arXiv:2301.00734v1 [quant-ph] 2 Jan 2023

非线性非厄米朗道-齐纳-斯塔克尔贝格-马约拉纳干涉测量

Xin Wang, [1] H. D. Liu, [1], * 和 L. B. Fu[2], †

[1]量子科学中心和东北师范大学物理学院，中国长春 *130024* [2]中国工程物理研究院研究生院，中国北京市海淀区西北旺东路 *10* 号，邮编 *100193*（日期：2023年1月3日）

本文研究了一个非厄米N体相互作用玻色子系统中的非厄米非线性LZSM干涉测量，该系统的非厄米性源于玻色子之间的非互易隧穿。利用平均场近似和射影希尔伯特空间，我们研究了非互易性和非线性对能谱、动力学以及干涉条纹形成的影响。我们考察了不同的对称性，以及两种不同类型的互易性（即同相隧穿和反相隧穿）对能谱以及约瑟夫森振荡与自俘获之间相变的影响。对于LZSM干涉测量，我们发现非互易性的强度对射影态的布居以及射影空间中干涉图样的强度起着关键作用。而在弱耦合近似下，发生相消干涉和相长干涉的条件仍仅取决于非线性的强度。我们的结果展示了非线性非厄米LZSM干涉测量在研究非厄米非线性两能级系统中与非线性和非厄米性相关参数方面的应用。

I. 引言

量子两能级系统（TLS）是物理系统中最基本的组成部分。其中，避免交叉处两个能级之间的朗道-齐纳（LZ）跃迁 [1–3]受到了广泛关注。当这些两能级系统受到强周期驱动场作用时，会发生一系列LZ跃迁，跃迁概率则呈现出对跃迁间累积相位（斯图克尔伯格相位）的周期性依赖 [1, 4]。这种周期性变化称为朗道-齐纳-斯图克尔伯格-马约拉纳（LZSM）干涉测量 [5, 6]。随着研究的深入，LZSM干涉测量已成为量子科学与技术中的一种重要现象。一方面，LZSM干涉测量可用于量子点电荷量子比特的超快通用量子控制 [7]，并用于表征量子比特退相干 [8], 等。另一方面，迄今为止，它已涉及许多领域，例如分子纳米磁体 [9, 10], 、准一维层状材料 [11, 12], 、超冷分子[13], 、量子噪声 [14], 、玻色-爱因斯坦凝聚体 [15–19],和里德堡原子 [20], 等。有趣的是，若将非线性相互作用纳入两能级系统的考量，可能会产生意想不到的干涉特征 [21–26]。对于非线性LZ模型，LZSM干涉测量中可能发生自俘获相变 [27–31], ，能谱中也可能出现例外环结构 [32, 33]。

近年来，具有实能谱的非厄米量子系统在理论和实验上都受到广泛关注 [34–41]。非厄米性有两种类型：非互易系统中的非对称耦合强度，以及互易系统中的增益-损耗。相应地，非厄米哈密顿量也有两类：描述具有非对称耦合强度的非互易系统的哈密顿量 [42–46] 以及描述增益-损耗系统的哈密顿量 [37–41]。Bender 和 Boettcher 发现了一系列宇称-时间（PT）对称哈密顿量[47], ，它们能够产生实能谱。Mostafazadeh 将这类哈密顿量推广为一种 η-伪厄米量子理论，阐明了非厄米系统具有实能谱的条件（η 是一个正厄米算符） [48–50]。经过十多年的发展，该理论已应用于许多领域，例如量子场论 [51–55], 、超对称量子力学 [56, 57], 、非交换场论 [58],、量子信息 [59], 等。尤其是，非厄米系统的实能谱中总会存在一些例外点（EP） [60, 61], ，在这些点上，系统的两个或更多本征态会合并。参数空间中的这些能谱例外点与系统的对称性、拓扑性质和相变密切相关 [34–36]。因此，人们致力于将 LZ 问题的研究拓展至非厄米系统[6, 62–65]。由此，对于非厄米系统和非线性 LZSM 干涉测量，一个自然的问题是：如果出现非厄米性，非线性 LZ 系统的能谱会如何变化？非线性会影响例外点吗？由于裸态在绝热本征态上的布居通常无法通过与时间无关的系数归一化 [66]，那么在非线性非厄米情形下，是否仍能观察到有趣的自俘获效应？本文将探讨这些问题。通过构建投影希尔伯特空间，我们表明投影量子态的布居仍可实现 LZSM 干涉测量，并分析了非厄米性和非线性对能谱与干涉的影响。随后，我们讨论了非厄米性对自俘获效应的影响。最后，在投影量子态的弱耦合近似下，我们进一步验证了所提方法的有效性和准确性。

本文结构如下。在第II节中，我们介绍一种非厄米N体相互作用玻色子系统，它等效于一个非线性非互易双能级

* liuhd100@nenu.edu.cn

† lbfu@gscaep.ac.cn

系统，并在平均场近似下对其施加周期驱动；随后讨论该双能级系统的能谱。在第III节中，我们研究了非线性强度和非厄米性对 LZSM干涉测量及自俘获效应的影响。在弱耦合极限下，非厄米性不会影响相消干涉和相长干涉的条件。最后，我们在第IV节总结全文。

II. 非线性非厄米二能级模型

非互易相互作用玻色子系统的二次量子化哈密顿量为

$$\hat{H}_0 = \frac{\gamma}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b}) + \frac{\Delta_2}{2}\hat{a}^\dagger\hat{b} + \frac{\Delta_1}{2}\hat{a}\hat{b}^\dagger - \frac{c}{4N}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b})^2, \quad (1)$$

$\hat{}$其中，湮灭算符 $\hat{}a,b$ 和产生算符 $\hat{}a^\dagger, \hat{}b^\dagger$ 分别对应双阱玻色-爱因斯坦凝聚系统中作为左阱和右阱的不同量子态。 $\gamma = A\sin(\omega t) + \epsilon_0$是振幅为$A$、频率为 ω、偏置为 ϵ_0的单色驱动场。c是玻色子之间的相互作用强度， Δ_i $(i = 1, 2)$是隧穿振幅。当玻色子总数为$N \to \infty$时，在平均场近似 [67, 68]下，假设所有粒子都处于同一个自旋相干态。考虑到非厄米系统的量子态处于对偶希尔伯特空间中，以保持归一化条件 [50], ，所选的相干态需要由左右态共同定义，形式如下

$$\begin{aligned} |\Psi^r_{sc}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}}(\alpha_1\hat{a}^\dagger + \beta_1\hat{b}^\dagger)^N|\emptyset\rangle, \\ |\Psi^l_{sc}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}}(\alpha_2\hat{a}^\dagger + \beta_2\hat{b}^\dagger)^N|\emptyset\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

基于此，我们推导出半经典哈密顿量（见附录。A）

$$\begin{aligned} \hat{H}_M &= \frac{\langle\Psi^l_{sc}|\hat{H}_0|\Psi^r_{sc}\rangle}{N} \\ &= \frac{\gamma}{2}(\alpha_1\alpha_2^* - \beta_1\beta_2^*) + \frac{\Delta_2}{2}\alpha_2^*\beta_1 + \frac{\Delta_1}{2}\alpha_1\beta_2^* - \frac{c}{4}(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

通过半经典哈密顿量[67]的动力学演化

$$i\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial\hat{H}_m}{\partial\alpha_2^*}, \qquad i\dot{\beta}_1 = \frac{\partial\hat{H}_m}{\partial\beta_2^*}, \quad (4)$$

我们可以构造如下无量纲薛定谔方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = \hat{H}_{mF}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}, \quad (5)$$

其平均场哈密顿量

$$\hat{H}_{mF} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} + \frac{c}{2}(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*) & \frac{\Delta_1}{2} \\ \frac{\Delta_2}{2} & -\frac{\gamma}{2} - \frac{c}{2}(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

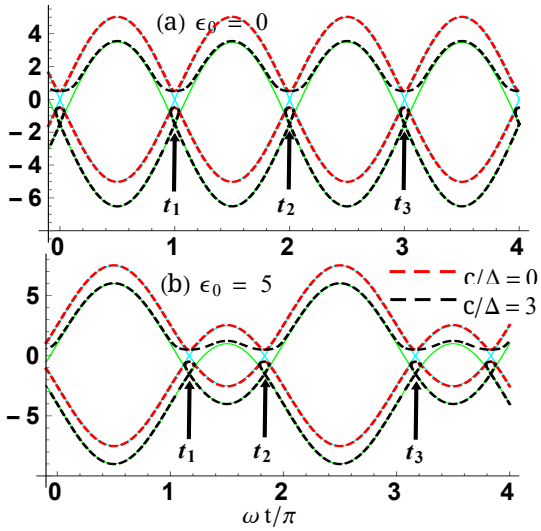


图 1. 不同偏置下能级的时间演化：(a) $\epsilon_0 = 0$ 和 (b) $\epsilon_0 = 5$, 其中 $A = 10$, $\omega = 1$ 和 $\Delta_1\Delta_2 > 0$。含时绝热能级（即 $\Delta = 1$）以红色（$c = 0$）和黑色（$c = 3$）虚线表示，而非绝热能级（即 $\Delta = 0$）以蓝色（$c = 0$）和绿色（$c = 3$）实线表示。

以及量子态 $|\psi^r\rangle = (\alpha_1, \beta_1)^T$。因此，周期驱动下的模型哈密顿量可由一个非线性非互易的二能级哈密顿量描述

$$\hat{H} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4}\hat{\sigma}_x + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4}i\hat{\sigma}_y + \frac{\gamma(t) + c(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*)}{2}\hat{\sigma}_z \quad (7)$$

其中 $\hat{}\sigma_{x,y,z}$ 是泡利矩阵， $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是概率幅。系统的动力学方程为[50]

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi^r\rangle = \hat{H}|\psi^r\rangle, \quad i\frac{\partial}{\partial t}|\psi^l\rangle = \hat{H}^\dagger|\psi^l\rangle, \quad (8)$$

其中 $\langle\psi^l|\psi^r\rangle = 1$ 和量子态

$$|\psi^r\rangle = \alpha_1|\uparrow\rangle + \beta_1|\downarrow\rangle, \quad |\psi^l\rangle = \alpha_2|\uparrow\rangle + \beta_2|\downarrow\rangle \quad (9)$$

在非绝热基下表示为 $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$，其自旋本征态为 $|\uparrow\rangle$和 $|\downarrow\rangle$。

对于绝热基，含时哈密顿量 $\hat{}H$ 的左、右瞬时本征态由[50]导出

$$\hat{H}|\phi^r_n\rangle = E_n|\phi^r_n\rangle, \quad \hat{H}^\dagger|\phi^l_n\rangle = E^*_n|\phi^l_n\rangle, \quad (10)$$

其中 $\langle\phi^l_m|\phi^r_n\rangle = \delta_{nm}$ $(n = 1, 2)$，本征能量$E_n(t)$由四次方程确定（参见附录。B）

$$E^4 + cE^3 + \frac{1}{4}(c^2 - \gamma^2 - \Delta_1\Delta_2)E^2 - \frac{c\Delta_1\Delta_2}{4}E - \frac{\Delta_1\Delta_2 c^2}{16} = 0. \quad (11)$$

通过求解方程（11），我们绘制了系统（7）的能谱（见图1 和图2）。这两个参数

$$\Delta \equiv \sqrt{|\Delta_1\Delta_2|}, \quad k \equiv \sqrt{|\Delta_1/\Delta_2|} \quad (12)$$

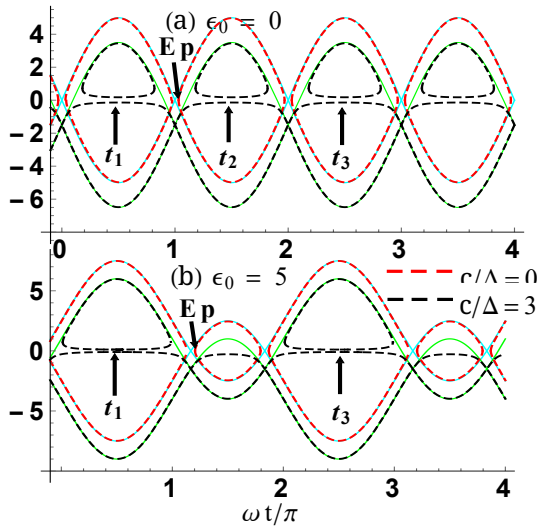


图 2. 不同偏置下能级的时间演化：(a) $\epsilon_0 = 0$ 和 (b) $\epsilon_0 = 5$，其中 $A = 10$, $\omega = 1$ 和 $\Delta_1\Delta_2 < 0$。含时绝热能级（即 $\Delta = \sqrt{|\Delta_1\Delta_2|} = 1$）以红色（$c = 0$）和黑色（$c = 3$）虚线表示，而非绝热能级（即 $\Delta = 0$）以蓝色（$c = 0$）和绿色（$c = 3$）实线表示。

用于描述平均隧穿振幅和非互易性。

在同相隧穿情况下 $\Delta_1\Delta_2 > 0$ 如图1所示，系统的能谱（7）与厄米哈密顿量 $\hat{H}_h = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_x + \gamma_{(t)+c(|\beta|^2-|\alpha|^2)}\hat{\sigma}_z$ 相同。因此，两个非互易系统的哈密顿量 $\hat{H}$ 和量子态 $|\psi^r\rangle$ 可通过以下关系与厄米系统关联

$$\hat{H}_h = \hat{S}\hat{H}\hat{S}^{-1}, \qquad |\psi\rangle = \hat{S}|\psi^r\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ k\beta_1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

其中 $\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$。与 $\hat{H}_h$ 相比，非互易性只影响系统的本征态，既不改变本征值，也不破坏系统的对称性。在反相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2 < 0$ 下，如图2所示，当 $c = 0$ 时，非绝热能级存在一系列简并点（例外点）（见图2中红色虚线的交点；未显示 E_n 的虚部）。有趣的是，加入非线性后（$c \neq 0$），例外点消失，并形成近简并区域（见图2中的黑色虚线）。考虑偏移量（$\epsilon_0 \neq 0$）时，近简并区域在 $t'_n = t_1 + t_3 + 2n_\omega^\pi$ 附近消失（其中 n 为整数），周期从 n_ω^π 变为 $2n_\omega^\pi$；随着 ϵ_0 增大，环形能级将在 $t_1 + 2m_\omega^\pi$ 时趋于简并（其中 m 为整数），如图2所示。显然，非线性会影响例外点。根据方程（11），当且仅当 $c\Delta_1\Delta_2 = 0$ 时，$E_n = 0$ 是该方程的根。因此，在反相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2 < 0$ 下，c 的存在不允许例外点存在。接下来，我们分析了能谱存在实根的情形

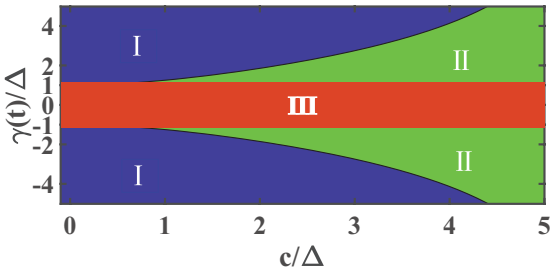


图 3. 反相隧穿情形下，参数空间中 c_Δ 和 $\frac{\gamma}{\Delta}$ 对应的不同区域。$f(c_\Delta, \frac{\gamma}{\Delta}) < 0$ 时为区域 I，$f(c_\Delta, \frac{\gamma}{\Delta}) > 0$ 时 $\frac{\gamma^2}{\Delta^2} > 1$ 为区域 II，$\frac{\gamma^2}{\Delta^2} < 1$ 时为区域 III。显然，当 $f(c_\Delta, \frac{\gamma}{\Delta}) < 0$ 时，不等式 $\frac{\gamma^2}{\Delta^2} > 1$ 必然成立。

能谱。

对于特殊情形 $c = 0$，系统的本征能量为 $\pm\sqrt{\gamma^2(t) + \Delta_1\Delta_2}$。容易发现，在反相隧穿情形下，例外点出现在 $\gamma^2(t) = -\Delta_1\Delta_2$ $\Delta_1\Delta_2 < 0$。对于 $c \neq 0$，能量方程（11）的根（实数或非实数）取决于

$$\delta = -c^2\gamma^2\Delta_1\Delta_2\xi, \tag{14}$$

with $\xi = ((c^2 - \gamma^2 - \Delta_1\Delta_2)^3 - 27c^2\gamma^2\Delta_1\Delta_2)$.

当 $\delta > 0$ 时，存在两个实根和一对共轭复根。系统始终具有实本征能量。当 $\delta < 0$ 时，如果 $c^2 + 2(\Delta_1\Delta_2 + \gamma^2)$ 和 $(\Delta_1\Delta_2 + \gamma^2)(2c^2 + \Delta_1\Delta_2 + \gamma^2)$ 均为正，则方程有四个互不相等的实根；否则，方程有两对互不相等的共轭复根。显然，对于同相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2 > 0$，系统始终存在实本征能量。

对于满足 $\delta < 0$ 的反相隧穿情形，能量方程具有实根的条件可简洁地描述为 $\frac{\gamma^2}{\Delta^2} > 1$ 和 $f(c_\Delta, \frac{\gamma}{\Delta}) = [(c_\Delta)^2 - (\frac{\gamma}{\Delta})^2 + 1]^3 + 27(c_\Delta)^2(\frac{\gamma}{\Delta})^2 < 0$。有趣的是，$\frac{\gamma}{\Delta} = \pm 1$ 恰好是 $f(c_\Delta, \frac{\gamma}{\Delta}) = 0$ 的切线。因此，该条件自然成立（如图 3 所示），由此我们得到了与 $\Delta_1\Delta_2 > 0$ 相同的结论。

最后，我们考虑另外两个特殊情况：$\gamma = 0$ 和 $\xi = 0$。只有当 $\delta = 0$、$c(\Delta_1\Delta_2 - \gamma^2) = 0$、$(\Delta_1\Delta_2 + \gamma^2)(2c^2 + \Delta_1\Delta_2 + \gamma^2) = 0$ 以及 $c^2 + 2(\Delta_1\Delta_2 + \gamma^2) < 0$ 时，能谱才全部为复数。对于 $c \neq 0$ 和 $\Delta_1\Delta_2 \neq 0$，这些条件无法同时满足。

总而言之，系统始终具有实本征能量。不同类型的非互易性所涉及的对称性，可以解释这些关于本征能量性质的结果。对于同相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2 > 0$，由于系统可以通过 $\hat{S}$ 变换为厄米系统，因此系统的对称性未被破缺，从而保证本征能量为实数。而对于反相情形 $\Delta_1\Delta_2 < 0$，这一结论并非必然成立。尽管非线性 c 使例外点在 E_n 的演化过程中消失，但其中一个能态的本征值仍然是复数。对于这两种情形，它们对量子态演化的影响必然不同。接下来，我们将分析这两种情形下的动力学演化

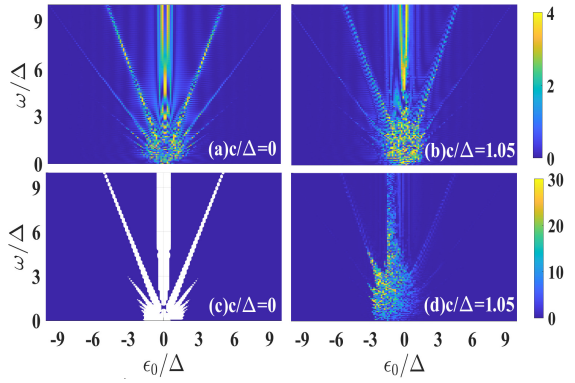


图 4. 在时间 $t = 50/\Delta$ 时，量子态 $(\alpha_1(0), \beta_1(0)) = (0, 1)$、$(\alpha_2(0), \beta_2(0)) = (0, 1)$中布居概率$|\alpha_1|^2$ 的干涉图样随 ϵ_0/Δ 和 ω/Δ 的变化，其中 (a) $c/\Delta = 0$、$\Delta_1\Delta_2 > 0$ $\Delta = 1\ 05$ $\Delta_1\Delta_2 > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta_1\Delta_2 < 0$，(b) $c/$.，，(c) $c/$ ，，以及 (d) $c/\Delta = 1.05$、$\Delta_1\Delta_2 < 0$。其他参数取为 $k = 2$、$A/\Delta = 2.5$。白色区域为奇异区域，且 $|\alpha_1|^2$趋于无穷大。

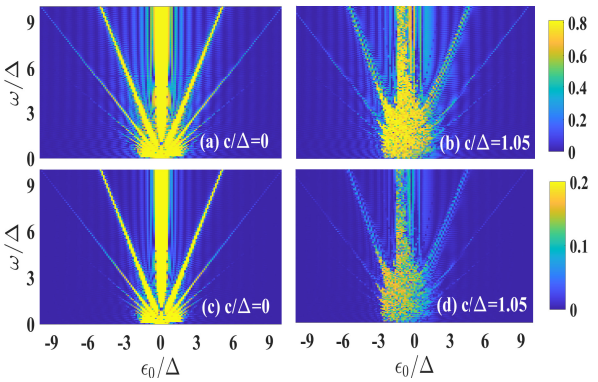


图 5. 反相隧穿情况下，射影态布居概率 $|\tilde{a}|^2$ 在时刻 $t = 50/\Delta$ 的干涉图样，作为 ϵ_0/Δ 和 ω/Δ 的函数；此时系统处于态 $(\alpha_1(t_0), \beta_1(t_0)) = (0,1),(\alpha_2(t_0), \beta_2(t_0)) = (0,1)$，其中 (a) $c/\Delta = 0, k = 2$，(b) $c/\Delta = 1.05, k$ = 2 $\Delta = 0$ $= 1\ 2$, $\Delta = 1\ 05$, $= 1\ 2$ ，(c) $c/$,$k/$ 和 (d) $c/$.$k/$ 。

，分析方法基于射影希尔伯特空间。

III. 非线性非厄米 LZSM干涉测量

在非线性厄米朗道-齐纳系统中，LZSM干涉图样可能呈现相消或相长，这取决于斯¨图克尔贝格相位；非线性会显著改变LZSM干涉测量的特征。如图4所示，对于线性同相隧穿情形（$c = 0, \Delta_1\Delta_2 > 0$），$|\alpha_1|^2$ 的干涉图样呈轴对称。对于非线性情形（$c \neq 0$），干涉图样的对称性遭到破坏（如图4b所示）。当$c = 0$ 且$\Delta_1\Delta_2 < 0$时，例外点会使干涉图样发散并形成奇异区域（图4c中的白色区域）。要研究各参数对LZSM干涉测量特征的影响并不容易。接下来，我们提出射影希尔伯特空间的概念（详见附录C），并找出非互易性k的效应。

通过方程（8），不失一般性，量子态 $|\psi^r\rangle$可定义为

$$|\psi^r\rangle = e^{\mu(t)+i\nu(t)}|\tilde{\psi}\rangle = e^{\mu(t)+i\nu(t)}\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{b}\end{pmatrix}, \tag{15}$$

满足归一化关系 $\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = 1$ (μ 和 ν 是两个实参数），其中 $|\tilde{\psi}\rangle = \begin{pmatrix}\tilde{a}\\ -\tilde{a}b\end{pmatrix}$ 是射影希尔伯特空间中的量子态。随后，我们绘制归一化的干涉图样 $|\tilde{a}|^2 = |\alpha_1|^2/(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)$（见图5）。与 $|\alpha_1|^2$相比，当 $|\tilde{a}|^2$ 干涉图样的参数调节表现出来。这是因为 LZSM 干涉由 St¨uckelberg 相位决定。演化过程中积累的相位通过 $|\tilde{\psi}\rangle$ 保留在射影希尔伯特空间中的量子态里：

消除非厄米项 $e^{m(t)}$导致的发散5中，当$c = 0$时，奇异区域内相应射影量子态的布居数被限制在受非互易性 ff影响的取值范围内 k。为进一步揭示参数 k的影响，我们接下来从最简单的情况入手，即$c = 0$，然后分析$c \neq 0$的情况。随后，我们验证了所提出方法及数值结果在弱耦合极限下的有效性和准确性。

A. 线性非厄米系统中的非互易性效应与射影量子态

假设 $c = 0$，系统的哈密顿量（7）变为

$$\hat{H}_{mF} = \begin{pmatrix}\frac{\gamma}{2} & \frac{\Delta_1}{2}\\ \frac{\Delta_2}{2} & -\frac{\gamma}{2}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中 $\Delta_1\Delta_2 < 0$。考虑量子态 $|\psi^r\rangle = e^{\mu+i\nu}|\tilde{\psi}\rangle = e^{\mu+i\nu}\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ -\tilde{a}b\end{pmatrix}$，由式（8）可得

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= -\frac{i}{2}\langle\tilde{\psi}|\hat{H} - \hat{H}^\dagger|\tilde{\psi}\rangle,\\ \dot{\nu} &= -\frac{1}{2}\langle\tilde{\psi}|\hat{H} + \hat{H}^\dagger|\tilde{\psi}\rangle + i\langle\tilde{\psi}|\dot{\tilde{\psi}}\rangle,\end{aligned} \tag{17}$$

将式（17）以及定义 $|\tilde{\psi}\rangle = \begin{pmatrix}\tilde{a}\\ -\tilde{a}b\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix}$ 代入方程（8）可得（详见附录 C 中的

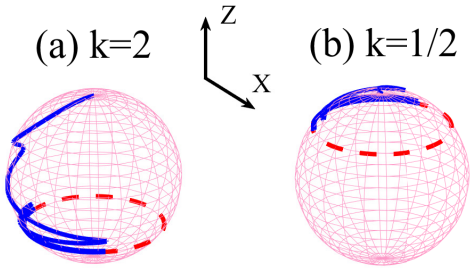


图 6. 系统（16）的射影右量子态在布洛赫球上的动力学演化轨迹，其中非厄米参数不同：(a) $k = 2$ 以及 (b) $k = 1/2$。数值模拟参数为：$_{A}$ $_{\Delta} = 2.5$、$\epsilon_0 = 0$，初始条件为（$\tilde{a}$，$\tilde{b}$）$= (0,1)$。布洛赫球上红色虚线圆各点的 z 轴坐标为$z_0 = \cos\theta_0 = {}^{1-}$ $k1+{}^{2}k_{\circ}$ ——

详细内容）

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= -\Delta_1 \sin\varphi \cos^2\frac{\theta}{2} - \Delta_2 \sin\varphi \sin^2\frac{\theta}{2},\\
\dot{\varphi} &= -\gamma - \frac{\Delta_1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\cos\varphi + \frac{\Delta_2}{2}\tan\frac{\theta}{2}\cos\varphi,\\
\dot{\mu} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{4}\sin\theta\sin\varphi,\\
\dot{\nu} &= \frac{\gamma}{2} - \frac{\Delta_2}{2}\tan\frac{\theta}{2}\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{18}$$

对于 $\epsilon_0 = 0$，当时间足够长时，射影态总会位于布洛赫球上的某个圆（$\dot{\theta} = 0$）（见图6）。根据式（18），我们可以得到射影量子态最终所在圆的方程。令人惊讶的是，我们发现了 k 与 $\theta_0 = \lim_{t\to\infty}\theta$ 之间的关联：

$$k^2 = \tan^2\frac{\theta_0}{2}. \tag{19}$$

因此，结合图5，我们可以解释为什么$|\tilde{a}|^2$ 在奇异区域内被限制在某个特定值。

B. 相互作用与非厄米性对射影希尔伯特空间中布居的影响

对于非线性厄米系统[33], 即 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$，当 $\epsilon_0 = 0$ 且 $A \ll \omega$时，系统的布居在不同非线性下会出现自俘获相变和约瑟夫森振荡，而边界线为 $c/\Delta = 2$[67, 69]。基于此，我们接下来研究具有不同非线性 c 、非厄米参数 k 和平均振幅 Δ [时的非线性非厄米 LZSM 干涉图样，见图7和图9]。

首先，我们考虑同相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2 > 0$，此时系统的对称性未被破坏。对于厄米哈密顿量 $\hat{H}_h$，在两种不同振荡的边界附近，自俘获区域的最大布居为 0.5，随后振幅随c/Δ的增大而逐渐减小。非厄米系统中量子态的布居数

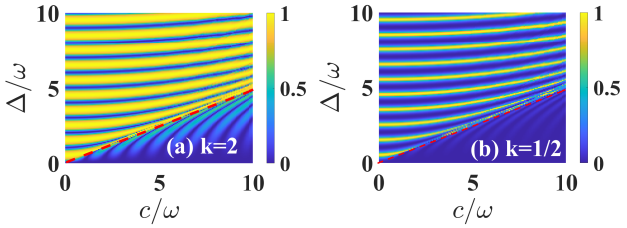


图 7. 弱驱动下、 $\epsilon_0 = 0$ 时及同相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2 > 0$下，不同非线性对应的非线性非厄米 LZSM 干涉图样：(a) $k = 2$，以及 (b) $k = 1/2$：投影布居 $|\tilde{a}|^2$ 随 $\Delta/$ ω ω $\omega =$ 0 05 $_0 = 0$ $= 2\pi$ ω 和 $c/$ 的变化，其中 $A/$ 。从初始时刻 t至t /。红色点划线（斜率为 1/2）表示不同振荡之间的边界。

哈密顿量 $\hat{H}$ 在 $\Delta_1 \neq \Delta_2$ 仅与厄米哈密顿量 $\hat{H}_h$ 的布居数存在 k 权重上的差异，如方程 (13) 所示。因此，我们可以得到 $|\tilde{a}|^2 = k^2|\tilde{b}|^2$ 与厄米情形类似的边界。因此，两个区域（自俘获和约瑟夫森振荡）之间的边界线$c/\Delta = 2$ （图7中的红色虚线）与厄米系统中的边界线相同。射影量子态的布居振幅由非互易性k决定，如图7(a) 和 (b) 所示。接下来，我们利用方程 (8) 和 (15) 考察边界附近射影量子态的动力学演化，可以得到

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}^r &= \mathrm{Im}A\sin\theta^r - \Delta_1\sin\varphi^r\cos^2\frac{\theta^r}{2} - \Delta_2\sin\varphi^r\sin^2\frac{\theta^r}{2},\\
\dot{\varphi}^r &= -\gamma - \mathrm{Re}A - \frac{\Delta_1}{2}\cot\frac{\theta^r}{2}\cos\varphi^r + \frac{\Delta_2}{2}\tan\frac{\theta^r}{2}\cos\varphi^r,\\
\dot{\mu}^r &= -\frac{\mathrm{Im}A}{2}\cos\theta^r + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{4}\sin\theta^r\sin\varphi^r,\\
\dot{\nu}^r &= \frac{\gamma}{2} + \frac{\mathrm{Re}A}{2} - \frac{\Delta_2}{2}\tan\frac{\theta^r}{2}\cos\varphi^r.
\end{aligned} \tag{20}$$

与右量子态 $|\psi^r\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = e^{\mu^r+i\nu^r}\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ b\end{pmatrix} =$

$e^{\mu^r+i\nu^r}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta^r}{2}e^{i\varphi^r}\\ \cos\frac{\theta^r}{2}\end{pmatrix}$, and

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}^l &= -\mathrm{Im}A\sin\theta^l - \Delta_2\sin\varphi^l\cos^2\frac{\theta^l}{2} - \Delta_1\sin\varphi^l\sin^2\frac{\theta^l}{2},\\
\dot{\varphi}^l &= -\gamma - \mathrm{Re}A - \frac{\Delta_2}{2}\cot\frac{\theta^l}{2}\cos\varphi^l + \frac{\Delta_1}{2}\tan\frac{\theta^l}{2}\cos\varphi^l,\\
\dot{\mu}^l &= \frac{\mathrm{Im}A}{2}\cos\theta^l + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4}\sin\theta^l\sin\varphi^l,\\
\dot{\nu}^l &= \frac{\gamma}{2} + \frac{\mathrm{Re}A}{2} - \frac{\Delta_1}{2}\tan\frac{\theta^l}{2}\cos\varphi^l.
\end{aligned} \tag{21}$$

左量子态为 $|\psi^l\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix} = e^{\mu^l+i\nu^l}\begin{pmatrix}\tilde{a}^l\\ b^l\end{pmatrix} = e^{\mu^l+i\nu^l}\begin{pmatrix}\sin\\ {}^{\frac{\theta^l}{2}}e_2^{\theta^l}\end{pmatrix}^{i\varphi^l}\cos$，其中 $A \equiv c(\alpha_1\alpha_2^* - \beta_1\beta_2^*)$ 。通过数值模拟，我们给出了迈界附近射影右态在布洛赫球上的动力学演化$c/\Delta = 2$ 见图8。

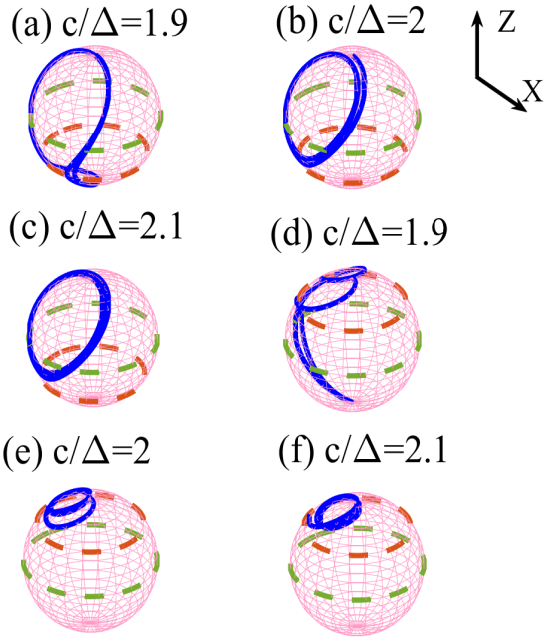


FIG. 8. 相隧穿情况下，布洛赫球上由球坐标（θ,ϕ）表示的投影态轨迹 $\Delta_1\Delta_2 > 0$ 对应不同非线性和非互易性强度：（a）$c/\Delta = 1.9$，$k = 2$；（b）$c/\Delta = 2$，$k = 2$；（c）$c/\Delta = 2.1$，$k = 2$；（d）$c/\Delta = 1.9$，$k = 1/2$；（e）$c/\Delta = 2$，$k = 1/2$；（f）$c/\Delta = 2.1$，$k = 1/2$。其他参数取为 $A_\omega = 0.05$，$\epsilon_0 = 3$，初态为（$\tilde{a}$，$\tilde{b}$）$= (0, 1)$。布洛赫球上红色虚线圆的 z 轴坐标为 $z_0 = \cos\theta_0 = {}^{1-}k_{1+}\ k^{2}{}_{,}$，绿色虚线圆的 z 轴坐标为 $z_0' = 0$。

当 $c/\Delta > 2$ 时，射影态只能在红色虚线圆上方的布洛赫球表面演化，如图 8 (b)、(c)、(e) 和 (f) 所示。红色圆表示相对布居差为 $|\tilde{b}|^2 - |\tilde{a}|^2$ is ${}^{1-}k^2\ k^{2+1} = \cos\theta_0$ 的射影态。由 $|\tilde{a}|^2 = k^2|\tilde{b}|^2$ 和归一化条件可知，$\cos\theta_0 = |\tilde{b}|^2 - |\tilde{a}|^2$ 标志着自俘获区域与约瑟夫森振荡区域之间的边界。正如我们之前讨论的，非互易性 k 不会影响相长干涉和相消干涉，但会影响量子态的相对布居差。当 k 较大时，两个区域边界处的相对布居差较小 [（见图 8(a-c) 和 (d-f) 中的红色圆）]，且射影布居概率 $|\tilde{a}|^2$ 较小 [（见图 7 (a) 和 (b)）]。对于反相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2 < 0$，由于线性情形 $c = 0$ 中存在例外点，射影量子态无论非线性多么微弱，都会到达自俘获区域。射影态在布洛赫球上的轨迹将始终位于标志自俘获区域与约瑟夫森振荡区域边界的红色虚线圆上方，如图 9 所示。射影量子态的最大布居仍受非互易性 k 的影响，如公式 (19) 和图 10(a-d) 所示。

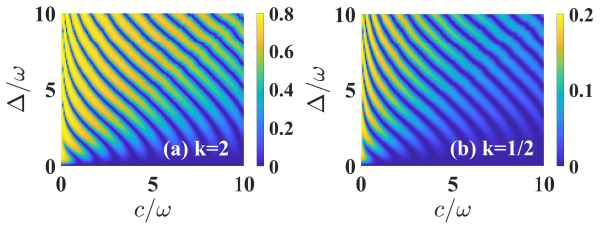


图 9. 不同非线性下的非线性非厄米 LZSM 干涉图样：(a) $k = 2$，以及 (b) $k = 1/2$；在 $\epsilon_0 = 0$处的弱驱动和反相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2$ 0下，投影布居 $|\tilde{a}|^2$ 随 $\Delta/0\ 05$ $_0 = 0$ $= 2\pi\ \omega$ 和 $c/$ 的变化，适用于 $A/$。从初始时刻t到 $t/$。

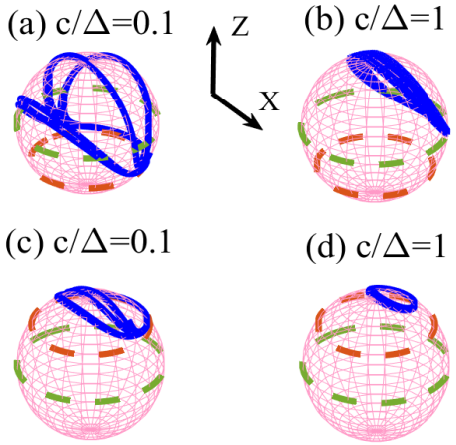


图 10. 反相隧穿情形 $\Delta_1\Delta_2 < 0$ 下，布洛赫球上由轨迹球坐标（θ，ϕ）表示的投影态动力学，展示了不同非线性和非互易性强度下的情形：(a) $c/\Delta = 0.1$，$k = 2$；(b) $c/\Delta = 1$，$k = 2$；(c) $c/\Delta = 0.1$，$k = 1/2$；以及 (d) $c/\Delta = 1$，$k = 1/2$。其他参数取为 $A_\omega = 0.05$，$\epsilon_0 = 3$，初态为（$\tilde{a}$，$\tilde{b}$）$= (0, 1)$。布洛赫球上红色虚线圆的 z 轴坐标为 $z_0 = \cos\theta_0 = {}^{1-}k_{1+}\ k^{2}{}_{,}$，绿色虚线圆的 z 轴坐标为 $z_0' = 0$。

比较图 Fig.10(b) 和 (d) 与图10(a) 和 (c)，很容易发现，非线性越强，自俘获效应就越强。效应。

C. 射影量子态的弱耦合极限：$\Delta \ll \omega$

考虑弱耦合极限时，绝热能级在近简并区域很难发生跃迁。然而，在这一近似下，我们只令 $|\tilde{a}^g(t)|^2 \sim |\tilde{a}^g(t_0)|^2$ 和 $|\tilde{b}^g(t)|^2 \sim |\tilde{b}^g(t_0)|^2$，其中 $g = r,l.\tilde{}$假设初始条件为 $(\tilde{a}^g(t_0),b^g(t_0)) = (0,1)$，量子态总可以写成如下形式：

$$|\psi^g(t)\rangle = e^{\mu^g(t)+i\nu^g(t)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{22}$$

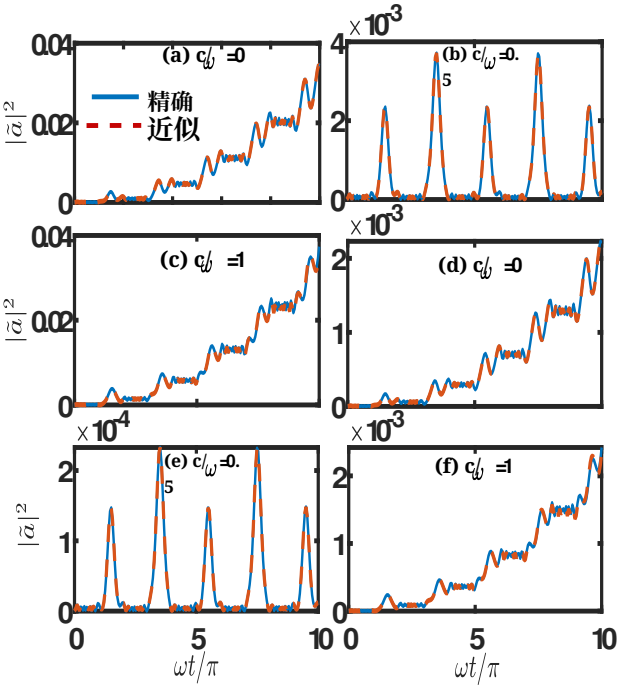


图 11. 同相隧穿情形下弱耦合时，投影布居概率 $|\tilde{a}|^2$的时间演化，展示不同非线性对应的结果：(a) $c/\omega = 0, k = 2$，(b) $c/\omega = 0.5, k = 2$ 以及 (c) $c/\omega = 1, k = 2$。(d) $c/\omega = 0, k = 1/2$，(e) $c/\omega = 0.5, k = 1/2$ 以及 (f) $c/\omega = 1, k = 1/2$。其他参数为 $A/\omega = 10.5$，$\Delta/\omega = 0.05$，$\epsilon_0/\omega = 3$

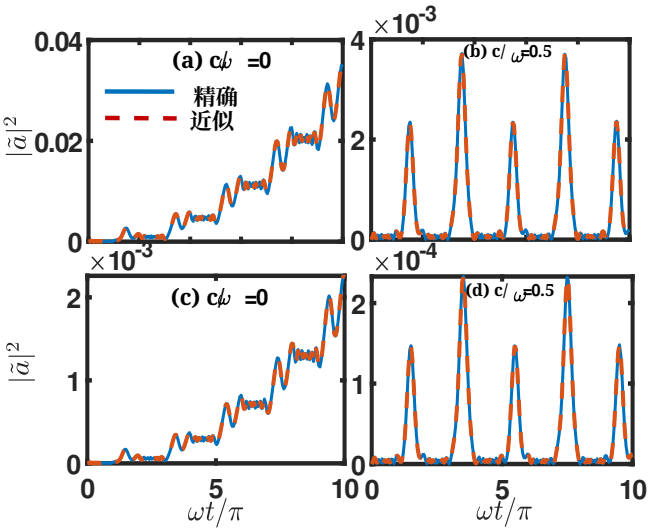


图12. 弱耦合反相隧穿情形下，射影量子态布居概率 $|\tilde{a}|^2$ 的时间演化，其中非线性取不同值：(a) $c/\omega = 0$、$k = 2$；(b) $c/\omega = 0.5$、$k = 2$；(c) $c/\omega = 0$、$k = 1/2$；(d) $c/\omega = 0.5$、$k = 1/2$。其他参数为$A/\omega = 10.5$、$\Delta/\omega = 0.05$和 $\epsilon_0/\omega = 3$。

其中 $g \cdot l - \dot{\nu}^j = 0$ r,l. 根据方程（8）、（17）和（22），可得 $\mu^r(t)i\nu^r(t)\mu(t)\,i(t)$，这意味着

$$\beta_1(t)\beta_2^*(t) - \alpha_1(t)\alpha_2^*(t) \sim \beta_1(t_0)\beta_2^*(t_0) - \alpha_1(t_0)\alpha_2^*(t_0), \quad (23)$$

基于这一近似，我们可以通过引入规范变换 $\phi^r(t) = U(t)\varphi^r(t)$ [U(t) $= \frac{\epsilon_0}{2}t - A\cos(\omega t)\,2\omega + c\,2\,(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*)$, 将系统的动力学从薛定谔绘景变换到狄拉克绘景，其中 $\varphi^r(t) = [\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1]^T$] [33]。在新基底下，非线性动力学方程 (8) 变为（假设 $\Delta_1 > 0$）：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \tilde{\beta}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k\Omega\\ \frac{(-1)^j}{k}\Omega^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \tilde{\beta}_1\end{pmatrix}, \quad (24)$$

and

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_2\\ \tilde{\beta}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{(-1)^j}{k}\Omega^*\\ k\Omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_2\\ \tilde{\beta}_2\end{pmatrix} \quad (25)$$

with

$$\Omega = \frac{\Delta}{2}e^{i\Phi(t)}, \quad \Phi(t) = \epsilon_0 t - \frac{A\cos(\omega t)}{\omega} + ct, \quad (26)$$

分别对应反相情形 $\Delta_2 < 0$和同相情形 $\Delta_2 > 0$。Ω 表示场诱导的拉比频率，其中 $\Phi(t)$ 是两个非绝热能级的相对相位。前面的非互易性 k

Ω 对应于投影量子态的布居权重。因此，我们可以理解，在同相情形 $\Delta_1\Delta_2 > 0$下，自俘获区域内布居数的最大值会随 k^2 而变化。在一个完整周期内，$\Phi(t)$ 可近似写为

$$\Phi(t) \backsimeq \int_{t_1}^{t_3}(\epsilon_0 + c - n\omega)dt = \frac{2\pi}{\omega}(\epsilon_0 + c - n\omega) \quad (27)$$

其中 n = 0、±1、±2、.....。当 $\Phi_m = 2m\pi$时，即 c + $\epsilon_0 \simeq$ (n +m)ω = dω (m, d = 0、±1、±2、.....)，图样呈相长干涉。而当 $\Phi_m = (2m + \frac{1}{2})\pi$时，图样将呈相消干涉。通过求解非线性方程(8)和线性方程(24)，我们分别得到精确解和近似解。在图11中，我们展示了同相隧穿情形下具有不同特征的多周期LZSM干涉条纹 $\Delta_2 > 0$。当 c = 0、1，即 $\Phi_m = 2m\pi$时，图样呈相长干涉；而当 c = 0.5、1.5，即$\Phi_m = (2m + \frac{1}{2})\pi$时，图样呈相消干涉。在所有非线性情形下，两者均保持一致。在图12中，我们展示了反相隧穿情形 $\Delta_2 < 0$。与同相隧穿情形类似，相长干涉和相消干涉仅取决于m，而非互易性k只影响射影布居概率 $|\tilde{a}|^2$ 的最大值。

IV. 结论

在这项工作中，我们研究了非厄米非线性 LZSM 干涉测量，其中非厄米性源于玻色子之间的非互易隧穿。通过采用平均场近似和射影希尔伯特空间，我们研究了非互易性和非线性对能

谱、动力学以及干涉条纹形成的影响。结果表明，不同类型的互易性对应于系统的不同对称性。对于同相隧穿情形$\Delta_1\Delta_2 > 0$，可以通过非幺正变换将系统变换为厄米系统。它具有与厄米系统相同的能谱，以及约瑟夫森区域和自俘获区域之间的边界。但这并非反相情形$\Delta_1\Delta_2 < 0$下必然成立的结果。例外点仅存在于线性情形$c = 0$，而在非线性情形下，一个能量态的本征值将变为复数。在这种情形下，仅存在自俘获区域，因为只要存在非线性，投影态的演化就始终位于边界之上。对于LZSM 干涉测量，我们发现非互易性的强度k对投影态的布居起着关键作用，并决定了最大值投影空间中干涉图样的数值和强度。最后，在弱耦合近似下，我们发现，非互易性的类型和强度不会影响相消干涉与相长干涉的条件。这些条件仅取决于非线性的强度。我们的结果为通过LZSM干涉测量研究非厄米非线性二能级系统及其相关外部场的参数提供了一种可能途径。

致谢

我们感谢 S. C. Li 和 F. Q. Dou 富有帮助的讨论。本研究得到国家自然科学基金委员会（NSFC）（项目编号：11875103、12147206、11725417、12088101、12047548 和 U1930403）以及科学挑战计划（项目编号：TZ2018005）的支持。

附录A：半经典哈密顿量

在非厄米系统中，设$\hat{H}$为一个具有完备双正交归一本征基$\{|\psi_n^r\rangle, |\psi_n^l\rangle\}$的非厄米哈密顿量，量子态的正交归一化条件为

$$\langle\psi_n^r|\psi_m^l\rangle = \delta_{nm}. \tag{A1}$$

类似地，对于系统（1），在平均场近似下，相干态应写为

$$|\Psi_{sc}^r\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(\alpha_1\hat{a}^\dagger + \beta_1\hat{b}^\dagger)^N|\emptyset\rangle, \tag{A2}$$

$$|\Psi_{sc}^l\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(\alpha_2\hat{a}^\dagger + \beta_2\hat{b}^\dagger)^N|\emptyset\rangle, \tag{A3}$$

根据归一化条件$\langle\Psi_{sc}^l|\Psi_{sc}^r\rangle = 1$:

$$\alpha_1\alpha_2^* + \beta_1\beta_2^* = 1. \tag{A4}$$

接着，将系统（1）的哈密顿量作用于右量子态$|\Psi_{sc}^r\rangle$，可得

$$\hat{H}|\psi_{SC}^r\rangle = \left[\frac{\gamma}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\Delta_2}{2}\hat{a}^\dagger\hat{b} + \frac{\Delta_1}{2}\hat{a}\hat{b}^\dagger - \frac{c}{4N}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b})^2)\right]\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{r=0}^{N} C_N^r(\alpha_1\hat{a}^\dagger)^{N-r}(\beta_1\hat{b}^\dagger)^r|\emptyset\rangle, \tag{A5}$$

计算可观测量的期望值时，需要对系统的量子态进行归一化。因此，在系统（1）中，$\hat{H}_0$的期望值应写为

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{sc}^l|\hat{H}_0|\Psi_{sc}^r\rangle =& \frac{N\gamma}{2}\sum_{r=0}^{N}\frac{(N-1)!}{(N-r-1)!r!}(\alpha_1\alpha_2^*)^{N-r-1}(\beta_1\beta_2^*)^r\alpha_1\alpha_2^* - \frac{N\gamma}{2}\sum_{r=0}^{N}\frac{(N-1)!}{(N-r)!(r-1)!}(\alpha_1\alpha_2^*)^{N-r}(\beta_1\beta_2^*)^{r-1}\beta_1\beta_2^* \\ &+N(\frac{\Delta_2}{2}\sum_{r=0}^{N}C_{N-1}^r(N-r)(\alpha_1\alpha_2^*)^{N-r-1}(\beta_1\beta_2^*)^r\alpha_2^*\beta_1 + \frac{\Delta_1}{2}\sum_{r=0}^{N}C_{N-1}^{r-1}r(\alpha_1\alpha_2^*)^{N-r}(\beta_1\beta_2^*)^{r-1}\alpha_1\beta_2^*) \\ &+\sum_{r=0}^{N}C_{N-1}^{r-1}r(\alpha_1\alpha_2^*)^{N-r}(\beta_1\beta_2^*)^{r-1}\alpha_1\beta_2^*) - \frac{cN}{4}(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*)^2 \\ =&\frac{N\gamma}{2}(\alpha_1\alpha_2^* - \beta_1\beta_2^*) + \frac{N\Delta_2}{2}(\alpha_2^*\beta_1) + \frac{N\Delta_1}{2}(\alpha_1\beta_2^*) - \frac{cN}{4}(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*)^2,\end{aligned} \tag{A6}$$

每个粒子的期望值为

$$\hat{H}_M = \frac{\langle\Psi_{sc}^l|\hat{H}_0|\Psi_{sc}^r\rangle}{N} = -\frac{c}{4}(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*)^2 + \frac{\Delta_2}{2}(\alpha_2^*\beta_1) + \frac{\Delta_2}{2}(\alpha_1\beta_2^*) + \frac{\gamma}{2}(\alpha_1\alpha_2^* - \beta_1\beta_2^*). \tag{A7}$$

附录 B：能级方程的推导

在非厄米系统中，哈密顿量 $\hat{H}$ 具有完备的双正交归一本征基 $\{|\psi_n^r\rangle, |\psi_n^l\rangle\}$，满足

$$\hat{H}|\phi_n^r\rangle = E_n|\phi_n^r\rangle, \tag{B1}$$

$$\hat{H}^\dagger|\phi_n^l\rangle = E_n^*|\phi_n^l\rangle, \tag{B2}$$

$$\langle\phi_m^l|\phi_n^r\rangle = \delta_{mn}, \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{B3}$$

根据方程（B1），我们可以自然地得出，系统（7）的绝热基满足 s

$$F\alpha_1 + \frac{i\Delta}{2}\beta_1 = E\alpha_1, \quad \frac{i\Delta}{2}\alpha_1 - F\beta_1 = E\beta_1, \tag{B4}$$

$$F^*\alpha_2 - \frac{i\Delta}{2}\beta_2 = E^*\alpha_1, \quad -\frac{i\Delta}{2}\alpha_2 - F^*\beta_2 = E^*\beta_2, \tag{B5}$$

$$\alpha_1\alpha_2^* + \beta_1\beta_2^* = 1. \tag{B6}$$

其中 $F \equiv \frac{\gamma}{2} + c\,2(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*)$。为了从方程（B1）和（B2）中导出非平凡解，我们必须确保 $|\hat{H} - E\hat{I}| = 0$ 和 $|\hat{H}^\dagger - E^*\hat{I}| = 0$（$\hat{I}$ 是单位矩阵）。即：

$$E^2 - F^2 + \frac{\Delta^2}{4} = 0, \tag{B7}$$

$$E^{*2} - F^{*2} + \frac{\Delta^2}{4} = 0, \tag{B8}$$

根据（B4）以及方程（B5）的复共轭式，可得

$$\frac{\alpha_1\alpha_2^*}{\beta_1\beta_2^*} = -\frac{4(E+F)^2}{\Delta^2}, \tag{B9}$$

根据归一化条件（B6）和方程（B7），可得

$$\beta_1\beta_2^* = \frac{E-F}{2E}, \tag{B10}$$

因此，

$$F \equiv \frac{\gamma}{2} + \frac{c}{2}(\beta_1\beta_2^* - \alpha_1\alpha_2^*) = \frac{\gamma}{2} - \frac{cF}{2E}. \tag{B11}$$

将公式（B11）代入公式（B7），最终得到

$$E^4 + cE^3 + \frac{1}{4}(c^2 - \gamma^2 + \Delta^2)E^2 + \frac{c\Delta^2}{4}E + \frac{\Delta^2c^2}{16} = 0. \tag{B12}$$

附录 C：非厄米量子系统的射影空间

考虑以下薛定谔方程

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \tag{C1}$$

其中 $\hat{H}$ 通常是非厄米哈密顿量。定义 $|\psi(t)\rangle = e^{\mu+i\nu}|\tilde{\psi}(t)\rangle$，其归一化关系为 $\langle\tilde{\psi}(t)|\tilde{\psi}(t)\rangle$ =1 (μ和 ν 是两个实参数）。由方程（C1）及其厄米共轭可得

$$\dot{\mu} = -\frac{i}{2}\langle\tilde{\psi}|\hat{H} - \hat{H}^{\dagger}|\tilde{\psi}\rangle, \tag{C2}$$

and

$$\dot{\nu} = -\frac{1}{2}\langle\tilde{\psi}|\hat{H} + \hat{H}^{\dagger}|\tilde{\psi}\rangle + i\langle\tilde{\psi}|\dot{\tilde{\psi}}\rangle. \tag{C3}$$

必须牢记，上述推导与使用（伴随方程（C1）所得的结果有所不同.

在具有厄米哈密顿量的量子理论中，$|\psi(t)\rangle$ 和 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 是等价的，因为时间演化是幺正的（概率守恒），二者仅在整体相位上有所不同。在这种等价关系下，可以将 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 作为系统所谓射影希尔伯特空间中的一个矢量。然而，对于具有非厄米哈密顿量的系统，时间演化并非幺正。因此，尽管态矢量仅在范数上有所不同，它们仍可能描述不同的系统态。尽管如此，我们仍然可以通过将 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 作为其中的一个量子态，为非厄米系统形式化地建立射影希尔伯特空间。

基于上述定义，由式（C2）和（C3）可知，仅通过射影空间中的迹，便可以获得量子态在时间演化过程中获得的范数增量和整体相位，后者与厄米系统中的情况相同。整体相位及其与射影希尔伯特空间的关系，在厄米量子系统的几何（拓扑）性质中发挥着重要作用。因此，从这一角度研究非厄米系统的几何性质可能会很有意义。

为了清晰地展示此类讨论，我们采用一个两能级系统，用于描述具有增益和损耗的两个耦合位点的物理性质；其对应的厄米系统也可用于说明量子系统的几何性质。此类两能级系统的时间演化由以下方程所描述的 2×2 矩阵哈密顿系统给出，

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{C4}$$

随后根据定义 $|\psi（t）\rangle = e^{\mu+i\nu}|\tilde{\psi}（t）\rangle$，可以得到

$$\frac{d}{dt}(i\mu - \nu)\tilde{a} + i\frac{d}{dt}\tilde{a} = H_{11}\tilde{a} + H_{12}\tilde{b}, \tag{C5}$$

$$\frac{d}{dt}(i\mu - \nu)\tilde{b} + i\frac{d}{dt}\tilde{b} = H_{21}\tilde{a} + H_{22}\tilde{b}, \tag{C6}$$

结合它们的复共轭，并考虑 $|\tilde{a}|^2 + |\tilde{b}|^2 = 1$，我们可以很容易地验证方程（C2）和（C3）。

为方便起见且不失一般性，我们随后为量子态 $|\psi（t）\rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ 构造射影空间中的向量，其中 $|\tilde{\psi}（t）\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{a}e^{i\varphi} & \tilde{b} \end{pmatrix}$、$\tilde{a} = a\sqrt{|a|^2+|b|^2}$、$\tilde{b} = b\sqrt{|a|^2+|b|^2}$，以及 $\varphi = \arg(a) - \arg(b)$。记 $z = |b|^2 - |a|^2$，它正是两能级的相对布居差，随后可将其映射到一个球面，即所谓的布洛赫球，其坐标为（φ，z）。由方程（C3）可得到总相位的演化

$$\frac{d}{dt}\beta = -1/2\langle\tilde{\psi}|\hat{H} + \hat{H}^{\dagger}|\tilde{\psi}\rangle + 1/2(1-z)\frac{d\varphi}{dt}. \tag{C7}$$

该方程与 Aharonov 和 Anandan 为厄米系统推导出的方程相同，唯一的区别是，在动力学部分，厄米哈密顿量 $\hat{H}$ 被 $(\hat{H} + \hat{H}^{\dagger})/2$ 取代。上式右侧的第二部分称为几何部分。容易证明，如果演化的迹在射影空间中闭合，那么几何相位恰好等于布洛赫球上闭合路径所围成的立体角的一半，这就是所谓的 AA 相位，即循环态的几何相位。

[1] L. D. Landau, Phys. Z. Sowjetunion 2 , 46（1932年）。

[2] C. Zener 和 R. H. Fowler, Proc. R.Soc. Lond. A **137**, 696

(1932年). [3] E. C. G. Stueckelberg, 《Helvetica Physica Acta》 5, 369 (1932年). [4] L. D. Landau, Phys. Z. Sowjetunion 1 , 88 (1932年). [5] S. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, 《物理学报告》 492, 1 (2010). [6] B. T. Torosov and N. V. Vitanov, 《物理评论 A》 96, 013845 (2017). [7] G. Cao, H. O. Li, T. Tu, L. Wang, C. Zhou, M. Xiao, G. C. Guo, H. W. Jiang, and G. P. Guo, 《自然·通讯》 4, 1401 (2013). [8] F. Forster, G. Petersen, S. Manus, P. H¨anggi, D. Schuh, W. Wegscheider, S. Kohler, and S. Ludwig, 《物理评论快报》 112, 116803 (2014). [9] P. F¨oldi, M. G. Benedict, J. M. Pereira, and F. M. Peeters, 《物理评论 B》 75, 104430 (2007). [10] C. Calero, E. M. Chudnovsky, and D. A. Garanin, 《物理评论 B》 72, 024409 (2005). [11] B. K. Cooper and V. M. Yakovenko, 《物理评论快报》 96, 037001 (2006). [12] A. Banerjee and V. M. Yakovenko, 《物理评论 B》 78, 125404 (2008). [13] M. Mark, T. Kraemer, P. Waldburger, J. Herbig, C. Chin, H.-C. N¨agerl, and R. Grimm, 《物理评论快报》 99, 113201 (2007). [14] L. Du, M. Wang, and Y. Yu, 《物理评论 B》 82, 045128 (2010). [15] Q. Niu, X.-G. Zhao, G. A. Georgakis, and M. G. Raizen, 《物理评论快报》 76, 4504 (1996). [16] O. Morsch, J. H. M¨uller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, 《物理评论快报》 87, 140402 (2001). [17] Y. A. Chen, S. D. Huber, S. Trotzky, I. Bloch, and E. Altman, 《自然·物理》 7, 61 (2011). [18] M. Cristiani, O. Morsch, J. H. M¨uller, D. Ciampini, and E. Ari- mondo, 《物理评论 A》 65, 063612 (2002). [19] Q. Zhang, P. H¨anggi, and J. Gong, 《物理评论 A》 77, 053607 (2008). [20] C. S. E. van Ditzhuijzen, A. Tauschinsky, and H. B. van Linden van den Heuvell, 《物理评论 A》 80, 063407 (2009). [21] J. Liu, L. Fu, B.-Y. Y. Ou, S.-G. G. Chen, D.-i. I. Choi, B. Wu, and Q. Niu, 《物理评论 A》 66, 1 (2002), 0105140. [22] S.-C. Li, L.-B. Fu, W.-S. Duan, and J. Liu, 《物理评论 A》 78, 063621 2008( ). [23] L.-B. Fu, D.-F. Ye, C. Lee, W. Zhang, and J. Liu, 《物理评论 A》 80, 013619 (2009). [24] D.-F. Ye, L.-B. Fu, and J. Liu, 《物理评论 A》 77, 013402 (2008). [25] S.-C. Li, 《物理学杂志 B：原子、分子与光物理》 43, 205303 (2010). [26] S.-C. Li and L.-B. Fu, 《物理评论 A》 102, 033323 (2020); 《物理评论 A》 101, 023618 (2020); 《物理评论 A》 102, 033313 (2020). [27] J. Liu, L. Fu, B.-Y. Ou, S.-G. Chen, D.-I. Choi, B. Wu, and Q. Niu, 《物理评论 A》 66, 023404 (2002). [28] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright, and D. F. Walls, 《物理评论 A》 55, 4318 (1997). [29] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy, 《物理评论快报》 79, 4950 (1997). [30] S. Kohler and F. Sols, 《物理评论快报》 89, 060403 (2002). [31] O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and F. Nori, 《物理学报告》 995, 1 (2023). [32] B. Wu and Q. Niu, 《物理评论 A》 61, 023402 (2000). [33] S.-C. Li, L.-B. Fu, and J. Liu, 《物理评论 A》 98, 013601 (2018). [34] R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Mussli- mani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides, 《自然·物理》 14, 11 (2018). [35] Y. Ashida, Z. Gong, and M. Ueda, 《物理学进展》 69, 249 (2020).

[36] M. A. Miri 和 A. Al`u, 《科学》363，eaar7709（2019）。[37] W. Zhu、X. Fang、D. Li、Y. Sun、Y. Li、Y. Jing 和 H. Chen, 《物理评论快报》121，124501（2018）。[38] Y. Wu、W. Liu、J. Geng、X. Song、X. Ye、C.-K. Duan、X. Rong 和 J. Du, 《科学》364，878（2019）。[39] J. Li、A. K. Harter、J. Liu、L. de Melo、Y. N. Joglekar 和 L. Luo, 《自然·通讯》10，855（2019），arXiv:1608.05061。[40] W. Xiong、Z. Li、Y. Song、J. Chen、G.-Q. Zhang 和 M. Wang, 《物理评论 A》104，063508（2021）。[41] W. Xiong、Z. Li、G.-Q. Zhang、M. Wang、H.-C. Li、X.-Q. Luo 和 J. Chen, 《物理评论 A》106，033518（2022）。[42] S. Yao 和 Z. Wang, 《物理评论快报》121，086803（2018）。[43] C. Yin、H. Jiang、L. Li、R. L¨u, 97, u 和 S. Chen, 《物理评论 A》 052115 2018（ ）。[44] C. H. Lee 和 R. Thomale, 《物理评论 B》99，201103（2019）。[45] L. Li、C. H. Lee 和 J. Gong, 《物理评论快报》124，250402（2020）。[46] X. Huang、C. Lu、C. Liang、H. Tao 和 Y. C. Liu, 《光：科学与应用》10（2021），10.1038/s41377-021-00464-2。[47] C. M. Bender 和 S. Boettcher, 《物理评论快报》80，5243（1998）。[48] J. Wong, 《数学物理杂志》8，2039（1967）。[49] F. H. M. Faisal 和 J. V. Moloney, 《物理学杂志B》16，3109（1983）。[50] A. Mostafazadeh, 《数学物理杂志》43，205（2002）；《数学物理杂志》43，2814（2002）；《数学物理杂志》43，3944（2002）；《数学物理杂志》43，6343（2002）；《数学物理杂志》44，974（2003）；《数学物理杂志》45，932（2004）；《核物理B》640，419（2002）。[51] C. M. Bender、K. A. Milton 和 V. M. Savage, 《物理评论D》62，085001（2000）。[52] C. M. Bender、S. Boettcher、H. Jones、P. N. Meisinger 和 M. Simsek, 《物理快报A》291，197（2001）。[53] C. M. Bender、D. C. Brody 和 H. F. Jones, 《物理评论快报》93，251601（2004）；《物理评论D》70，025001（2004）。[54] A. Mostafazadeh, 《国际现代物理学杂志A》21，2553（2006）。[55] C. M. Bender、V. Branchina 和 E. Messina, 《物理评论D》85，085001 2012（ ）。[56] C. M. Bender 和 K. A. Milton, 《物理评论D》57，3595（1998）。[57] P. Dorey、C. Dunning 和 R. Tateo, 《物理学杂志A》34，L391（2001）。[58] Y.-G. Miao、H. J. M¨uller-Kirsten 和 D. K. Park, 《高能物理学杂志》2003，038（2003）。[59] L. Jin 和 Z. Song, 《物理评论 A》80，052107（2009）；《物理评论 A》85，012111（2012）；《物理学杂志A》44，375304（2011）。[60] F. Minganti、A. Miranowicz、R. W. Chhajlany 和 F. Nori, 《物理评论 A》100，062131（2019）。[61] B. Longstaff 和 E.-M. Graefe, 《物理评论 A》100，052119（2019）。[62] E. M. Graefe、H. J. Korsch 和 A. E. Niederle, 《物理评论快报》101，150408（2008）。[63] B. Longstaff 和 E.-M. Graefe, 《物理评论 A》100，052119（2019）。[64] X. Shen、F. Wang、Z. Li 和 Z. Wu, 《物理评论 A》100，062514（2019）。[65] W.-Y. Wang、B. Sun 和 J. Liu, 《物理评论 A》106，063708（2022）。[66] S. Ib´a˜nez 和 J. G. Muga, 《物理评论 A》89，033403（2014）。[67] H.-D. Liu、J. Fang 和 T.-Y. Zheng, 《理论物理通讯》68，439（2017）。[68] J. I. Cirac、M. Lewenstein、K. Mølmer 和 P. Zoller, 《物理评论 A》57，1208（1998）。[69] W. Wang、L. B. Fu 和 X. X. Yi, 《物理评论 A》75，045601（2007）。