arXiv:2301.00744v1 [math.CO] 2 Jan 2023

由 Garside 幺半群产生的奇偶斐波那契格

THOMAS GOBET 和 BAPTISTE ROGNERUD

摘要。我们研究两族格，其元素个数分别由斐波那契数列中偶数位（和奇数位）的数给出。偶斐波那契格是 Garside 幺半群的简单元素在左整除关系下构成的格，而奇斐波那契格是偶斐波那契格中的一个序理想。我们给出格性质的组合证明，该证明基于用施罗德树描述 Garside 元素的字，以及偶斐波那契格的递归描述。由此得到计算格中交与并的显式公式。作为附带结果，我们还证明，Garside 元素的字数由一个小施罗德数给出。

目录

1. 引言 1 2. 偏序集的定义与结构 3 2.1. 偏序集的定义 3 2.2. 格性质 4 3. Garside 元素对应的施罗德树与字 7 3.1. 施罗德树的标记 7 3.2. 用施罗德树表示 Garside 元素的字 10 4. 枚举结果 17 4.1. 简单元素的数量 17 4.2. 原子的最小公倍数的左因子数量与奇斐波那契格 17 4.3. Garside 元素的因子的字的数量 18 参考文献 20

1. 引言

若干代数结构自然地产生格的实例：作为基本例子，可以举出按包含关系排序的给定集合的子集格，或给定群的子群格。接着可以研究所得格满足哪些性质；反过来，也可以从一个已知的格出发，例如探讨它能否在给定的代数框架中实现，或者格的某种性质是否会蕴含相关代数结构的性质，反之亦然。

本文旨在对 Garside 理论框架中出现的一个有限格给出组合描述。我们不再回顾 Garside 理论的结果和原理，因为本文不会用到这些内容；但感兴趣的读者可参阅 [5, 4]，了解更多相关主题。这是组合群论的一个分支，致力于确立无穷群族的性质，例如字问题和共轭问题的可解性、中心的结构等。粗略地说，Garside 群是一个幺半群（称为 Garside 幺半群）的分式群，它具有

特别良好的整除性质，从而确保上述问题可以得到解决。这样的幺半群 M 没有非平凡可逆元，并配有一个特定元素 Δ （称为 Garside 元素），其左因子和右因子都是有限的，彼此相同，生成该幺半群，并且在左整除和右整除关系下构成一个格。 Δ 的左因子或右因子称为简单元。

Garside 群的基本例子是 n 股 Artin 辫群 [7]。它具有若干彼此不等价的 Garside 结构（即，其分式群同构于 n 股辫群的非同构 Garside 幺半群），而最早发现的这类 Garside 结构中的简单元格同构于对称群上的弱 Bruhat 序。若干广泛研究的格可以实现为 Garside 幺半群的简单元格：其中包括任意有限 Coxeter 群 $[3, 6],$ 上的左、右弱 Bruhat 序的格，以及与有限 Coxeter 群 $[1, 2],$ 相关的（广义）非交叉划分格，等等（另见 [12] ，其中还有许多其他例子）。这引出了以下问题:

问题。哪些格可以作为 *Garside* 幺半群的简单元格出现?

本文旨在研究一族 P_n 格，这些格是第一作者在 [8]中引入的一族 M_n,$n \geq 2$ Garside 幺半群的简单元。对于 $n = 2$，相应的 Garside 群同构于 3 股辫群 B_3；一般而言，它同构于 $(n, n + 1)$-环面纽结群，而当 $n > 3$ 时，该群是 $(n + 1)$ 股辫群 B_{n+1}的一个（真）扩张。 P_n 的格性质源于 $op.cit.$ 中证明的事实： M_n 是一个 Garside 幺半群；但这并未提供多少关于该格结构和性质的信息。例如，我们没有枚举简单元数量的公式，只有一个用于计算格中交与并的算法。

在第 2 节中，我们通过展示偏序集的递归结构，为 P_n 的格性质给出一个新的证明（定理 2.8）。结果表明，每个格 P_n 都包含格 P_i,$i < n$ 作为子格。请注意，定理 2.8 证明中的一个关键步骤是在本文后文证明的，因为它依赖于利用施罗德树对 Garside 元素的字集所作的组合描述。具体而言，在第 3 节中，我们建立 Δ_n 的字集与具有 $n+1$个叶子的施罗德树集之间的一个简单双射，使得对一个字应用 M_n 的定义关系，相当于对相应的施罗德树应用我们称为“局部变换”的操作（定理 3.12 和推论 3.13）。这些局部变换由特定的边收缩给出，并且与 [10]中所考察的细化概念有关。这使我们能够在命题 3.16 中建立 P_n 与 $P_i, i < n$的子偏序集之间的偏序集同构，这是定理 2.8 证明所需的。

最后，得到的 P_n 递归描述，结合以施罗德树描述 Δ_n 字的方法，使我们得以推导出若干枚举结果。这部分内容见第4节。首先， P_n 的元素数量为 F_{2n}，其中 F_i 是第 i 个斐波那契数（引理4.1）。因此，我们称 P_n 为 偶斐波那契格。事实证明， M_n 的原子具有相同的左、右最小公倍数，且该最小公倍数严格小于 Δ_n。我们还证明，由该最小公倍数的序理想定义的 P_n 子格含有 F_{2n-1} 个元素（引理4.3），因此称其为 奇斐波那契格。其他枚举结果还包括确定 Garside 元素的字数（推论 3.14），以及整个简单元集合的字数（定理 4.7）。

回顾一下，本文研究的 Garside 幺半群 M_n 的分式群同构于 $(n, n + 1)$-环面纽结群。[9] 将这一 Garside 结构推广到了所有环面纽结群。若能描述这一更大类 Garside 幺半群的简单元格，将会很有意思。

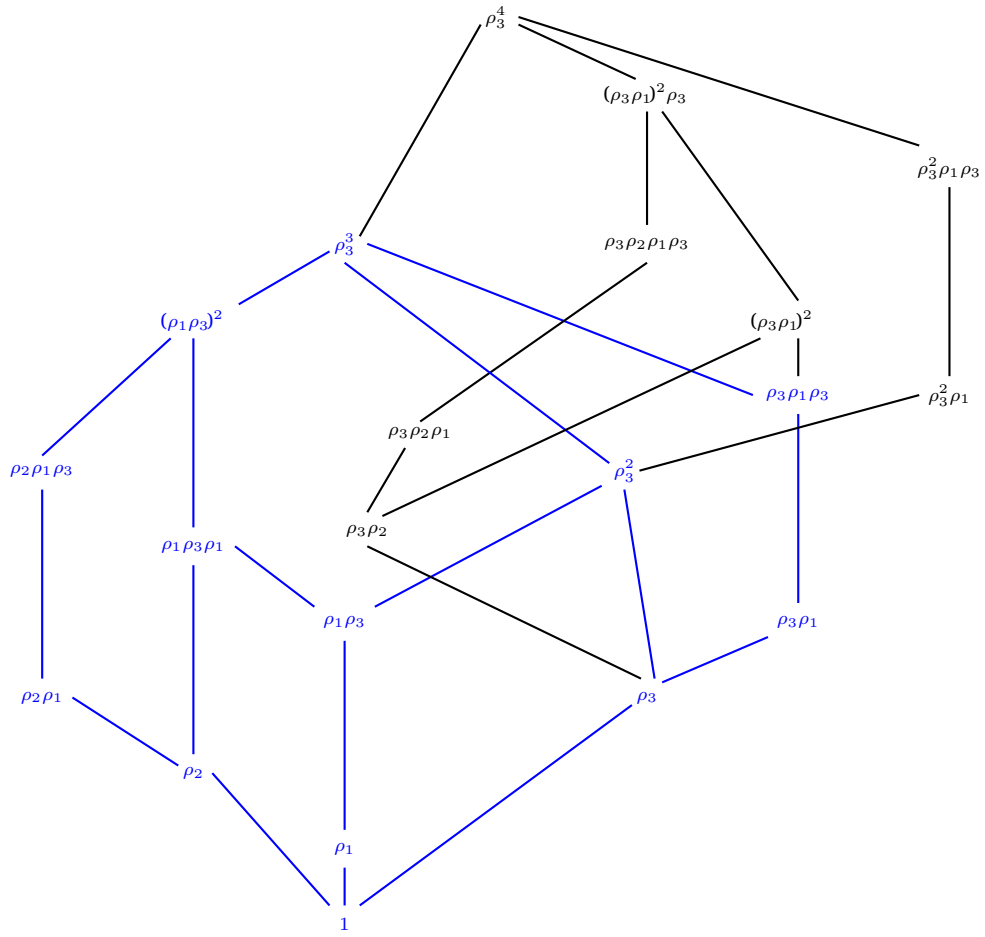

图 1. $n = 3$ 的偶斐波那契格，以及其中（以蓝色标出）的奇斐波那契格。

2. 偏序集的定义与结构

2.1. 偏序集的定义。本节开篇旨在说明所研究的偏序集是如何定义的。我们将回顾构造该偏序集所用幺半群的定义，以及这个幺半群的一些性质（这些性质均已在 [8] 中证明）。

设 M 是一个幺半群，且 $a, b \in M$。我们称 a 是 的左因子 b（或者称 b 是 的右倍数 a），如果存在 $c \in M$ 使得 $ac = b$。类似地，我们定义右因子和左倍数。

令 M_0 为平凡幺半群；对于 $n \geq 1$，令 M_n 为由以下表示定义的幺半群

$$\left\langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \;\middle|\; \rho_1\rho_n\rho_i = \rho_{i+1}\rho_n \text{ for all } 1 \leq i \leq n-1 \right\rangle. \tag{2.1}$$

我们将生成元集合记为 $\mathcal{S}$ $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$，将$M_n$的定义关系记为 $\mathcal{R}$。该幺半群由第一作者在 [8, 定义 4.1]中引入。注意，该幺半群带有长度函数 $\lambda : M_n \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$，该函数由 $\lambda(\rho_i) = i$ 的乘法扩展给出，其中对所有 $i = 1$、.....、 n均成立；这是可能的，因为定义关系不会改变一个字的长度。因此， M_n 中唯一的可逆元是

单位元，并且左整除关系和右整除关系在 M_n上都是偏序。若 a 左整除 b，我们将记作 $a \leq_L b$，或简写为 $a \leq b$；若 a 右整除 b，则记作 $a \leq_R b$。

这个幺半群被证明是所谓的 *Garside 幺半群*(参见 [8, 定理 4。18])，其对应的 Garside 群（其表示与 M_n相同）同构于$(n, n+1)$-环面纽结群，也就是环面纽结 $T_{n,n+1}$ 在 S^3中的补空间的基本群。Garside 幺半群具有若干重要性质。其中，左整除关系和右整除关系赋予 M_n 两种格结构，并且M_n 带有一个特殊元素 Δ_n，称为 *Garside 元素*，它具有以下两种性质

(1) Δ_n 的左因子集合与其右因子集合相同，且为有限集。(2) Δ_n 的左因子（或右因子）集合生成 M_n。

这个 Garside 元素由 $\Delta_n = \rho_n^{n+1}$给出。特别地，由于任何 Garside 幺半群在左整除和右整除关系下都是格，因此集合 $\mathsf{Div}(\Delta_n)$ 即 Δ_n的左因子（或右因子）集合，在赋予由 M_n上左（或右）整除关系限制所定义的序关系后，是一个有限格。集合 $\mathsf{Div}(\Delta_n)$ 是简单元素 或简单元 的集合，属于 M_n。一般而言，$(\mathsf{Div}(\Delta_n) \leq_L)$ 和 $(\mathsf{Div}(\Delta_n) \leq_R)$ 作为偏序集并不同构。但我们总有

$$(\mathsf{Div}(\Delta_n), \leq_L) \cong (\mathsf{Div}(\Delta_n), \leq_R)^{\mathrm{op}}$$

（例如参见 [8, 引理 2.19]；任何 Garside 幺半群都具有这一性质）。

我们将给出一个新的证明，说明 $(\mathsf{Div}(\Delta_n) \leq)$（因而 $(\mathsf{Div}(\Delta_n) \leq_R)$）是一个格，并借此展示该偏序集的递归结构。为此，我们需要用到幺半群 M_n 的一些基本结果（有时不另行说明），这些结果要么已在上文解释，要么在 [8] 中证明：

(1) M_n 上的左整除关系和右整除关系都是偏序。(2) 幺半群 M_n 既左可消去又右可消去，即对于 a、b、$c \in M_n$，有 $ab = ac \Rightarrow b = c$，且 $ba = ca \Rightarrow b = c$（参见 [8, 命题 4.9 和 4.12]）。(3) Δ_n 的左因子和右因子集合相同。事实上，元素 Δ_n 在 M_n 中是中心的，因此由于 M_n 可消去，对于 a、$b \in M_n$，只要 $ab = \Delta_n$，就有 $ab = ba$（参见 [8, 命题 4.15]）

2.2. 格性质。 本小节旨在证明关于 M_n 的简单元素的一些性质，并导出一个新的代数证明，证明 $\mathsf{Div}(\Delta_n)$ 是一个格。

命题 2.1。 设 $x_1x_2\cdots x_k$ 是 Δ_n 的一个字，其中对所有 $i = 1, \ldots, k$ 都有 $x_i \in \mathcal{S}$。存在 $i_1 = 1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq k$ 使得

- 对于所有 $j = 1, \ldots, \ell$，字 $y_j := x_{i_j}x_{i_j+1}\cdots x_{i_{j+1}-1}$（约定$i_{\ell+1} = k+1$）是某个 ρ_n 的幂的一个字，
- 字 $x_1x_2\cdots x_k$ 的分解 $y_1|y_2|\cdots|y_\ell$ 是极大的，即 y_j 中没有任何字可以分解为两个非空字的乘积，而这两个字都是某个 ρ_n 的幂的字。

此外，具有上述性质的分解是唯一的。

证明。 利用 M_n 可消去这一事实，分解的存在性显而易见：给定字 $x_1x_2\cdots x_k$，考虑满足 $x_1x_2\cdots x_k$ 是 ρ_n 的某个幂的字的最小 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$。这样的 i 必定存在，因为 $x_1x_2\cdots x_k$ 是 ρ_n 的某个幂的字。然后令 $i_2 := i + 1$。由 M_n 中的消去性可知，由于 $x_1\cdots x_i$ 和 $x_1\cdots x_k$ 都是 ρ_n 的某个幂的字，字 $x_{i+1}\cdots x_k$ 也必定是 ρ_n 的某个幂的字。因此，可以继续对字 $x_{i+1}\cdots x_k$ 作同样的论证。再次利用消去性可知，这个分解必定是极大的。

现在假设该分解不唯一，也就是说，假设 $y_1|y_2|\cdots|y_\ell$ 和 $z_1|z_2|\cdots|z_{\ell'}$ 是字 $x_1x_2\cdots x_k$ 的两个分解，并满足陈述中的性质。由于 y_1 和 z_1 都是 ρ_n 的某个幂的字，若 $y_1 \neq z_1$，则其中一个字必定是另一个字的真前缀；不妨设 z_1 是 y_1 的真前缀。但这与分解 $y_1|y_2|\cdots|y_\ell$ 的极大性矛盾：事实上，若 $y_1 = x_1x_2\cdots x_{i_2-1}$ 且 $z_1 = x_1x_2\cdots x_p$，其中 $p < i_2 - 1$，我们就可以将 y_1 非平凡地分解为 $x_1x_2\cdots x_p|x_{p+1}\cdots x_{i_2-1}$；由消去性可知，$x_1\cdots x_p$ 和 $x_{p+1}\cdots x_{i_2-1}$ 都是 ρ_n 的某个幂的字。□

例 2.2。考虑字 $\rho_3\rho_1\rho_7\rho_1\rho_7\rho_5\rho_4\rho_7\rho_7\rho_1\rho_7\rho_6$ in M_7。我们声称这是幺半群 M_7的 Garside 元素 ρ_7^8 的一个表示字。事实上，利用定义关系 $\rho_1\rho_7\rho_i = \rho_{i+1}\rho_7$（其中 $i = 5$ 和 6），我们得到

$$\rho_3(\rho_1\rho_7\rho_1\rho_7\rho_5)\rho_4\rho_7\rho_7(\rho_1\rho_7\rho_6) = \rho_3\rho_7^3\rho_4\rho_7^4,$$

此外，应用定义关系，我们还观察到

$$\rho_3\rho_7^3\rho_4\rho_7^4 = \rho_1\rho_7\rho_2\rho_7^2\rho_4 = \rho_1\rho_7\rho_1\rho_7\rho_1\rho_7\rho_4 = \rho_1\rho_7\rho_1\rho_7\rho_5\rho_7 = \rho_1\rho_7\rho_6\rho_7^2 = \rho_7^4.$$

根据命题 2.1 的分解为

$$\underbrace{\rho_3\rho_1\rho_7\rho_1\rho_7\rho_5\rho_4}_{:=y_1}\,|\,\underbrace{\rho_7}_{:=y_2}\,|\,\underbrace{\rho_7}_{:=y_3}\,|\,\underbrace{\rho_1\rho_7\rho_6}_{:=y_4}.$$

考虑 y_1 或 y_4 的 u 前缀时，考察 $\lambda(u)$ 可清楚看出：每当 u 是一个真前缀时，$\lambda(u)$ 就不等于 7 的倍数，而这是一个字表示 ρ_7 的幂的必要条件。

引理 2.3。令 $1 \le k \le n$。则

$$\mathcal{S} \cap \{x \in \mathsf{Div}(\Delta_n) \mid x \le \rho_k\rho_n^k\} = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k\}.$$

证明。我们对 k 使用归纳法。对于 $k = 1$，结论显然成立，因为没有任何 M_n 的定义关系可以应用于字 $\rho_1\rho_n$。现在设 $k > 1$。注意到

$$\rho_k\rho_n^k = (\rho_1\rho_n)^k = (\rho_1\rho_n)(\rho_1\rho_n)^{k-1}.$$

特别地，我们有 $\rho_1 \le \rho_k\rho_n^k$，由归纳法可得，对于所有 $1 \le i \le k-1$，都有 $\rho_1\rho_n\rho_i \le \rho_k\rho_n^k$。由于 $\rho_1\rho_n\rho_i = \rho_{i+1}\rho_n$，我们得到 $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k\} \subseteq \mathcal{S} \cap \{x \in \mathsf{Div}(\Delta_n) \mid x \le \rho_k\rho_n^k\}$。

还需证明没有其他 ρ_i 可以成为 $\rho_k\rho_n^k$ 的左因子。因此，假设 $i > k$ 且 $\rho_i \le \rho_k\rho_n^k$。于是存在一个字 $x_1x_2\cdots x_p$，对应于 $\rho_k\rho_n^k$，其中对于所有 i，都有 $x_i \in \mathcal{S}$，使得 $x_1 = \rho_i$。由于字 $x_1x_2\cdots x_p$ 和 $\rho_k\rho_n^k$ 表示同一个元素，它们可以通过一个有限字序列 $w_0 = x_1x_2\cdots x_p$、w_1、...、$w_q = \rho_k\rho_n^k$ 联系起来，其中每个 w_i 都是一个由 $\mathcal{S}$ 中的字母组成的字，而 w_{i+1} 是通过在字中的某处应用一个关系，从 w_i 得到的。由于 w_0 的首字母与 w_q 的首字母不同，必然存在某个 $0 \le \ell < q$，使得 w_ℓ 以 ρ_i 开头，而 $w_{\ell+1}$ 不以此开头。因此，将 w_ℓ 变为 $w_{\ell+1}$ 的关系必定应用于字 w_ℓ 的开头。但唯一一侧以 ρ_i 开头的可能关系是 $\rho_i\rho_n = \rho_1\rho_n\rho_{i-1}$。由此可得 $\rho_1\rho_n\rho_{i-1} \le \rho_k\rho_n^k = (\rho_1\rho_n)^k$。根据消去性，可得 $\rho_{i-1} \le (\rho_1\rho_n)^{k-1} = \rho_{k-1}\rho_n^{k-1}$。由归纳法，这迫使我们有 $i - 1 \le k - 1$，这与假设 $i > k$ 矛盾。□

同理，我们有

引理 2.4. 设 $1 \le k \le n$。则

$$\mathcal{S} \cap \{x \in \mathsf{Div}(\Delta_n) \mid x \le_R \rho_n^k\} = \{\rho_n, \rho_{n-1}, \ldots, \rho_{n-k+1}\}.$$

证明。与引理 2.3 一样，我们对 k 使用归纳法。对于 $k=1$，结论显然成立。因此，假设 $k>1$。由于 $(\rho_1\rho_n)^{n-j}\rho_j=\rho_n^{n-j+1}$，可得，对于所有满足 $n-j+1\le k$ 的 j，都有 $\rho_j\le_R\rho_n^k$；也就是说，对于所有 $j\ge n-k+1$，都有此结论。接下来只需证明，没有其他 ρ_j 能右整除 ρ_n^k。因此，假设 $\rho_j\le_R\rho_n^k$，其中 $j<n-k+1$。按照引理 2.3 的证明方法，我们看到 $\rho_1\rho_n\rho_j=\rho_{j+1}\rho_n$ 必须是 ρ_n^k 的右因子，因此由消去性可知 $\rho_{j+1}\le_R\rho_n^{k-1}$。根据归纳法，这迫使 $j+1\ge n-k+2$，这与我们假设的 $j<n-k+1$ 矛盾。□

对于 $x\in\mathsf{Div}(\Delta_n)$，令 $d(x):=\max\{k\ge0\mid\rho_n^k\le x\}$。令 $0\le i\le n+1$，并令

$$D_n^i:=\{x\in\mathsf{Div}(\Delta_n)\mid d(x)=i\}.$$

注意到

$$\mathsf{Div}(\Delta_n)=\coprod_{0\le i\le n+1}D_n^i.$$

我们有 $D_n^n=\{\rho_n^n\}$, $D_n^{n+1}=\{\Delta_n\}$。

引理 2.5. 令 $x\in\mathsf{Div}(\Delta_n)$ 和 $i=d(x)$。令 $x'\in M_n$ 使得 $x=\rho_n^ix'$。注意到$x'\in D_n^0$。令 $x_1x_2\cdots x_k$ 为 x 的一个字，其中 $x_i\in\mathcal{S}$ 对所有 $i=1,\dots,k$ 都成立。则存在$1\le\ell\le k$ 使得 $x_1x_2\cdots x_\ell$ 是 ρ_n^i 的一个字（因此，根据消去性，$x_{\ell+1}\cdots x_k$ 是 x' 的一个字）。换言之，x 的任意一个字都以前缀 ρ_n^i 的一个字。

证明。只需证明：若 $z_1z_2\cdots z_p$ 是 x 的一个表达式，且 $z_1z_2\cdots z_q$ 是 ρ_n^i ($q\le p$ 的一个表达式，那么不可能在字 $z_1z_2\cdots z_p$ 上应用一个定义关系，使其同时涉及字 $z_1z_2\cdots z_q$ 中的字母和字 $z_{q+1}\cdots z_p$ 中的字母。考虑可能发生这种情况的三种情形：可能有 $\rho_1\rho_n|\rho_j$、$\rho_1|\rho_n\rho_j$ 或 $\rho_{j+1}|\rho_n(1\le j<n)$，其中 $|$ 将字母 z_q 和 z_{q+1} 分隔开。后两种情形不可能发生，因为那样就会有 $z_{q+1}=\rho_n$，因此 $z_{q+1}\cdots z_p$ 将是一个以 ρ_n 开头的、表示 x' 的字，这与 $x'\in D_n^0$ 矛盾。剩下只需证明情形 $\rho_1\rho_n|\rho_j$ 不可能发生。因此，假设 $z_{q-1}=\rho_1$、$z_q=\rho_n$、$z_{q+1}=\rho_j$。由消去性可知，由于 $z_1z_2\cdots z_q$ 是 ρ_n^i 的一个字，这意味着 $\rho_1\le_R\rho_n^{i-1}$。根据引理 2.4，这意味着 $n-(i-1)+1=1$，因而 $i=n+1$。由于 $x\in\mathsf{Div}(\Delta_n)$ 且 $x=\rho_n^{n+1}x'=\Delta_nx'$，我们得到 $x'=1$，这与 $z_{q+1}=\rho_j$ 矛盾。□

引理 2.6. 设 $i,j\in\{0,1,\dots,n+1\}$，其中 $i\ne j$。设 $x\in D_n^i$, $y\in D_n^j$。假设$x\le y$。则 $i<j$ 和 $x<\rho_n^j\le y$。

证明。显然，$i<j$，因为 $\rho_n^i\le y$ 如 $\rho_n^i\le x$，因此 $j<i$ 将与 $y\in D_n^j$矛盾。特别地，$x<y$。设 x',y'，使得 $x=\rho_n^ix'$ 和 $y=\rho_n^jy'$。注意，x',y'都属于 D_n^0。由于 $x\le y$ 且 M_n 是可消去的，我们得到 $x'<\rho_n^{j-i}y'$。这意味着存在一个字 $x_1x_2\cdots x_k$，它是 $\rho_n^{j-i}y'(x_i\in\mathcal{S})$ 的一个字，并且存在 $1\le\ell<k$，使得 $x_1x_2\cdots x_\ell$是 x'的一个字。根据引理 2.5，存在 $0\le\ell'\le k$，使得 $x_1x_2\cdots x_{\ell'}$是 ρ_n^{j-i}的一个字。若$\ell'\le\ell$，则 $\rho_n^{j-i}\le x'$，这与 $x'\in D_n^0$ 矛盾。因此 $\ell'>\ell$，且 $x'<\rho_n^{j-i}$。在左侧乘以 ρ_n^i，得到 $x<\rho_n^j$。□

引理 2.7. 设 $z_1,z_2\in D_n^i$。设 $1\le k_1<k_2\le n$，并假设在 $(\mathrm{Div}(\Delta_n)\le)$ 中有两个覆盖关系 $z_1\le\rho_n^{k_1}$, $z_2\le\rho_n^{k_2}$。那么 $z_1<z_2$。

证明。由于 $z_1\le\rho_n^{k_1}$, $z_2\le\rho_n^{k_2}$ 是覆盖关系，存在 $1\le j_1,j_2\le n$ 使得$z_1\rho_{j_1}=\rho_n^{k_1}$, $z_2\rho_{j_2}=\rho_n^{k_2}$。根据引理 2.4，对于 $\ell\in\{1,2\}$，我们有 $j_\ell\in\{n-k_\ell+1,\dots,n\}$，并且

$$\rho_n^{k_\ell}=\rho_n^{j_\ell+k_\ell-1-n}(\rho_1\rho_n)^{n-j_\ell}\rho_{j_\ell}.$$

特别地，我们有

$$z_\ell=\rho_n^{j_\ell+k_\ell-1-n}(\rho_1\rho_n)^{n-j_\ell}$$

并且由于 $(\rho_1\rho_n)^{n-j_\ell} = \rho_{n-j_\ell}\rho_n^{n-j_\ell}$，由引理 2.3 可知，$\rho_n$ 不能是 $(\rho_1\rho_n)^{n-j_\ell}$ 的左因子，因此 $d(z_\ell) = j_\ell + k_\ell - 1 - n$。但是，对于 $\ell \in \{1,2\}$，$d(z_\ell) = i$，且由于$k_1 < k_2$，我们推得 $j_1 > j_2$。由于 $z_\ell = \rho_n^i(\rho_1\rho_n)^{n-j_\ell}$，我们得到 $z_1 < z_2$，由此完成证明。□

定理 2.8。偏序集 $(\mathrm{Div}(\Delta_n) \leq)$ 是一个格。给定 $i,j \in \{0,1,\ldots,n+1\}$，其中 $i \leq j$且 $x \in D_n^i$, $y \in D_n^j$，我们有

$$x \wedge y = x \wedge_i \left(\bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq y\} \right),$$

其中 $\vee_i$ 和 $\wedge_i$ 分别表示D_n^i上左整除序限制所形成的格中的交与并。注意，如果 $i = j$，我们就直接得到 $x \wedge y = x \wedge_i y$。

证明。对 n 使用归纳法即可证明。我们有 $\mathrm{Div}(\Delta_0) = \{\bullet\}$，且 $\mathrm{Div}(\Delta_1) = \{1, \rho_1, \rho_1^2\}$ 是一个格。因此，假设 $n \geq 2$。根据下文的命题 3.16，将左整除关系限制在 D_n^i 上，可得到与 $\mathrm{Div}(\Delta_{n-i})$ 的偏序集同构（若 $i \neq 0, n+1$）；将其限制在 D_n^0 上，可得到与 $\mathrm{Div}(\Delta_{n-1})$ 的偏序集同构；将其限制在D_n^{n+1}上，则可得到与 $\mathrm{Div}(\Delta_0) = \{\bullet\}$ 的偏序集同构。特别地，根据归纳法，这些偏序集都是格。由于偏序集 $(\mathrm{Div}(\Delta_n) \leq)$ 是有限的，且存在一个极大元，因此只需证明，按上述公式定义的 $x \wedge y$ 确实是 x 和 y 的并。

显然，$x \wedge y \leq x$。下面证明 $x \wedge y \leq y$。若 $i = j$，则显然，因此假设 $i < j$。由引理 2.6 可知

$$\bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq y\} = \bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq \rho_n^j\}.$$

只需验证 $\bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq \rho_n^j\} \leq \rho_n^j$。注意

$$\bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq \rho_n^j\} = \bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq \rho_n^j \text{ and } (z \leq x \leq \rho_n^j \Rightarrow x \notin D_n^i)\}.$$

现在由引理 2.6，若 $z \in D_n^i$，且 x 是满足 $z \leq x \leq \rho_n^j$ 和 $x \notin D_n^i$ 的任意元素，则对于某个 k（必然小于或等于 j），有 $x = \rho_n^k$。这意味着

$$\bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq \rho_n^j\} = \bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq \rho_n^j \text{ and } z \leq \rho_n^k \text{ for some } k \leq j\}.$$

由引理 2.7 可得

$$\bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq \rho_n^j \text{ and } z \leq \rho_n^k \text{ for some } k \leq j\}$$

必定是集合 $\{z \in D_n^i \mid z \leq \rho_n^j$ 中的一个元素，并且对于某个 $k \leq j\}$，有 $z \leq \rho_n^k$；因此它尤其是 ρ_n^j 的一个左因子（因而也是 y 的左因子）。

现在假设 $u \leq x$，y。不妨设 $u \in D_n^i$，否则由引理 2.6 可得 $u < \rho_n^i \leq x \wedge y$。由于 $u \leq y$，我们有 $u \leq \bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq y\}$。因此，$u \leq x \wedge_i \left(\bigvee_i \{z \in D_n^i \mid z \leq y\}\right) = x \wedge y$。□

3. Garside 元素的施罗德树与字

3.1. **施罗德树的标记**。一个有根平面树是嵌入平面的一棵树，其中有一个指定的顶点称为根。度为1的顶点称为树的叶子，其他顶点则称为内部顶点。可以通过将边的方向设为从根指向叶子，把有根树视为有向图。若有一条从顶点 v 指向顶点 w的有向边，我们称 v 为父节点，而 w 是 w 的子节点。如图 2 所示，我们将树画成根在上方，

叶子在下方。平面嵌入使每个顶点的子节点按从左到右的顺序全序排列，因此可以称某个顶点的最左子节点。

或者，也可以对有根平面树作如下有用的递归定义：它要么是没有内顶点且只有一个叶子的空树，要么是一个元组 $T = (r, \mathrm{Tr})$，其中 r 是根顶点，Tr 是有根平面树的有序列表。若 T 是按第一种定义的树，则顶点 r 是它的根，而列表 Tr 则是移除根 r 及其在 T 中所有相邻边后，按从左到右的顺序得到的子树列表。

定义 3.1。

(1) 施罗德树 是这样一种有根平面树，其中每个内顶点至少有两个子节点。*(2)* 二叉树 是这样一种有根平面树，其中每个内顶点恰有两个子节点。*(3)* 树的规模 是其叶子的数量。*(4)* 树的高度 是后代链中最长链所含的顶点数。*(5)* 每个根的子节点都是叶子的、具有 n 个叶子的施罗德树称为施罗德丛树，记作 δ_n。(6) 由这样一种二叉树确定的施罗德树——其中每个右子节点（分别地，每个左子节点）都是叶子——称为左梳状树 （分别称为右梳状树）。

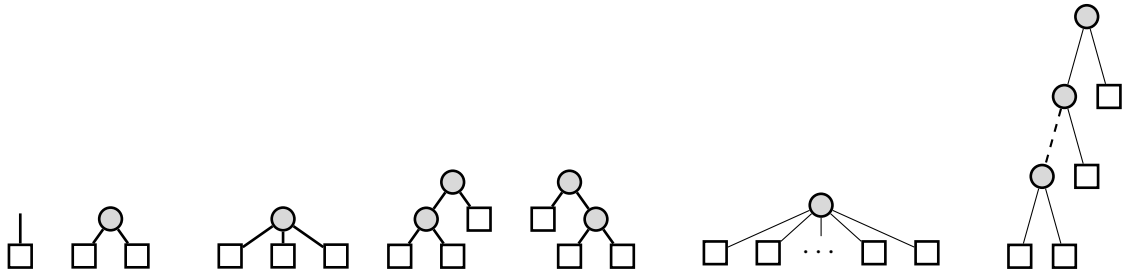

图 2。从左到右：具有 1 个叶子的唯一施罗德树、具有 2 个叶子的唯一施罗德树、具有 3 个叶子的 3 棵施罗德树。接着是施罗德丛树，其右侧是一棵左梳状树。

施罗德树的数量由所谓的 小施罗德数给出。该数列以 1、1、3、11、45、197、903、4279、20793、.....开头，并在 [11]中记作 A001003。

我们将使用所谓的后序遍历为树的顶点和叶子标号（并读取这些标签）。这是一种递归算法，它恰好访问树的每个顶点和叶子一次。具体而言，若 $T = (r、(T_1、\ldots..、T_k))$ 是一棵有根平面树，则我们递归地对 T_1、T_2 应用该算法，直到 T_k，最后访问根 r。当算法遇到空树时，它会访问该树的叶子，随后递归停止，并在递归过程中向上返回一级。算法访问的第一个顶点是 T 的最左叶子，随后算法移动到其父节点 v（但不访问 v），并访问 v 的第二个子树，从最左叶子开始，依此类推。图 3 展示了一个示例：算法访问的第一个顶点标为 1，第二个标为 2，依此类推。算法最后访问的顶点总是 T 的根。设 m、n 为满足 $m \geq n-1$ 的两个整数。然后，我们按照后序遍历所定义的全序，将一棵具有 $n \geq 2$ 个叶子的施罗德树 T 的各个顶点依次标号，具体规则如下：

(1) 令 v 为顶点 w 的最左子节点。那么，w 是施罗德树 $(w、(T_1, \cdots, T_k))$ 的根，而 v 是 T_1 的根。v 的标签 $\lambda(v)$ 等于由所有树 T_2、$\cdots$、T_k 构成的森林中的叶子数量。

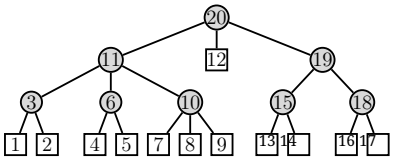

图 3. 对大小为 12 的施罗德树进行后序遍历。

(2) 如果 v 不是 T 中某个顶点的最左子节点，我们将 $LD(v)$ 视为它的最左后代集合，该集合由 v 的最左子节点及其最左子节点依此类推构成。那么， v 的标签为 $m-\sum_{w\in LD(v)}\lambda(w)$。注意，按照后序遍历，在访问 v 时，顶点 v 的最左后代的标签已经确定。

所得结果是一个带标记的施罗德树，记作 $L_m(T)$。这一过程见图 4。

定义 3.2。设 $L_m(T)$ 是一个带标记的施罗德树，其中 n 片叶分别标记为 $m\geq n-1$。 T 中各顶点的标签之和称为其 权重 (相对于 m)。

引理 3.3。设 T 是一棵有 n 个叶子且满足 $m\geq n-1$ 的施罗德树。那么，标记 $L_m(T)$ 的整数均严格为正，只有根例外，根的标签可以是 0。

证明。若一个顶点是最左子节点，那么它的标签就是叶子的数量，因此为正。若 v 不是最左子节点，则它的标签为 $m-\sum_{w\in LD(v)}\lambda(w)$。每个 $\lambda(w)$ 都等于树 T 中某些叶子的数量，而与 $LD(v)$ 中不同顶点相关联的叶子集合互不相交。此外， $LD(v)$ 中恰有一个元素是叶子，且该叶子不计入 $\sum_{w\in LD(v)}\lambda(w)$。因此，我们有

$$\left(\sum_{w\in LD(v)}\lambda(w)\right)+1\leq n, \tag{3.1}$$

因此 $m-\sum_{w\in LD(v)}\lambda(w)\geq 0$。此外，若 $\sum_{w\in LD(v)}\lambda(w)=m$，则由 (3.1) 可知必有 $m=n-1$。由此可得， v 有 n 个后代，因为作为 v 后代的最左叶子未被计入，因此 v 是 T 的根。□

如以下结果所示，树的这种标号几乎完全由其递归结构决定。

引理 3.4. 设 $T=\big(r,(T_1,\ldots,T_k)\big)$ 是一棵施罗德树， v 是 T_i 的一个顶点，其中 $i\in\{1,\ldots,k\}$。那么，

(1) 若 v 不是 T_1 的根，则它在 $L_m(T)$ 中的标签等于它在 $L_m(T_i)$中的标签。*(2)* 若 v 是 T_1 的根，则它在 $L_m(T_1)$ 中的标签等于 v 的标签与 $L_m(T)$ 中 T 的根的标签之和。

证明。设 v 是 T_i 的一个顶点。如果 v 是 T 中的一个最左子节点，且它不是 T_1 的根，那么它的标签是某个包含在 T_i 中的森林的叶子数。因此，这个数在大树 T 和提取出的树 T_i 中相同。如果 v 不是最左子节点，那么它的标签由其最左后代的标签决定；因此，由于我们刚刚证明了不是 T_1 的根的最左后代的标签相同，所以它在树 T 中的标签与提取出的树 T_i 中相同。 T_1 的根表现不同，因为在 T 中它是一个最左子节点，而在 T_1 中并非如此。因此，若 v 是 T_1 的根，记 v 在 T_1 中的标签为 λ_1，则有 $\lambda_1(v)=m-\sum_{w\in LD(v)}\lambda_1(w)$。该

v 的后代的标签在 T 和 T_1 中相同，也就是说，对于所有 $w \in LD(v)$，都有 $\lambda_1(w) = \lambda(w)$。在 T 中，根 r 的标签由下式给出

$$\lambda(r) = m - \lambda(v) - \sum_{w \in LD(v)} \lambda(w) = m - \lambda(v) - \sum_{w \in LD(v)} \lambda_1(w).$$

因此，我们有 $\lambda(r) + \lambda(v) = \lambda_1(v)$。 □

3.2. 用施罗德树表示 Garside 元素的字。 对带标号的树 $L_m(T)$进行后序遍历，并将生成元 ρ_i 与字母 i 对应，约定 $\rho_0 = e$，即可得到一个映射 Φ_m，它将由 m 标号的施罗德树集合映射到幺半群 M_m中元素的字集合 $S^\star$。图 4 展示了一个示例。

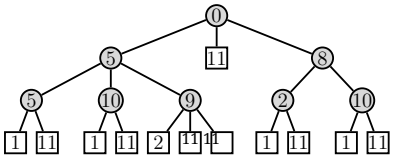

图 4. 使用 $m = 11$对大小为 12 的施罗德树进行标号的示例。对应的幺半群 M_{11} 中的元素为$\rho_1\rho_{11}\rho_5\rho_1\rho_{11}\rho_{10}\rho_2\rho_{11}\rho_{11}\rho_9\rho_5\rho_{11}\rho_1\rho_{11}\rho_2\rho_1\rho_{11}\rho_{10}\rho_8$.

定义 3.5。 设 T 是一棵非空施罗德树。若 T 有一个子树 T_1 满足以下三个性质：

(1) r_1 的根不是 T_1 的根，因此它有一个父节点 r_0，且该父节点至少有两个子节点；(2) r_1 的根恰有两个子节点；(3) T_1 的右子树是仅有一个叶子的空树。

~那么，我们可以通过收缩边 T $r_0 - r_1$来构造另一棵树，换言之，即移除 r_1 在 T_1 中的根，并将 T_1 的两个子树连接到 r_0。图5展示了一个示例。我们将这种变换，或其逆变换，称为局部变换。

请注意，由于在上述构型中，r_0 至少有两个子节点（另见图5左图），因此应用局部变换后得到的构型中，r_0 至少有三个子节点。特别地，若要沿相反的 ~ 方向应用局部变换，我们需要有一棵施罗德树 T，其子树 T_1 满足：

(1) T_1 的父节点 r_0（可以是 T的根）至少有三个子节点；(2) 树 T_1 不是 r_0的最后一个子节点，且其后紧接着一个只有一片叶子的空树。

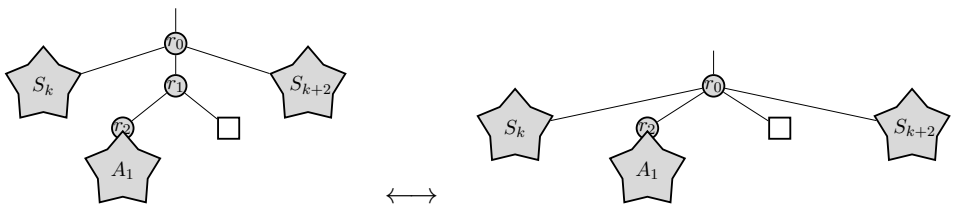

图5. 局部变换。

形式上，若以 r_0 为根的 T的子树为 $S=\big(r_0$，即 $(S_1,\cdots,S_k,T_1,S_{k+2},\cdots,S_r)\big)$，且子树 T_1 为 $\big(r_1$，即 $(A_1,A_2)\big)$，则将 S替换为下式，即可得到树 $\widetilde{T}$:

$$\big(r_0,(S_1,\cdots,S_k,A_1,A_2,S_{k+2},\cdots,S_r)\big).$$

引理3.6. 设 T 和 S 是具有 n 个叶子的两棵施罗德树。则可以通过一系列局部变换，将树 T 变为树 S 。

证明。只需证明，通过一系列局部变换，可以将 T 变为施罗德丛树 δ_n——回忆一下，这种施罗德树的根的每个子节点都是叶子——。这样，施罗德树 S 也可以变为 δ_n，因此 T也可以变为 S。我们对叶子数作归纳。对于 $n=1$ 和$n=2$，结论显然成立。若 T 有一个子树 S，它不是 δ_k的形式，则对 S应用归纳假设，可通过变换将 S 变为某个 δ_k，其中 k。因此可以假设 $T=\big(r,\ (\delta_{n_1},\cdots,\delta_{n_k})\big)$，其中 $\sum n_i=n$。若 T不等于 δ_n，则它至少有一个非空子树 S。若 S 只有两片叶子，我们可以应用一次局部变换，移除其根，并将两片叶子接到 T的根上。若它有多于3片叶子，根据归纳法，存在一系列局部变换可将 S 变为左梳状树。接着，在左梳状树的根处反复应用局部变换，移除左梳状树的所有内部顶点，并将其所有叶子接到 T的根上。对 T中所有非空的子树 S 重复此操作，最终得到 δ_n。□

引理 3.7. 设 T 是一棵有 n 个叶子且满足 $m\geq n-1$ 的施罗德树。那么， $\Phi_m(T)$ 是 M_m 中 $\rho_{n-1}(\rho_m)^{n-1}\rho_{m-n+1}$ 的一个字。特别地，若 $m=n-1$，那么它是 M_{n-1} 的 *Garside* 元素的一个字。

证明. 若 $T=\delta_n$ 是一棵只有一个根且有 n 个叶子的施罗德树，则 $\Phi_m(T)=\rho_{n-1}(\rho_m)^{n-1}\rho_{m-n+1}$。若 T 是另一棵施罗德树，则根据引理 3.6，存在一系列局部变换，将 T 变为 δ_n。为完成证明，只需说明对施罗德树 T 应用一次局部变换，相当于对 $\Phi_m(T)$ 应用幺半群 M_m 中的一个关系。观察图5即可轻易得出这一点。

事实上，如果 T 是图5左侧的树，那么 r_2 的标签是 1，其右侧叶子的标签是 m，而 r_1 的标签是某个整数 ℓ。由于 r_1 不是T的根，我们有 $1\leq\ell$。此外，由于 r_1不是 T 的叶子，我们有 $\ell<m$。因此，在 $\Phi_m(T)$ 中，我们有因子 $\rho_1\rho_m\rho_\ell$，且 $1\leq\ell\leq m-1$。

If $\widetilde{T}$表示图5右侧的树，那么 r_2 的标签是 $\ell+1$。事实上， r_2 是 T 中的一个$\widetilde{\ }$最左子节点，当且仅当 r_1 是 T中的最左子节点。在这种情况下，它的标签是其右侧森林中叶子的数量，而在 T 中，这片$\widetilde{\ }$森林的叶子比 T中恰好多一个。另一种情况下， r_2 在 T中的标签是 $m-\sum_{w\in LD\ (r_2)}\lambda(w)$。 r_1 的标签是 $\ell=m-1-\sum_{w\in LD\ (r_2)}\lambda(w)$。因此， r_2 的标签是 $\ell+1$。 $r_2\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$右侧的叶子在 T 中标记为 m，因此 $\Phi_m(T)$ 可由 $\Phi_m(T)$ 中的 $\rho_1\rho_m\rho_\ell$ 替换为 $\rho_{\ell+1}\rho_m$ 得到，反之亦然。□

命题 3.8. 对于 $m=n-1$，从具有 n 个叶子的施罗德树集合到 ρ_{n-1}^n 中 M_{n-1} 的字集合的映射 Φ_m 是满射。

证明。我们需要证明，对于每个满足 $\rho_{n-1}^n\in M_{n-1}$ 的字 y，都可以为其关联一棵具有 n 个叶子的施罗德树 T，使得 $\Phi_m(T)=y$。字 y 和字 ρ_{n-1}^n 可以通过应用 M_m 的一系列定义关系相互转换。我们已经知道，字 ρ_{n-1}^n 属于 Φ_m 的像，因为它是施罗德丛树的像。因此，要完成证明，我们需要证明以下断言：给定一棵施罗德树 S，如果相应的标号中含有形如 $1m\ell$ （分别为 $(\ell+1)m$）且满足 $1\leq\ell\leq m-1$ 的子串，那么我们必定处于左侧

图5中的图（分别为右侧的图）所示的构形，因此可以应用一次局部变换。事实上，由于可以通过一系列定义关系将字 ρ_{n-1}^n 转换为字 y，令 $y_0 = \rho_{n-1}^n$、y_1、……、$y_k = y$ 为 ρ_{n-1}^n 的表达式，使得 y_i 可由 y_{i-1} 通过应用 M_m 中的一个关系得到。将关系应用于 $y_0 = \Phi_m(T)$，得到 y_1，这对应于对 T 应用一次局部变换，得到一棵施罗德树 T_1；并且如引理 3.7 的证明所示，我们得到 $\Phi_m(T_1) = y_1$。

为证明这一论断，假设 S 是一个施罗德树，其标号包含形如 $1m\ell$ 且满足 $1 \le \ell \le m-1$ 的子串。注意，m 只能是叶子的标签。设 v 为该叶子的父节点。它是一个树族的根，记作 $(v, T_1, \dots, T_k)$；而标签为 m 的叶子对应其中一棵树 T_i（它必为空）。显然，这样一棵树不可能是 T_1：事实上，由于 T_1 是 v的最左子节点，在这种情况下，$m = n-1$ 将是森林 $T_2, \dots, T_k$ 中的叶子数，至多为 $n-1$。由于 $m = n-1$，唯一的可能是 v 为 S 的根，因此 m 将是第一个标签，不可能前面还有标签 1。于是，m 标记了树 $T_2, \dots, T_k$中的一棵，设为 T_i。由此可知，m 前面的标签 1 是 T_{i-1}的根的标签。若 $i = 2$，则 $k = 2$，因为此时标签 1 是 v的最左子节点的标签，这意味着森林 $T_2, \dots, T_k$中只有一片叶子。在这种情况下，只需证明 v不可能是 S 的根，以符合图5左图所示的构型。这显然成立，因为若 v 是 S的根，最后一个标签将是 m，对应于 T_2，因此不可能出现 ℓ。所以 v 不是 S的根，其标签为 ℓ。现在，若 $i \neq 2$，则$i-1 \neq 1$。T_{i-1} 的根 v' 标记为 1，并且由于 v' 不是 v的最左子节点，我们有 $1 = \lambda(v') = m - \sum_{w \in LD(v')} \lambda(w)$，从而得到 $\sum_{w \in LD(v')} \lambda(w) = m-1$。这意味着 T_{i-1} 中有 m片叶子；而 T_i和 $m = n-1$中各有一片叶子，因此唯一的可能是 $i-1 = 1$ 和 $k = 2$，这与 $i \neq 2$矛盾。

现在，假设 S 是一个带标号的施罗德树，其标号中含有形如 $(\ell+1)m$ 的子串，其中 $1 \le \ell \le m-1$。同样，m 只能标记一个叶子。令 v 为上述叶子的父节点，它是树族 T_1、……、T_k 的根，其中对于某个 i，T_i 对应于我们的叶子。我们需要证明 $i \neq 1$ 和 $k \ge 3$。在前一种情况下，我们已经看到，如果 $i = 1$，那么 $m = n-1$ 是 T_2、……、T_k 中叶子的数量，这迫使 v 成为 S 的根，而 m 成为 S 中的第一个标签。因此 $i \ge 2$。如果 $k = 2$（因此 $i = 2$），那么 T_1 的根标记为 $1 = \ell + 1$，这与 $1 \le \ell$ 矛盾。因此 $k \ge 2$。□

引理 3.9。*(1)* 设 T 是一棵有 n 片叶子、并以 $m \ge n-1$ 为标签的施罗德树。那么，T 的权重为 nm。*(2)* 设 w 是 T 中一个非叶子顶点，v 是它的最左子节点，也就是说，w 是一棵施罗德树 $\big(w, (T_1, \cdots, T_k)\big)$ 的根，而 v 是 T_1 的根。那么，附着在 w 上的森林 $F = (T_2, \cdots, T_k)$ 的权重为 $\lambda(v)m$；并且对于 $i \ge 2$，树 T_i 中某个顶点的标号与其在 T 内的标号相同。

证明。第一个结论通过对叶子数归纳来证明。如果树只有一片叶子，那么根据标号的定义，结论成立。设 $T = (r, T_1, \cdots, T_k)$ 是一棵施罗德树，其中 T_i 有 n_i 片叶子。根据归纳假设，对于 $i \ge 1$，树 T_i 的权重为 mn_i。利用引理 3.4，树 T_i（在 T 中）各顶点标签之和对于 $i \ge 2$ 等于 mn_i，而 T_1 各顶点的标签与 T 的根的标签之和等于mn_1。因此，树 T 的权重为 $\sum_{i=1}^k mn_i = mn$。对于第二点，森林 F 的叶子数等于 $\lambda(v)$。因此，根据第一点，森林 F 的权重为$\lambda(v)m$。□

命题 3.10. 设 $m \ge n-1$。则映射 Φ_m 从具有n 个叶子的施罗德树集合到元素 $\rho_{n-1}(\rho_m)^{n-1}\rho_{m-n+1} \in M_m$ 对应的字集合是单射。

证明. 设 $T=(r,T_1,\cdots,T_k)$ 是一棵具有 n 个叶子、其标签为 m 的施罗德树。这个证明纯粹是组合性的，只涉及在 $\mathbb{N}$ 中的字 W，该字是通过对树进行后序遍历、读取其标签而得到的。证明的第一步是指出，只需观察 W，就能还原施罗德树的“根和子树列表”分解。我们将在下面的例 3.11 中演示该算法。具体来说，我们要将字 W拆分为一定数量的因子 $W=W_1\cdots W_k$，使得每个子字 W_i都等于对 $L_m(T_i)$ 进行后序遍历、读取标签所得到的字。

w_1 中的第一个字母是 T 中最左叶子 r_1 的标签。通过归纳法，我们将找到与 r_1的祖先 r_2、r_3、$\cdots$、r_i对应的字母 w_2、w_3、$\cdots$、w_i。由于这些顶点的标签统计了 T中的若干叶子，当 $\sum_{j=1}^{i} w_j = n-1$时， T 中的所有叶子都已统计，因此 r_i 是 T_1 的根，我们便停止归纳。

如果我们已经找到与 $r_k \neq r$对应的字母 w_k，那么 w_k 就是附着在 r_k的父节点 r_{k+1} 上的右森林中的叶子数。根据引理 3.9， F 的权重为$m\cdot w_k$，因此按顺序读取 F的顶点所得的字是 $w_{k+1}\cdots w_i$，其中 i是满足 $\sum_{j=k+1}^{i} w_j = mw_k$的最小整数。所有这些字母都对应于 F的顶点，因此下一个字母是后序遍历中紧接在 F之后读到的顶点的标签，即顶点 r_{k+1}。

由于字 W仅包含严格非负整数（ T的根的标签可能除外），因此在归纳法的每一步中，值 $w_1+\cdots+w_i$都会严格增加，归纳法也随之终止。如果 w_{n_1}是对应于 T的根的最左子节点的字母，那么字 $w_1\cdots w_{n_1}$就是通过读取子树 T_1的所有顶点而得到的字。根据引理 3.4，这几乎就是通过读取 $L_m(T_1)$而得到的字；我们只需将 T_1 的根的标签加上 T 的根的标签进行“修正”，后者是W的最后一个字母 w_l。因此，由 T_1的标签组成的字为 $W_{T_1}=w_1\cdots w_{n_1-1}(w_{n_1}+w_l)$。

Let $\widetilde{W}$是删除字母 w_1、$\cdots$、w_{n_1}和 w_l后得到的字。我们使用相同的步骤提取对应于 T的其他子树的子字。由于引理 3.4的不对称性，这里存在些许差异。当 $\sum_{j=1}^{t} w_j = m$时，我们已经找到了 T_i的左分支的顶点 r_1、r_2、$\cdots$、r_t的所有标签w_1、w_2、$\cdots$、w_t，因此无需像上面那样“修正”该字。

现在我们可以证明 Φ_m 是单射了。如果通过后序遍历读取两个树 $T=(r,(T_1,\cdots,T_k))$ 和 $S=(s,(S_1,\cdots,S_l))$ 的顶点标签得到的字相等，那么根据上面的讨论，我们有 $k=l$；对于 $i\in\{1,\cdots,k\}$，通过读取子树 $L_m(T_i)$ 和 $L_m(S_i)$ 的顶点得到的字相等。由对叶子数的归纳法，我们有 $S_i=T_i$，对于 $i=1,\cdots,k$，从而得到 $T=S$。□

例 3.11. 我们用图 4 中的例子来说明命题 3.10 的证明所涉及的分解。考虑 T 的最左子树 T_1，它有 $n=7$ 个叶子，标签为 $m=11$。我们有 $\Phi_{11}(T_1)$ $=\rho_1\rho_{11}\rho_5\rho_1\rho_{11}\rho_{10}\rho_2\rho_{11}\rho_{11}\rho_9\rho_5$。第一个字母 1 告诉我们，最左叶子 r_1 右侧的森林有 1 个顶点。它的权重是 $m=11$。因此， ρ_{11} 为森林中唯一顶点的标签，下一个字母 5 对应于 r_1的父节点 r_2。由于 $1+5=6$，我们知道它是根的最左子节点。因此，通过读取 T_1的最左子树 S 的顶点，得到字 $\rho_1\rho_{11}\rho_5$。我们进行“校正”，得到 $\rho_1\rho_{11}\rho_{10}=\Phi_{11}(S)$。剩余的字 $\rho_1\rho_{11}\rho_{10}\rho_2\rho_{11}\rho_{11}\rho_9$ 对应于 T_1 的其他子树，并分解为 $\rho_1\rho_{11}\rho_{10}$和 $\rho_2\rho_{11}\rho_{11}\rho_9$。

Co结合命题 3.8 和命题 3.10，我们得到本节的主要结果 n:

定理 3.12. 对于 $m=n-1$，映射 Φ_m 从具有 n 个叶子的施罗德树集合到 ρ_{n-1}^n 中 M_{n-1} 的字集合是双射。

推论 3.13. 以下两个图在 Φ_{n-1} 下同构：

(1) ρ_{n-1}^n 在 M_{n-1}中的词图，其中顶点由ρ_{n-1}^n 的表达式给出；当两个表达式相差一次关系的应用时，它们之间就有一条边。*(2)* 具有 n 个叶子的施罗德树图，其中顶点由施罗德树给出；当两棵树相差一次局部变换的应用时，它们之间就有一条边。

证明。 前一个定理给出了顶点集合之间的双射。引理 3.7 的证明表明，每当可以应用局部变换时，就可以对相应的字应用一个关系。命题 3.8 的证明表明，每当可以对字应用一个关系时，就可以对相应的树应用局部变换。□

我们在下方的图 6 中展示了 M_3 的情况。

推论 3.14。 M_n 的 *Garside* 元素的字数是一个小施罗德数 $A001003$ [11]。

引理 3.15。 设 $T = (r, S_1, \cdots, S_k)$ 是一棵具有 n 个叶子、其标签为 $m = n-1$ 的施罗德树。读取子树 S_j 的所有标签所得到的字是 $\rho_n^{l_j}$ 的一个字，其中 l_j 是 S_j 的叶子数。

证明。 设树 S_j 具有 $s+1$ 个叶子。根据引理 3.7，子树 S_j 的标签是 $\rho_s\rho_{n-1}^s\rho_{n-1-s}$ 的一个字。若 $s = 0$，则我们得到 ρ_{n-1}的一个字。否则，我们可以应用关系 [8, 引理 4.5]，其中 $i = s$和 $j = n-1$。或者，利用施罗德树，可以很容易地看出，这些关系来自以下对树的修改。字 $\rho_s\rho_{n-1}^s\rho_{n-1-s}$ 对应于树 S_j 是具有 $s+1$ 个叶子的施罗德丛树的情形。利用我们的局部变换，可以将其修改为左梳状树。相应的字现在为（$\rho_1\rho_s$）$^s\rho_{n-1-s}$。现在，我们可以归纳地应用局部变换，收缩 T 的根与左梳状树的根之间的边。结果是 $s+1$ 个空树连接到 T 的根上，相应的字为 ρ_{n-1}^{s+1}。□

命题 3.16。 令 $n \geq 1$。我们有以下偏序集的同构：

(1) $D_n^0 \cong \mathsf{Div}(\Delta_{n-1})$、$D_n^{n+1} \cong \mathsf{Div}(\Delta_0) = \{\bullet\}$,

(2) 对所有 $1 \leq i \leq n$, $D_n^i \cong \mathsf{Div}(\Delta_{n-i})$,

其中每个集合都按照幺半群 M_k***forsuitable*** k 中左整除序的限制排序。

证明。我们先证明第二个结论。根据消去性， D_n^i 中的一个元素 x 可以写成 $\rho_n^i x'$ 的形式，其中 x' 唯一确定，并且 ρ_n 不是 x' 的左因子。特别地，存在 Δ_n 的一个因子 y，使得 $\rho_n^i x'y = \rho_n^{n+1}$，且 $y \neq 1$。我们按如下方式将一棵树（或者更准确地说，一个树族）与 x 关联起来。将 x' 写成 $\mathcal{S}$中若干元素的乘积 $a_1a_2\cdots a_j$。将字 $\rho_n^i a_1a_2\cdots a_j$ 补全为表示 Δ_n的字 $\rho_n^i a_1a_2\cdots a_jb_1b_2\cdots b_\ell$，也就是说，为 y选择一个字 $b_1b_2\cdots b_\ell$。 b_i有多种可能的取法，但条件 $x \in D_n^i$ 保证了：将对应的施罗德树写成 $(r, T_1, T_2, \ldots, T_i, S_1, S_2, \cdots S_d)$ 的形式，其中前 i 棵树是只有一个叶子的空树，那么 $a_1a_2\cdots a_j$ 的所有标签都位于 S_1 内。事实上，标号 $a_1a_2\cdots a_j$ 从树 S_1 的开头（按后序约定）开始，因为树 $T_1, T_2, \ldots, T_i$ 产生标签 ρ_n^i；如果 $S_2, \ldots, S_d$ 中还有另一棵树被 a_i 部分标号，那么 ρ_n 的某个幂将是 x' 的左因子，因为由 S_1 得到的字是 ρ_n 的一个幂（引理 3.15）。接着，可以先将 $S_2, \ldots, S_d$化简为一组空树，再将所有树 $S_1, S_2, \ldots, S_d$化简为一棵树 S，并使标号 $a_1, a_2, \ldots, a_j$仍处于开头，

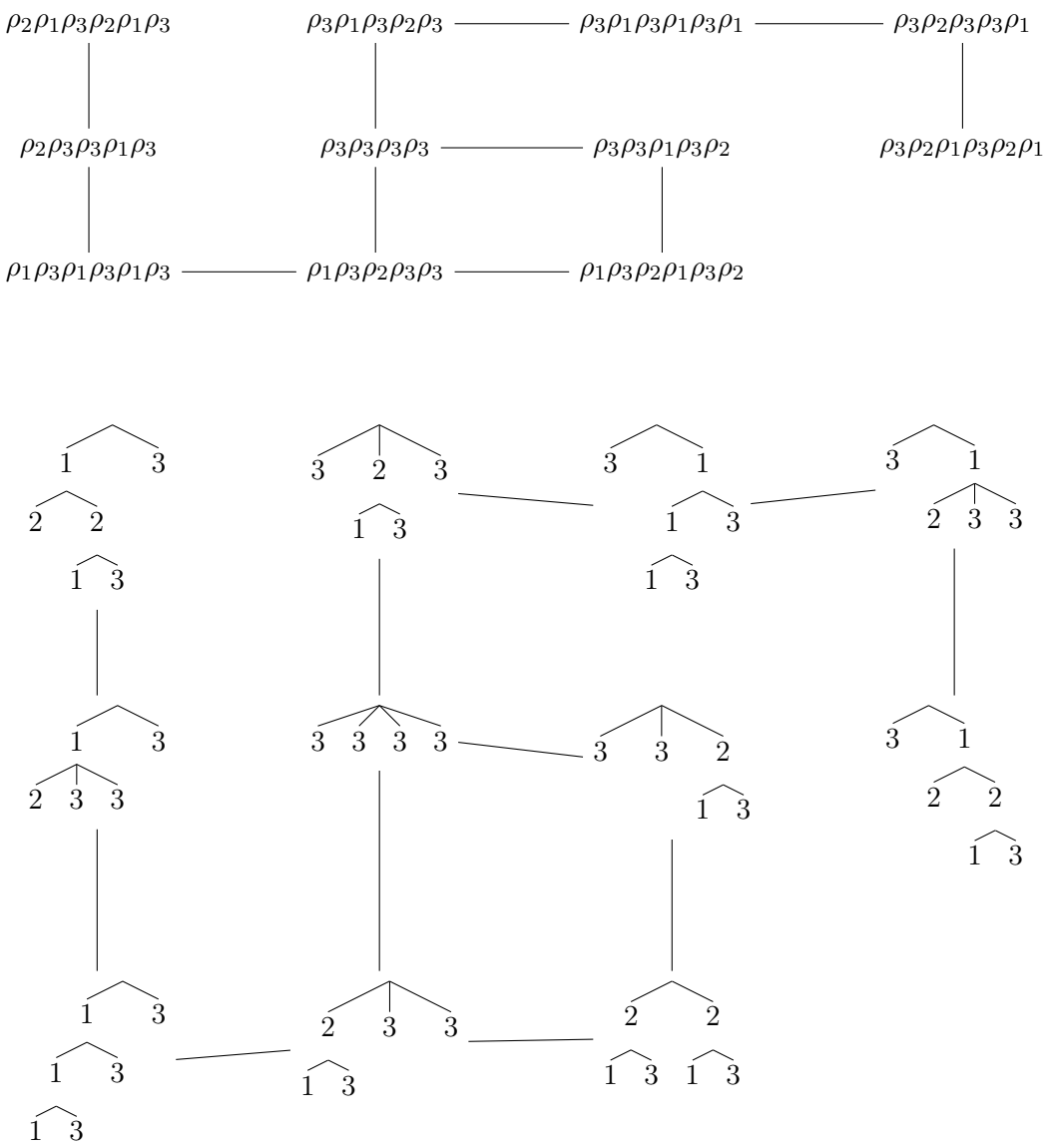

图 6. 推论 3.13 在 $n = 4$ 中的示意：Δ_3 的约化词图，以及具有 $4 = 3 + 1$ 个叶子的施罗德树的同构图。

~ ~ ~棵只有一个叶子的树 $T_2, \ldots, T_{d'}$，然后使用局部变换合并 S_1 和 T_2，再将所得的树与 T_3合并，以此类推（图 7 给出了示意图）。这样，我们便将一棵形如 $(r, T_1, T_2, \ldots, T_i, S)$ 的施罗德树与 x 关联起来，其中 T_k是只有一个叶子的空树，而与所选字 $a_1 a_2 \cdots a_j$ 对应的标号是树 S 的一个初始段（事实上，用代数术语来说，我们所做的是修改表示 y 的字，使其变为一个合适的字，从而在空树之后得到唯一的一棵树）。请注意，这里所说的初始段，是指将 S 的标号按后序遍历读出后所得到的字的一个前缀，其中不包括根的标签；也就是说，如果根有标签，那么该前缀就是严格前缀。我们用 $S_{n,\ i}$ 表示这类施罗德树的集合，即具有 n个叶子、根有 $i + 1$ 个子节点，且前 i 个子节点均为叶子的施罗德树。请注意，与 x 关联的树取决于为 x选择的字，但应用一个定义关系

字 x 中的操作对应于在树 S 上进行一次局部变换，而这不会使 S 分裂成多棵树，因为 S 的根被冻结了（其标签对应于 $y \neq 1$ 的最后一个字母）。因此，我们可以对对应于 x 的一个字的（严格）初始段中的所有标签进行所有局部变换，并保留一棵具有 $n-i+1$ 个叶子的施罗德树。这样，去掉 i 棵起初的空树后，我们附加到 x 上的是一棵具有 $n-i+1$ 个叶子的施罗德树的（严格）初始段在局部变换下的一个等价类，也就是 Δ_{n-i} 的一个因子。这个映射是单射的，因为只需将 S 映射为 $(r, T_1, \dots, T_i, S)$，对所得的具有 $n-i+1$ 个叶子的施罗德树进行标号，然后先读出 i 棵起初的空树，再读出初始段，便可轻易从中恢复出 x 的一个字。

剩下要证明的是它是满射。因此，考虑一个具有 $n-i$ 个叶子的施罗德树 S 的初始段。我们必须证明，在树 $(r, T_1, T_2, \dots, T_i, S)$ 中， S 的初始段是一个字 $a_1 a_2 \cdots a_j$，它为 D_n^0 的某个元素 x' 标记。假设 ρ_n 是 x' 的左因子。于是，仅使用涉及 S 初始段中标签的局部变换（该初始段对应于 x' 的一个字），便可将 $(r, T_1, T_2, \dots, T_i, S)$ 变换成形如 $(r, T_1, T_2, \dots, T_i, T_{i+1}, S'_1, \dots, S'_e)$ 的树；也就是说， S 可以分成几棵树，其中第一棵（对应于 ρ_n）是空树。这就产生了矛盾：要将 S 分成几棵树，就必须进行涉及 S 的根的局部变换，但该根被冻结了，因为初始段没有覆盖根。因此 $x' \in D_n^0$，我们的映射是满射。第二点的证明至此完成，因为显然我们的映射保留左整除关系。

对于第一点，我们有 $D_n^{n+1} = \{\rho_n^{n+1}\}$，因此无需证明。为了证明 $D_n^0 \cong \mathbf{Div}(\Delta_{n-1})$，可以采用与第一点证明类似的方法。令 $x \in D_n^0$，并令 y 满足 $xy = \Delta_n$。选取 x 和 y 的字，并考虑相应的施罗德树 $T = (r, T_1, \dots, T_k)$。由于 $x \in D_n^0$，与 x 的字对应的 T 的初始段必定是 T_1 的真初始段。对 $T_2, \dots, T_k$ 进行局部变换（这相当于改变 y 的字），我们可以找到一个在局部变换下与 T 等价的施罗德树，其形式为 (r, T_1, T_2)，其中 T_1 仍以选定的字作为 x 的真初始段，而 T_2 是仅有一个叶子的空树。特别地，T_1 是一个具有 n 个叶子的施罗德树。对 x 的字应用定义关系，相当于在第一棵树内部应用局部变换；仿照第一点的论证，即可得出 D_n^0 与 $\mathbf{Div}(\Delta_{n-1})$ 之间的偏序集同构。□

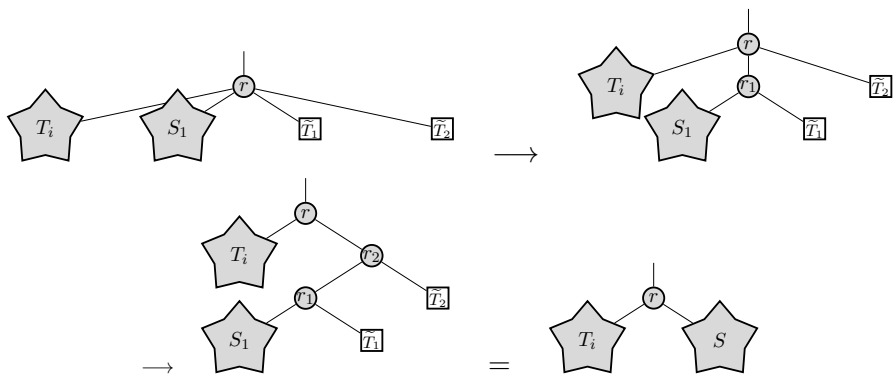

图 7. 命题 3.16 证明的示意图。

4. 枚举结果

我们已经看到（定理 3.12），ρ_n^{n+1}的字与具有 $n+1$ 个叶子的施罗德树之间存在双射。本节将给出关于 M_n中若干类特定元素的一些补充枚举结果。

4.1. 简单元素的数量。

推论 4.1. 设 $n \geq 2$，并设 $A_n := |\mathsf{Div}(\Delta_n)|$。那么

$$A_n = 2A_0 + 2A_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} A_i. \tag{4.1}$$

由此可得 $A_n = F_{2n}$，其中 F_0，F_1，F_2，... 表示斐波那契数列 1，2，3，5，8，...，该数列由 $F_0 = 1$，$F_1 = 2$ 归纳定义，且对所有 $i \geq 2$ 都成立。A_n*s* 的数列称为 ***A001906***，见 [11]。

证明。等式 (4.1) 可由不交并 $\mathsf{Div}(\Delta_n) = \coprod_{0\leq i\leq n+1} D_n^i$ 和命题 3.16 立即得到。我们有 $A_0 = F_0$, $A_1 = 3 = F_2$，并且容易验证，4.1 给出的归纳公式也适用于数列 F_{2n}。这表明对所有 $n \geq 0$，$A_n = F_{2n}$。□

定义4.2. 我们称格 $(\mathsf{Div}(\Delta_n) \leq)$ 为 偶斐波那契格。

4.2.原子最小公倍数的左因子数量与奇斐波那契格。 集合 $\mathsf{Div}_L(\rho_n^n)$ 是 ρ_n^n 的左因子集合；由于它是格 $(\mathsf{Div}(\Delta_n) \leq)$ 中的一个序理想，在左整除关系的限制下，它也构成一个格。就 Garside 幺半群 M_n 而言，元素 ρ_n^n 是生成元 $\mathcal{S} = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$ 的左、右最小公倍数（见 [8, 推论4.17]）。对于 $n \geq 1$，我们设 $B_n := |\mathsf{Div}_L(\rho_n^n)|$。

引理4.3. 对于所有 $n \geq 1$，都有 $B_n = F_{2n-1}$。序列 B_n 被称为 ***A001519***，见 [11]。

证明。设 $x \in \mathsf{Div}(\Delta_n)$。我们断言，$x \in \mathsf{Div}_L(\rho_n^n)$ 当且仅当 $\rho_n x \in \mathsf{Div}(\Delta_n)$。事实上，若 $x \leq \rho_n^n$，则存在 $y \in M_n$ 使得 $xy = \rho_n^n$。于是有 $\rho_n xy = \rho_n^{n+1} = \Delta_n$，因此 $\rho_n x$ 是 Δ_n 的左因子。反过来，假设 $\rho_n x \in \mathsf{Div}(\Delta_n)$。由此可知，存在 $y \in \mathsf{Div}(\Delta_n)$ 使得 $\rho_n xy = \Delta_n = \rho_n^{n+1}$。根据消去性可得 $xy = \rho_n^n$，因此 $x \in \mathsf{Div}_L(\rho_n^n)$。

由此可知，$\mathsf{Div}_L(\rho_n^n)$ 与集合

$$\{\rho_n x \mid x \in \mathsf{Div}(\Delta_n)\} \cap \mathsf{Div}(\Delta_n).$$

但这个集合恰好就是 $\coprod_{1\leq i\leq n+1} D_n^i$。由此可得

$$B_n = |\mathsf{Div}(\Delta_n)| - |D_n^0| = |\mathsf{Div}(\Delta_n)| - |\mathsf{Div}(\Delta_{n-1})|,$$

其中最后一个等式由命题 3.16 的第 (1) 点得出。因此，根据推论 4.1，我们得到

$$B_n = A_n - A_{n-1} = F_{2n} - F_{2n-2} = F_{2n-1},$$

由此完成证明。□

定义 4.4。 我们称格 $(\mathsf{Div}_L(\rho_n^n) \leq)$ 为 奇斐波那契格。

图 1 展示了 M_3 对应的两个格。

注记 4.5. 注意，ρ_n^n 的右因子集合的基数也为 B_n：事实上，偏序集 $(\mathsf{Div}_L(\rho_n^n) \leq_L)$ 和 $(\mathsf{Div}_R(\rho_n^n) \leq_R)$ 通过 $x \mapsto \overline{x}$反同构，其中 $\overline{x}$ 是 M_n 中满足 $\overline{x}x = \rho_n^n$ 的元素（由右消去性可知，该元素唯一）。

4.3. **Garside 元素的因子的字数**。

引理 4.6. 设 T_1 和 T_2 是两棵施罗德树，它们有 n 个叶子，标签为 $m \geq n-1$；记 m_1 和 m_2 为按后序遍历读取标签所得的相应字。若字 m_1 和 m_2 有公共前缀 $x_1x_2\cdots x_l$，那么 x_i 在T_1 中标记最左子节点，当且仅当它在 T_2中标记最左子节点。

证明。我们通过对叶子数归纳来证明该结论。若通过依次读取 $T_1 = (r, S_1, \cdots, S_k)$ 的所有顶点得到 $x_1\cdots x_l$，则 $m_1 = x_1\cdots x_l = m_2$，并且根据命题 3.10，我们有 $T_1 = T_2$，因此无需证明。否则，令 S_j 为 T_1 的第一个未被字 $x_1\cdots x_l$ 覆盖的子树；类似地，令 U_k 为 $T_2 = (r, U_1, \cdots U_v)$ 的第一个未被 $x_1\cdots x_l$ 覆盖的子树。查看命题 3.10 的证明可知，前三棵子树 S_1、$\cdots$、S_{j-1} 完全由字 $x_1\cdots x_l$ 决定，因此对于所有 $i < k$，我们有 $j = k$ 和 $S_i = U_i$。令 x_s 为 $x_1\cdots x_l$ 中标记 S_j 的第一个顶点的字母。令 m_1' 为 m_1 的子字，令 m_2' 为从 x_s 开始的 m_2 的子字。正如命题 3.10 的证明中所述，我们可以确定 m_1' 的子字 m_1^j，它对应于 S_j。树 U_j 和 S_j 的叶子数不必相同。若其中一棵树（例如 U_j）的叶子较少，则可以像命题 3.16 的证明中那样，对树 U_j、U_{j+1}、$\cdots U_v$ 进行局部变换，从而得到一棵 U_j，使其叶子数与 S_j 相同。这会改变字 m_2'，但不会改变前缀 $x_s\cdots x_l$；并且，x_i 在 U_j 中标记一个最左子节点，当且仅当它在 U_j 中标记一个最左子节点（示意见图 7）。完成修改后，我们考虑与树 $\tilde{U}_j$ 对应的子字 m_2^j，并对 m_1^j 和 m_2^j 应用归纳假设。□

定理 4.7. ρ_n^{n+1}的左因子的字集与具有 $n+2$ 个叶子的施罗德树集之间存在双射。

证明. 设 s_k 表示具有 $k+1$ 个叶子的施罗德树的数量，d_k 表示 ρ_k^{k+1} 的因子的字的数量。

回顾一下，$\mathrm{Div}(\Delta_n) = \coprod_{0\leq i\leq n+1} D_n^i$，并设 d_n^i 为 D_n^i中元素的字的数量。若 $i = n+1$，则 ρ_n^{n+1}是 D_n^i 中唯一的元素。由定理 3.12，该元素对应s_n 个字，因此我们有 $d_n^{n+1} = s_n$。

设 $0 \leq i \leq n$和 $w = x_1\cdots x_l$是 D_n^i中某个元素的字。字 w是施罗德树 $T = (r, S_1, \cdots, S_k)$ 的真前缀。由引理 2.5，$w = w_1w_2$，其中 w_1 是 ρ_n^i 的一个字，而 ρ_n 不是 w_2 的左因子（当 $i = 0$ 时，字 w_1 为空）。设 S_j 是 T 中最后一棵含有一个以 w_1中的字母为标签的顶点的子树。我们可以对 w_1 连续应用定义关系，从而得到 ρ_n^i。这些关系对应于树 $S_1, \cdots, S_j$ 中的局部变换，它们将所有树 $S_1, \cdots S_j$ 归约为空树。为了将 S_j 归约为一列空树，我们必须使用它的根。由于根总是树在后序遍历中的最后一个标签，字 w_1 覆盖了前 j 棵树，它们总共有i 个叶子。由于 ρ_n 不整除 w_2，可知 w_2 是 S_{j+1}的一个（可能为空的）真前缀。我们也可以在不改变前 j棵树的情况下修改树 $S_{j+2}, \cdots, S_k$。事实上，如同命题 3.16 的证明中那样，我们可以将树 $S_{j+2}, \cdots, S_k$归约为空树，然后将它们合并（直到无法继续合并）为 S_{j+1}。

- 当 $i = 0$时，修改后我们得到一棵树 $T = (r, S, L)$，其中 L为空树，S 是一棵有 n 个叶子的树，而 $w = w_2$ 是 S 的真前缀。
- 当 $1 \leq i \leq n$时，我们得到一棵树 $T = (r, S_1, \cdots, S_j, S_{j+1})$，且 w_2是这棵有 $n+1-i$ 个叶子的树 S_{j+1} 的真前缀。

在这两种情况下，树 S_{j+1} 都是通过可能向 S_{j+1}中引入新顶点得到的；如图 7 所示，这些新顶点在后序遍历中都位于 S_{j+1}的顶点之后，

因此， w_2 仍是 S_{j+1}的真前缀。由此可知，在引理 2.5 的分解 $w = w_1w_2$中，字 w_1 是通过读取一棵具有 i 个叶子的施罗德树的所有顶点得到的，而 w_2 是一棵施罗德树的真前缀，该树记为 S，有 $l_i + 1$ 个叶子，其中当 $i \neq 0$ 时有 $l_i = n - i$ 个叶子，当 $i = 0$ 时有 $l_i = n - 1$ 个叶子。

设 w 是一个有 D_n^i 片叶子的施罗德树，其中 w_1w_2 是其有前缀分解。接着，设我们通过先提取 S，再根据其叶子数对其进行标号（即使用$m = l_i$），最后取其后序遍历中的前 t 个字母，来构造一个字$\gamma(w)$。从代数角度看，很容易看出字 $\gamma(w)$ 如何由 w_2得到：如果 w_i 是 S中最左子节点的标签，则有$\gamma(w)_i = w_i$。否则，由于树 S_j 有 $l_i + 1$ 片叶子，因此有 $\gamma(w)_i = w_i - n + (l_i)$。先验地， $\gamma(w)$取决于树 S的选择，但引理 4.6 告诉我们， $\gamma(w)$只取决于 w_2。字 $\gamma(w)$是一个有 $l_i + 1$ 片叶子的施罗德树的前缀，因此它是 Δ_{l_i}的某个因子的一个字。由此，我们得到了一个映射 γ，它将 D_n^i 中各元素的字组成的集合映到 Δ_{l_i}的各因子的字组成的集合。

反过来，如果 z 是某个 Δ_{l_i}的因子的长度为 k 的字，那么它是具有 l_i+1 个叶子的施罗德树 S 的前缀（严格来说是前缀，因为根没有贡献）。通过考虑以下情况，我们可以将 S 视为具有 $n+1$ 个叶子的施罗德树的一棵子树：

- $T = (r, S, L)$，当 $i = 0$ 时；
- $T = (r, \delta_i, S)$，当 $i \geq 1$ 时。

读取子树 S 的前 k 个字母，可得到一个字 $w = w_1w_2$，它对应于 D_n^i 中的一个元素，且满足 $\gamma(w) = z$。因此， γ 是满射的，我们令 $\epsilon(z) = w_2$。与之前一样，$\epsilon(z)$ 只取决于 z，而不取决于以 z 为前缀的树。

当 $i = 0$ 时，映射 γ 是单射。事实上，若 w 和 z 是两个字，满足 $\gamma(w) = \gamma(z)$，那么根据引理 4.6， $\gamma(w)$ 和 $\gamma(z)$ 中最左子节点的标签相同，因此 w 和 z 相等。这证明了 $d_n^0 = d_{n-1}$。

当 $i \geq 1$ 时， γ 远非单射，因为它会遗忘树的第一部分。 D_n^i 中各元素对应的字集是两个集合 E_1 和 E_2 的不交并，其中 E_1 是满足 w_1 恰好覆盖一棵树 S_1 的字 $w = w_1w_2$ 的集合，而 E_2 是满足 w_1 至少覆盖两棵树的字的集合。注意，当 $i = 1$ 时，集合 E_2 为空；否则两个集合都非空。事实上， E_2 至少包含所有形如 $\rho_n^i w_2$ 的字，而 E_1 至少包含形如 $\rho_{i-1}\rho_n^{i-1}\rho_{n-i-1}w_2$ 的字，这些字对应于附着为一棵施罗德树最左子树的施罗德丛树 δ_i。

若 z 是 Δ_{l_i}的一个因子所对应的字，我们通过考察 $\gamma^{-1}(z) \cap E_1$ 和 $\gamma^{-1}(z) \cap E_2$，来计算 z 在 γ 下的原像基数。若 $i = 1$，显然我们只考虑第一种情况。 $\gamma^{-1}(z) \cap E_1$ 中的元素由一棵具有 i 个叶子的施罗德树对应的字与 $\epsilon(z)$ 连接而成；而 $\gamma^{-1}(z) \cap E_2$ 中的元素则由一片具有 i 个叶子的森林（由至少两棵施罗德树组成）对应的字与 $\epsilon(z)$ 连接而成。这种森林不过是一棵去掉根的、具有 i 个叶子的施罗德树。因此我们得到

$$|\gamma^{-1}(z) \cap E_1| = s_{i-1} = |\gamma^{-1}(z) \cap E_2|.$$

对所有可能的字 z 求和，得到 $d_n^1 = s_0 \cdot d_{n-1}$，且当 $n \geq i \geq 2$ 时有 $d_n^i = 2 \cdot s_{i-1} \cdot d_{n-i}$。

我们得到：

$$d_n^0 = d_{n-1}; \quad d_n^1 = s_0 \cdot d_{n-1} = d_{n-1};$$

and

$$d_n^i = 2 \cdot s_{i-1} \cdot d_{n-i} \text{ when } n \geq i \geq 2 \text{ and } d_n^{n+1} = s_n.$$

通过对叶子数的归纳法，对于每个 $i \leq n-1$，我们都有 $d_i = s_{i+1}$，并且

$$\begin{aligned} d_n &= 2s_n + 2\sum_{i=2}^{n} s_{i-1}s_{n-i+1} + s_n \\ &= 3s_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} s_i s_{n-i}. \end{aligned}$$

利用生成函数，不难验证这意味着 $d_n = s_{n+1}$，例如参见 [13, 定理 5]。□

参考文献

[1] D. Bessis，《对偶辫子幺半群》，高等师范学院科学年刊**36** (2003)，647-683。[2] J. Birman、K.H. Ko 和 S.J. Lee，《辫群中字问题与共轭问题的新方法》，数学进展**139** (1998)，322–353。[3] E. Brieskorn 和 K. Saito，《阿廷群与考克斯特群》，数学发明**17** (1972)，245–271。[4] P. Dehornoy、F. Digne、D. Krammer、E. Godelle 和 J. Michel。《Garside 理论基础》，数学论丛**22**，欧洲数学会 (2015)。[5] P. Dehornoy 和 L. Paris，《高斯群与 Garside 群：阿廷群的两种推广》，伦敦数学会会刊 (3)**79** (1999)，第 3 期，569-604。[6] P. Deligne，《广义辫群的建筑》，数学发明**17** (1972)，273-302。[7] F.A. Garside，《辫群及其他群》，牛津数学季刊**20** 2, 235 1969 254 ( ), no. – .[8] T. Gobet，《关于某些环面纽结群及辫群的子幺半群》，代数学杂志**607** (2022)，B 部分，260-289。[9] T. Gobet，《环面纽结群和某些复辫群上的一种新 Garside 结构》，预印本 (2022)，https://arxiv.org/abs/2209.02291。[10] J-L. Loday，《Stasheff 多胞体的实现》，数学档案，**83** (2004)，267-278。[11] OEIS 基金会，《在线整数数列百科全书》，电子版发布于 https://oeis.org [12] M. Picantin，《小高斯群》，博士论文，卡昂大学，2000。[13] F. Qi、B. Guo，《大施罗德数与小施罗德数的一些显式公式和递归公式》，阿拉伯数学科学杂志，第 23 卷，第 2 期，141-147 页 (2017)。

丹尼斯·泊松研究所，CNRSUMR 7350，科学与技术学院，图尔大学，格朗蒙公园，37200 图尔，法国
电子邮箱地址：thomas.gobet@lmpt.univ-tours.fr

朱西厄数学研究所，巴黎左岸（IMJ-PRG），大磨坊校区，巴黎大学 - 邮政信箱 7012，奥蕾莉·内穆尔广场 8 号，75205 巴黎 Cedex 13，法国电子邮箱地址：baptiste.rognerud@imj-prg.fr