arXiv:2301.00735v2 [math.DG] 7 Aug 2023

通过切锥等距映射揭示次黎曼流形上曲率-维数条件的失效

LUCA RIZZI 和 GIORGIO STEFANI

摘要。我们证明，在任意赋有正光滑测度的次黎曼流形上，对于相应次拉普拉斯算子的Bakry–Émery不等式

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla u\|^2) \geq \mathrm{g}(\nabla u, \nabla \Delta u) + K\|\nabla u\|^2, \quad K \in \mathbb{R},$$

意味着切锥上存在足够多的 Killing 向量场，使得切锥在每一点都必为欧几里得空间，从而在一般情形下导致曲率-维数条件失效。我们的方法不适用于非严格正测度。事实上，我们证明加权Grushin平面不满足任何曲率-维数条件，但尽管如此，它确实满足Bakry–Émery不等式的几乎处处逐点版本。正如 Pan 和 Montgomery 最近指出的，加权Grushin平面的一半满足 RCD(0，N) 条件，从而构成 RCD 框架下粘合定理的一个反例。

1. 引言与陈述

在过去二十年中，人们为将“里奇曲率下界”的概念推广到非黎曼结构，乃至推广到配备测度的一般度量空间（简称度量测度空间），付出了令人瞩目的努力。关于这一研究方向的综述，参见国际数学家大会笔记 [3] 。

关于这一问题存在两种不同的观点，分别被传统地称为拉格朗日 方法和欧拉 方法。

Lott–Villani 和 Sturm [36, 48,49]采用的是拉格朗日观点。在这一表述中，里奇曲率下界通过 Wasserstein空间上的熵泛函所满足的凸性型不等式来刻画。这类不等式被称为曲率-维数 条件，简称 CD(K, N)，其中 $K \in \mathbb{R}$ 表示曲率下界，$N \in [1, \infty]$ 表示维数上界。

欧拉观点则利用度量测度结构来定义能量形式，进而定义与之关联的扩散算子。因此，里奇曲率下界的概念通过该扩散算子的所谓 *Bakry–Émery*不等式 BE(K, N)（简称）来编码。该不等式可以用适当的*Gamma*演算来表达，参见专著 [10]。

得益于若干关键贡献 [4, 6, 7, 24],，如今已知拉格朗日方法与欧拉方法本质上等价。尤其是，CD(K, N)总是

日期：2023年8月9日。2020年数学主题分类。主要分类 53C17。次要分类 54E45，28A75。关键词与短语。次黎曼流形，CD(K, ∞)条件，Bakry–Émery不等式，无穷小希尔伯特，Grushin平面，特权坐标。1

意味着在 [25],中引入的无穷小希尔伯特度量测度空间中成立 BE(K, N)，而反向推论则需要进一步的技术假设。

这种关于曲率-维数条件的综合理论不仅与光滑黎曼流形上里奇曲率和维数的经典概念相一致，而且在带基点测度的 Gromov–Hausdorff 收敛下保持稳定。此外，它为确立通常与里奇曲率下界相关的所有结果提供了全面的方法，例如庞加莱、不等式、索博列夫不等式、对数索博列夫不等式和高斯等周不等式，以及布伦–明可夫斯基不等式、比肖普–格罗莫夫不等式和博内–迈尔斯不等式。

1.1. 次黎曼框架。 尽管上述综合曲率-维数条件涵盖了种类繁多的度量测度空间，但仍遗漏了一类重要且受到广泛研究的光滑结构——次黎曼流形族。次黎曼结构是黎曼结构的一种自然推广，其距离由定义在切丛的一个光滑子丛上的标量积所诱导，而该子丛的秩可能随流形上的位置而变化。详细介绍请参见专著 [2, 40, 45]。

沿这一方向的首个结果由 Driver–Melcher [23], 得出，他们证明了热流的 BE(K, ∞) 积分形式——所谓的逐点梯度估计——对于三维海森堡群并不成立。

在 [31], 中，Juillet 证明了所有海森堡群（甚至与之密切相关的*Grushin*平面，见 [32]）都不满足 CD(K, ∞) 性质。后来，Juillet [33] 利用 [1]中引入的充足曲线这一概念，将其结果推广到任意配备秩可能变化、且秩严格小于流形维数的次黎曼流形，以及任意正光滑测度。[31, 33]的思路是构造一个布伦–明可夫斯基不等式的反例。

[31] 的“无 CD 定理”由 Ambrosio 和第二作者在 [8, 命题 3.6]中推广到了所有*Carnot*群，所采用的技术则截然不同，即利用 [16]中得到的反向庞加莱不等式的最优形式。

对于配备等正则分布 和正光滑测度的次黎曼流形，Huang–Sun [29] 证明，对所有 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \in$ 的取值，CD(K, N)条件均不成立(1, ∞)，这与一项双利普希茨嵌入结果相矛盾。

最近，为了处理 [33], 中未涵盖的结构，Magnabosco–Rossi [37]最近将“无 CD 定理”扩展到了维数为 *2* 的几乎黎曼流形 M 或强正则情形。[37] 的方法依赖于 Cavalletti–Mondino [19] 在度量测度空间中发展出的局部化技术。

为完整呈现相关图景，我们提及，近年来，人们已在次黎曼框架下提出并研究了若干种洛特–Sturm–Villani 曲率–维数性质的替代方案。相关工作尚未尽述，关于拉格朗日方法的综述，请参见 [11–15, 38]；关于欧拉方法，请参见 [17] ；最后，关于熵不等式与热流收缩性质在度量测度群这一特殊情形下的初步联系，请参见 [47] 。

主要目标。 目前，对于一般情形下的次黎曼结构，尚缺少一个“无 CD 定理”，因为上述方法 [8, 23, 29, 31, 33, 37] 要么要求环境空间满足某些结构性假设，要么没有涵盖无限维情形 $N = \infty$。

本文的主要目标是弥补这一空缺：证明可能秩不定的次黎曼流形在赋予正光滑测度时，不满足 Lott–Sturm–Villani 或 Bakry–Émery 意义下的任何曲率界。这里，正光滑测度是指一种 Radon测度，其相对于勒贝格测度在局部坐标图中的密度是严格正的光滑函数。

1.2. **Bakry–Émery不等式的失效**。 我们策略的出发点是最弱的曲率-维数条件，现定义如下。

定义 1.1 (Bakry–Émery不等式)。 我们称赋有正光滑测度 m 的次黎曼流形 (M, d) 满足 $Bakry–Émery$BE(K,∞)不等式，其中 $K \in \mathbb{R}$，当且仅当

$$\frac{1}{2}\,\Delta(\|\nabla u\|^2) \geq \mathrm{g}(\nabla u, \nabla \Delta u) + K\|\nabla u\|^2 \quad \text{for all } u \in C^\infty(M), \tag{1.1}$$

where Δ 是相应的次拉普拉斯算子， ∇是次黎曼梯度 .

我们的首个主要结果是关于满足 Bakry–Émery不等式 (1.1) 的次黎曼结构的以下刚性性质。

定理 1.2 (无 BE)。 设 (M,d) 是一个赋有正光滑测度 m 的完备次黎曼流形。若 $(M,\mathsf{d},\mathsf{m})$ 满足某个$K \in \mathbb{R}$的 BE(K,∞) 不等式，则在每个 $x \in M$ 处都有 秩 $\mathscr{D}_x =$维数 M，因此 (M,d) 是黎曼的。

我们证明定理 1.2 的思路是证明，按照 Gromov 的意义，$(M,\ \mathsf{d})$ 在每一点的度量切锥 [26] 都是欧几里得空间。这一思路在某种程度上让人想起关于 RCD$(K,\ N)$ 空间的一项深刻结构性结果，该结果由 Mondino–Naber [39]利用 $K \in \mathbb{R}$ 和$N \in (1,\ \infty)$ 证明。然而，与此不同， [39], 定理 1.2 给出了流形每一点处度量切锥的信息。事实上，仅证明分布 $\mathscr{D}$ 在几乎处处具有黎曼结构并不足够，因为这无法排除几乎黎曼结构。

从 (1.1) 出发，我们首先放大次黎曼结构，并转而考察其度量测度切锥，从而证明 (1.1) 对 $K = 0$ 仍然成立。请注意，在这一放大过程中，m 的密度为正至关重要；否则，所得的度量切锥将带有零测度。

由此得到的放大次黎曼空间与形如 G/H 的齐性空间等距，其中 $G = \exp \mathfrak{g}$ 是与底层（有限维且分层的）括号生成向量场李代数 $\mathfrak{g}$ 相关联的 Carnot群，而 $H = \exp \mathfrak{h}$ 是对应于在原点处消失的向量场李子代数 $\mathfrak{h}$ 的子群，见 [18]。当然，最困难的情形是 H 非平凡的情形，也就是说，切锥不是 Carnot群。

此时，关键思路是证明 Bakry–Émery不等式 BE(K,∞) 蕴含切锥上特殊等距变换的存在。

定义 1.3 （次黎曼等距变换）。 设 M 是一个次黎曼流形，配有分布 $\mathscr{D}$ 和度量 g。微分同胚 $\phi\colon M \to M$ 称为等距变换，若

$$(\phi_* \mathscr{D})|_x = \mathscr{D}_{\phi(x)} \quad \text{for all } x \in M, \tag{1.2}$$

并且， ϕ_* 是相对于 g 的正交映射。若光滑向量场 V 的流 ϕ_t^V对所有 $t \in \mathbb{R}$都是等距变换，则称其为$Killing$ 。

F关于下一个陈述中 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 的精确定义，请参阅第 2.4 节。

定理 1.4 （Killing 向量场的存在性）。 设 (M,d) 是一个完备次黎曼流形，配备了正光滑测度 m。若$(M,\mathsf{d},\mathsf{m})$ 满足某个 $K\in\mathbb{R}$ 下的$\mathsf{BE}(K,\infty)$不等式，则对于任意给定点处的幂零近似，存在一个向量空间 $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{g}^1$，使得

$$\mathfrak{g}^1=\mathfrak{i}\oplus\mathfrak{h}^1 \tag{1.3}$$

其中每个 $Y\in\mathfrak{i}$ 都是一个 *Killing* 向量场。

等距变换空间 $\mathfrak{i}$ 的存在迫使李代数 $\mathfrak{g}$ 交换且具有最大秩，因此可知原流形 (M,d) 实际上是黎曼流形。

定理 1.5 （Killing 蕴含交换性）。 若存在一个由 *Killing* 向量场构成的子空间 $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{g}^1$，使得 $\mathfrak{g}^1=\mathfrak{i}\oplus\mathfrak{h}^1$，则 $\mathfrak{g}$ 是交换的。

定理 1.5 指出，若一个 Carnot群包含足够多的水平对称性，则它必定是交换的。正如从其证明中可以明显看出，定理 1.5 仅需假设对每个 $V\in\mathfrak{i}$，流 ϕ_t^V 逐点保持分布，即满足 (1.2)，而不必是等距变换。

1.3. **无穷小希尔伯特性**。 (1.1) 中的 Bakry–Émery不等式 $\mathsf{BE}(K,\infty)$ 是 $\mathsf{CD}(K,\infty)$ 条件的推论，前提是环境度量测度空间具有 [25] 中定义的无穷小希尔伯特性。

设 (X,d) 是完备可分度量空间，m 是局部有界的博雷尔测度，且 $q\in[1,\infty)$。我们将 $|\mathrm{D}u|_{w,q}\in \mathrm{L}^q(X,\mathsf{m})$ 记为可测函数 $u:X\to\mathbb{R}$ 的最小 q-上梯度，参见 [5, 第 4 节]。我们定义巴拿赫空间

$$\mathrm{W}^{1,q}(X,\mathsf{d},\mathsf{m})=\{u\in\mathrm{L}^q(X,\mathsf{m}):|\mathsf{D}u|_{w,q}\in\mathrm{L}^q(X,\mathsf{m})\}$$

其范数为

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,q}(X,\mathsf{d},\mathsf{m})}=\Big(\|u\|^q_{\mathrm{L}^q(X,\mathsf{m})}+\||\mathsf{D}u|_{w,q}\|^q_{\mathrm{L}^q(X,\mathsf{m})}\Big)^{1/q}.$$

定义 1.6 （无穷小希尔伯特性）。 若度量测度空间 $(X,\mathsf{d},\mathsf{m})$ 的 $\mathrm{W}^{1,2}(X,\mathsf{d},\mathsf{m})$ 是希尔伯特空间，则称该空间具有无穷小希尔伯特性。

最近，已有研究证明次黎曼结构具有无穷小希尔伯特性 [35]，，且这一结论对任意 Radon 测度均成立。特别地，定理 1.2 立即推出次黎曼流形的以下“无 CD 定理”，从而推广了上述所有结果 [8, 23, 29, 31, 33, 37]。

推论 1.7 (无 CD)。 设(M,d) 是赋有正光滑测度m的完备次黎曼流形。若$(M,\mathsf{d},\mathsf{m})$ 对某个$K\in\mathbb{R}$满足$\mathsf{CD}(K,\infty)$ 条件，则(M,d) 是黎曼的。

然而，由于推论 1.7 中的测度是正光滑测度，我们无需依赖 [35], 的一般结果，便可给出一个更简单且自成一体的证明，证明无穷小希尔伯特性。特别地，我们证明以下结果；事实上，在光滑测度的情形下，该结果改进了 [35, 定理 5.6] 。下文中，$\mathrm{HW}^{1,q}(M,\mathsf{m})$ 表示次黎曼 Sobolev 空间（见第 2.2 节）。

定理 1.8 (无穷小希尔伯特性)。 设 $q \in (1, \infty)$。设 (M, d) 为一个配备正光滑测度 $\mathfrak{m}$的完备次黎曼流形。以下结论成立。

(i) 对于所有 $u \in W^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$, $W^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathfrak{m}) = HW^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$, 且 $|Du|_{w,q} = k\nabla u k$ 在 M上 $\mathfrak{m}$-几乎处处成立。特别地，取 $q = 2$ 时，$(M, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 是无穷小希尔伯特的。*(ii)* 如果 $(M, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 对某个 $K \in \mathbb{R}$ 满足 *CD*(K, ∞) 条件，那么 *Bakry–Émery BE*(K, ∞) 不等式 *(1.1)* 在 M上成立。

注意，定理 1.8 对正则性较低的测度也成立，参见注 3.6。

注 1.9（几乎处处光滑测度的情形）。定理 1.8 也可以推广到如下情形：$\mathfrak{m}$ 是一个 Borel 局部有限测度，仅在 Ω 上光滑且为正，其中 $\Omega \subset M$ 是一个满足 $\mathfrak{m}(\partial\Omega) = 0$的开集。在这种情况下，对于所有 $u \in W^{1,q}(\Omega, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$，我们得到 $HW^{1,q}(\Omega, \mathsf{d}, \mathfrak{m}) = W^{1,q}(\Omega, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$，且 $|Du|_{w,q} = k\nabla u k$ 在 Ω 上 $\mathfrak{m}$-几乎处处成立。特别地，如果 $\mathfrak{m}$ 在一个闭集 Z 之外光滑且为正，且 $\mathfrak{m}(Z) = 0$，则通过一个初等逼近论证可以证明 $(M, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 是无穷小希尔伯特的；并且如果 $(M, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ 对 $K \in \mathbb{R}$ 满足 $\mathrm{CD}(K, \infty)$ 条件，那么 Bakry-Émery $\mathrm{BE}(K, \infty)$ 不等式 (1.1) 在 $M \setminus Z$ 上成立。例如，带有第 1.5 节加权测度的 Grushin平面和半平面就是这种情形。证明沿用定理 1.8 的证明思路，利用 q-上梯度的局部性，参见例如 $[5, \text{Sec. } 8.2]$以及 $[25, \text{Prop. } 2.6]$, ，并结合分布导数的类似性质。

注 1.10 （关于 Juillet 的无 CD 定理的评论）。 正如我们已经提到的，Juillet 证明了：如果一个 n维流形上的次黎曼分布的秩严格小于 n，那么相应的度量测度空间就不可能满足 $\mathrm{CD}(K, \infty)$ 条件。换言之，$\mathrm{CD}(K, \infty)$ 意味着次黎曼分布至少在某一点具有最大秩。实际上，Juillet 的论证是局部的，因此 $\mathrm{CD}(K, \infty)$ 意味着该分布必须在一个稠密点集上具有最大秩。我们的方法（推论 1.7）表明，事实上这一结论对所有 点都成立。

1.4. **“无 CD 定理”的另一种方法**。 我们提及一种关于几乎黎曼结构（即在一个闭的无处稠密奇异集之外为黎曼结构的次黎曼结构）的“无 CD 定理”的替代证明。该策略依赖于带有 $N < \infty$的 $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空间中测地线内点处度量切空间的 Gromov-Hausdorff连续性；这一结果由 Deng 在 $[22]$, 中证明

例如，考虑赋有光滑正测度的标准 Grushin 平面（在第 1.5 节中引入）。曲线 $\gamma(t) = (t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ 是其任意两点之间的一条测地线。对于每个 $t \neq 0$, $\gamma(t)$ 处的度量切空间都与欧几里得平面等距；而对于 $t = 0$, 它则与 Grushin 平面本身等距。然而，欧几里得平面与 Grushin 平面并不等距，这与连续性结果相矛盾。

这一策略有一些缺点。一方面，它依赖于 $[22]$ 中发展起来的（非平凡）理论工具。因此，这一论证在 $N = \infty$ 的情况下并不适用。另一方面，要将这一策略形式化并应用于一般的几乎黎曼结构，需要一些关于嵌入欧几里得空间的非等距嵌入结果，而我们只能在与 $[37]$ 相同的假设下证明这些结果。

1.5. **加权Grushin结构**。 当允许光滑测度的密度消失时，“无 CD 定理”便不再成立。事实上，在这种情况下会出现以下两种有趣的现象：

(A) Bakry-Émery BE(K,∞) 不等式不再蕴含 CD(K,∞) 条件；

(B) 存在满足 CD(0，N) 条件的带边界几乎黎曼结构，其中 $N \in [1,\infty]$。

我们在所谓的加权*Grushin*平面上给出了这两种现象的实例。这是 $\mathbb{R}^2$ 上由族 $\mathscr{F} = \{X,\ Y\}$ 诱导的次黎曼结构，其中

$$X = \partial_x, \quad Y = x\,\partial_y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.4}$$

诱导分布 $\mathscr{D} = \mathrm{span}\{X,\ Y\}$ 在奇异区域$S = \{x = 0\}$之外具有最大秩，在 S 上的秩为 1。由于 $[X,Y] = \partial_y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上成立，所得的次黎曼度量空间 $(\mathbb{R}^2,\ \mathsf{d})$ 是波兰空间且为测地空间。按此意义，它是几乎黎曼的：在 S 之外，该度量局部等价于由度量张量给出的黎曼度量

$$\mathrm{g} = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y, \quad x \neq 0. \tag{1.5}$$

我们赋予度量空间 $(\mathbb{R}^2,\ \mathsf{d})$ 加权勒贝格测度

$$\mathsf{m}_p = |x|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $p \in \mathbb{R}$ 是一个参数。选择 $p = -1$ 对应于黎曼密度

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{g}} = \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \quad x \neq 0, \tag{1.6}$$

使得

$$\mathsf{m}_p = e^{-V}\,\mathrm{vol}_{\mathrm{g}}, \quad V(x) = -(p+1)\log|x|, \quad x \neq 0. \tag{1.7}$$

我们称度量测度空间 $\mathbb{G}_p = (\mathbb{R}^2,\ \mathsf{d},\ \mathsf{m}_p)$ 为*(p-)*加权*Grushin*平面。

现在我们可以陈述以下结果，以说明现象（A）。

Th定理 1.11。 设 $p \in \mathbb{R}$，并令 $\mathbb{G}_p = (\mathbb{R}^2,\mathsf{d},\mathsf{m}_p)$ 为加权*Grushin*平 $e.$

（*i*）若 $p \geq 0$，则 $\mathbb{G}_p$ 不满足$\mathsf{CD}(K,\infty)$ 性质，对所有 $K \in \mathbb{R}$均如此。

（*ii*）若 $p \geq 1$，则 $\mathbb{G}_p$ 几乎处处满足$\mathsf{BE}(0,\infty)$ 不等式(1.1) .

为证明 (i)，我们将说明相应的布伦–明可夫斯基不等式不成立。事实上，$p = 0$ 的情形归功于 Juillet $[32],$，而 $p > 0$ 的情形则可通过一个简单论证得到，这一论证是 J. Pan 告诉我们的。至于断言 (ii)，则可通过直接计算得出。

稍令人惊讶的是，加权 Grushin 半平面 $\mathbb{G}_p^+$——通过将 $\mathbb{G}_p$的度量测度结构限制在（闭）半平面 $[0,\infty) \times \mathbb{R}$上得到——当 $N \in [1,\infty]$足够大时，确实满足 CD(0, N) 条件。具体而言，我们可以证明以下结果，它阐明了现象 (B)。

定理 1.12. 设 $p \geq 1$。加权 *Grushin* 半平面 $\mathbb{G}_p^+$满足 $\mathsf{CD}(0,N)$条件，当且仅当 $N \geq N_p$，其中 $N_p \in (2,\infty]$ 由下式给出

$$N_p = \frac{(p+1)^2}{p-1} + 2, \tag{1.8}$$

约定 $N_1 = \infty$。此外，$\mathbb{G}_p^+$ 是无穷小希尔伯特的，因此对于 $N \geq N_p$，它是一个$\mathsf{RCD}(0,N)$空间。

在我们完成这项工作期间，Pan 和 Montgomery [41] 指出，在 [20, 42] 中构造的里奇极限族包含上述加权格鲁申半空间作为特例。相较于 [20, 42], 的方法，我们的构造和证明方法更为直接，也能轻松得出尖锐的维数界。

1.6. **粘合定理的反例**。我们以分析所得的一项有趣的附带结果结束本引言，该结果与所谓的粘合定理有关。

Perelman 倍增定理 [43, 第 5 节2]指出，具有曲率下界的有限维亚历山德罗夫空间可以沿其边界进行倍增，得到一个具有相同曲率下界和维数的亚历山德罗夫空间。Petrunin [44, 定理 21]将这一结果推广到了亚历山德罗夫空间的粘合。

一个有趣的问题是：在 Lott–Sturm–Villani 意义下满足合成里奇曲率下界的广义度量测度空间，是否也适用这些经典结果。在 [34], 中，针对具有亚历山德罗夫曲率下界的 CD(K, N) 空间证明了粘合定理（而该结论对 MCP 空间不成立，见 [46]）。

在此我们得到，一般而言，不能从 [34] 的结果中去除曲率下界为 Alexandrov 意义下有下界这一假设。更确切地说，定理 1.11 和 1.12，以及格鲁申半平面的度量测度倍增 $\mathbb{G}_p^+$是 $\mathbb{G}_p$（见 [46,命题 6]）这一事实，推出以下推论。

推论 1.13（RCD 空间中拼接的反例）。对于所有 $N \geq 10$，都存在一个测地凸的 RCD$(0, N)$ 带边界度量测度空间，使得其度量测度倍增不满足任意 $K \in \mathbb{R}$ 的 CD(K, ∞) 条件。

在 [34, 猜想 1.6], 中，作者猜想拼接定理对于非坍缩 RCD(K, N)成立，其中 N 是度量测度空间的豪斯多夫维数。如 [21], 中所引入的，非坍缩 RCD(K, N) 空间是满足 $\mathfrak{m} = \mathscr{H}^N$ 的无穷小希尔伯特 CD(K, N) 空间，其中 $\mathscr{H}^N$ 表示 (X,d) 的 N 维豪斯多夫测度。由于带权半格鲁申空间确实是坍缩的，推论 1.13 也表明，不能从 [34, 猜想 1.6] 中去除非坍缩假设。

1.7. **致谢**。我们感谢 Michel Bonnefont 与我们进行了富有成效的讨论，尤其是他向我们指出了 [23] 中的一些技术细节，这些细节启发了定理 1.2 证明策略的构思。

本研究获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：945655）以及 ANR 资助项目“RAGE”（ANR-18-CE40-0012）的资助。

第二作者是意大利国家高等数学研究所（INdAM）、数学分析、概率及其应用国家小组（GNAMPA）的成员，并获得 INdAM–GNAMPA 2022 项目次黎曼结构中的几何分析（CUP 编号_E55F22000270001）以及 INdAM–GNAMPA 2023 项目泛函与非局部算子的变分问题（CUP 编号_E53C22001930001）的部分资助。

2. 预备知识

本节介绍一些记号，并回顾关于次黎曼流形和曲率-维数条件的一些结果。

2.1. 次黎曼结构。对于 $L \in \mathbb{N}$，设 $\mathscr{F} = \{X_1, \dots, X_L\}$ 是定义在光滑 n 维流形 M，$n \geq 2$ 上的一族光滑向量场。（广义）次黎曼分布由该族 $\mathscr{F}$ 诱导，其定义为

$$\mathscr{D} = \bigsqcup_{x \in M} \mathscr{D}_x, \quad \mathscr{D}_x = \operatorname{span}\{X_1|_x, \dots, X_L|_x\} \subset T_xM, \quad x \in M. \tag{2.1}$$

请注意，我们不要求 $\mathscr{D}_x$ 的维数在 $x \in M$ 变化时保持不变，也就是说，我们可以考虑秩变化分布。按照惯例滥用一下记号，我们令

$$\Gamma(\mathscr{D}) = C^\infty\text{-module generated by } \mathscr{F}.$$

注意，对于任意光滑向量场 V，有

$$V \in \Gamma(\mathscr{D}) \implies V_x \in \mathscr{D}_x \text{ for all } x \in M,$$

但反过来一般不成立。我们令

$$\|V\|_x = \min\left\{|u| : u \in \mathbb{R}^L \text{ such that } V = \sum_{i=1}^{L} u_i\, X_i|_x,\ X_i \in \mathscr{F}\right\} \tag{2.2}$$

只要 $V \in \mathscr{D}$ 和 $x \in M$。由族 $\mathscr{F}$ 诱导的范数$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_x$ 满足平行四边形法则，因此它由一个标量积诱导

$$\mathrm{g}_x \colon \mathscr{D}_x \times \mathscr{D}_x \to \mathbb{R}.$$

可容许曲线是图表中的局部 Lipschitz 路径 $\gamma\colon [0,1] \to M$，满足存在一个控制 $u \in \mathbf{L}^\infty([0,1]; \mathbb{R}^L)$，使得

$$\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^{L} u_i(t) X_i|_{\gamma(t)} \quad \text{for a.e. } t \in [0,1].$$

可容许曲线 γ 的长度 通过范数 (2.2) 定义为

$$\operatorname{length}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)}\, \mathrm{d}t$$

而 x 与 $y \in M$ 之间的卡诺–卡拉西奥多里（或 子黎曼）距离为 是

$$\mathsf{d}(x,y) = \inf\{\operatorname{length}(\gamma) : \gamma \text{ admissible with } \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}.$$

我们假设族 $\mathscr{F}$ 满足括号生成条件

$$T_xM = \{X|_x : X \in \operatorname{Lie}(\mathscr{F})\} \quad \text{for all } x \in M, \tag{2.3}$$

其中 Lie($\mathscr{F}$) 是包含 $\mathscr{F}$ 的 M 上向量场的最小李子代数，即，

$$\operatorname{Lie}(\mathscr{F}) = \operatorname{span}\Big\{[X_{i_1}, \dots, [X_{i_{j-1}}, X_{i_j}]] : X_{i_\ell} \in \mathscr{F},\ j \in \mathbb{N}\Big\}.$$

在假设 (2.3) 下，乔–拉舍夫斯基定理表明，d 是定义在 M 上的良定义有限距离，并诱导出与环境流形相同的拓扑。

2.2. 梯度、次拉普拉斯算子和索 Sobolev 空间。 函数 $u \in C^\infty(M)$ 的梯度 是满足以下条件的唯一向量场 $\nabla u \in \Gamma(\mathscr{D})$:

$$\mathrm{g}(\nabla u, V) = du(V) \quad \text{for all } V \in \Gamma(\mathscr{D}). \tag{2.4}$$

可以验证， ∇u 可以全局表示为

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{L} X_i u \, X_i, \quad \text{with} \quad \|\nabla u\|^2 = \sum_{i=1}^{L} (X_i u)^2, \tag{2.5}$$

e即使族 $\mathscr{F}$ 不是线性无关的，这一点也成立；证明见推论 A.2。

我们在流形 M 上赋予一个正的光滑测度 m。函数 $u \in C^\infty(M)$的次拉普拉斯算子是满足下式的唯一函数 $\Delta u \in C^\infty(M)$:

$$\int_M \mathrm{g}(\nabla u, \nabla v) \, \mathrm{d}\mathsf{m} = -\int_M v \, \Delta u \, \mathrm{d}\mathsf{m} \tag{2.6}$$

对所有 $v \in C_c^\infty(M)$均成立。可以验证， Δu 可以全局表示为

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{L} \left(X_i^2 u + X_i u \, \mathrm{div}_{\mathsf{m}}(X_i) \right), \tag{2.7}$$

证明见推论 A.2。在 (2.7) 中， $\mathrm{div}_{\mathsf{m}} V$ 表示相对于 m 计算的向量场 V的散度，即

$$\int_M v \, \mathrm{div}_{\mathsf{m}}(V) \, \mathrm{d}\mathsf{m} = -\int_M \mathrm{g}(\nabla v, V) \, \mathrm{d}\mathsf{m} \quad \text{for all } v \in C_c^\infty(M).$$

对于 $q \in [1, \infty)$，我们称 $u \in \mathrm{L}^1{}_{\mathrm{loc}}(M, \mathsf{m})$ 具有 q-可积的 分布意义下的 X_i-导数，如果存在一个函数 $X_i u \in \mathrm{L}^q(M,\mathsf{m})$，使得

$$\int_M v X_i u \, \mathrm{d}\mathsf{m} = \int_M u X_i^* v \, \mathrm{d}\mathsf{m} \quad \text{for all } v \in C_c^\infty(M),$$

w此处 $X_i^* v = -X_i v - v\mathrm{div}_{\mathsf{m}}(X_i)$ 表示 X_i 的伴随作用。因此我们令

$$\mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{m}) = \{u \in \mathrm{L}^q(M, \mathsf{m}) : X_i u \in \mathrm{L}^q(M, \mathsf{m}), \ i = 1, \ldots, L\}$$

由族 $\mathscr{F}$ 和 M 上的测度 m 所诱导的通常的 水平 $\mathrm{W}^{1,q}$ 索博列夫空间，赋予自然范数

$$\|u\|_{\mathrm{HW}^{1,q}(M,\mathsf{m})} = \left(\|u\|^q_{\mathrm{L}^q(M,\mathsf{m})} + \|\nabla u\|^q_{\mathrm{L}^q(M,\mathsf{m})} \right)^{1/q}$$

L对所有 $u \in \mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{m})$ 均成立，其中 $\nabla u = \sum X_i u \, X_i$ 与 (2.5) 一致，且$i=1$

$$\|\nabla u\|^q_{\mathrm{L}^q(M,\mathsf{m})} = \int_M \|\nabla u\|^q \, \mathrm{d}\mathsf{m}.$$

2.3. 特权坐标。 沿用 [18, 30], 的做法，我们引入特权坐标，这是描述次黎曼流形切锥的一项基本工具。

Give对于多重指标 $I \in \{1, \ldots, L\}^{\times i}$, $i \in \mathbb{N}$，我们令 $|I| = i$ 表示其长度，并设

$$X_I = [X_{I_1}, [\ldots, [X_{I_{i-1}}, X_{I_i}]]].$$

因此，我们定义

$$\mathscr{D}^i_x = \mathrm{span}\{X_I|_x : |I| \le i\} \tag{2.8}$$

and

$$k_i(x) = \dim \mathscr{D}^i_x$$

对所有 $x \in M$和 $i \in \mathbb{N}$均成立。特别地， $\mathscr{D}^0_x = \{0\}$，且 $\mathscr{D}^1_x = \mathscr{D}_x$如 (2.1) 所示，对所有 $x \in M$均成立。(2.8) 中定义的空间自然地给出如下过滤：

$$\{0\} = \mathscr{D}^0_x \subset \mathscr{D}^1_x \subset \cdots \subset \mathscr{D}^{s(x)}_x = T_x M$$

对所有 $x \in M$，其中 $s = s(x) \in \mathbb{N}$ 是点 x处次黎曼结构的步长。如果每个空间 $\mathscr{D}^i_y$ 的维数在 x 的某个开邻域内随 $y \in M$ 变化保持不变，则称 $x \in M$ 为正则点；否则称 x 为奇异点。

定义 2.1（适配坐标与特权坐标）。设 $o \in M$，且 $U \subset M$ 是 o的一个开邻域。若由微分同胚 $z\colon U \to \mathbb{R}^n$给出的局部坐标在 o处是适配的，则称这些坐标在 o处居中，即 $z(o) = 0$，并且 $\partial_{z_1}|_0, \dots, \partial_{z_{k_i}}|_0$在这些坐标下对所有 $i = 1, \dots, s(o)$构成 $\mathscr{D}^i_o$的一个基。若适配坐标 z_i 满足 $\partial_{z_i}|_0 \in \mathscr{D}^j_o \setminus \mathscr{D}^{j-1}_o$，则称其权重为 $w_i = j$。此外，如果坐标 z 在 o 处适配，且进一步有 $z_i(x) = O(\mathsf{d}(x,o)^{w_i})$ 对所有 $x \in U$和 $i = 1, \dots, n$成立，则称其在 o 处为特权坐标。

特权坐标在任意点的某个邻域内都存在，见 [18, 定理 4.15]。

2.4. 幂零近似。 从现在起，我们固定一组特权坐标$z\colon U \to \mathbb{R}^n$ 在点 $o \in M$ 附近，意义同定义 2.1。一般性不失，我们将坐标域 $U \subset M$ 与 $\mathbb{R}^n$ 等同，并将基点 $o \in M$与原点 $0 \in \mathbb{R}^n$等同。同样，将 $\mathscr{F}$ 中定义在 U 上的向量场与 $\mathbb{R}^n$上的向量场等同，并将次黎曼距离 d 在 U 上的限制与 $\mathbb{R}^n$上的一个距离函数等同；该距离函数由族 $\mathscr{F}$诱导，我们仍沿用相同记号。

在 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ 上，对 $\lambda \geq 0$，我们定义一族膨胀，令

$$\mathrm{dil}_\lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{dil}_\lambda(z_1, \dots, z_n) = (\lambda^{w_1} z_1, \dots, \lambda^{w_n} z_n)$$

对所有 $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$，其中 w_i 是定义 2.1 给出的权重。若微分算子 P 是齐次的，次数为 $-d \in \mathbb{Z}$，则称

$$P(f \circ \mathrm{dil}_\lambda) = \lambda^{-d}(Pf) \circ \mathrm{dil}_\lambda \quad \text{for all } \lambda > 0 \text{ and } f \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.9}$$

注意，单项式 z_i 的齐次度为 w_i，而向量场 ∂_{z_i} 的齐次度为 $-w_i$，其中 $i = 1, \dots, n$。因此，微分算子

$$z_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\mu_n} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}, \qquad \nu_i, \mu_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

是齐次度为 $\sum_{i=1}^n w_i(\mu_i - \nu_i)$ 的微分算子。更多详情请参见 [18, 第 5] 节。

现在我们可以引入新的族

$$\widehat{\mathscr{F}} = \left\{\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_L\right\}$$

通过定义

$$\widehat{X}_i = \lim_{\varepsilon \to 0} X_i^\varepsilon, \quad X_i^\varepsilon = \varepsilon\, (\mathrm{dil}_{1/\varepsilon})_* X_i, \tag{2.10}$$

对于所有 $i = 1$、……、L，其中 $(\mathrm{dil}^{1/\varepsilon})_*$ 表示通过膨胀映射 $\mathrm{dil}^{1/\varepsilon}$的微分得到的通常推前，参见 [18, 第 5 节3]。(2.10) 中的收敛实际上可以表述得更加精确，即

$$X_i^\varepsilon = \widehat{X}_i + \mathscr{R}_i^\varepsilon, \quad i = 1, \dots, L,$$

其中，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\mathscr{R}_i^\varepsilon$ 在局部一致地收敛于零，参见 [18, 定理 5.19]。

$\widehat{\ }$族 $\mathscr{F}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的完备向量场集合，具有次数 -1，且系数为多项式；它可以理解为通过膨胀放大 $\mathscr{F}$ 后得到的“主部”。由于 $\mathscr{F}$ 满足括号生成条件 (2.3)，新的族 $\widehat{\ }\mathscr{F}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的所有点处也满足括号生成条件，因此诱导出一个有限的次黎曼距离 d，参见 [18, 命题 5.17]。由此得到的 n 维次黎曼结构 $\widehat{\ }(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ 称为 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ 在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处的幂零近似。

族 $\widehat{\mathscr{F}} = \left\{\widehat{X}_1、\dots\dots、\widehat{X}_L\right\}$ 生成一个有限维分层李代数

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\widehat{\mathscr{F}}) = \mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^s$$

步长为 $s = s(0) \in \mathbb{N}$，其中分次由向量场的次数给出，具体定义见 (2.9)，也就是说，层 $\mathfrak{g}^i$ 对应于相对于膨胀次数为 $-i$ 的齐次向量场，见 [18, 第 54]节。特别地，$\mathfrak{g}^1 = \mathrm{span}\left\{\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_L\right\}$，因此 $\mathfrak{g}$ 由其第一层生成，即，

$$\mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^j], \qquad \forall j = 1, \dots, s-1. \tag{2.11}$$

最后，定义在 0 处消失的向量场构成的李子代数，

$$\mathfrak{h} = \left\{\widehat{X} \in \mathfrak{g} : \widehat{X}|_0 = 0\right\} = \mathfrak{h}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}^s,$$

它继承了 $\mathfrak{g}$的分次，

$$\mathfrak{h}^{j+1} = [\mathfrak{h}^1, \mathfrak{h}^j], \qquad \forall j = 1, \dots, s-1. \tag{2.12}$$

$\widehat{\ }$一个基本事实是，[18, 定理 5.21] 表明，幂零近似 $\widehat{\ }(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ 与齐性次黎曼空间 G/H微分同胚，其中 G 是 Carnot群 $G = \exp \mathfrak{g}$ （具体而言，它实现为由 $\mathfrak{g}$的向量场流构成、从右侧作用于 $\mathbb{R}^n$ 的子群），而 $H = \exp \mathfrak{h}$ 是由 $\mathfrak{h}$诱导的卡诺子群。

特别地，如果 $0 \in \mathbb{R}^n$ 是正则点，那么 $H = \{0\}$，因此幂零近似 $\widehat{\ }(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ 与 Carnot群 G 微分同胚，参见 [18, 命题 5.22]。

回顾一下，原流形 M 上的光滑测度 m 可以与 $U \simeq \mathbb{R}^n$ 上的光滑测度等同起来，我们仍使用相同的记号。特别地，m 关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 维勒贝格测度 $\mathscr{L}^n$ 绝对连续，其中 $\mathsf{m} = \rho\,\mathscr{L}^n$，这里 ρ 是某个正的光滑函数：$\mathbb{R}^n \to (0, \infty)$。幂零近似上的相应放大测度自然定义为

$$\widehat{\mathsf{m}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathsf{m}^\varepsilon = \rho(0)\,\mathscr{L}^n, \quad \mathsf{m}^\varepsilon = \varepsilon^Q\,(\mathrm{dil}_{1/\varepsilon})_\# \mathsf{m},$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中测度的弱* 收敛意义下，其中

$$Q = \sum_{i=1}^n i\,w_i \in \mathbb{N}$$

$\widehat{\ }$是 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ 的所谓齐次维数，而 $(\mathrm{dil}^{1/\varepsilon})_\#$ 表示通过膨胀映射 $\mathrm{dil}^{1/\varepsilon}$在测度论意义下的推前。因此，不失一般性，我们可以假设 $\rho(0) = 1$，从而赋予 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ n-$\widehat{\ }$维勒贝格测度。注意，对所有 $i = 1, \dots, L$，$\mathrm{div}_{\mathscr{L}^n} X_i = 0$，因为$\widehat{\ }$每个 X_i 都是 -1次齐次的。因此，由 (2.7)，函数$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的次拉普拉斯算子可全局表示为

$$\widehat{\Delta} u = \sum_{i=1}^{L} \widehat{X}_i^2 u. \tag{2.13}$$

$\widehat{\ }$值得注意的是，由幂零近似 $(\mathbb{R}^n, \mathsf{d})$ 所诱导的度量空间实际上与度量空间 (M, d) 在 $o \in M$ 处的度量切锥重合（按 Gromov 的意义） [26], ；精确表述见 [18, 定理 7.36] 。事实上，由 (2.10) 中定义的向量场 X_i^ε、$i = 1$、.....、L、$\widehat{\ }$所诱导的子黎曼距离 d^ε，在紧集上一致收敛于距离 d，当 $\varepsilon \to 0$。

不难验证，带基点的度量测度空间族 $\{(\mathbb{R}^n, \mathsf{d}^\varepsilon, \mathsf{m}^\varepsilon, 0)\}_{\varepsilon>0}$ 收敛到带基点的度量测度空间 $(\mathbb{R}^n, \mathsf{d}_{\mathscr{L}^n}, 0)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，在带基点测度的格罗莫夫–豪斯多夫拓扑下收敛；详情见 [13,第 10 节。3]

2.5. 曲率-维数条件。 我们在本节最后回顾文献 $[36, 48, 49]$ 中引入的曲率-维数条件的定义。

在一个波兰度量空间（即，可分且完备的度量空间）(X,d)上，令 $\mathscr{P}(X)$ 表示 X 上的概率博雷尔测度集合，并定义*Wasserstein*（扩展）距离 W_2

$$\mathsf{W}_2^2(\mu, \nu) = \inf\left\{ \int_{X\times X} \mathsf{d}^2(x, y)\, \mathrm{d}\pi : \pi \in \mathsf{Plan}(\mu, \nu) \right\} \in [0, \infty],$$

对于 $\mu, \nu \in \mathscr{P}(X)$，其中

$$\mathsf{Plan}(\mu, \nu) = \{\pi \in \mathscr{P}(X \times X) : (\mathrm{p}_1)_\#\pi = \mu,\ (\mathrm{p}_2)_\#\pi = \nu\},$$

其中 p_i：$X \times X \to X$, $i = 1, 2$ 是到各个分量上的投影，$T_\#\mu \in \mathscr{P}(Y)$ 表示由任意 μ-可测映射 T：$X \to X$ 所给出的推前测度。函数 W_2 是*Wasserstein*空间上的距离

$$\mathscr{P}_2(X) = \left\{ \mu \in \mathscr{P}(X) : \int_X \mathsf{d}^2(x, x_0)\, \mathrm{d}\mu(x) < \infty \text{ for some, and thus any, } x_0 \in X \right\}.$$

注意，$(\mathscr{P}_2(X), \mathsf{W}_2)$ 是一个波兰度量空间；只要 (X,d) 是测地的，它也是测地的。此外，令 $\mathsf{Geo}(X)$ 表示 (X, d) 的测地线集合，即满足 $\mathsf{d}(\gamma_s, \gamma_t) = |s-t|\, \mathsf{d}(\gamma_0, \gamma_1)$ 的曲线 γ：$[0, 1] \to X$，其中对所有 $s, t \in [0, 1]$ 均成立。任意 W_2-测地线 μ：$[0, 1] \to \mathscr{P}_2(X)$ 都可以（可能不唯一地）表示为 $\mu_t = (e_t)_\sharp \nu$，其中 $\nu \in \mathscr{P}(\mathsf{Geo}(X))$，这里 e_t：$\mathsf{Geo}(X) \to X$ 是在时刻 $t \in [0, 1]$ 的求值映射。

我们在度量空间（X，d）上赋予一个非负的博雷尔测度 m，使得

$$\mathsf{m} \text{ is finite on bounded sets and } \mathrm{supp}(\mathsf{m}) = X.$$

We 通过令下式定义（相对）熵泛函 Ent_m：$\mathscr{P}_2(X) \to [-\infty, +\infty]$

$$\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu) = \int_X \rho \log \rho\, \mathsf{dm}$$

如果 $\mu = \rho\mathsf{m}$ 且 $\rho\log\, \rho \in \mathsf{L}^1(X, \mathsf{m})$，而我们在其他情况下设 $\mathsf{Ent}_\mathsf{m}(\mu) = +\infty$。

定义 2.2 (CD(K，∞) 性质)。我们称度量测度空间 (X，d，m) 满足 CD(K，∞) 性质，如果对于任意满足 $\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_i) < +\infty, i = 0,\ 1$ 的 $\mu_0,\ \mu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$，都存在一条连接它们的 W_2-测地线 $[0,1] \ni s \mapsto \mu_s \in \mathscr{P}_2(X)$，使得

$$\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_s) \le (1-s)\,\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_0) + s\,\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}(\mu_1) - \frac{K}{2}\,s(1-s)\,\mathsf{W}_2^2(\mu_0,\mu_1) \tag{2.14}$$

对于每个 $s \in [0,1]$。

下文将回顾：式 (2.14) 中 $\mathsf{Ent}_{\mathsf{m}}$ 的测地线 K-凸性可以得到强化，从而额外编码空间维数的上界。对于 $N \in (1,\ \infty)$，记

$$S_N(\mu,\mathsf{m}) = -\int_X \rho^{-1/N}\,\mathrm{d}\mu, \qquad \mu = \rho\mathsf{m} + \mu^{\perp},$$

为相对于 m 的 $\mu \in \mathscr{P}_2(X)$ 的 N-*Rényi*熵，其中 $\mu = \rho\mathsf{m} + \mu^{\perp}$ 表示相对于 m 的 μ 的 Radon–Nikodym 分解。

定义 2.3 (CD(K，N) 性质)：我们称度量测度空间 (X，d，m) 满足 CD(K，N) 性质（对某个 $N \in [1,\infty)$），如果对于任意带有 $\mu_i = \rho_i\mathsf{m}$ 的 $\mu_0,\ \mu_1 \in \mathscr{P}_2(X),\ i = 0,\ 1$，存在一条连接它们的 W_2-测地线 $[0,1] \ni s \mapsto \mu_s \in \mathscr{P}_2(X)$，满足 $\mu_s = (e_s)_\sharp \nu$，其中某个 $\nu \in \mathscr{P}(\mathrm{Geo}(X))$ 使得

$$S_{N'}(\mu_s,\mathsf{m}) \le -\int_{\mathrm{Geo}(X)} \left[\tau_{K,N'}^{(1-s)}(\mathsf{d}(\gamma_0,\gamma_1))\rho_0^{-1/N'}(\gamma_0) + \tau_{K,N'}^{(s)}(\mathsf{d}(\gamma_0,\gamma_1))\rho_1^{-1/N'}(\gamma_1)\right]\mathrm{d}\nu(\gamma)$$

对任意 $s \in [0,1]$、$N' \ge N$。其中，$\tau^{(s)}_{K,\,N}$是模型畸变系数，见 [49,第 137] 页。

备注 2.4。CD($0, N$) 对应于 N'-Rényi熵的凸性

$$S_{N'}(\mu_s,\mathsf{m}) \le (1-s)S_{N'}(\mu_0,\mathsf{m}) + sS_{N'}(\mu_1,\mathsf{m}),$$

对任意 $s \in [0,1]$和 $N' \ge N$，其中 $\mu_0,\mu_1 \in \mathscr{P}_2(X)$ 如定义 2.3 所述。

备注 2.5。对于 CD(K, N) 度量测度空间，K和 N分别表示 Ricci 张量的下界和维数的上界，并且我们有

$$\begin{aligned} \mathsf{CD}(K,N) &\implies \mathsf{CD}(K,N') \qquad \text{for all } N' \ge N,\ N,N' \in [1,\infty], \\ \mathsf{CD}(K,N) &\implies \mathsf{CD}(K',N) \qquad \text{for all } K' \le K,\ K,K' \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

特别地，对于固定的 $K \in \mathbb{R}$，条件 (2.14) 中的 CD(K,∞) 条件是所有曲率-维数条件中最弱的。

3. 证明

我们首先证明定理 1.4 和 1.5，由此可立即推出定理 1.2。

3.1. 定理 1.4 的证明。

我们将证明分为四个步骤。

‾步骤 *1*：通过放大过渡到幂零近似。令 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ 为 $(M, \mathscr{F})$ 在某个固定点 $o \in M$ 处的幂零近似，如第 2.4 节所述。令 $u \in C_c^\infty(M)$，并且不失一般性地假设 $\operatorname{supp} u$ 包含于 $o \in M$ 处特权坐标的定义域内。特别地，我们将 u 识别为定义在 $\mathbb{R}^n$上的 C_c^∞ 函数。现在将 (1.1) 应用于伸缩函数

$$u_\varepsilon = u \circ \mathrm{dil}_{1/\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{for } \varepsilon > 0,$$

并在点 $\mathrm{dil}_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^n$处计算该表达式。利用推论 A.2 中的表达式，可得

$$\sum_{i,j=1}^{L} X_i^\varepsilon u \left(X_{ijj}^\varepsilon u - X_{jji}^\varepsilon u \right) - (X_{ij}^\varepsilon u)^2 + \mathscr{R}_{i,j}^\varepsilon u \leq 0, \tag{3.1}$$

其中，X_i^ε与 (2.10) 中相同；当 $X_{ijk} = X_i X_j X_k$ 时，$i, j, k \in \{1, \ldots\ldots, L\}$；而 $\mathscr{R}_{i,j}^\varepsilon$是一个局部一致趋于零的余项，趋于 $\varepsilon \to 0$。因此，在 (3.1) 中令 $\varepsilon \to 0$，由 (2.10) 中的收敛性可得

$$\sum_{i,j=1}^{L} \widehat{X}_i u \left(\widehat{X}_{ijj} u - \widehat{X}_{jji} u \right) - \left(\widehat{X}_{ij} u \right)^2 \leq 0, \tag{3.2}$$

‾这就是 (1.1)，其中 $K = 0$ 对应于幂零近似（$\mathbb{R}^n$，$\mathscr{F}$）。

步骤 *2*：利用齐次结构进行改进。现在我们证明 (3.2) 蕴含一个更强的恒等式，见下文 (3.4)：该式由 (3.2) 去掉平方项并将不等式改为等式得到。特别地，回顾定义 2.1 中（特权）坐标权重的定义。我们取形式如下的 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$u = \alpha + \gamma,$$

其中 α 和 γ 分别是加权次数为 1 和至少为 3 的齐次多项式。由于当多重指标满足 $|I| \geq 2$ 时，$X_I \alpha = 0$（见 [18, 命题 4.10]），我们可以取 (3.2) 中齐次次数最低的项，得到

$$\sum_{i,j=1}^{L} \widehat{X}_i \alpha \left(\widehat{X}_{ijj} \gamma - \widehat{X}_{jji} \gamma \right) = \sum_{i=1}^{L} \widehat{X}_i \alpha \left[\widehat{X}_i, \widehat{\Delta} \right] (\gamma) \leq 0$$

‸对所有这样的 α 和 γ均成立。在第二个等式中，我们用到了次拉普拉斯算子 Δ 是如 (2.13) 所示的平方和这一事实。由于 α 可以替换为 $-\alpha$，因此必有

$$\sum_{i=1}^{L} \widehat{X}_i \alpha \left[\widehat{X}_i, \widehat{\Delta} \right] (\gamma) = 0. \tag{3.3}$$

‾注意到 $X_i \alpha$ 是 0 次齐次的，因而是常函数，我们可以将 (3.3) 改写为

$$\left[\sum_{i=1}^{L} \widehat{X}_i \alpha \, \widehat{X}_i, \widehat{\Delta} \right] (\gamma) = 0, \tag{3.4}$$

这正是所寻求的对 (3.2) 的改进。

步骤 3：空间的构造 $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}^1$。令 $\mathbb{P}_1^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上加权次数为 1 的齐次多项式所构成的向量空间。注意到

$$\mathbb{P}_1^n = \operatorname{span}\{z_i \mid i = 1, \dots, k_1\}, \quad k_1 = \dim \mathscr{D}|_0,$$

也就是说，$\mathbb{P}_1^n$ 由最低权重坐标所对应的单项式生成。现在我们定义一个线性映射 ϕ: $\mathbb{P}_1^n \to \mathfrak{g}^1$，令

$$\phi[\alpha] = \widehat{\nabla}\alpha = \sum_{i=1}^{L} \widehat{X}_i \alpha \, \widehat{X}_i$$

对所有 $\alpha \in \mathbb{P}_1^n$ 均成立（回顾推论 A.2）。我们声称 ϕ 是单射。事实上，若对某个 $\alpha \in \mathbb{P}_1^n$ 有 $\phi[\alpha] = 0$，则对多项式 α作用算子 $\phi[\alpha]$，得到

$$0 = \phi[\alpha](\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{L} \widehat{X}_i \alpha \, \widehat{X}_i \right)(\alpha) = \sum_{i=1}^{L} (\widehat{X}_i \alpha)^2.$$

因此，对所有 $i = 1, \dots, L$，均有 $X_i\alpha = 0$。于是，α的加权次数至少为 2。然而，由于 α 是加权次数为 1 的齐次多项式，我们得出 $\alpha = 0$，从而证明 $\ker \phi = \{0\}$。因此我们可以定义子空间

$$\mathfrak{i} = \phi[\mathbb{P}_1^n] \subset \mathfrak{g}^1.$$

根据 (3.4)，任意 $X \in \mathfrak{i}$ 都满足：对于任意次数至少为 3 的齐次多项式 γ，$[X, \Delta](\gamma) = 0$。利用第 2.4 节给出的定义，我们注意到，加权次数为 $-d \in \mathbb{Z}$ 的齐次微分算子 P具有如下形式

$$P = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu,\nu} z^{\mu} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z^{\nu}}, \tag{3.5}$$

其中 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$，$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$，$\mu_i, \nu_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$a_{\mu,\nu} \in \mathbb{R}$，且 (3.5) 中每一项的加权次数都等于 $-d$，即 $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \nu_i) w_i = -d$。

因此，X 和 Δ 分别是阶为 1 和 -2 的齐次微分算子，因此 $[X, \Delta]$ 的阶为 -3，参见命题 5.16]。由此可知，$[X, \Delta] = 0$ 作为微分算子作用于 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$。

现在我们证明 (1.3)，即 $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{h}^1$。首先注意到 $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$。事实上，若对于某个 $\alpha \in \mathbb{P}_1^n$ 有 $\phi[\alpha] \in \mathfrak{h}$，也就是说 $\phi[\alpha]|_0 = 0$，则对所有 $i = 1, \dots, L$ 都有 $X_i\alpha|_0 = 0$。由于 $X_i\alpha$ 是常函数，这意味着 $\phi[\alpha] = 0$，正如所声称的那样。因此，由于 $\dim \mathfrak{i} = \dim \mathbb{P}_1^n = k_1$，根据下文的引理 3.1，我们必有 $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{h}^1$。

引理 3.1。子空间 $\mathfrak{h}^1 \subset \mathfrak{g}^1$ 的余维为 k_1。

证明。设 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}^1$ 满足 $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{h}^1$。我们断言 $\dim \mathfrak{v}|_0 = \dim \mathfrak{v}$，其中 $\dim \mathfrak{v}|_0$是 $\mathfrak{v}|_0$ 作为 $T_0\mathbb{R}^n$的子空间的维数，而 $\dim \mathfrak{v}$ 是 $\mathfrak{v}$ 作为 $\mathfrak{g}$的子空间的维数。事实上，显然有不等式 $\dim \mathfrak{v}|_0 \leq \dim \mathfrak{v}$。另一方面，若严格不等式成立，则 $\mathfrak{v}$必定包含在零点处消失的非零向量场，这与 $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$这一事实矛盾。因此，由于 $\dim \mathfrak{g}^1|_0 = k_1$ 且 $\dim \mathfrak{h}^1|_0 = 0$，可得 $\dim \mathfrak{v} = \dim \mathfrak{v}|_0 = k_1$，从而证明了该引理。□

步骤 *4*：证明 *Killing* 性质。到目前为止，我们已经证明存在 $\mathfrak{i}$ 使得$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{h}^1$，并且任意元素 $Y \in \mathfrak{i}$ 都与次拉普拉斯算子 $\widehat{\Delta}$交换。现在我们证明，所有这样的 Y 都是 Killing 向量场。

设 $Y \in \mathfrak{i}$。由于 $[Y, \widehat{\Delta}] = 0$，当作用于光滑函数时，对于 $s \in \mathbb{R}$，诱导的流 ϕ_s^Y 与 $\widehat{\Delta}$ 可交换，即

$$\widehat{\Delta}(u \circ \phi_s^Y) = (\widehat{\Delta} u) \circ \phi_s^Y \tag{3.6}$$

对所有 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $s \in \mathbb{R}$。回忆次黎曼 Hamilton 函数 $H : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，

$$\widehat{H}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L} \langle \lambda, \widehat{X}_i \rangle^2, \tag{3.7}$$

对所有 $\lambda \in T^*\mathbb{R}^n$。由 (2.13)，$H$ 是 Δ 的主符号。因此，由 (3.6) 可得

$$\widehat{H} \circ \left(\phi_s^Y\right)^* = \widehat{H},$$

对所有 $s \in \mathbb{R}$，其中星号表示拉回，因此 $\left(\phi_s^Y\right)^*$ 是 $T^*\mathbb{R}^n$ 上的微分同胚。这意味着 ϕ_s^Y 是等距变换，下面予以证明。事实上，对于任意给定的 $x \in \mathbb{R}^n$，限制 $\widehat{H}|_{T_x^*\mathbb{R}^n}$ 是 $T_x^*\mathbb{R}^n$ 上的二次型，因此 $(\phi_s^Y)^*$ 必须保持其核，即

$$(\phi_s^Y)^* \ker \widehat{H}|_{T^*_{\phi_s^Y(x)}\mathbb{R}^n} = \ker \widehat{H}|_{T_x^*\mathbb{R}^n} \tag{3.8}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立。由 (3.7)，有 $\ker \widehat{H}|_{T_x^*\mathbb{R}^n} = \widehat{\mathscr{D}}_x^\perp$，其中 $\perp$ 表示一个向量空间的湮灭子。由对偶性，从 (3.8) 可得 $(\phi_s^Y)_* \widehat{\mathscr{D}}_x = \widehat{\mathscr{D}}_{\phi_s^Y(x)}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立，这正是 (1.2) 所要求的。最后，对于 $\lambda \in T_x^* M$，令 $\lambda^\# \in \mathscr{D}_x$ 由下式唯一确定：$\mathbf{g}_x(\lambda^\#, V) = \mathbf{h}\lambda, V\mathbf{i}_x$ 对所有 $V \in \mathscr{D}_x$ 均成立，并注意到映射 $\lambda \mapsto \lambda^\#$ 在 $\mathscr{D}_x$ 上是满射。于是有 $\mathbf{k}\lambda^\#\mathbf{k}_x^2 = 2\widehat{H}(\lambda)$，见引理 A.1。因此，由于 $(\phi_s^Y)^*$ 保持 $\widehat{H}$，映射 $(\phi_s^Y)_*$ 保持次黎曼范数，进而保持 $\mathbf{g}$。这意味着 ϕ_s^Y 是一个等距变换，从而完成定理 1.4 的证明。□

3.2. **定理 1.5 的证明**。我们断言

$$\mathfrak{g}^j = \mathfrak{h}^j \quad \text{for all } j \geq 2. \tag{3.9}$$

注意，(3.9) 足以完成定理 1.5 的证明，因为由 (3.9) 结合 (2.11) 和 (2.12)，我们立即得到

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{h}^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}^s.$$

特别地，我们推得 $\mathfrak{g}|_0 = \mathfrak{g}^1|_0$，这又意味着 $\mathfrak{g}$ 必须是交换的，否则括号生成条件将不成立。为证明 (3.9)，我们按如下方式对 $j \geq 2$ 进行归纳。

基础情形的证明 $j = 2$。我们先证明 (3.9) 中的基础情形 $j = 2$。为此，设 $\widehat{X} \in \mathfrak{i}$ 和 $\widehat{Y} \in \mathfrak{g}^1$。根据李括号的定义，我们可以写成

$$\left(\phi_{-s}^{\widehat{X}}\right)_* \widehat{Y} = s\left[\widehat{X}, \widehat{Y}\right] + o(s) \quad \text{as } s \to 0,$$

其中，对于 $s \in \mathbb{R}$， $\phi_s^{\widehat{X}}$ 是 $\widehat{X}$ 的流。由于对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\mathfrak{g}^1|_x = \widehat{\mathscr{D}}|_x$，且 $\widehat{X}$ 是 $\widehat{\ }$Killing（特别是，其流满足 (1.2)），因此对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $[X,Y]|_x \in \mathscr{D}|_x$。由于 $[\widehat{X},\widehat{Y}] \in \mathfrak{g}^2$，因此特别地，$[\widehat{X},\widehat{Y}]$ 是 -2 次齐次的，我们有

$$[\widehat{X},\widehat{Y}]|_0 = \sum_{j\,:\,w_j=2} a_j\,\partial_{z_j}|_0,$$

$\widehat{\ }$对某些常数 $a_j \in \mathbb{R}$成立。但我们还必须有 $[X,Y]|_0 \in \mathscr{D}|_0$，因此，由于

$$\widehat{\mathscr{D}}|_0 = \operatorname{span}\Big\{\partial_{z_j} : w_j = 1\Big\}$$

$\widehat{\ }$根据定义 2.1，$[X,Y]|_0 = 0$，也就是说，$[X,Y] \in \mathfrak{h}$。由此我们证明了 $[\mathfrak{i},\mathfrak{g}^1] \subset \mathfrak{h}^2$。特别地，由于 $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{h}^1$，我们得到

$$[\mathfrak{i},\mathfrak{i}] \subset \mathfrak{h}^2 \quad \text{and} \quad [\mathfrak{i},\mathfrak{h}^1] \subset \mathfrak{h}^2, \tag{3.10}$$

由此我们可直接推出，当 $j = 2$ 时，(3.9) 成立。

归纳步骤的证明。假设 (3.9) 对某些 $j \in \mathbb{N}$、$j \geq 2$ 成立。由于 $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{h}^1$，根据归纳假设，我们可以写成

$$\mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}^1,\mathfrak{g}^j] = [\mathfrak{g}^1,\mathfrak{h}^j] = [\mathfrak{i},\mathfrak{h}^j] + [\mathfrak{h}^1,\mathfrak{h}^j] = [\mathfrak{i},\mathfrak{h}^j] + \mathfrak{h}^{j+1}.$$

因此，我们只需证明，对于所有满足 $j \geq 2$ 的 $j \in \mathbb{N}$，$[\mathfrak{i},\mathfrak{h}^j] \subset \mathfrak{h}^{j+1}$ 成立。注意，我们实际上已经在 (3.10) 中证明了 $j = 1$ 的情形。再次进行归纳（以 $j = 1$ 作为基础情形），由 Jacobi恒等式和 (3.10)，我们有

$$[\mathfrak{i},\mathfrak{h}^{j+1}] = [\mathfrak{i},[\mathfrak{h}^1,\mathfrak{h}^j]] = [\mathfrak{h}^1,[\mathfrak{h}^j,\mathfrak{i}]] + [\mathfrak{h}^j,[\mathfrak{i},\mathfrak{h}^1]] \subset [\mathfrak{h}^1,\mathfrak{h}^{j+1}] + [\mathfrak{h}^j,\mathfrak{h}^2] = \mathfrak{h}^{j+2}$$

如所需，由此完成归纳步骤的证明。 □

注3.2（定理 1.5 在 $\mathfrak{h} = \{0\}$ 情形下的证明）。若幂零近似 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{F})$ 是一个 Carnot群，即 $\mathfrak{h} = \{0\}$，那么定理 1.5 的证明要简单得多。事实上，在这种情况下，（3.9）中的基础情形 $j = 2$ 立即推出 $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{h}^2 = \{0\}$，进而得到 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1$，因此 $\mathfrak{g}$ 是交换的。

3.3. 定理 1.8 的证明。下文假设读者熟悉上梯度 以及 q-上梯度的概念，精确定义见 [5]。接下来的两个引理在 [27] 中针对配备勒贝格测度的 $\mathbb{R}^n$ 次黎曼结构得到了证明，并可立即推广到加权情形。

引理 3.3. 设 *(M, d, m)* 如定理 *1.8* 所述。若 $u \in C(M)$ 且 $0 \leq g \in L^1\,loc(M, m)$ 是 u 的上梯度，则 $u \in HW^{1,1}\,loc(M, m)$，且 $k\nabla u k \leq g$ *m*-几乎处处成立。特别地，若$u \in Lip(M, d)$，则 $k\nabla u k \leq Lip(u)$。

证明。不失一般性，我们可以假设 $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集，次黎曼结构由 Ω 上一族光滑括号生成向量场 $\mathscr{F} = \{X_1, \ldots, X_L\}$ 诱导，且 $\mathrm{m} = \theta\mathscr{L}^n$，其中 θ: Ω $\to [0,\infty)$ 光滑并满足 $0 < \inf_\Omega \theta \leq \sup_\Omega \theta < \infty$。因此，$\mathrm{L}^1(\Omega\ \theta\mathscr{L}^n) = \mathrm{L}^1(\Omega\ \mathscr{L}^n)$ 作为集合相等，且范数等价，所以 $0 \leq g \in \mathrm{L}^1{}_{局部}(\Omega\ \mathscr{L}^n)$ 是 $u \in C(\Omega)$ 的一个上梯度。因此，由 [27, 定理 11.7], 可得 $u \in \mathrm{HW}^{1,1}{}_{局部}(\Omega\ \mathscr{L}^n)$，其中 $\mathrm{k}\nabla u\mathrm{k} \leq g$ $\mathscr{L}^n$-几乎处处，因而也在 Ω 上 $\theta\mathscr{L}^n$-几乎处处成立。根据分布导数的定义，我们可以写出

$$\int_\Omega v\,X_i u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\,[-X_i v + \operatorname{div}(X_i)v]\,\mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in C_c^1(\Omega),\ i = 1, \ldots, L,$$

其中 div 表示欧几里得散度。对任意 $w \in C_c^1(\Omega)$，我们将上述公式应用于测试函数 $v = \theta w$，得到

$$\int_\Omega w\, X_i u\, \theta \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \left[-X_i w + \operatorname{div}(X_i) w + \frac{X_i \theta}{\theta} w \right] \theta \,\mathrm{d}x, \quad \forall\, w \in C_c^1(\Omega),\ i = 1, \dots, L.$$

方括号内的函数是关于测度$\theta\mathscr{L}^n$的伴随函数 $X_i^* w$ 。因此，$\mathrm{HW}^{1,q}(\Omega, \theta\mathscr{L}^n) = \mathrm{HW}^{1,q}(\Omega, \mathscr{L}^n)$作为集合相同，且范数等价。特别地，$u \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathscr{D},\text{局部}}(\Omega, \theta\mathscr{L}^n)$，如所需。□

引理 3.4 (Meyers–Serrin)。设$(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$与定理 *1.8* 中相同，并设 $q \in [1, \infty)$。则$\mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m}) \cap C^\infty(M)$在$\mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$中稠密。

证明。经过单位分解和穷竭论证后，可将问题归结为$M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界开集且 $\mathsf{m} = \theta\mathscr{L}^n$的情形，其中 $\theta\colon \Omega \to [0, \infty)$与前一个证明中相同，因此 $\mathrm{HW}^{1,q}(\Omega, \mathscr{L}^n) = \mathrm{HW}^{1,q}(\Omega, \theta\mathscr{L}^n)$作为集合相同，且范数等价。特别地，我们可以假设 $\theta \equiv 1$。此情形已在 [27, 定理 11.9]中证明。□

引理 3.5. 设 $(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$ 如定理 *1.8* 中所述，并设 $q \in [1, \infty)$。若 $u \in \mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$，则 $\|\nabla u\|$ 是 q-上梯度的最小者 u。

证明。我们先证明 $\mathrm{k}\nabla u\mathrm{k}$ 是 q-上梯度 u。事实上，根据引理 3.4，我们可以找到 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m}) \cap C^\infty(M)$，使得 $u_k \to u$ in $\mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$ 如 $k \to \infty$。众所周知，光滑函数梯度的次黎曼范数是一个上梯度，参见 [27, 命题 11.6]。因此，对 u_k 有

$$|u_k(\gamma(1)) - u_k(\gamma(0))| \le \int_\gamma \|\nabla u_k\| \,\mathrm{d}s.$$

按照 [28, 页. 179], 的论证，利用 Fuglede 引理（参见 [28, 引理 7.5 和第 10] 节），我们对前一个等式中的 $k \to \infty$ 取极限，除去一个 q-例外曲线族。这证明了 $\mathrm{k}\nabla u\mathrm{k}$ 的任意 Borel 代表都是 q-上梯度 u。

现在我们证明 $\mathrm{k}\nabla u\mathrm{k}$ 确实是最小的。设 $0 \le g \in \mathrm{L}^q(M, \mathsf{m})$ 是 u 的任意一个 q-上梯度。仿照 [28, p. 194], 中的论证，我们可以找到一个序列 $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^q(M, \mathsf{m})$，其元素都是 u 的上梯度，并且对所有 $k \in \mathbb{N}$，$g_k \ge g$；此外，在 M 上几乎处处按点成立，并且当 $k \to \infty$ 时在 $\mathrm{L}^q(M, \mathsf{m})$ 中成立。由引理 3.3 可知，对所有 $k \in \mathbb{N}$，必有 $\mathrm{k}\nabla u\mathrm{k}$ 在 M 上几乎处处满足 $\le g_k$。因此，取极限可得，对于任意 q-上梯度 g，$\mathrm{k}\nabla u\mathrm{k}$ 在 M 上几乎处处满足 $\le g$，证明至此完成。□

现在我们可以着手证明定理 1.8 了。

证明(i)。回顾一下，此处 $q > 1$。我们首先断言

$$\mathrm{W}^{1,q}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m}) \subset \mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{m}) \tag{3.11}$$

等距地，且 $\mathrm{k}\nabla u\mathrm{k} = |\mathrm{D}u|_{w,\,q}$。事实上，设 $u \in \mathrm{W}^{1,\,q}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$。通过一个众所周知的逼近论证，结合 [5, 命题 4.3、定理 5.3 和定理 7.4], ，我们得到 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Lip}(M, \mathsf{d}) \cap \mathrm{W}^{1,\,q}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$，使得

$$u_k \to u \quad \text{and} \quad |\mathrm{D}u_k|_{w,q} \to |\mathrm{D}u|_{w,q} \quad \text{in } \mathrm{L}^q(M, \mathsf{m}). \tag{3.12}$$

由于 $u_k \in \mathrm{Lip}(M, \mathsf{d})$，根据引理 3.3，我们知道 $u_k \in \mathrm{HW}^{1,q}(M, \mathsf{m})$。因此，根据引理 3.5，$|\mathrm{D}u_k|_{w,q} = \|\nabla u_k\|$，并且我们立即得到

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_M \|\nabla u_k\|^q \, \mathrm{d}\mathsf{m} < \infty.$$

因此，不妨取一个子序列，使得 $(X_i u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathrm{L}^q(M,\mathsf{m})$ 中弱收敛，记为 $X_i u_k \rightharpoonup \alpha_i \in \mathrm{L}^q(M,\mathsf{m})$，对所有 $i = 1, \dots, L$ 均成立。因此我们得到 $u \in \mathrm{HW}^{1,q}(M,\mathsf{m})$，且 $X_i u = \alpha_i$，从而 $\nabla u = \sum_{i=1}^L \alpha_i X_i$。根据 q-上梯度的稳定性，[5, 定理 5.3 和定理 7.4]，$\|\nabla u\|$ 是 q-上梯度。根据范数的半连续性，我们得到

$$\int_M \|\nabla u\|^q \, \mathrm{d}\mathsf{m} \le \liminf_{k\to\infty} \int_M \|\nabla u_k\|^q \, \mathrm{d}\mathsf{m} = \int_M |\mathrm{D}u|^q_{w,q} \, \mathrm{d}\mathsf{m},$$

其中我们用到了 (3.12)。根据最小 q-上梯度的定义，我们因此得到 $\|\nabla u\| = |\mathrm{D}u|_{w,q}$ m-几乎处处成立，而 (3.11) 中所述的包含关系立即成立。

我们现在注意到，这也成立

$$\mathrm{HW}^{1,q}(M,\mathsf{m}) \cap C^\infty(M) \subset \mathrm{W}^{1,q}(M,\mathsf{d},\mathsf{m}), \tag{3.13}$$

其中 $\|\nabla u\| = |\mathrm{D}u|_{w,q}$。我们只需注意到，若 $u \in C^\infty(M)$，则 $\|\nabla u\|$ 是 u 的上梯度，参见 [27, 命题 11.6]。因此，根据引理 3.3，$\|\nabla u\|$ 必须与 u 的最小 q-上梯度一致，即 $\|\nabla u\| = |\mathrm{D}u|_w$ m-几乎处处成立，(3.13) 随即得证。结合等距嵌入 (3.11) 和 (3.13)，以及引理 3.4 给出的密度，这就完成了 (i) 的证明。□

证明(ii)。 假设 $(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$ 对某个 $K \in \mathbb{R}$ 满足 $\mathrm{CD}(K, \infty)$ 性质。根据前面的 (i)，我们知道 $(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$ 满足 $\mathrm{RCD}(K, \infty)$ 性质。因此，由于显然根据 (3.13) 有 $C_c^\infty(M) \subset \mathrm{W}^{1,2}(M, \mathsf{d}, \mathsf{m})$，[6, 注 6.3]（即使测度 m 是 σ-有限的，讨论见 [4, 第 7] 节）意味着

$$\frac{1}{2}\int_M \Delta v \, \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}\mathsf{m} - \int_M v \, \mathrm{g}(\nabla u, \nabla \Delta u) \, \mathrm{d}\mathsf{m} \ge K \int_M v \, \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}\mathsf{m}$$

对于所有满足 $v \ge 0$、位于 M 上的 u，$v \in C_c^\infty(M)$，由此我们可以立即推出 (1.1)。 □

注 3.6。 上述证明对更一般的测度 m 也成立。具体而言，我们可以假设，在任意有界坐标邻域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上局部有，$\mathsf{m} = \theta \mathscr{L}^n$ with $\theta \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega, \mathscr{L}^n) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathscr{L}^n)$。此时，$\mathsf{m}$ 的正性对应于如下要求：在坐标图中，θ 在局部本质下有界且远离零。

3.4. 证明定理 1.11。 我们分别证明陈述中的两点 .

证明 (i)。 情形 $p = 0$ 已由 Juillet 在 [32] 中研究过。对于 $p > 0$，我们可以如下论证。设 $A_0 = [-\ell - 1, -\ell] \times [0, 1]$ 和 $A_1 = [\ell, \ell + 1] \times [0, 1]$ 满足 $\ell > 0$。我们将很快证明，中点集

$$A_{1/2} = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 : \exists\, q_0 \in A_0,\ \exists\, q_1 \in A_1 \text{ with } \mathsf{d}(q, q_0) = \mathsf{d}(q, q_1) = \frac{1}{2}\mathsf{d}(q_0, q_1) \right\}$$

满足

$$A_{1/2} \subset [-1 - \varepsilon_\ell, 1 + \varepsilon_\ell] \times [0, 1] \tag{3.14}$$

因此 我 $\varepsilon_\ell > 0$，其中 $\varepsilon_\ell \downarrow 0$ 为 $\ell \to \infty$。由于 $\mathsf{m}_p(A_0) = \mathsf{m}_p(A_1) \sim \ell^p$ 为 $\ell \to \infty$，我们 g et

$$\sqrt{\mathsf{m}_p(A_0)\, \mathsf{m}_p(A_1)} > \mathsf{m}_p(A_{1/2})$$

当 $\ell > 0$ 足够大时。这与对数型 Brunn–Minkowski BM(0，∞) 不等式矛盾，该不等式是 CD(0，∞) 条件的推论，参见 [50, 定理 30.7]。

为证明 (3.14)，令 $q_i \in A_i$, $q_i = (x_i,\ y_i)$，并令 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t))$，$t \in [0,1]$ 为一条测地线，使得 $\gamma(i) = q_i$，其中 $i = 0,\ 1$。首先注意到

$$\min\{y_0, y_1\} \le y(t) \le \max\{y_0, y_1\} \quad \text{for all } t \in [0,1], \tag{3.15}$$

因为任何违反 (3.15) 的曲线都可以替换为一条严格更短且满足 (3.15) 的曲线。特别地，我们得到 $A_{1/2} \subset \mathbb{R} \times [0,1]$。现在注意到

$$|x_a - x_b| \le \mathsf{d}(a,b) \le |x_a - x_b| + \frac{|y_a - y_b|}{\max\{|x_a|, |x_b|\}}$$

对所有满足 $x_a,\ x_b \neq 0$ 的 $a = (x_a,\ y_a)$ 和 $b = (x_b,\ y_b)$ 均成立。因此，若 $q = (x,\ y) \in A_{1/2}$，则

$$|x - x_0| \le \mathsf{d}(q, q_0) = \frac{1}{2}\,\mathsf{d}(q_0, q_1) \le \ell + 1 + O(1/\ell)$$

并且类似地，$|x - x_1| \le \ell + 1 + O(1/\ell)$。由于 $x_0 \in [-\ell - 1, -\ell]$ 和 $x_1 \in [\ell, \ell + 1]$，我们推得 $|x| \le 1 + O(1/\ell)$，从而完成了所声称的 (3.14) 的证明。□

证明(ii)。 在零测集 $\{x = 0\}$之外，由 (1.5) 给出的 $\mathbb{G}_p$ 上的度量 g 局部为黎曼度量。回顾 (1.6) 和 (1.7)，由 Bochner公式可知，BE(K, ∞) 不等式 (1.1) 可由下界 $\mathrm{Ric}_{\infty,V} \ge K$ 推出，其中 $\mathrm{Ric}_{\infty,V}$ 是 ($\mathbb{R}^2$,g e^{-V}vol$_{\mathsf{g}}$) 的 ∞-Bakry–Émery 巴克里–埃梅里里奇张量，参见 [50, 第14章，公式 (14.36) – (14.51)]。由下文的引理3.7可知，对于所有 $p \ge 1$，均有 $\mathrm{Ric}_{\infty,V} \ge 0$，证毕。□

引理3.7。 设 $p \in \mathbb{R}$ 和 $N > 2$。对于所有 $x \neq 0$，关于加权测度 $\mathsf{m}_p = |x|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的格鲁申度量 (1.5)的 N-*Bakry–Émery* 巴克里–埃梅里里奇张量为

$$\mathrm{Ric}_{N,V} = \frac{p-1}{x^2}\,\mathrm{g} - \frac{(p+1)^2}{N-2}\frac{\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x}{x^2},$$

约定 $1/\infty = 0$。

证明。 N-Bakry–Émery 里奇张量对于一个 n 维带权黎曼结构 (g e^{-V}vol$_{\mathsf{g}}$)，当 $N > n$ 时，由下式给出

$$\mathrm{Ric}_{N,V} = \mathrm{Ric}_{\mathrm{g}} + \mathrm{Hess}_{\mathrm{g}} V - \frac{\mathrm{d}V \otimes \mathrm{d}V}{N-n}, \tag{3.16}$$

参见 [50, 式 (14.36)]。在标架 (1.4) 下，列维-奇维塔联络由下式给出

$$\nabla_X X = \nabla_X Y = 0, \quad \nabla_Y X = -\frac{1}{x}Y, \quad \nabla_Y Y = \frac{1}{x}X,$$

当 $x \neq 0$ 时成立。回忆由 (1.7) 可知，对于 $x \neq 0$，$V(x) = -(p+1)\log|x|$，因此得到

$$\mathrm{Ric}_{\mathrm{g}} = -\frac{2}{x^2}\,\mathrm{g}, \quad \mathrm{Hess}_{\mathrm{g}} V = \frac{(p+1)}{x^2}\,\mathrm{g}, \quad \mathrm{d}V = -\frac{p+1}{x}\,\mathrm{d}x, \tag{3.17}$$

只要 $x \neq 0$。因此，将 (3.17) 代入 (3.16) 即可得出结论。 □

3.5. **定理 1.12 的证明**。 该结论由 $\mathbb{G}_p^+$ 的测地凸性以及引理3.7中对 N-Bakry–Émery 曲率的计算得出。由于证明采用了相当标准的方法，我们仅概述其主要步骤。

$\mathbb{G}_p^+$的内部，即开半平面，可视为一个（不完备的）加权黎曼流形，其度量 g 如 (1.5) 所示，加权体积如 (1.7) 所示。设 $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{G}_p^+)$， $\mu_0, \mu_1 \ll \mathrm{m}_p$，其支撑有界且包含于黎曼区域 $\{x > \varepsilon\}$ 中，其中 $\varepsilon \geq 0$。

设 $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ 是连接 μ_0 与 μ_1 的 W_2-测地线。根据一个众所周知的表示定理（参见 [50, 推论 7.22]），存在 $\nu \in \mathscr{P}(\mathrm{Geo}(\mathbb{G}_p^+))$，其支撑包含于集合$\Gamma = (e_0 \times e_1)^{-1}(\operatorname{supp}\mu_0 \times \operatorname{supp}\mu_1)$，且对所有 $s \in [0,1]$ 均有 $\mu_s = (e_s)_\sharp \nu$。由于集合 $\{x \geq \varepsilon\}$ 是完整 Grushin平面 $\mathbb{G}_p$ 中的测地凸子集（论证与 [46, 命题 5]相同），任意 $\gamma \in \Gamma$ 在所有时刻都包含于区域 $\{x > 0\}$ 中。因此， Γ 是一组包含于加权黎曼结构 $(\{x>0\}, \mathrm{g}, e^{-V}\mathrm{vol}_{\mathrm{g}})$ 中的黎曼测地线。由引理3.7可知，对所有 $N \geq N_p$ 均有 $\mathrm{Ric}_{N,V} \geq 0$，其中$N_p$ 如 (1.8) 所示。此时，利用一个标准论证可知，Rényi熵沿着连接 μ_0 与 μ_1 的 Wasserstein测地线是凸的，例如参见 [49, 定理 1.7] 的证明。

通过标准的逼近论证，可将结论推广到 μ_0， $\mu_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{G}_p^+)$，其中 μ_0， $\mu_1 \ll \mathrm{m}_p$ 且紧支集可能与奇异区域 $\{x = 0\}$ 相交。更确切地说，只需归结到前一种情形，并利用最优传输 [50, Thm. 28.9] 的稳定性以及 Rényi熵 [50, Thm. 29.20] 的下半连续性。

最后，推广到一般的 μ_0， $\mu_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{G}_p^+)$ 可通过 [9, Rem. 2.12], 中概述的常规论证得到；当 $\mu_s = (e_s)_\sharp \nu$、 $s \in [0,1]$, 且 ν 集中在一组非分支测地线上时，该论证适用。这就证明了该命题的“若”部分。

“唯若”部分也属标准结论。 $N > 2$ 的 CD(0， N) 条件意味着，在黎曼区域 $\{x > 0\}$ 上，$\mathrm{Ric}_{N,V} \geq 0$，但这对 $N < N_p$ 并不成立。

由注 1.9 可知， $\mathbb{G}_p^+$ 是无穷小希尔伯特空间，因为 m_p 在闭集 $\{x = 0\}$之外处处为正且光滑，而该闭集的测度为零。另一种证明方法是注意到 $\mathbb{G}_p^+$ 是一个里奇极限，见 [42]。□

附录 A. 梯度和拉普拉斯算子的表示公式

为方便读者，本附录将简要证明秩变化情形下的表示公式 (2.5) 和 (2.7)。

引理 A.1. 对于 $\lambda \in T^*M$，令 $\lambda^\# \in \mathscr{D}$ 由下式唯一确定

$$\mathrm{g}(\lambda^\#, V) = \langle \lambda, V \rangle$$

对所有 $V \in \mathscr{D}$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示余向量对向量的作用。于是

$$\|\lambda^\#\|^2 = \sum_{i=1}^{L} \left\langle \lambda^\#, X_i \right\rangle^2. \tag{A.1}$$

因此，如果 λ、 $\mu \in T^*M$，那么

$$\mathrm{g}(\lambda^\#, \mu^\#) = \sum_{i=1}^{L} \langle \lambda, X_i \rangle \langle \mu, X_i \rangle. \tag{A.2}$$

证明。 给定 $u \in \mathbb{R}^L$，我们令 $X_u = \sum_{i=1}^L u_i X_i$ 并定义

$$u^* \in \operatorname{argmin}\Big\{v \mapsto |v| : v \in \mathbb{R}^L,\ X_v = X_u\Big\}.$$

换言之，对于 $X_u \in \mathscr{D}$， u^* 是满足 $X_{u^*} = X_u$ 的欧几里得范数最小的元素。注意，根据定义，有 $\mathbf{k}X_u\mathbf{k} = |u^*|$。因此我们有

$$\|\lambda^\#\| = \sup\Big\{\mathrm{g}(\lambda^\#, X) : \|X\| = 1,\ X \in \mathscr{D}\Big\} = \sup\Big\{\mathrm{g}(\lambda^\#, X_u) : |u^*| = 1,\ u \in \mathbb{R}^L\Big\}.$$

我们现在断言

$$\sup\Big\{\mathrm{g}(\lambda^\#, X_u) : |u^*| = 1,\ u \in \mathbb{R}^L\Big\} = \sup\Big\{\mathrm{g}(\lambda^\#, X_u) : |u| = 1,\ u \in \mathbb{R}^L\Big\}. \tag{A.3}$$

事实上，（A.3）中的不等式 $\leq$ 可通过注意到，对任意 $u \in \mathbb{R}^L$，都有 $X_u = X_{u^*}$ 得出。为证明（A.3）中的不等式 $\geq$，我们注意到，若 $u \in \mathbb{R}^L$ 满足 $|u| = 1$ 且 $0 < |u^*| < 1$，则 $v = u/|u^*|$ 满足 $|v^*| = 1$，并且有

$$\mathrm{g}(\lambda^\#, X_v) > \mathrm{g}(\lambda^\#, X_v)\,|u^*| = \mathrm{g}(\lambda^\#, X_u). \tag{A.4}$$

此外，若 $|u| = 1$ 且 $u^* = 0$，则 $X_u = 0$，因此在这种情况下，我们也能找到满足 (A.4) 的 $v \in \mathbb{R}^n$，其中 $v^* = 1$。这就完成了所述（A.3）的证明。因此，由于

$$\mathrm{g}(\lambda^\#, X_u) = \sum_{i=1}^L \mathrm{g}(\lambda^\#, X_i)\,u_i,$$

我们很容易得出

$$\|\lambda^\#\| = \sup\Big\{\mathrm{g}(\lambda^\#, X_u) : |u| = 1,\ u \in \mathbb{R}^L\Big\} = \sqrt{\sum_{i=1}^L \mathrm{g}(\lambda^\#, X_i)^2},$$

从而证明了 (A.1)。由极化可得等式 (A.2)。 □

推论 A.2. 以下公式成立：

$$\nabla u = \sum_{i=1}^L X_i u\, X_i, \tag{A.5}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^L \left(X_i^2 u + X_i u\ \mathrm{div}_{\mathsf{m}}(X_i)\right), \tag{A.6}$$

$$\mathrm{g}(\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^L X_i u\, X_i v, \tag{A.7}$$

对所有 $u, v \in C^\infty(M)$。特别地，$\|\nabla u\|^2 = \sum_{i=1}^L (X_i u)^2$ 对所有 $u \in C^\infty(M\quad)$.

证明。 我们分别证明每个公式。

证明 (A.5)。回顾 (2.4) 中的定义，我们可以在 (A.2) 中取 $\lambda = du$，得到

$$\begin{aligned}\Big\langle du, \mu^\# \Big\rangle = \mathrm{g}(\nabla u, \mu^\#) &= \sum_{i=1}^L \langle du, X_i\rangle\langle \mu, X_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^L X_i u\,\langle \mu, X_i\rangle = \mathrm{g}\left(\mu^\#, \sum_{i=1}^L X_i u\, X_i\right)\end{aligned}$$

每当 $\mu \in T_x^* M$。由于映射 #： $T_x^* M \to \mathscr{D}_x$ 是满射，我们立即得到 (A.5).

证明 (A.6)。回顾一下,

$$\operatorname{div}_{\mathsf{m}}(fX) = Xf + f\operatorname{div}_{\mathsf{m}}(X)$$

对任意 $f \in C^\infty(M)$ 和 $X \in \Gamma(TM)$。因此，根据 (2.6) 中的定义，我们可以计算

$$\Delta u = \operatorname{div}_{\mathsf{m}}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{L} \operatorname{div}_{\mathsf{m}}(X_i u\, X_i) = \sum_{i=1}^{L} \left(X_i^2 u + X_i u\, \operatorname{div}_{\mathsf{m}}(X_i) \right),$$

这就是所需的 (A.6)。

证明 (A.7)。在 (A.2) 中选取 $\lambda = du$ 和 $\mu = dv$，我们可以计算

$$g(\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^{L} \langle du, X_i \rangle \langle dv, X_i \rangle = \sum_{i=1}^{L} X_i u\, X_i v$$

证明至此完成。 □

参考文献

[1] A. Agrachev、D. Barilari 和 L. Rizzi，《曲率：一种变分方法》，美国数学会回忆录 256 (2018)，第 1225 号，v+142.[2] A. Agrachev、D. Barilari 和 U. Boscain，《次黎曼几何全面导论》，剑桥高等数学研究丛书，第 181 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020。从哈密顿观点出发，附录由 Igor Zelenko 撰写。[3] L. Ambrosio，《度量测度空间中的微积分、热流与曲率-维数界》，《2018年国际数学家大会论文集——里约热内卢。第一卷：大会报告》，2018，第 301–340 页。[4] L. Ambrosio、N. Gigli、A. Mondino 和 T. Rajala，《具有 σ-有限测度的度量测度空间中的黎曼黎奇曲率下界》，美国数学会汇刊 367 (2015)，第 7 期，4661–4701。[5] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré，《度量测度空间中利普希茨函数的稠密性与弱梯度的等价性》，伊比利亚美洲数学杂志 29 (2013)，第 3 期，969–996。[6] ———，《黎曼黎奇曲率有下界的度量测度空间》，杜克数学杂志 163 (2014)，第 7 期，1405–1490。[7] ———,《Bakry-Émery 曲率-维数条件与黎曼黎奇曲率界》，概率年刊 43 (2015)，第 1 期，339–404。[8] L. Ambrosio 和 G. Stefani，《卡诺群中的热流与熵流》，伊比利亚美洲数学杂志 36 (2020)，第 1 期，257–290。[9] K. Bacher 和 K.-T. Sturm，《度量测度空间曲率-维数条件的局部化与张量化性质》，泛函分析杂志 259 (2010)，第 1 期，28–56。[10]D. Bakry、I. Gentil 和 M. Ledoux，《马尔可夫扩散算子的分析与几何》，数学科学基础丛书 [《数学科学基本原理》], 第 348 卷，Springer，Cham，2014。[11] Z. M. Balogh、A. Kristály 和 K. Sipos，《海森堡群上的几何不等式》，变分法与偏微分方程 57 (2018)，第 2 期，论文编号 61，41 页。[12] ———，《余秩为 1 的卡诺群上的雅可比行列式不等式及其应用》，泛函分析杂志 277 (2019)，第 12 期，108293，36 页。[13] D. Barilari、A. Mondino 和 L. Rizzi，《黎曼与次黎曼结构的统一合成黎奇曲率下界》，2022。预印本，见 arXiv:2211.07762。[14] D. Barilari 和 L. Rizzi，《次黎曼插值不等式》，数学发明 215 (2019)，第 3 期，977–1038。[15] ———,《次黎曼几何中的 Bakry-Émery 曲率与模型空间》，数学年刊 377 (2020)，第 1–2 期，435–482。[16] F. Baudoin 和 M. Bonnefont，《卡诺群中的反向庞加莱不等式、等周问题与黎斯变换》，非线性分析 131 (2016)，48–59。

[17] F. Baudoin 和 N. Garofalo，《具有横向对称性的次黎曼流形的曲率-维数不等式与里奇曲率下界》，欧洲数学会杂志（JEMS）19 (2017)，第 1 期，151–219。[18] A. Bellaïche，《次黎曼几何中的切空间》，《次黎曼几何》，1996，第 1–78 页。[19] F. Cavalletti 和 A. Mondino，《具有里奇曲率下界的度量测度空间中的锐性与刚性等周不等式》，数学发明 208 (2017)，第 3 期，803–849。[20] X. Dai、S. Honda、J. Pan 和 G. Wei，《里奇曲率有下界时的奇异 Weyl 定律》，2022。预印本，见 arXiv:2208.13962。[21] G. De Philippis 和 N. Gigli，《里奇曲率有下界的非塌缩空间》，《巴黎综合理工学院数学期刊》5 (2018)，613–650。[22] Q. Deng，《RCD(k,n) 空间中切锥的 Hölder 连续性及其在非分支性方面的应用》，2022。预印本，见 arXiv:2009.07956v2。[23] B. K. Driver 和 T. Melcher，《海森堡群上的次椭圆热核不等式》，泛函分析杂志 221 (2005)，第 2 期，340–365。[24] M. Erbar、K. Kuwada 和 K.-T. Sturm，《度量测度空间中熵曲率-维数条件与 Bochner 不等式的等价性》，数学发明 201 (2015)，第 3 期，993–1071。[25] N. Gigli，《度量测度空间的微分结构及其应用》，美国数学会回忆录 236 (2015)，第 1113 号，vi+91.[26] M. Gromov，《黎曼流形的度量结构》，数学文本丛书 [《数学文本》], 第 1 卷，CEDIC，巴黎，1981。J. Lafontaine 和 P. Pansu 编。[27] P. Hajł asz 和 P. Koskela，《Sobolev 遇见 Poincaré》，美国数学会回忆录 145 (2000)，第 688 号，x +101.[28] J. Heinonen，《非光滑微积分》，《美国数学会通报》（新系列）44 (2007)，第 2 期，163–232。[29] Y. Huang 和 S. Sun，《幂零李群与次黎曼流形的不可嵌入定理》，《中国数学前沿》15 (2020)，第 1 期，91–114。[30] F. Jean，《非完整系统的控制：从次黎曼几何到运动规划》，Springer 数学简明读本，Springer，Cham，2014。[31] N. Juillet，《海森堡群中的几何不等式与广义里奇曲率界》，《国际数学研究通报》13 (2009)，2347–2373。[32] ———，《一种反驳广义 Brunn-Minkowski 不等式的方法》，《几何的概率方法》，2010，第 189–198 页。[33] ———，《次黎曼结构不满足黎曼 Brunn-Minkowski 不等式》，伊比利亚美洲数学杂志 37 (2021)，第 1 期，177–188。[34] V. Kapovitch、C. Ketterer 和 K.-T. Sturm，《具有里奇曲率下界的亚历山德罗夫空间的粘合》，《通讯分析与几何》（即将出版）。[35] E. Le Donne、D. Lučić 和 E. Pasqualetto，《次黎曼流形的普适无穷小希尔伯特性》，Potential Analysis（2022）。[36] J. Lott 和 C. Villani，《通过最优传输定义度量测度空间的里奇曲率》，《数学年刊》（第二辑）169 (2009)，第 3 期，903–991。[37] M. Magnabosco 和 T. Rossi，《几乎黎曼流形不满足曲率-维数条件》，变分法与偏微分方程 62 (2023)，第 4 期，论文编号 123，27 页。[38] E. Milman，《拟曲率-维数条件及其在次黎曼流形中的应用》，《纯粹与应用数学通讯》74 (2021)，第 12 期，2628–2674。[39] A. Mondino 和 A. Naber，《具有里奇曲率下界的度量测度空间的结构理论》，欧洲数学会杂志（JEMS）21 (2019)，第 6 期，1809–1854。[40] R. Montgomery，《次黎曼几何、其测地线及应用概览》，数学调查与专著丛书，第 91 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2002。[41] J. Pan，《作为具有曲率 ≥ 1的里奇极限空间的 Grushin 半球》，美国数学会会刊 B 系列 10 (2023)，71–75。[42] J. Pan 和 G. Wei，《豪斯多夫维数非整数的里奇极限空间实例》，《几何与泛函分析》32 (2022)，第 3 期，676–685。

[43] G. Perelman，曲率下界 *Alexandrov*空间 *II*，1991年。未发表，手稿副本可在 Anton Petrunin 的网站上找到。[44] A. Petrunin，拟测地线与梯度曲线的应用，《比较几何》（美国加利福尼亚州伯克利，1993–94），1997年，第203–219页。[45]L. Rifford，次黎曼几何与最优传输，《Springer 数学简明读本》，Springer，Cham，2014年。[46] L. Rizzi，*MCP*度量测度空间粘合定理的一个反例，《伦敦数学会会刊》**50** （2018年），第5期，781–790页。[47]G. Stefani，群上的广义 *Bakry-Émery*曲率条件及等价的熵不等式，《几何分析杂志》**32** （2022年），第4期，论文编号136，共98页。[48] K.-T. Sturm，关于度量测度空间的几何 *I*，《数学学报》**196** （2006年），第1期，65–131页。[49] ———，关于度量测度空间的几何 *II*，《数学学报》**196** （2006年），第1期，133–177页。[50] C. Villani，《最优传输》，《数学科学基础丛书》 [数学科学基本原理], 第338卷，施普林格出版社，柏林，2009年。新旧兼备。

(L. Rizzi)高等国际研究学院 (SISSA)，via Bonomea 265, 34136 的里雅斯特 (TS)，意大利电子邮件地址： lrizzi@sissa.it

(G. Stefani)高等国际研究学院 (SISSA)，via Bonomea 265, 34136 的里雅斯特 (TS)，意大利电子邮件地址： gstefani@sissa.it 或 giorgio.stefani.math@gmail.com