arXiv:2301.00769v1 [math.AP] 2 Jan 2023

经典热方程的尖锐范数估计

ERIK TALVILA

Abstract. 我们证明了实数轴上经典热方程解在 L^p 范数下的尖锐估计。

1. Introduction

本文给出了实数轴上经典热方程解的尖锐估计，其中初值数据属于一个 L^p 空间（$1 \le p \le \infty$）。

对于 $u:\mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$，写作 $u_t(x) = u(x,t)$。

实数轴上的热方程经典问题是：给定一个函数 $f \in L^p$，其中某个 $1 \le p \le \infty$，求一个函数 $u:\mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$，使得对于每个 $t>0$，$u_t \in C^2(\mathbb{R})$，$u(x,\cdot) \in C^1((0,\infty))$，并且对于每个 $x\in\mathbb{R}$，

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \text{ for each } (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\|u_t - f\|_p = 0. \tag{1.2}$$

若 $p=\infty$，则还假设 f 连续。

一个解由卷积给出：$u_t(x) = F*\Theta_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\Theta_t(y)\,dy$，其中高斯–魏尔斯特拉斯热核为 $\Theta_t(x) = \exp(-x^2/(4t))/(2\sqrt{\pi t})$。例如，参见[4]。在对 u 施加适当的增长条件时，解是唯一的。参见 [5] 和 [9]。参考文献 [3] 和 [9] 包含了许多关于经典热方程的结果，包括详尽的参考书目。

热核具有以下性质。设 $t>0$ 且 $s\neq 0$ 满足$1/s + 1/t > 0$。那么

$$\Theta_t * \Theta_s = \Theta_{t+s} \tag{1.3}$$

$$\|\Theta_t\|_q = \frac{\alpha_q}{t^{(1-1/q)/2}} \text{ where } \alpha_q = \begin{cases} 1, & q=1 \\ \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{1-1/q}\,q^{1/(2q)}}, & 1<q<\infty \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, & q=\infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

其中最后一条由概率积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ 得出。

定理 1.1. 设 $1\le p\le\infty$ 且 $f\in L^p$。

(a) 若 $p\le s\le\infty$，则 $f*\Theta_t \in L^s$。(b) 设 $q,r\in[1,\infty]$ 满足 $1/p+1/q = 1+1/r$。存在常数 $K_{p,q}$，使得$\|f*\Theta_t\|_r \le K_{p,q}\|f\|_p t^{-(1-1/q)/2}$ 对所有 $t>0$ 均成立。该估计是尖锐的，具体来说，若$\psi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 满足 $\psi(t) = o(t^{-(1-1/q)/2})$，当 $t\to 0^+$ 或 $t\to\infty$ 时，则存在

日期：预印本 2023年1月2日。2020年数学主题分类。主要分类：35K05、46E30；
次要分类：26A42。关键词和短语：热方程、勒贝格空间。

$G \in L^p$ 使得 $\|G * \Theta_t\|_r/\psi(t)$ 在 $t \to 0^+$ 或 $t \to \infty$ 时无界。常数$K_{p,q} = (c_p c_q/c_r)^{1/2}\alpha_q$，其中 $c_p = p^{1/p}/(p')^{1/p'}$，$p, p'$ 为共轭指数。它不能被任何更小的数取代。

(c) 如果 $1 \le s < p$，则 $f * \Theta_t$ 不一定属于 L^s。

当 $r = p$ 且 $q = 1$ 时，(b) 部分的不等式为 $\|f * \Theta_t\|_p \le \|f\|_p$。当 $r = \infty$ 时，p 和 q 互为共轭，(b) 部分的不等式为 $\|f * \Theta_t\|_\infty \le \|f\|_p t^{-1/(2p)}$。

杨氏不等式取等的条件是两个函数均为高斯函数。这一事实在 (b) 部分的证明中得到了利用。参见 [7, 第 99], [2] 页和 [8]。我们的证明还采用了 [5, 定理 9.2，第 195] 页以及 [1, 第 115-120] 页中的一些思路。

例如，[6, 命题 3.1]，中已知这些估计，但我们未能在文献中找到证明其为最佳估计的论述。

证明。(a)、(b) 由杨氏不等式可得

$$\|f * \Theta_t\|_r \le C_{p,q}\|f\|_p\|\Theta_t\|_q = \frac{C_{p,q}\|f\|_p\alpha_q}{t^{(1-1/q)/2}}, \tag{1.5}$$

其中 α_q 由 (1.4) 给出。[7, 第 99]，页给出的最佳常数为 $C_{p,\,q} = (c_p c_q/c_r)^{1/2}$其中 $c_p = p^{1/p}/(p')^{1/p'}$，且 p、p' 为共轭指数。注意到 $c_1 = c_\infty = 1$。此外，$0 < C_{p,\,q} \le 1$。接着取 $K_{p,\,q} = C_{p,\,q}\alpha_q$。

为证明当 $t \to 0^+$ 和 $t \to \infty$时估计 $\|u_t\|_r = O(t^{-(1-1/q)/2})$ 是最佳的，令 ψ 如定理陈述所述。固定 $p \le r \le \infty$。定义线性算子族 $S_t : L^p \to L^r$，使得 $S_t[f](x) = f * \Theta_t(x)/\psi(t)$。估计 $\|S_t[f]\|_r \le K_{p,\,q}\|f\|_p t^{-(1-1/q)/2}/\psi(t)$表明，对每个 $t > 0$，S_t 都是有界线性算子。令 $f_t = \Theta_t$。于是，由 和 (1.4) 可得，

$$\frac{\|S_t[f_t]\|_r}{\|f_t\|_p} = \frac{\|\Theta_t * \Theta_t\|_r}{\psi(t)\|\Theta_t\|_p} = \frac{\|\Theta_{2t}\|_r}{\psi(t)\|\Theta_t\|_p} = \frac{\alpha_r}{\alpha_p 2^{(1-1/r)/2}\psi(t)t^{(1-1/q)/2}}.$$

当 $t \to 0^+$ 时，这并不有界。因此，S_t 并非一致有界。根据一致有界原理，它并非逐点有界。因此，存在一个函数$f \in L^p$，使得当 $t \to 0^+$ 时，$\|f * \Theta_t\|_r \ne O(\psi(t))$。并且，当 $t \to 0^+$ 时，增长估计 $\|f * \Theta_t\|_r = O(t^{-(1-1/q)/2})$ 是尖锐的。对于 $t \to \infty$ 时的尖锐性，证明类似。

现在证明常数 $K_{p,\,q}$ 不能再减小。计算表明，当 $f = \Theta_t^\beta$ 且 β 由方程给出时，(1.5) 中等号成立

$$\frac{\beta^{1-1/q}}{(\beta+1)^{1-1/r}} = \frac{c_p c_q}{c_r}\left(\frac{\alpha_p\alpha_q}{\alpha_r}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{1-1/p}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{1-1/q}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-(1-1/r)}. \tag{1.6}$$

首先考虑情形 $p \ne 1$ 和 $q \ne 1$。注意，$1 - 1/r = (1 - 1/q) + (1 - 1/p) > 1 - 1/q$。令 $g(x) = x^A(x+1)^{-B}$，其中 $B > A > 0$。那么，g 在 $(0, A/(B-A))$ 上严格递增，而当 $x > A/(B-A)$ 时严格递减，因此 g 在 $A/(B-A)$ 处有唯一的最大值。设 $A = 1 - 1/q$ 和 $B = 1 - 1/r$。于是

$$g\left(\frac{A}{B-A}\right) = \frac{\beta^{1-1/q}}{(\beta+1)^{1-1/r}} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{1-1/p}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{1-1/q}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-(1-1/r)}.$$

因此，(1.6) 对 β 有唯一的正解，由 $\beta = (1 - 1/q)/(1 - 1/p)$ 给出

若 $p = 1$，则 $q = r$。在这种情形下，(1.6) 化为 $(1 + 1/\beta)^{1-1/q} = 1$，且解由极限 $\beta \to \infty$ 给出。因此，(1.5) 在此极限下是尖锐的。还可以看出，取 f 为狄拉克分布时等号成立。

若 $q = 1$，则 $p = r$。现在，(1.6) 化简为 $(\beta+1)^{1-1/p} = 1$ 且 $\beta = 0$。当 $f = 1$ 时，(1.5) 中取等号。这必须在极限 $\beta \to 0^+$ 下进行。

若 $p = q = r = 1$，则对每个 $\beta > 0$，(1.5) 中均取等号。

因此，(1.5) 中的常数是最佳的。

(c) 假设 设 $f \geq 0$，且 f 在 $[c, \infty)$ 上递减，其中某个 $c \in \mathbb{R}$。令 $x > c$。 n

$$\begin{aligned} f * \Theta_t(x) &\geq \int_c^x f(y)\Theta_t(x-y)\,dy \geq f(x)\int_c^x \Theta_t(x-y)\,dy \\ &= \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{(x-c)/(2\sqrt{t})} e^{-y^2}\,dy \sim f(x)/2 \quad \text{as } x \to \infty. \end{aligned}$$

现在令 $f(x) = 1/[x^{1/p}\log^2(x)]$ 表示 $x \geq e$，并令 $f(x) = 0$表示其他情况。对于 $p = \infty$，将$x^{1/p}$ 替换为 1。□

References

[1] S. Axler、P. Bourdon 和 W. Ramey，《调和函数论》，纽约，Springer-Verlag，2001 年。[2] W. Beckner，《傅里叶分析中的不等式》，《数学年刊》（第 2 辑）102（1975），159–182。[3] J.R. Cannon，《一维热方程》，门洛帕克，Addison–Wesley，1984 年。[4] G.B. Folland，《偏微分方程导论》，普林斯顿，普林斯顿大学出版社，1995 年。[5] I.I. Hirschman 和 D.V. Widder，《卷积变换》，普林斯顿，普林斯顿大学出版社，1955 年。[6] T. Iwabuchi、T. Matsuyama 和 K. Taniguchi，开集上 Schr ¨odinger 算子的谱乘子有界性，《伊比利亚美洲数学评论》34（2018），1277–1322。[7] E.H. Lieb 和 M. Loss，《分析》，普罗维登斯，美国数学会，2001 年。[8] G. Toscani，《热方程与锐杨不等式》，arXiv:1204.2086（2012）。[9] D.V. Widder，《热方程》，纽约，学术出版社，1975 年。

Department of Mathematics & Statistics, University of the Fraser Valley, Abbots-ford, BC Canada V2S 7M8电子邮件地址：Erik.Talvila@ufv.ca