)}\right|, \tag{5}$$

其中， $\Sigma(F_\alpha) = d_\alpha^2 - R^2$ 和 $\Sigma(F_\beta) = d_\beta^2 - R^2$ 是点 F_α 和 F_β 相对于圆 Σ 的点幂，而 $\pi(S_\alpha)$ $\pi(S_\beta)$ 是点 S_α 和 S_β 到平面 π 的距离。

将等式 (5) 相乘，并注意到 $\pi(S_\alpha)\pi(S_\beta) = R^2$。由此可得，等式 (3) 的左边和右边绝对值相等。只有当圆锥曲线 σ 是双曲线时，右边才为负。这仅当球面 α 和 β 位于顶点为 D 、与它们相切的外接圆锥的 D两侧，而平面 π 位于同一侧时才会发生。那么球面 γ 必定从两侧相切，因此，点 F_α 和 F_β 与 π 的切点分别位于

圆 Σ的两侧，且此时 (3) 的左边也为负。因此，可以去掉绝对值，等式 (3) 得证。

($\Leftarrow$) 假设（3）成立。如果圆锥曲线（Σ, σ）不构成庞塞列3对，那么可以改变圆锥曲线 σ 的短半轴 b ，使它们构成庞塞列3对。根据已证结论，等式（3）也应成立，因此量 b没有改变，也就是说，（Σ, σ）恰好构成庞塞列3对

□

将拉格尔定理应用于四面体，可以得到四面体相切球之间一个有趣的度量关系。

定理4.5. 设 Δ_D 是四面体 $ABCD$的面 ABC 的外接球面， α 和 β 是关于 D位似的两个相切球。那么，球面 Δ_D 与 α 和 β 所成角的余弦之积（其中一个角是虚角），若 α 和 β 从同一侧与 $\langle ABC\rangle$ 相切，则等于1；若从不同侧相切，则等于 -1。换言之，

$$\cos(\widehat{\Delta_D, \alpha})\cos(\widehat{\Delta_D, \beta}) = \operatorname{sign} k, \tag{6}$$

其中 k – 是上述以 D为中心的位似的系数。

证明 设 O_D 和 R 分别为球面 Δ_D的中心和半径； r_α、 r_β 分别为球面 α 和 β的半径； $\mathfrak{D}_\alpha$、 $\mathfrak{D}_\beta$ 分别为中心 Δ_D 与 α、 Δ_D 与 α之间的距离； d_α、 d_β 分别为从 O_D 到平面 $\langle ABC\rangle$ 与球面 α 和 β的切点 F_α 和 F_β 的距离。设 $\Sigma = \odot(ABC)$, 而以 D为顶点、与α 和 β相切的圆锥 $\mathcal{K}$ 与平面 $\langle ABC\rangle$ 相交于圆锥曲线 σ。

利用引理 4.4，并注意到在我们的四面体构造中，等式 (4) 可以进一步明确为

$$b^2 = r_\alpha r_\beta \operatorname{sign} k, \tag{7}$$

因为 b^2 只有在圆锥曲线 σ 为双曲线时才可能为负，而这只有在圆锥 $\mathcal{K}$ 的顶点是球面 α 和 β的负位似中心时才有可能，也就是说，它们从顶点的两侧分别内切于 $\mathcal{K}$ 。

根据拉盖尔定理，对于 (Σ, σ) 有

$$(R^2 - d_\alpha^2)(R^2 - d_\beta^2) = 4R^2b^2. \tag{8}$$

根据勾股定理

$$d_\alpha^2 = \mathfrak{D}_\alpha^2 - r_\alpha^2, \quad d_\beta^2 = \mathfrak{D}_\beta^2 - r_\beta^2$$

Подст将这些等式和（7）代入关系式（8），得到所需的关系式

$$\frac{R^2 + r_\alpha^2 - \mathfrak{D}_\alpha^2}{2R\,r_\alpha} \cdot \frac{R^2 + r_\beta^2 - \mathfrak{D}_\beta^2}{2R\,r_\beta} = \operatorname{sign} k$$

□

5 欧拉–沙普尔公式的三维类比

关于欧拉–沙普尔定理，自然会产生一个问题：能否将其推广到四面体的三维情形。1816年，J. D. Gergonne 首次在其所编辑的期刊中提出了这一问题[1] ，形式是一则简短的脚注，涉及外接球半径为 R、内切球半径为 r 且两球面中心之间的距离为 d 的四面体：

[1]纯粹数学年刊´´，**6** （1815—1816），第228页。

“尤其令人感兴趣的是，能否仅用 R 和 r 表示 d 。*J. D.G*。”

八年后，同一期刊刊登了 Durrande 对这一问题的肯定解答 [5], ，他在那里证明了以下关系：

$$d^2 = (R + r)(R - 3r). \tag{9}$$

这一结果广受认可，多年来一直被文献引用，例如克莱因数学百科全书《Encyklop¨adie der mathematischen Wissenschaften》 [19] （世界上第一部数学百科全书）以及《初等数学百科全书》 [2] （意大利出版的规模最大的数学百科全书）等权威著作。然而，Durrande公式（9）并不正确，而Gergonne的问题答案是否定的：对于所有四面体，并不存在 R、r 和 d之间普遍适用的函数关系。Durrande的证明几乎无懈可击，但其中一个不易察觉的错误在于，他确信外接球与内切球必然存在这样的依赖关系。Gergonne的问题可以这样表述：对于两个给定的球面，存在内切外接四面体的条件是什么？

事实证明，这并不需要任何必要条件。

定理5.1。 对于任意两个一般位置的非退化二次曲面，都存在无穷多个内切外接四面体。任意一张与内切二次曲面相切的平面都可以包含这类四面体的一个面，而其顶点可以是外接二次曲面上的任意点。

B pa在Fontené [7] 1899 年的著作中，该定理已被视为已知（另见 [9]）。

因此，与平面情形不同，在空间中，对于任意两个任意的球面，总是存在一个内切外接于它们的四面体；而且该四面体可以围绕这两个球面动态旋转，同时始终保持内切外接关系。此外，外接球面上的任意点都可以成为这类四面体的顶点。

但是，并非任意两个球面都能形成实的这种四面体。它总是存在，但可能是虚的。存在实的内切外接四面体的判据如下，即修正Durrande关系式（9）的Grace条件：

定理5.2 (Grace [9], 1917)**.** 对于给定的两个球面 S 和 T，存在实内切外接四面体的判据如下。该四面体的顶点位于 S上，面所在的平面与T相切；对于 S和 T的每种相对位置情形，须满足以下条件：

(a) T 包含于 S 内，且

$$d^2 \leqslant (R + r)(R - 3r);$$

(b) T 与 S 彼此位于外部；

(c) T 与 S 交于一个实圆，且

$$d^2 \leqslant (R - r)(R + 3r).$$

6 内切外接四面体的庞塞列旋转

定理5.1允许我们考察内切外接四面体的“旋转”动力学。这种动力学不像平面庞塞列定理中的情形那样明确。下面的定理说明了这一点。

定理6.1 ([9])。 设四面体的顶点位于二次曲面 S上，且各面与二次曲面T相切。那么，当固定其某一面的平面 π 时，对顶点 P 可以随之变动，沿着某个平面 π'与二次曲面的截面 S 移动。

因此，四面体的运动自由度远高于内外切多边形。选定平面 π 后，可以在一条完整的圆锥曲线上任选一点作为顶点 P；对于每一对这样的点 P 和 π ，都存在一个一参数族的内接外切三角形，其中每个三角形都可以作为与顶点 P 相对的面，构成内切外接四面体。因此，一般而言，存在一个四参数族的四面体。

庞塞列平面定理具有一种“闭合效应”：如果从某个起始点 A_1 开始依次构造内外切折线 $A_1A_2\dots A_n$，并发现线段A_1A_n 也与内切圆锥曲线相切，从而闭合了折线，那么这种闭合总会发生。

如果类比地为两个给定的二次曲面 S 和 T构造内外切四面体，并依次选取其各面的切平面，就会产生以下问题。 当我们已经作出三个平面，形成一个内外切三面角时，是否总能用第四个平面将其闭合，从而构成一个内外切四面体？显然，第四个面由前三个面唯一确定。要使它也与内切球相切，其判据如下述丰特奈定理所述。

定理 6.2 （Fontené [7]）。 当且仅当二次曲面 S 和 T 具有四条公共母线时，依次构造内外切四面体的过程总能闭合。

在这种情况下，平面 π 和顶点 P 可以完全任意选取，因此存在一个五参数族的内外切四面体。

定理 6.3. 设四面体 S 的外接球和其八个相切球中的一个 T固定，四面体则在保持内接外切的同时围绕它们动态“旋转”。那么，四个与 T 格雷斯球相切的球面始终与某个固定球面相切，该球面与外接球 S 同心。

证明。设格雷斯球 G经过面 a 的顶点，且内切球 S 在点 P与球面 G 相切，而平面 $\langle a\rangle$ 则在点 Q与其相切。将球面 S和 T的球心分别记为 O_S和 O_T。四面体旋转时，直线 PQ 经过一个固定点——球面束 $\langle S,\ T\rangle$的极限点 K。此外，反演中心 E位于直线 PQ 上，它是球面G 和平面 $\langle a\rangle$的反演中心；在该点处的 G 切线平行于平面 $\langle a\rangle$。因此， $O_SE\|O_TQ$和 $\triangle O_SEK\sim\triangle O_TQK$，由此得到如下表达式

$$O_SE=\frac{O_SK}{O_TK}\cdot r_T,$$

其右侧在四面体旋转时为定值。因此，以点 O_S 为中心、半径等于该值的球面，在旋转的任意时刻都与格雷斯球相切。

□

7 通过进入空间证明费尔巴哈定理

设 δ – 三角形 ABC 的内切圆，圆心为点 I ，半径为 r； H – 三角形 ABC 的垂心，点 A_1、B_1、C_1、I_1 – 分别为线段 AH、BH、CH、IH 的中点（I_1 – 内心$\triangle A_1B_1C_1$）。三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆 ϑ – 是其九点圆 $\triangle ABC$。设

此外， $\odot_a$、 $\odot_b$、 $\odot_c$– 分别是以 BC、 CA、 AB 为直径的圆， Δ 和 Θ– 是以圆 δ 和 θ 为底面构造的球面。

费尔巴哈定理的证明。

注意，圆 δ 与 θ 相切，等价于球面 Δ 与 Θ相切。根据定理 3.2，对于$\triangle A_1B_1C_1$ ，其外接球 Θ 与其内切上升球 Υ相切。因此， Θ 与 Δ相切，等价于球面 Θ 在将球面 Δ 与 Υ 互相映射的反演下不变。注意，该反演的中心 S 位于点 H 上方，高度为 r （即 $SH\perp(ABC)$ $|SH| = r$），而反演系数（反演球面半径的平方）等于 $|IH| \cdot |I_1H| = \dfrac{|IH|^2}{2}$。因此，只需证明等式 $\Theta(S) = \dfrac{|IH|^2}{2}$；由于 $\Theta(S) = \theta(H) + r^2$，这等价于关系式

$$|IH|^2 - 2r^2 = 2\theta(H) \tag{10}$$

注意到，等式 (10) 的左边等于点 H 关于圆 ξ 的点幂；该圆的半径为 $r\sqrt{2}$，中心为 I （ξ 在边 $\triangle ABC$ 上截出长度为 $2r$的相等线段）。接下来只需利用圆 ξ的以下一个显著性质。

定理 7.1. 圆 $\xi, \odot_a, \odot_b, \odot_c$ 共有一个根心，位于点 H。

于是注意到，点 H 关于圆 θ 的点幂是其关于圆 $\odot_a$、 $\odot_b$、 $\odot_c$ 的点幂的一半，因此等式 (10) 等价于断言 $\xi(H) = \odot_a(H) = \odot_b(H) = \odot_c(H)$ 定理 7.1。

□

为证明定理 7.1，考虑圆 χ_a，其直径为顶点 A的杰尔贡线（即连接 A 与内切圆 δ 和边 BC的切点的线段），并利用圆 χ_a的以下性质；该性质或许也具有独立的研究价值。

引理 7.2 (χ_a-引理)**.** 圆 $\chi_a, \xi, \odot_a$ 属于同一个圆束 .

定理 7.1 的证明。只需验证 $H \in \mathrm{rad}(\xi, \odot_\mathrm{a})$。注意，$\mathrm{rad}(\chi_\mathrm{a}, \odot_\mathrm{b})$ 是 AH的高，$\mathrm{rad}(\odot_\mathrm{a}, \odot_\mathrm{b})$ 是 CH的高，因此，

$$H = \mathrm{rad}(\chi_\mathrm{a}, \odot_\mathrm{a}, \odot_\mathrm{b}) \in \mathrm{rad}(\chi_\mathrm{a}, \odot_\mathrm{a}) = \mathrm{rad}(\xi, \odot_\mathrm{a}),$$

其中最后一个等式由 χ_a-引理成立。 □

χ_a-引理的证明。

我们将使用以下关于圆束的已知度量关系。

引理 7.3 (关于圆束)**.** 如果圆 α, β, γ 属于同一个圆束，那么对于任意点 $P \in \gamma$，它关于 α 和 β 的幂之比恒定，并且

$$\frac{\alpha(P)}{\beta(P)} = \frac{d_{\alpha\gamma}}{d_{\beta\gamma}}, \tag{11}$$

其中 $d_{\alpha\gamma}$和 $d_{\beta\gamma}$是中心 α, γ与 β, γ之间的距离。

逆命题也成立。

引理 7.4 (圆束逆引理)。 设圆 α、 β、 γ的圆心共线，且在圆 γ 上存在一点 P，使得关系式 *(11)* 成立。那么，圆 α、 β、 γ属于同一个圆束。

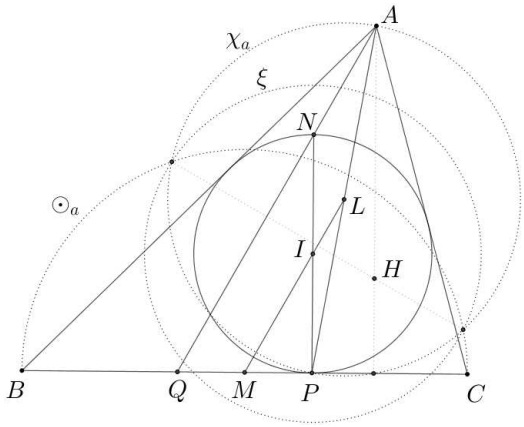

图 6：圆 ξ，χ_a，$\odot_a$ 属于同一个圆束

取圆束逆引理中的圆 α、β、γ 为圆 $\odot_a$、ξ、χ_a，其圆心 M、I、L 位于三角形 APQ 的中线 ML 上。此时，

$$\frac{LM}{LI} = \frac{AQ}{AN} = \frac{r_a}{r}.$$

对于点 $P \in \chi_a$ 有 $\alpha(P) = -(p-b)(p-c)$ $\beta(P) = -r^2$. 于是，(11)可写成如下关系 я

$$\frac{(p-b)(p-c)}{r^2} = \frac{r_a}{r},$$

这等价于一个容易验证的等式

$$(p-b)(p-c) = r\,r_a.$$

□

通过进入空间来证明 χ_a-引理。注意，圆 χ_a、δ 和以线段 PQ 为直径的圆 $\odot_{PQ}$ 属于同一个圆束。将它们的中心沿垂直于平面 $\langle ABC\rangle$ 的方向抬高，同时保持共线：$L \to \overline{L}$、$I \to \overline{I}$、$M \to \overline{M}$，并设 $\overline{L}L = \dfrac{r}{2}$、$\overline{I}I = r$。于是容易得出 $\overline{M}M = \dfrac{r + r_a}{2}$。此外，以 $\overline{L}$、$\overline{I}$、$\overline{M}$ 为中心且分别包含圆 χ_a、δ、$\odot_{PQ}$ 的球面 $S(\overline{L})$ $S(\overline{J})$ $S(\overline{M})$ 也属于同一个球束。考虑经过 $\overline{I}$ 的平面 $\pi \| \langle ABC\rangle$，以及 $\triangle ABC \to \triangle A'B'C'$ 在平面 π 上的正交投影。只需注意，球面 $S(\overline{L})$ $S(\overline{J})$ $S(\overline{M})$ 与平面 π 的截面分别是圆 ξ'、χ'_a、$\odot'_a$。事实上，对于截面 $S(\overline{L})$ $S(\overline{I})$，这一点显而易见；对于 $S(\overline{M})$，则容易验证，因为其与平面 π 截得的圆的半径平方等于

$$|MP|^2 + \left(\frac{r_a + r}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_a - r}{2}\right)^2 = |MP|^2 + r_a r = |MP|^2 + (p-b)(p-c) = |MP|^2 + |BP|\cdot|CP| = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

由于用平面截取球面束会得到一个圆束，因此 $\xi', \chi'_a, \odot'_a$ 属于同一个圆束。□

致谢。

作者感谢 В. Ю. Протасову 对本文的关注、提出的宝贵建议以及在准备稿件过程中给予的帮助。

参考文献

[1] *Avksentyev E. A., Protasov V. Yu.,* 庞斯列定理的普适测度, 美国数学会会刊 *146 (2018), 4843-4854*[2] *Biggiogero G.,* 四面体几何。载于：《初等数学百科全书》。*L. Berzotari*、*G. Vivanti* 和 *D. Gigli* 编。第二卷，第一部分。米兰，*1937*年。影印本，*1943*年*5*月，第*237*页。[3] *Coolidge J. L.,*《圆与球面论》，牛津：克拉伦登出版社，*1916*年。[4] *Dandelin G.,* 关于抛物焦点若干显著性质的回忆录，《布鲁塞尔皇家科学院及文学学会新回忆录》，第*2*卷（*1822*年），*171-200*。[5] *Durrande J. B.,*《圆的内接与外切六边形主要性质的初等证明，并附若干几何问题的解答》，《纯几何学论》。纯粹数学与应用数学年刊，*14*（*1823-1824*），*29-63*。[6] *Feuerbach K. W.,* 直线三角形若干特殊点的性质，纽伦堡，*1822*年。[7] *Fonten´e G.,* 关于可与庞斯列多边形相比较的活动多面体，《数学新年刊》新系列，第*18*卷（*1899*年），*67-74*。[8] *Grace J. H.,* 圆、球面与线性复形，《剑桥哲学学会汇刊》*14*（*1898*年），*153–190*。[9] *Grace J. H.,* 四面体与球面及二次曲面的关系，美国伦敦数学会会刊 *17*（*1918*年），*259-271*。[10] *Griffiths Ph., Harris J.,* 空间中的庞斯列定理,《瑞士数学评论》，*52*（*1977*年），*145-160*。[11] *Laguerre E. N.,* 关于外接于三角形的圆与内接于该三角形的圆锥曲线的元素之间的关系，《数学新年刊》新系列，第*18*卷（*1879*年），*241-246*。[12] *Lewis T. C.,* 立体几何中是否存在 *Feuerbach*定理的类似定理，《数学信使》，第*49*卷（*1919*年），*187-192*。[13] *Hiroshi Maehara, Norihide Tokushige,* 施莱夫利双六、李的直线—球面变换与格雷斯定理，《欧洲组合数学杂志》，*30*（*2009*年），*1337–1351*。[14] *Hiroshi Maehara, Horst Martini,* 四面体的切球与格雷斯定理，《美国数学月刊》，*127:10*（*2020*年），*897-910*[15] *Poncelet J. - V.,*《图形射影性质论》，*Gauthier-Villars*，巴黎，*1822*年。[16] *Protasov V. Yu.,* 广义闭合定理，《初等数学》*66*（*2011*年），*98-117*。[17] *Sommerville, D. M. Y.,*《三维解析几何》，剑桥大学出版社，*1943*年。[18] *Thebault V.,* 关于丹德林经典定理，《数学新年刊》新系列，第*1*卷（*1922*年），*200-205*。[19] *Zacharias M.*《综合论述的初等几何与初等非欧几何》。载于：《数学百科全书及其应用》第三卷：几何学。˙*W. Fr. Meyer* 和 *H. Mohrmann* 编。*B. G. Teubner*，莱比锡，*1914-1931*年，第*1059*页。[20] *Авксентьев Е. А.,* 庞斯列折线的度量性质，《莫斯科大学学报》。第*1*辑。数学与力学。*2012*年第*3*期，*43-47*。[21] 阿科皮*ян А. В.,* 关于罗巴切夫斯基几何中的若干经典作图，《数学启蒙》，第*13*辑（*2009*年），*155–170*。[22] 贝尔热 *М.,*《几何学》，莫斯科：和平出版社，*1984*年。[23] 扎斯*лавский А. А.,* 三角形与四面体的比较几何，《数学启蒙》*8*（*2004*年），*78–92*[24] *Протасов В. Ю.,* 相切圆：从泰博到费尔巴哈，《量子》，*2008*年第*4*期，*10-15*。[25] 菲尼科夫 *С. П.,*《解析几何》，莫斯科，*1952*年。