arXiv:2301.00739v1 [cs.CC] 2 Jan 2023

部分覆盖无线传感器网络子树调度的复杂性

Michele Barbato*
米兰大学计算机科学系，
Celoria 街 18 号，20133 米兰，
michele.barbato@unimi.it

Nicola Bianchessi
米兰大学计算机科学系，
Celoria 街 18 号，20133 米兰，
nicola.bianchessi@unimi.it

摘要

给定一个无向图 G，其边权重随 s 时隙变化，部分覆盖无线传感器网络子树调度问题要求将 G 的顶点划分为 s 个非空树，使这些树的总权重最小。在本文中，我们证明，无论 (s) 是输入的一部分，还是 (ii) 为固定的实例参数，该问题都是**NP**-难的。我们的两种证明均从基数斯坦纳树问题归约而来。此外，我们还为该问题的结构化输入提供多项式时间算法。

关键词 无线传感器网络，子树调度，部分覆盖，复杂性

1 引言

无线传感器网络管理中的一个核心问题，是通过确保能源效率和/或能耗均衡的运行策略来延长无线传感器的寿命。这个问题之所以重要，是因为即使单个无线传感器发生故障，原则上也可能损害整个网络的有效性。从能耗均衡的角度来看，降低能耗的一般方法是将传感器集合划分为若干个非空子集，并将规划时域划分为相应数量的时隙，使各传感器子集依次运行，每个时隙运行一个子集。

Adasme（2019）提出的部分覆盖无线传感器网络子树调度（STSWSN-PC），是此类方法的一种具体实现，并附加了以下要求：同时运行的传感器必须在树拓扑下彼此连通，且每个传感器必须在唯一的时隙内处于活动状态。具体而言，STSWSN-PC 定义在一个无向图 $G = (V, E)$ 上，该图表示传感器网络；另有数量为 s, $1 \leq s \leq |V|$ 的时隙，以及边权重向量 $w^1, w^2, \ldots, w^s \in \mathbb{R}_+^E$（每个时隙对应一个向量）。其目标是找到一组 $T_1, T_2, \ldots, T_s$ 个非空、顶点互不相交且覆盖 V 的 G 树，并使 $\sum_{i=1}^{s} w^i(T_i)$ 最小。在上述描述中，G 的顶点表示网络中的传感器，边表示传感器之间的直接链路，而权重表示在相应边上传输信息所需的、随时隙变化的功率。

STSWSN-PC 的输入由图 G、时隙数量 s以及边权重向量的取值共同定义。对于结构化输入，STSWSN-PC 可能存在高效的优化算法。例如，当权重在所有时隙中保持不变（即，$w^i \equiv w^j$ 对所有 i, $j = 1$、2、.....、s），STSWSN-PC 可在多项式时间内求解，例如，使用克鲁斯卡尔算法（Kruskal，1956），并在首次得到包含 s 棵树的生成森林时终止迭代；当 $s = 1$时，STSWSN-PC 可归结为一般图上的最小生成树问题，因此可在多项式时间内求解；当 $s = |V|$时，最优解是任意地为每个时隙分配一个顶点。

然而，对于非结构化 STSWSN-PC 实例已在Adasme(2019) 和Bianchessi(2022) b
通过分支定界法 分别为.....算法和分支割算法。这些方法隐含地表明， e

*通讯作者

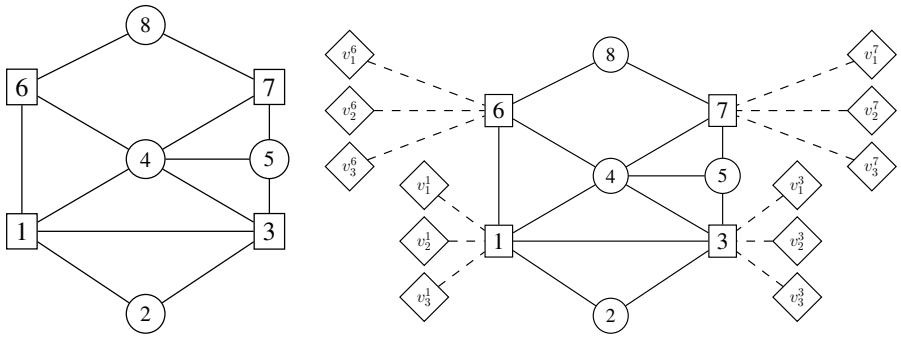


图 1：CST 实例示例（a），其中终端顶点呈正方形；以及对应的 STSWSN-PC 实例 $k = 5$（b），其中虚拟顶点呈菱形。

该问题在理论上　　难以求解，尽管据我们所知，其计算复杂性尚不明确
。本文的目　　的是填补这一空白。

在第2节中，我们研究 STSWSN-PC 的复杂性，其中 s 属于输入，也就是说，s 在$\{2, 3, \ldots, |V| - 1\}$中并非固定值；在第3节中，我们研究在以下假设下的复杂性：s是一个具有指定值 $\bar{s} \geq 2$的实例参数。通过从（最小权重）斯坦纳树问题归约（Garey 和 Johnson，1990，第 208 页），我们证明，在这两种情况下，STSWSN-PC 都是**NP**困难的，从而说明采用隐式枚举方案求解该问题是合理的。最后，在第4节中，我们讨论除上述情况外的其他结构化输入，并证明对于这些输入，STSWSN-PC 可在多项式时间内求解。

2 时隙数量不固定时的 NP 困难性

给定一个无向连通图 $G = (V, E)$，它有 $|V| = n$ 个顶点，以及一个由终端顶点组成的子集 $R \subset V$，斯坦纳树是 G 的一个子树 T，满足 $R \subseteq V(T)$。此外，给定每条 $e \in E$ 的权重 $w(e) \in \mathbb{Z}_+$，求总边权重最小的斯坦纳树通常是 NP 困难的；即使所有权重都相等，该问题仍然是 NP 困难的（Garey 和 Johnson，1990，第 209 页）。具体而言，给定每条 $e \in E$ 的 $w(e) = 1$、一对 (G, R)，以及满足 $|R| - 1 \leq k \leq n - 2$ 的 $k \in \mathbb{Z}_+$，基数斯坦纳树（CST）问题要求确定是否存在一棵属于 G 且边数不超过 k 的斯坦纳树；该问题是 NP完全的。

我们现在证明，如果存在一个能在多项式时间内求解 STSWSN-PC 的预言机，就可以在多项式时间内求解 CST，因此可得 STSWSN-PC 是 **NP** 困难的。我们指出，终端顶点不超过三个的 CST 可在多项式时间内求解（Arrighi 和 de Oliveira Oliveira，2021），因此我们将研究范围限定在满足以下条件的 CST 实例中：$|R| \geq 4$。

给定上述定义 CST 实例的 k 和 (G, R)，我们构造一个新图 $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$，它由 G 得到：为每个终端顶点 $r \in R$ 引入 $n - k$ 个虚拟顶点 $v_1^r, v_2^r, \ldots, v_{n-k}^r$，并定义 $\bar{E} = E \cup E^R$，其中$E^R = \{(v_j^r, r) : j = 1, 2, \ldots, n - k, r \in R\}$；也就是说，每个虚拟顶点都恰好与对应的终端顶点相连。图 1 给出了这种构造的一个示例。

接下来，我们定义一个基于图和时隙的 STSWSN-PC 实例 I　　G　　$s = n-k+1$　　$|R|-1 \leq k \leq n-2$。注意，由于 和 $|R| \geq 4$，因此 $3 \leq s \leq n - 2 < |V|$，所以我们对时隙数量的定义排除了 STSWSN-PC 中可在多项式时间内求解的情形。

时隙的权重定义如下：

$$w_e^1 = \begin{cases} 0 & \text{if } e \in E^R \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

$$w_e^j = \begin{cases} n & \text{if } e \in E^R \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \forall j = 2, 3, \ldots, n - k + 1 \tag{2}$$

引理 1。设 $T_1^\star$、$T_2^\star$、...、$T_{n-k+1}^\star$ 是 I 的一个最优解。将 $T_1^\star$ 限制在 V 中的顶点上所得的结果，是 G 的一棵斯坦纳树。

证明。假设将 $T_1^\star$ 限制在 G 的顶点上所得的结果不是一棵斯坦纳树。那么，至少存在一个终端顶点 $r^\star$，包含在第一个时隙之后某个时隙的树中。由于所有树 $T_1^\star$、$T_2^\star$、...、$T_{n-k+1}^\star$ 都是连通的，因此 E^R 至少有一条边属于该时隙。根据（2），I 的最优解的值至少为 n。现在我们证明存在一个值更优的解。具体而言，在第一个时隙中，我们考虑一棵覆盖 $\bar{G}$ 中除与 $r^\star$ 相连的 $n-k$ 个虚拟顶点之外所有顶点的树 T_1，并令 $T_j = \{v_{j-1}^{r^\star}\}$ 取为 $j = 2$、3、...、$n-k+1$。于是，T_1、T_2、...、T_{n-k+1} 是一个可行解，其值根据（1）为 $n-1$。 □

¯现在我们可以证明主要结果。在证明中，给定 $S \subseteq V$，我们将 $\delta(S)$ 的割记为，即一条端点位于 S、另一端点位于 S之外的边的集合。

命题 1。 当且仅当I 的最优解值至多为 k时，由 k 和$(G、\ R)$ 给出的 *CST* 实例存在一个解。因此，*STSWSN-PC* 是 ***NP***-困难的。

证明。 对于“如果”部分，假设存在一个值至多为 k的最优解；记 $T^\star$ 为其第一时隙的树在 V中的顶点上的限制，由式（1）中权重的非负性可得 $|T^\star| \leq k$。根据 引理 1，结论成立。

现在，我们证明“仅当”部分。假设存在一棵以 G 为顶点集、满足 $|T| \leq k$的斯坦纳树 T。不失一般性地假设 $|T| = k$: 否则，我们不断通过向 T 中添加属于$\delta(T)$的 G 中的一条边来更新它，直到达到所需的基数（这是始终可行的，因为 G 是连通的，并且每次更新都会得到一棵斯坦纳树）。然后，令 $\bar{v} \in \bar{V} \setminus V$为任意一个虚拟顶点，将 $\hat{} V = \bar{V} \setminus \{V \cup \{\bar{v}\}\}$ 定义为其余虚拟顶点的集合，并令 $V^C = V \setminus V(T) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-k-1}\}$ 为 $\hat{}T$在 G中的补集内的顶点（因为 $|T| = k$、T包含 $k+1$ 个顶点）。对于 I，我们考虑由 $T_1 = T \cup \delta(V)$、$T_2 = \{\bar{v}\}$ 以及每个 $j = 3$、4、.....、$n-k+1$对应的 $T_j = \{v_{j-2} \in V^C\}$ 给出的可行解。根据式（1）–（2），该解的值为 k。因此，I 的最优解值至多为 k。

□

¯在上述构造中，G 通过向其终端顶点添加叶节点而从 G 得到。这是对初始图的微小修改，因此，在那些对这种修改封闭且 CST 为**NP**完全的图类上，STSWSN-PC 仍然是困难的。弦二分图就是这种情况，即其长度至少为 6 的圈 C 所诱导的子图包含至少 $|C|+1$ 条边的二部图。更准确地说，我们有:

推论1。 *STSWSN-PC* 在二部弦图上是***NP***困难的。

证明。 向二部弦图的顶点子集添加叶节点会保持其弦二分性。然后，根据 **NP**完全性，CST 在二部弦图上为 NP 完全，这一结果由 M¨uller 和 Brandst¨adt(1987 年) 证明。

□

3 时隙数量固定时的 NP 困难性

本节中，我们假设有 $s = \bar{s}$ 个时隙，且 $\bar{s} \geq 2$固定，考察 STSWSN-PC 的复杂性，并证明该问题仍然是**NP**-困难的。

我们对上一节的方法作如下修改。考虑一个具有 $|V| = n$ 个顶点的图 $G = (V, E)$，以及一个终端顶点集合 $R \subset V$, $|R| \geq 4$，它们共同定义了一个 CST问题 实例。我们定义一个图 $G^\star = (V^\star, E^\star)$，其中 $V^\star = V \cup V^R$，且 $V^R = \{v_1^r, v_2^r, \ldots, v_{\bar{s}-1}^r\colon\ r \in R\}$ 是与 R中的顶点相关联的一组虚拟顶点；此外，$E^\star = E \cup E^C \cup E^R$，其中 $E^C = \{(v,w)\colon\ v, w \in V$满足 $(v,w) \notin E\}$，并且 $E^R = \{(r, v_j^r)\colon\ r \in R, j = 1, 2, \ldots, \bar{s}-1\}$。也就是说，$G^\star$是通过将 G扩展为完全图，并将 G中的每个终端顶点连接到相应的 $\bar{s}-1$ 虚拟顶点而得到的（示例见图 2）。对于每个 $e \in E^\star$，我们定义如下边权重:

$$w_e^1 = \begin{cases} 0 & \text{if } e \in E^R \\ 1 & \text{if } e \in E \\ n & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3}$$

$$w_e^j = \begin{cases} n & \text{if } e \in E^R \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad \forall j = 2, 3, \ldots, \bar{s} \tag{4}$$

令 $I^\star$ 为所得的 STSWSN-PC实例。

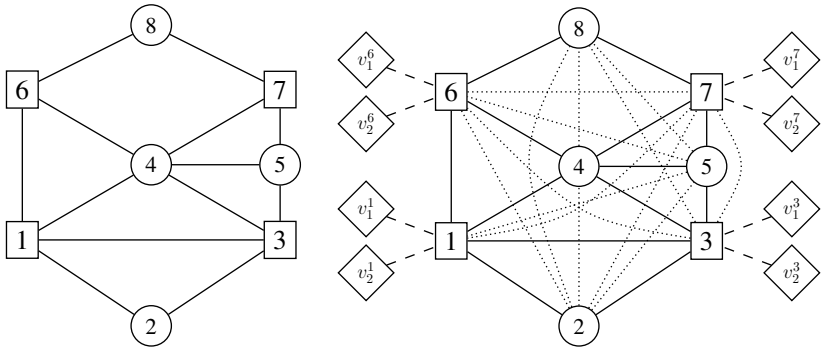


图 2：CST 实例（a），其中终端顶点呈正方形；以及对应的 STSWSN-PC 实例 $\bar{s}=3$（b），其中虚拟顶点呈菱形。

一棵包含 G 个终端、具有 k 条边的斯坦纳树 T 对应于一个解 T_1，T_2，……，$T_{\bar{s}}$，其值为 k。我们区分以下两种情况：

1. 如果 T不是生成树，则令 $r \in R$为 G的任意一个终端顶点，并令 v_1^r、v_2^r、……、$v_{\bar{s}-2}^r$为与 r相连的 $\bar{s}-2$个任意虚拟顶点。通过将 $V^R \setminus \{v_1^r, v_2^r, \ldots, v_{\bar{s}-2}^r\}$中的所有顶点添加到 T中（根据 (3)，它们在 E^R中的连接边在第一个时隙的权重为 0），并将 T_2定义为完全图 $G^\star \setminus V$（T_1）中仅包含 $E \cup E^C$中的边的生成树（根据 (4)，这些边在第二个时隙的权重为 0），再对每个 $j=3$定义 $T_j = \{v_{j-2}^r\}$，其中 4,…$\bar{s}$，即可得到 T_1；2. 如果 T是生成树，则令 $r \in R$为 G的任意一个终端顶点，并令 v_1^r、v_2^r、……、$v_{\bar{s}-1}^r$为与 r相连的 $\bar{s}-1$个虚拟顶点。通过将 $V^R \setminus \{v_1^r, v_2^r, \ldots, v_{\bar{s}-1}^r\}$中的所有顶点添加到 T中，并对每个 $j=2$、3、……、$\bar{s}$定义 $T_j = \{v_{j-1}^r\}$，即可得到 T_1。

注意，由于 G 的生成树也是一棵斯坦纳树，上述情形 2 中的构造表明，$I^\star$ 的最优解的值至多为 $n-1$。因此，与引理 1 和命题 1 中一样，可以指出，若 $T_1^\star, T_2^\star, \ldots, T_{\bar{s}}^\star$ 是 $I^\star$ 的一个最优解，则将 $T_1^\star$ 限制在 V 中的顶点上，所得结果是 G 的一棵斯坦纳树，且具有相同的值。事实上，我们首先注意到，$T_1^\star$ 的边都属于 $E \cup E^R$；否则，根据 (3)，所考虑的解的权重至少为 n，这与其最优性矛盾。此外，若 $T_1^\star$ 不是 G 的一棵斯坦纳树，那么应存在一个顶点 $r \in R$ 属于 $T_j^\star$，且满足 $2 \le j \le \bar{s}$；并且，由于 $T_1^\star, T_2^\star, \ldots, T_{\bar{s}}^\star$ 连通，E^R 中至少有一条边是在第一个时隙之外选取的。于是根据 (4)，所考虑的解的值至少为 n，这再次与其最优性矛盾。

上述论证证明，所考虑的 CST 实例有解，当且仅当相应的 STSWSN-PC 实例的值至多为 k，因此我们有：

命题 2. 时隙数 $\bar{s} \ge 2$ 固定的 *STSWSN-PC* 是***NP***困难的。

我们指出，上述归约中从 G 到 $G^\star$ 的变换不允许得出类似于推论 1的结论。

4 多项式时间可解的结构化情形

命题 1和命题 2的结果不对 STSWSN-PC 实例的结构作任何假设也成立。这里我们介绍两种输入具有特定结构时的多项式时间可解情形。第一种推广了引言中针对 $s=|V|$的情形所述的方法。

观察 1. 当 $|V|-s$ 为常数时，*STSWSN-PC* 可在多项式时间内求解。

证明。当 $s=|V|-1$时，一个可行解在某个时隙中包含一条边，而在其余所有时隙中各包含一个顶点；随后，可以通过穷举列出 $e \in E$ 和 $1 \le j \le |V|-1$ 的所有 w_e^j 值，并取其中最小值，在 $O(|V||E|)$ 时间内确定一个最优解。对于 $|V|-s$ 的任意常数值，也可以给出类似的算法（但时间复杂度更高）。 □

第二种可在多项式时间内求解的情形与图拓扑有关：

观察 2. 如果 $G = (V, E)$ 是一棵树，则对于固定数量为 $\bar{s} \geq 2$ 个时隙的 *STSWSN-PC* 问题，可在多项式时间内求解。在多项式时间内。

证明。 我们可以在 $O(n^{\bar{s}-1})$ 中列出所有这样的 $\bar{s}-1$ 边子集：移除这些边后， G 会分解为一个包含 $\bar{s}$ 棵树的森林。对于每个这样的子集，我们都能在多项式时间内，将相应的树分配到 $\bar{s}$ 个时隙中；这相当于在带权完全二分图 $\mathcal{B} = (\mathcal{T}; \mathcal{S}, \mathcal{W})$ 上求解完美匹配，其中 $\mathcal{T}$ 中的每个顶点代表一棵树， $\mathcal{S}$ 中的每个顶点代表一个时隙，而连接 $\tau \in \mathcal{T}$ 与 $\sigma \in \mathcal{S}$ 的边 $e_{\tau\sigma} \in \mathcal{W}$ 的权重为 $w^{\sigma}(\tau)$。

□

观察 2 引出了以下尚待解决的问题： (i) 当时隙数量不固定时，定义在树上的 STSWSN-PC 的复杂性如何？ (ii) 是否还存在其他图族（树以外），使得 STSWSN-PC 可在多项式时间内求解，至少在时隙数量固定时是如此？

致谢

作者感谢 Alberto Ceselli 和 Emiliano Lancini 对稿件提出的意见。

参考文献

Adasme, P. (2019). 部分覆盖无线传感器网络的最优子树调度。*Computer Stan-dards & Interfaces*,**61**, 20–35. Arrighi, E. and de Oliveira Oliveira, M. (2021). Steiner 树只需三个。载于 D. Coudert 和 E. Natale（编），第 *19* 届国际实验算法研讨会（*SEA 2021*），*Leibniz* 国际信息学会议录（*LIPIcs*）第 190 卷，第 5:1–5:15 页，德国 Dagstuhl。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik。Bianchessi, N. (2022). 关于最优求解部分覆盖无线传感器网络子树调度问题。*Universit`a degli Studidi Milano,* http://hdl.handle.net/2434/934107. Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1990). 计算机与难解问题：*NP* 完全性理论指南。W. H. Freeman & Co., 美国。Kruskal, J. B. (1956). 关于图的最短生成子树与旅行商问题。美国数学会会刊， **7**(1), 48–50. M¨uller, H. and Brandst¨adt, A. (1987). 弦二分图中斯坦纳树和支配集的 NP 完全性。*Theoretical Computer Science*,**53**(2-3), 257–265.