arXiv:2301.00773v1 [math.AP] 2 Jan 2023

自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程行波问题的适定性

NOAH STEVENSON 和 IAN TICE

Abstract. 我们证明，黏性可压缩液体中的行波是一种普遍现象。我们的结果适用于一个水平无限、有限深度的可压缩斜压黏性流体层，其模型由$n \geqslant 2$维自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程描述。流体的底边界平坦且固定，顶部则为运动自由边界。恒定引力场垂直作用于平坦底部。我们允许外力作用于流体内部，并允许外部应力作用于其自由表面。假设这些外力与应力具有行波形式，即在以平行于下方固定边界、速度恒定且非零的坐标系中观察时，它们与时间无关。

若不存在此类外部应力源和力源，流体系统便回归平衡态，对应于密度垂直分层的平坦静止流体层。相反，存在此类应力源或力源时，系统便允许行波解。我们通过证明以下结论，为这一问题建立了小数据适定性理论：对每个非零行波速度，都存在一个非空开集，其中的应力与外力数据会产生唯一的行波解；这些解连续依赖于数据和波速。当 $n \geqslant 3$ 我们证明这一结论时，会考虑自由边界处的表面张力；而在 $n = 2$ 的情形下，无论是否考虑表面张力，我们都能证明这一结论。据我们所知，这是首次对任意自由边界可压缩流体方程构造行波解。

方程的行波表述是一个混合型拟线性系统。双曲与椭圆部分之间的相互作用会导致系统线性化出现导数损失。因此，我们不得不通过 Nash-Moser 型逆函数定理来构造解。我们的适定性证明包含若干创新之处，也有更广泛的意义，包括：一种新的 Nash-Moser 变体，可在巴拿赫尺度中发挥作用，同时保证解的存在性以及局部逆连续性所需的正则性损失最小；关于稳态输运方程及其椭圆正则化的一系列结果；有关适用于构造行波的各向异性 Sobolev 空间尺度的新结果及其应用；以及一种稳健、精简且灵活的方法，用于构造我们这一类线性化自由边界问题的解。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35Q30、35R35、35C07；次要分类：47J07、76N06、76N30。*Key words and phrases.* 自由边界可压缩 Navier–Stokes、行波、Nash-Moser 逆函数定理。N. Stevenson 获得美国国家科学基金会研究生研究奖学金资助。I. Tice 获得美国国家科学基金会资助项目（DMS #2204912）资助。

Contents

1. 引言 1.1. 欧拉坐标中的动力学与分层平衡态 1.2. 行波以及应力和力的作用 3
1.3. 先前工作 1.4. 焓与扁平化重构 1.5. 主要结果陈述 1.6. 策略概要与论文结 3
构 1.7. 记号约定 2. Nash-Moser 逆函数定理的一种变体 2.1. 温和结构抽象 5
2.2. 映射假设与逆函数定理陈述 2.3. 局部满射性与单射性 2.4. 逆函数定理的 7
证明 2.5. 改进 3. 自由边界可压缩 Navier–Stokes 行波的非线性分析 3.1. 行 9
波问题的 Banach 尺度 3.2 原子非线性分析 3.3. 非线性算子的光滑驯性 3.4. 11
导数分解 3.5. 线性分析的铺垫 14
21
22
23
30
32
42
45
51
51
53
58
63
70
4. 稳态输运方程及其正则化的分析 4.1. 初步驯性估计 4.2. 关于稳态输运方程和 74
椭圆正则化的一些结果 74
79
5. 主部线性方程弱解的分析 5.1. 估计 5.2. 正则化解的存在性 85
85
93
6. 线性化强解分析 6.1. 切向导数分析 6.2. 正规系统分析 6.3. 主部的估计 99
与存在性 6.4. 线性分析的综合 7. 结论 7.1. 抽象构造 7.2. 偏微分方程构 99
造 附录 A. 标准索伯列夫空间工具 A.1. 延拓算子 A.2. Korn不等式 A.3. 104
Sobole夫空间的精细插值 附录 B. 若干非标准函数空间 B.1. 各向异性 115
Sobolev 空间 B.2. 适配索伯列夫空间 附录 C. 若干偏微分方程工具 C.1. 117
散度边值问题 C.2. 椭圆理论工具 C.3. 行波可压缩纳维–斯托克斯方程的 119
耗散计算 附录 D. 非线性分析的精细工具 D.1. 叠加非线性项的光滑性 119
D.2. 温和估计工具 符号索引 120
122
122
123
123
125
125
130
132
132
135
138
142
142
147
154
参考文献 155

1. Introduction

近两个世纪以来，流体力学自由边界问题中的行波解研究一直是数学领域的基础性课题。在此期间，不可压缩流体的此类解分析取得了巨大进展。在这一时期的大部分时间里，研究重点是无黏、无旋流体；直到过去二十年，人们才开始在考虑涡量和黏性等更复杂现象的模型方面取得进展。然而，据我们所知，现有文献中尚无严谨结果涉及可压缩性这一流体力学中的基本效应。本文旨在研究这一效应。

所有真实流体都具有一定程度的可压缩性和黏性，即使程度很小。因此，从物理角度而言，验证在考虑这些效应后行波仍是普遍存在的现象十分重要。从数学角度来看，可压缩黏性理论的发展也为研究不可压缩或无黏极限打开了大门，而这或许能帮助我们进一步认识文献中构造出的种类繁多的不可压缩无黏解。我们强调，本文只研究密度在自由边界处不为零的可压缩流体；文献中通常将其称为可压缩液体。

引言的其余部分安排如下。第1.1节表述可压缩黏性流体自由边界问题的动力学方程，并确定与静止流体分层相对应的平衡解。第1.2节讨论行波拟设，以及外部应力和力所起的作用。第1.3节讨论有关行波的先前工作。第1.4节记录了对方程所作的进一步改写，旨在确定“良好未知量”。第1.5节陈述主要结果，并讨论其影响。第1.6节从宏观层面概述证明中的困难以及我们克服这些困难的策略。最后，第 1.7 节记录了本文中使用的记号约定。需要强调的是，为方便读者，我们在文末参考文献之前附上了符号索引。

1.1. 欧拉坐标下的动力学与分层平衡态。 我们首先建立自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程，该方程描述一层黏性、可压缩、压 barotropic（等熵）流体的动力学。首先需要约定一些记号。令 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ 表示空间维数； $n \in \{2,3\}$ 是具有物理意义的情形，但我们的分析适用于一般维数。参数 $b \in \mathbb{R}^+$ 表示流体的平衡深度。若 $\eta\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 是满足 $\eta + b > 0$的连续函数，则定义开集

$$\Omega[\eta] = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \,:\, 0 < y < b + \eta(x)\big\} \tag{1.1.1}$$

以及界面集合

$$\Sigma[\eta] = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \,:\, y = b + \eta(x)\big\} \text{ and } \Sigma_0 = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \tag{1.1.2}$$

注意， $\partial\Omega[\eta] = \Sigma[\eta] \sqcup \Sigma_0$。这些集合的示意图见图 1。本文将广泛使用以下简写记号

$$\Omega = \Omega[0] = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,b) \text{ and } \Sigma = \Sigma[0] = \mathbb{R}^{n-1} \times \{b\}. \tag{1.1.3}$$

假设流体占据一个深度有限、随时间变化的半无限层；更确切地说，在时刻 t ，流体占据集合 $\Omega[\zeta(t,\cdot)] \subset \mathbb{R}^n$ ，其自由表面由未知的连续自由表面函数 $\zeta(t,\cdot)\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 描述，并满足 $\zeta(t,\cdot) + b > 0$。该集合的上边界 $\Sigma[\zeta(t,\cdot)]$, 称为自由边界，而下边界 Σ_0 称为固定边界。流体由其速度向量场 $w(t,\cdot) : \Omega[\zeta(t,\cdot)] \to \mathbb{R}^n$ 以及标量密度$\tau(t,\cdot) : \Omega[\zeta(t,\cdot)] \to \mathbb{R}^+$描述。与 w和 τ相关的两个关键流体力学量是压力和黏性应力张量。流体内部的压力由 $P(\tau)$ 给出，其中$P \in C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ 是给定的压力定律，它严格递增并满足 $P' > 0$。

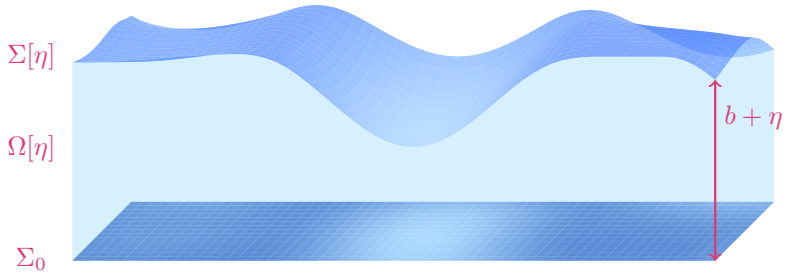

FIGURE 1. 区域 $\Omega[\eta]$ 及其边界 $\Sigma[\eta]$ 和 Σ_0，当 $n=3$时。

压力仅依赖于密度这一假设使流体成为斜压流体；这可以看作是假设流体流动为等熵过程的结果，即熵保持不变。流体内部的黏性应力张量是对称张量

$$\mathbb{S}^\tau w = \mu(\tau)\left(\nabla w + \nabla w^{\mathrm{t}} - \frac{2}{n}\nabla\cdot wI\right) + \lambda(\tau)(\nabla\cdot w)I = \mu(\tau)\mathbb{D}^0 w + \lambda(\tau)(\nabla\cdot w)I, \tag{1.1.4}$$

其中剪切黏性系数和体积黏度系数为 μ、$\lambda\in C^\infty(\mathbb{R}^+;[0,\infty))$。黏性系数的非负性是连续介质热力学中克劳修斯–杜亥姆不等式的要求，但我们将在下文对此作出更多假设。注意，函数 P、μ 和 λ 的具体形式可以视为描述构成该流体的特定材料。

ζ、w 和 τ 的动力学随后通过自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程，与作用于流体的各种力和应力耦合：

$$\begin{cases} \partial_t\tau + \nabla\cdot(\tau w) = 0 & \text{in } \Omega[\zeta(t,\cdot)] \\ \tau(\partial_t w + w\cdot\nabla w) + \nabla(P(\tau)) - \nabla\cdot\mathbb{S}^\tau w = -\mathfrak{g}\tau e_n + \tau G + F & \text{in } \Omega[\zeta(t,\cdot)] \\ -(P(\tau) - \mathbb{S}^\tau w)\nu_\zeta + P_{\text{ext}}\nu_\zeta - \varsigma\mathscr{H}(\zeta)\nu_\zeta = T\nu_\zeta & \text{on } \Sigma[\zeta(t,\cdot)] \\ \partial_t\zeta + w\cdot(\nabla_\parallel\zeta,-1) = 0 & \text{on } \Sigma[\zeta(t,\cdot)] \\ w = 0 & \text{on } \Sigma_0. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

请注意，在 上文中，我们用 $\nabla_\parallel = (\partial_1、\ldots\ldots、\partial_{n-1})$ 表示“切向梯度 ”.

现在我们逐一说明这些力和应力。项 $-\mathfrak{g}\tau e_n$ 表示作用于流体的重力，其重力强度为 $\mathfrak{g}>0$，单位向量为 $e_n=(0,\ldots\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$，且垂直于$\Sigma_0$。向量场 $F(t,\cdot)$ $G(t,\cdot):\Omega[\zeta(t,\cdot)]\to\mathbb{R}^n$ 分别表示施加的体力和比体力。参数 $P_{\text{ext}}\in\mathbb{R}$ 是一个常数外部压力，$T(t,\cdot):\Sigma[\zeta(t,\cdot)]\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 是施加的表面应力，而 ν_ζ 是表面 $\Sigma[\zeta(t,\cdot)]$ 的外向单位法向量。我们注意到，在连续介质力学中，$T(t,\cdot)$ 通常是对称的，但这一条件在我们的分析中不起作用，因此我们允许最一般的情形。平均曲率算子为

$$\mathscr{H}(\zeta) = \nabla_\parallel\cdot((1+|\nabla_\parallel\zeta|^2)^{-1/2}\nabla_\parallel\zeta), \tag{1.1.6}$$

参数 $\varsigma\geqslant 0$ 称为表面张力系数。出于后文将讨论的技术原因，我们对黏性系数和表面张力系数作出如下假设：

$$\begin{cases} \mu>0,\lambda\geqslant 0 \text{ in } \mathbb{R}^+, \text{ and } \varsigma>0 & \text{if } n\geqslant 3 \\ \mu>0,\lambda>0 \text{ in } \mathbb{R}^+, \text{ and } \varsigma\geqslant 0 & \text{if } n=2. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

(1.1.5)中的第一个方程是连续性方程，它体现了质量守恒。接下来是动量方程，它描述流体内部的牛顿力平衡。随后是动态边界条件，用于保证作用于自由表面的应力平衡。倒数第二个方程是运动学边界条件，它决定了自由表面如何

根据流体速度演化。(1.1.5)中的最后一个方程只是刚性底部的速度无滑移边界条件。关于可压缩纳维-斯托克斯方程及其推导的更详尽介绍，可参阅 Wehausen 和 Laitone [104], Feireisl [33], Lions [66], Novotn´y 与 Stra˘skraba [83], Gurtin、Fried 和 Anand [38], 以及 Plotnikov 和 Soko-lowski [88] 的著作。

可压缩Navier-Stokes方程组 (1.1.5) 存在一个垂向分层平衡解，前提是斜压压力定律 P、外部深度 b、外部压力 P_{ext} 和重力场强度 $\mathfrak{g}$ 满足某些相容条件。事实上，假设流体不受外力或应力作用，即 $F = G = 0$ 且 $T = 0$，并且流体处于静止状态，占据深度为 b 的平坦流体层，即 $w = 0$ 且 $\zeta = 0$。最后，假设 $\partial_t \tau = 0$；则 (1.1.5) 化简为 $\tau(t,\ x,\ y) = \varrho(y)$，其中 $\varrho : [0, b] \to \mathbb{R}^+$ 是一个满足柯西问题的光滑函数

$$\begin{cases} (P \circ \varrho)' = -\mathfrak{g}\varrho & \text{in } (0, b) \\ P \circ \varrho(b) = P_{\text{ext}}. \end{cases} \tag{1.1.8}$$

为保证解存在，我们从此假设以下一对相容条件成立（这些条件实际上是充要的）：

$$P_{\text{ext}} \in P(\mathbb{R}^+) \text{ and } (0, \infty] \ni \int_{P^{-1}(P_{\text{ext}})}^{\infty} t^{-1} P'(t)\, \mathrm{d}t > \mathfrak{g}b. \tag{1.1.9}$$

有了 (1.1.9)，我们便可通过引入焓 $H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$，方便地求解 (1.1.8)；焓是由下式定义的光滑递增函数

$$H(s) = -\mathfrak{g}b + \int_{P^{-1}(P_{\text{ext}})}^{s} t^{-1} P'(t)\, \mathrm{d}t. \tag{1.1.10}$$

注意，由于 $P' > 0$，我们也有 $H' > 0$。我们还可以计算像 $H(\mathbb{R}^+) = (H_{\min},\ H_{\max}) \subseteq \mathbb{R}$，其中

$$H_{\min} = -\mathfrak{g}b - \int_0^{P^{-1}(P_{\text{ext}})} t^{-1} P'(t)\, \mathrm{d}t < -\mathfrak{g}b \text{ and } H_{\max} = -\mathfrak{g}b + \int_{P^{-1}(P_{\text{ext}})}^{\infty} t^{-1} P'(t)\, \mathrm{d}t > 0. \tag{1.1.11}$$

由于现在我们知道 $H\colon \mathbb{R}^+ \to (H_{\min},\ H_{\max})$ 是一个光滑微分同胚，且 $[-\mathfrak{g}b, 0] \subseteq H(\mathbb{R}^+)$，因此可将 ϱ 表示为由下式定义的光滑递减函数

$$\varrho(y) = H^{-1}(-\mathfrak{g}y) \text{ for } y \in [0, b], \tag{1.1.12}$$

根据 H 的构造，它是 (1.1.8) 的唯一解。平衡密度 ϱ 将在我们后续的分析中发挥关键作用。作为一个具体例子，若压力满足著名的多方定律 $P(t) = Kt^\alpha$，其中 $\alpha \geqslant 1$ 且 $K \in \mathbb{R}^+$，则

$$\varrho(y) = \begin{cases} P_{\text{ext}} K^{-1} \exp(\mathfrak{g}K^{-1}(b - y)) & \text{if } \alpha = 1 \\ ((P_{\text{ext}} K^{-1})^{(\alpha-1)/\alpha} + (\alpha - 1)\alpha^{-1} K^{-1} \mathfrak{g}(b - y))^{1/(\alpha-1)} & \text{if } \alpha > 1. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

1.2. 行波以及应力与力的作用。本文的主要研究内容是系统 (1.1.5) 的行波解。这些解在通过伽利略变换由上述欧拉坐标得到的惯性坐标系中观察时，与时间无关。为了使解与时间无关，运动坐标系必须以恒定速度沿平行于 Σ_0的方向行进。不失一般性（我们总可以通过对坐标系进行刚性旋转来固定向量 e_n），可以假设行波坐标系以恒定速度 γe_1 运动，其波速为 $\gamma \in \mathbb{R}^+$。

在新坐标下，对于新的未知自由表面函数 $\eta\colon\ \mathbb{R}^{n-1} \to (-b, \infty)$，定常自由边界可表示为 $\eta(x - \gamma t e_1) = \zeta(t, x)$，它进而确定流体域 $\Omega[\eta]$ 以及自由边界 $\Sigma[\eta]$。接下来，我们假设其他量也具有行波

形式： $\gamma v(x-t\gamma e_1,y) = w(t,x,y)$， $\sigma(x-\gamma te_1,y) = \tau(t,x,y)$， $\mathcal{F}(x-t\gamma e_1,y) = F(t,x,y)$,$\mathcal{G}(x-t\gamma e_1, y) = G(t,x,y)$， 以及 $\mathcal{T}(x-t\gamma e_1,y) = T(t,x,y)$， 其中 $v\colon \Omega[\eta]\to\mathbb{R}^n$, $\sigma\colon\Omega[\eta]\to\mathbb{R}$,$\mathcal{F},\mathcal{G}\colon\Omega[\eta]\to\mathbb{R}^n$, 以及 $\mathcal{T}\colon \Sigma[\eta]\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 分别表示定常速度场、密度、外部力和比力，以及外部应力。在这些假设下，(1.1.5) 等价于以下关于未知量 (σ,v,η) 和数据 $(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})$ 的行波可压缩Navier-Stokes方程组：

$$\begin{cases} -\partial_1\sigma+\nabla\cdot(\sigma v)=0 & \text{in } \Omega[\eta]\\ \gamma^2\sigma\,(v-e_1)\cdot\nabla v+\nabla(P\,(\sigma))-\gamma\nabla\cdot\mathbb{S}^\sigma v=-\mathfrak{g}\sigma e_n+\sigma\mathcal{G}+\mathcal{F} & \text{in } \Omega[\eta]\\ -(P\,(\sigma)-\gamma\mathbb{S}^\sigma v)\nu_\eta+P_{\text{ext}}\nu_\eta-\varsigma\mathscr{H}\,(\eta)\,\nu_\eta=\mathcal{T}\nu_\eta & \text{on } \Sigma[\eta]\\ -\partial_1\eta+v\cdot(\nabla_\parallel\eta,-1)=0 & \text{on } \Sigma[\eta]\\ v=0 & \text{on } \Sigma_0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

注意，在改变未知量时，我们通过 γ 对速度向量进行了重新缩放。这起到了使向量场 v 无量纲化的作用，更重要的是，消除了 γ-依赖性，使其不再出现在连续性方程和运动学边界条件中。

在建立行波方程组（1.2.1）后，我们转而讨论表面应力、比体力和体力数据三元组（$\mathcal{T}$， $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$）所发挥的作用。我们选择研究这种一般形式的（$\mathcal{T}$， $\mathcal{G}$， $\mathcal{F}$），是为了使它们能够描述各种物理效应。作为一个具体例子，体力项 $\mathcal{G}$ 可以被理解为由一个在流体上方平移的巨大物体引起的引力场的局域扰动（这是海洋—月球系统的一个原始模型）。类似地，当对于给定的标量函数 φ：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 而有 $\mathcal{T}=-\varphi I_{n\times n}$ 时，表面应力的一个简单例子便出现了；在这一构型中， φ 可以被视为一个在流体上方平移的空间局域压力源。对于后一种外加应力情形下自由表面的图示，请参见图 2。

若 $(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) = 0$，则不难验证，分层平衡解 $v=0$、 $\eta=0$ 和 $\sigma=\varrho$ （由 (1.1.12) 定义）对于任意取值的 γ 都是 (1.2.1) 的一个解。这表明，我们应当寻求作为该分层平衡态扰动的 (1.2.1) 的解。一个初等的形式计算（我们将在对问题作进一步改写后，陈述并证明一个严格版本：见附录 C.3，特别是推论 C.12）表明，若 $\sigma-\varrho$、 v 和 η 属于 Sobolev型框架，则

$$\int_{\Omega[\eta]}\frac{\mu(\sigma)}{2}|\mathbb{D}^0 v|^2+\lambda(\sigma)|\nabla\cdot v|^2=\int_{\Omega[\eta]}(\sigma\mathcal{G}+\mathcal{F})\cdot v+\int_{\Sigma[\eta]}\mathcal{T}\nu_\eta\cdot v. \tag{1.2.2}$$

这个恒等式的物理解释是：如果行波解存在，那么力和应力所提供的功率（即 (1.2.2) 的右侧）必须与黏性导致的能量耗散率（即 (1.2.2) 的左侧）精确平衡。

恒等式 (1.2.2) 揭示了更多信息，前提是我们假设不存在外加力或应力，即 $(\mathcal{T},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F}) = 0$。没有外部功率来源时，(1.2.2) 要求左侧积分为零，因此假设 (1.1.7) 结合 Korn 不等式（关于 Ω 中的 Korn 不等式，见命题 A.3 和 A.4；但在 η 足够规则时，$\Omega[\eta]$ 中也有类似结果）推出 $v=0$。进而，动量方程推出 $\nabla(P(\sigma)) = -\mathfrak{g}\sigma e_n$，因此对某个常数 c，有 $\sigma = H^{-1}(-\mathfrak{g}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_n+c)$；但由于 $\sigma-\varrho$ 在无穷远处趋于零，必有 $c=0$。于是，动态边界条件的法向部分要求

$$P_{\text{ext}}-P\circ H^{-1}(-\mathfrak{g}(b+\eta))-\varsigma\nabla_\parallel\cdot((1+|\nabla_\parallel\eta|^2)^{-1/2}\nabla_\parallel\eta)=0, \tag{1.2.3}$$

并将此方程乘以 η，再对平均曲率项分部积分，我们可推得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(P_{\text{ext}}-P\circ H^{-1}(-\mathfrak{g}(b+\eta)))\eta\leqslant 0. \tag{1.2.4}$$

由于 $P_{\mathrm{ext}} - P \circ H^{-1}(-\mathfrak{g}(b + \cdot))$ 是一个严格递增且在零点取值为零的函数，(1.2.4) 中的被积函数非负，因此必定处处为零。于是， $\eta = 0$，我们便推得当 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0$ 时，$(\sigma, v, \eta) = (\varrho, 0, 0)$。

上述形式计算表明，若没有外加应力或外力，黏性的耗散性质会阻止非平凡行波解（在 Sobolev 型空间中）的存在。这说明三元组（$\mathcal{T}$， $\mathcal{G}$， $\mathcal{F}$）在研究行波解时起着至关重要的作用，因为解的存在离不开应力与强迫数据。然而，我们强调，上述论证并未排除在非索博列夫函数框架中存在具有（$\mathcal{T}$， $\mathcal{G}$， $\mathcal{F}$） $= 0$的非平凡解。

既然数据三元组在行波理论中的重要性已显而易见，我们可以大致概括本文的目标：证明对于每一个行波波速$\gamma \in \mathbb{R}^+$ ，问题 (1.2.1) 都具有小数据适定性理论。也就是说，我们旨在确定一个非平凡的开集 $\mathcal{U}_\gamma$，它由 Sobolev 型框架中的应力与强迫数据构成，使得对于每个（$\mathcal{T}$， $\mathcal{G}$， $\mathcal{F}$） $\in \mathcal{U}_\gamma$，问题 (1.2.1) 都存在一个局部唯一的解三元组（σ， v， η），且该解三元组也属于 Sobolev 型框架，并且关于（$\mathcal{T}$， $\mathcal{G}$， $\mathcal{F}$）连续依赖。然而，出于技术原因（我们将在第 1.4 节开头加以说明），变量（σ， v， η）不适合完成这一任务，因此为了实现目标，我们必须进一步改写 (1.2.1)，引入一组新的 “ 良好未知量 ”。有趣的是，这种新的表述还使我们能够证明解关于波速 γ 也连续。

1.3. **先前工作**。 (1.1.5) 中的时变自由边界可压缩流体方程及其变体在文献中受到广泛关注。全面回顾超出了本文的范围，因此我们仅简要介绍一些与本文密切相关的结果。

关于动态问题的文献中，有相当一部分研究的是 (1.1.5) 的无黏对应方程，即自由边界可压缩欧拉方程。Lindblad [62, 63] 证明了液滴问题的局部适定性。Jang 和 Masmoudi [49, 50] 以及 Coutand 和 Shkoller [20, 21] 证明了真空液滴问题的局部适定性。Coutand 、 Hole 和 Shkoller [19] 以及 Disconzi 和 Kukavica [28]研究了具有表面张力的液滴问题的适定性。Lindblad 和 Luo [65] 在无表面张力的情形下，以及 Disconzi 和 Luo [29] 在有表面张力的情形下，推导了液滴问题的不可压缩极限。Trakhinin [102] 以及 Luo 和 Zhang [69] 证明了无限深液层无黏问题的局部适定性。

此外，还有不少关于自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程的动力学研究。Denisova 在索伯列夫空间 [23] 和加权 H¨older 空间 [25]中，证明了可压缩流体中可压缩气泡问题的局部适定性。Denisova [24] 还针对不可压缩流体中的可压缩气泡问题证明了类似结果。Secchi 和 Valli [92], 研究了黏性液滴问题，并证明了含热传导情形下的局部适定性；Solonnikov 和 Tani [95], 证明了含表面张力情形下的局部适定性；Denisova 和 Solonnikov [26], 则建立了含表面张力和不含表面张力情形下的适定性理论。利用极大正则性技术，在各种条件下也已证明黏性液滴问题的适定性：参见 Enomoto、von Below 和 Shibata [32], Shibata[94], ， 以及 Burczak、Shibata 和 Zaj.aczkowski [13]的研究。

关于黏性流体的文献中也有若干研究涉及分层几何。Jin [53] 以及 Jin 和 Padula [54]证明了具有表面张力的周期性斜压流体层的局部和整体适定性。Tanaka 和 Tani [100] 给出了导热流体层的局部和整体适定性结果。Jang、Tice 和 Wang [51, 52] 证明了多层斜压流体的局部和整体适定性。Huang 和 Luo [45] 证明了无表面张力的导热流体层的整体存在性。

也可以将带自由边界的可压缩流体用作恒星结构的简单模型；在这种情况下，流体受到自身引力场的作用。当重力

被假定为牛顿力而非相对论力时，这个问题对无黏流体称为欧拉-泊松系统，对黏性流体则称为纳维-斯托克斯-泊松系统。Makino [71] 在对数据作出特殊假设的条件下，证明了欧拉-泊松系统一个早期的局部存在性结果。Makino [84] 和 Matuˇsu-Neˇcasov´a、Okada 以及 Makino [76] 研究了具有球对称、位于固体内核之外的黏性问题。Jang [47] 证明了具有真空边界的纳维-斯托克斯-泊松问题的局部存在性。Luo、Xin 和 Zeng [70] 研究了具有真空边界的无黏问题的径向解的局部适定性。Ginsberg、Lindblad 和 Luo [36] 研究了自引力可压缩液体的局部适定性。Jang 和 Hadˇzi´c [39] 构造了欧拉-泊松系统的全局膨胀解。自引力问题存在非平凡的径向稳态，称为莱恩-埃姆登解（例如，参见 Chandrasekhar [14]的著作）。近期的研究还严格构造了旋转解：关于变分方法，可参阅 Auchmuty 和 Beals [4] 以及 Li [61], ；关于扰动方法，可参阅 Jang 和 Makino[48] 以及 Strauss 和 Wu [99]。

与上述讨论形成鲜明对比的是，据我们所知，可压缩行波问题 (1.2.1) 无论是否考虑黏性，都尚未受到偏微分方程文献的关注。最接近的相关研究（尽管仍相距甚远）涉及为黏性可压缩流体的某些自由边界问题构造定常（而非行波）解。Pileckas 和 Zaj.aczkowski [87] 在对称性条件下，找到了具有表面张力的有界黏性可压缩流体液滴的定常解。Jin 和 Padula [55] 研究了具有部分自由边界的有界刚性容器内黏性可压缩流体的定常流。

然而，文献中已对 (1.2.1) 的不可压缩对应问题进行了研究。式 (1.2.1) 的不可压缩无黏对应方程也称为行进水波问题，一个多世纪以来一直受到数学文献的广泛关注。关于这一庞大领域的全面综述，请参阅 Toland、Groves、Strauss [98], 以及 Haziot、Hur、Strauss、Toland、Wahl´en、Walsh 和 Wheeler [41]的综述及其中的参考文献。另一方面，关于自由边界不可压缩纳维–斯托克斯方程的行波理论，直到最近才开始取得进展。Leoni 和 Tice [60]首先建立了小数据适定性理论。随后，Stevenson 和 Tice [97] 以及 Koganemaru 和 Tice [57] 分别将这一结果推广到多层结构和倾斜几何。Nguyen 和 Tice [82]为单相 Muskat 问题的行波解建立了类似的适定性与稳定性理论。近期，实验中也通过实证识别出黏性行波：空气管在波浪水槽上方匀速移动，并向单层黏性流体吹气。详情请参阅 Akylas、Cho、Diorio 和 Duncan [18, 27],、Masnadi 和 Duncan [74], 以及 Park 和 Cho [85, 86]的研究。

正如我们前面提到的，文献中严格研究具有黏性的行波的近期成果寥寥无几，而研究可压缩性的成果则尚付阙如。在研究行波时，必须考虑黏性和可压缩性这两种重要的物理效应，因为所有真实流体都具有一定程度的可压缩性和黏性，即使程度很小。在应用文献中，也有一些研究通过简化的流体模型探讨可压缩性的可观测效应。例如，Longuet-Higgins [68] 和 Kadri [56] 研究了水的可压缩性如何导致海洋中的微震；Long 和 Morton [67]以及 Miesen、Kamp 和 Sluijter [78, 79]则利用渐近展开和数值计算，研究了可压缩性在大气孤立行波中的作用。

我们证明行波问题 (1.2.1) 适定性的方法，采用了 Nash-Moser 逆函数定理的一种新颖变体。关于我们所用方法的文献综述将留待第 1.6 节和第 2 节讨论，但本小节最后将列举流体偏微分方程文献中的一些有趣结果，这些结果均借助 Nash-Moser 方法得到证明。Beale [7] 利用该方法证明了二维无旋不可压缩自由边界欧拉方程存在定常水波。Plotnikov 和 Toland [89] 发现了时间周期驻波。Lindblad [63, 64]利用 Nash-Moser 方法研究了不可压缩和可压缩

欧拉方程。Chen 和 Wang [15] 研究了三维磁流体力学中可压缩电流-涡片的存在性和稳定性。Trakhinin [102] 考察了可压缩欧拉方程的无限深水面波问题。Makino [72, 73]研究了行星可压缩大气的球对称运动，以及气态恒星的真空边界问题。Buffoni 和 Wahl´en [12] 利用 Nash-Moser 方法的一种变体，为不可压缩欧拉方程构造了稳态三维旋转流。Chen、Secchi 和 Wang [16] 研究了可压缩相对论欧拉方程在三维闵可夫斯基时空中的相对论涡片。Chen、Hu、Wang、Wang 和 Yuan [17] 利用 Nash-Moser 方法研究了二维弹性动力学中的可压缩涡片。Trakhinin 和 Wang [103] 借助 Nash-Moser 方法研究了带表面张力的理想可压缩磁流体力学方程。

1.4. 焓与扁平化重构。 本小节旨在进一步重写行波方程组 (1.2.1)，使其更便于分析。这样做有三个原因：自由边界问题中两个常见的困难，以及一个与当前问题有关、更为微妙的问题。第一个问题是，我们希望建立 Sobolev 型空间中的适定性理论。然而，正如我们在第 1.2 节末尾所讨论的，如果 $(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) = 0$那么解就退化为分层平衡态，但我们无法期望 $\sigma = \varrho$ 属于无限测度集合上的 Sobolev 型空间。这表明，我们应将 (1.2.1) 改写为平衡解 $(\varrho, 0, 0)$ 的扰动形式。第二个问题是，即使改写为扰动形式，所得方程仍定义在未知区域 $\Omega[\eta]$上。为了便于使用标准偏微分方程工具箱，最好将系统改写到一个固定且已知的区域上。行波表述排除了通常采用拉格朗日坐标的做法，因此我们改为仅依据自由表面函数，将方程扁平化到平衡区域 Ω 上。第三个问题源于行波结构最终要求自由表面函数 η 属于一族各向异性 Sobolev 型空间（见附录 B.1）。经过扰动化和扁平化重构后，η 将以各种非线性项中的某种形式出现；由于各向异性空间的特殊性质，这种形式在 Sobolev 型框架中相当难以控制，甚至无法控制。粗略地说，我们解决这一问题的方法是对未知量作非线性变换，将密度改写为扰动焓 $h = H(\sigma) - H(\varrho)$。未知量 h 可作为某种“好未知量”：它将最棘手的非线性项——来自 (1.2.1) 中的项 $\nabla(P(\sigma)) + \mathfrak{g}\sigma e_n$ ——改写为 $\sigma\nabla(H(\sigma) - H(\varrho)) = H^{-1}(h + H(\varrho))\nabla h$，从而将非线性项移到梯度之外，并使简单的 Sobolev 估计成为可能。我们还将对速度进行非线性变换，以类似地线性化运动学边界条件。这样变换的代价是连续性方程变得更加繁琐，但幸运的是，我们能够处理其新的形式。

现在我们开始执行对 (1.2.1) 的这些重构。首先，通过定义新的未知量 $h = H(\sigma) - H(\varrho)$，转而采用扰动焓重构。注意，只要 $h + H(\varrho)$ 的取值属于 $(H_{\min}, H_{\max})$（见 (1.1.11)），就可以通过 $\sigma = H^{-1}(h + H(\varrho))$ 从 h 恢复 σ；对于我们构造的解，这一条件始终成立。于是，自由边界可压缩 Navier–Stokes 行波方程的可微扰焓重构为以下关于 (h, v, η)、数据为 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 的系统：

$$
\begin{cases}
-\partial_1(H^{-1}(h + H(\varrho))) + \nabla\cdot(H^{-1}(h + H(\varrho))v) = 0 & \text{in } \Omega[\eta] \\
\gamma^2 H^{-1}(h + H(\varrho))(v - e_1)\cdot\nabla v + H^{-1}(h + H(\varrho))\nabla h - \gamma\nabla\cdot\mathbb{S}^{H^{-1}(h+H(\varrho))}v \\
\quad = H^{-1}(h + H(\varrho))\mathcal{G} + \mathcal{F} & \text{in } \Omega[\eta] \\
-((P - P_{\text{ext}})\circ H^{-1}(h + H(\varrho)) - \gamma\mathbb{S}^{H^{-1}(h+H(\varrho))}v)\nu_\eta - \varsigma\mathscr{H}(\eta)\nu_\eta = \mathcal{T}\nu_\eta & \text{on } \Sigma[\eta] \\
-\partial_1\eta + v\cdot(\nabla_{\|}\eta, -1) = 0 & \text{on } \Sigma[\eta] \\
v = 0 & \text{on } \Sigma_0.
\end{cases}
\tag{1.4.1}
$$

接下来，我们将注意力转向在固定区域 $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, b)$ 上重构 (1.4.1)。首先，我们定义一个类泊松延拓算子，将定义在 Σ 上的函数延拓为定义在 Ω 上的函数。对于$s \in \mathbb{N}^+$，辅助映射 $\mathcal{E}_0 \colon H^{s-1/2}(\Sigma) \to H^s(\Omega) \cap {}_0H^1(\Omega)$（见 (1.7.3)）通过 $\varphi \mapsto \mathcal{E}_0\varphi$ 定义，其中 $\mathcal{E}_0\varphi$ 是该偏微分方程的唯一解:

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{E}_0\varphi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{E}_0\varphi = \varphi & \text{on } \Sigma, \\ \mathcal{E}_0\varphi = 0 & \text{on } \Sigma_0. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

于是，对于适当的函数（见引理 A.1），我们的类泊松延拓算子 $\mathcal{E}$ 通过如下赋值定义：$\eta \ \Sigma \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}\eta(x,y) = y \cdot b^{-1}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta(x) + \mathcal{E}_0\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta(x,y) \text{ for } (x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0,b), \tag{1.4.3}$$

其中，傅里叶投影算子由 $\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta = \mathscr{F}^{-1}[\mathbb{1}_{B(0,1)}\mathscr{F}[\eta]]$ 和 $\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta = \eta - \Pi^1_{\mathrm{L}}\eta$给出。

于是，我们由 $\mathcal{E}$ 构造如下展平映射。对于满足 $\eta : \Sigma \to \mathbb{R}$ $\eta > -b$ 且属于适当函数空间（见 (1.5.1)，其中 $s > 1 + d/2$和 $d = n-1$）的函数，我们定义 $\mathfrak{F}_\eta \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$如下:

$$\mathfrak{F}_\eta(x,y) = (x, y + \mathcal{E}\eta(x,y)) \text{ for } (x,y) \in \Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,b). \tag{1.4.4}$$

我们为 $\mathfrak{F}_\eta$ 关联两个关键量：雅可比行列式 $J_\eta : \Omega \to \mathbb{R}^+$，以及（当 J_η 处处不为零时）几何矩阵 $\mathcal{A}_\eta : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$，其定义如下:

$$J_\eta = \det(\nabla \mathfrak{F}_\eta) = 1 + \partial_n \mathcal{E}\eta = \partial_n(\mathfrak{F}_\eta \cdot e_n) \text{ and } \mathcal{A}_\eta = (\nabla \mathfrak{F}_\eta))^{-\mathrm{t}}. \tag{1.4.5}$$

那么，只要

$$J_\eta > 0 \text{ and } J_\eta, 1/J_\eta \in L^\infty(\Omega), \tag{1.4.6}$$

$\mathfrak{F}_\eta(\Omega) = \Omega[\eta]$，且 $\mathfrak{F}_\eta$ 是从 Ω 到 $\Omega[\eta]$ 的双 Lipschitz 同胚，其在 $\overline{\Omega}$ 上的限制定义了一个到 $\Omega[\eta]$ 的光滑微分同胚。此外，$\mathfrak{F}_\eta(\Sigma) = \Sigma[\eta]$，且 $\mathfrak{F}_\eta$ 在 Σ_0 上是恒等式。

对于倒数第二次方程变换，我们令 $\mathrm{h} = h \circ \mathfrak{F}_\eta$，并将 $u = J_\eta \mathcal{A}_\eta^{\mathrm{t}} v \circ \mathfrak{F}_\eta$ 作为定义在固定区域 Ω 上的新未知量。于是，方程 (1.4.1) 可变换为关于未知量 $(\mathrm{h}\ u, \eta)$ 且数据为 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 的以下等价系统:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (H^{-1}(\mathrm{h} + H \circ \varrho(\mathfrak{F}_\eta \cdot e_n))(u - J_\eta \mathcal{A}_\eta^{\mathrm{t}} e_1)) = 0 & \text{in } \Omega \\ H^{-1}(\mathrm{h} + H \circ \varrho(\mathfrak{F}_\eta \cdot e_n))(\gamma^2(\mathcal{A}_\eta^{-\mathrm{t}} u/J_\eta - e_1) \cdot \mathcal{A}_\eta \nabla(\mathcal{A}_\eta^{-\mathrm{t}} u/J_\eta) + \mathcal{A}_\eta \nabla \mathrm{h}) & \\ \quad -\gamma(\mathcal{A}_\eta \nabla) \cdot \mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{H^{-1}(\mathrm{h} + H \circ \varrho(\mathfrak{F}_\eta \cdot e_n))}(\mathcal{A}_\eta^{-\mathrm{t}} u/J_\eta) = H^{-1}(\mathrm{h} + H \circ \varrho(\mathfrak{F}_\eta \cdot e_n))\mathcal{G} \circ \mathfrak{F}_\eta & \\ \quad\quad +\mathcal{F} \circ \mathfrak{F}_\eta & \text{in } \Omega \\ -((P - P_{\mathrm{ext}}) \circ H^{-1}(\mathrm{h} + H \circ \varrho(\mathfrak{F}_\eta \cdot e_n)) - \gamma \mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{H^{-1}(\mathrm{h} + H \circ \varrho(\mathfrak{F}_\eta \cdot e_n))}(\mathcal{A}_\eta^{-\mathrm{t}} u/J_\eta))\mathcal{N}_\eta & \\ \quad\quad -\varsigma \mathscr{H}(\eta)\mathcal{N}_\eta = \mathcal{T} \circ \mathfrak{F}_\eta \mathcal{N}_\eta & \text{on } \Sigma \\ u \cdot e_n + \partial_1 \eta = 0 & \text{on } \Sigma \\ u = 0 & \text{on } \Sigma_0, \end{cases} \tag{1.4.7}$$

其中，对于 $\tau = H^{-1}(\mathrm{h} + H \circ \varrho(\mathfrak{F}_\eta \cdot e_n))$、$\mathcal{M} = \mathcal{A}_\eta$ 和 $w = \mathcal{A}_\eta^{-\mathrm{t}} u/J_\eta$，我们使用了记号

$$\mathbb{S}^\tau_{\mathcal{M}} w = \mu(\tau)\Big(\nabla w \mathcal{M}^{\mathrm{t}} + \mathcal{M}\nabla w^{\mathrm{t}} - \frac{2}{n}((\mathcal{M}\nabla) \cdot w) I\Big) + \lambda(\tau)((\mathcal{M}\nabla) \cdot w) I, \tag{1.4.8}$$

并且我们还记 $\mathcal{N}_\eta = (-\nabla_{\|}\eta,\ 1)$。

注意，在推导 (1.4.7) 时，我们不仅将速度向量展平，还乘以了矩阵 $J_\eta \mathcal{A}_\eta^{\mathrm{t}}$。这带来了以下重要结果。首先，我们能够保持连续性方程处于“完美散度”形式。其次，运动学边界条件转化为线性方程。这些性质对于我们的分析必不可少。

在得到问题所需的表述之前，我们还需要进行一次未知量替换。问题在于，表述 (1.4.7) 并不能让我们确保 h 属于

标准索伯列夫空间。我们不再发展更多非标准的索伯列夫理论，而是通过最后一次未知量和方程的替换来绕过这一问题：定义 $q = \mathrm{h} - \mathfrak{g}\eta$，并将动量方程乘以 $\mathcal{A}_\eta^{-1}$，从而大大简化了我们的分析。于是，我们得到关于未知量 $(q,\ u,\ \eta)$、数据为 $(\mathcal{T},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F})$ 的方程组的最终等价形式：

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\sigma_{q,\eta}(u - M_\eta e_1)) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \gamma^2\sigma_{q,\eta}M_\eta^{-\mathrm{t}}(((u - M_\eta e_1)\cdot\nabla)(M_\eta^{-1}u)) + \sigma_{q,\eta}\nabla(q + \mathfrak{g}\eta) & \\ \quad -\gamma M_\eta^{-\mathrm{t}}(\nabla\cdot(\mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{\sigma_{q,\eta}}(M_\eta^{-1}u)M_\eta^{\mathrm{t}})) = J_\eta\sigma_{q,\eta}M_\eta^{-\mathrm{t}}\mathcal{G}\circ\mathfrak{F}_\eta + J_\eta M_\eta^{-\mathrm{t}}\mathcal{F}\circ\mathfrak{F}_\eta & \text{in } \Omega, \\ -((P - P_{\mathrm{ext}})\circ\sigma_{q,\eta} - \gamma\mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{\sigma_{q,\eta}}(M_\eta^{-1}u))M_\eta^{\mathrm{t}}e_n - \varsigma\mathscr{H}(\eta)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n = \mathcal{T}\circ\mathfrak{F}_\eta M_\eta^{\mathrm{t}}e_n & \text{on } \Sigma, \\ u\cdot e_n + \partial_1\eta = 0 & \text{on } \Sigma, \\ u = 0 & \text{on } \Sigma_0, \end{cases} \tag{1.4.9}$$

其中我们设

$$M_\eta = J_\eta\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} (1 + \partial_n\mathcal{E}\eta)I_{(n-1)\times(n-1)} & 0_{(n-1)\times 1} \\ -\mathcal{E}(\nabla_\parallel\eta) & 1 \end{pmatrix} : \Omega\to\mathbb{R}^{n\times n} \tag{1.4.10}$$

and

$$\sigma_{q,\eta} = H^{-1}(q + \mathfrak{g}\eta + H\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n)) = H^{-1}(-\mathfrak{g}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_n + q + \mathfrak{g}(I - \mathcal{E})\eta) : \Omega\to\mathbb{R}. \tag{1.4.11}$$

正如我们在第1.1节中讨论的，原系统 (1.1.5) 存在一个分层平衡解。从某种意义上说，这个解仍然包含在新的表述 (1.4.9) 中：对于任意 $\gamma\in\mathbb{R}^+$，当不存在额外的应力或力时，即当 $(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) = (0,0,0)$ 时，$(q,u,\eta) = (0,0,0)$ 是 (1.4.9) 的一个解。此外，我们在推论 C.13 中证明，在满足以下条件的三元组 (q,u,η) 中，这些平凡解是唯一的：

$$\sqrt{\|q\|_{H^{4+\lfloor n/2\rfloor}}^2 + \|u\|_{H^{5+\lfloor n/2\rfloor}}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{H}^{11/2+\lfloor n/2\rfloor}}^2} < \rho, \tag{1.4.12}$$

其中 ρ 是一个仅取决于平衡深度 b、重力 $\mathfrak{g}$、压力定律 P、黏性系数 μ 和 λ以及维数 n的常数。不过我们强调，为简化起见，结果以这种形式给出，但还可以进一步改进。这反映出我们的预期是：对于黏性流体，只有在应力和力的作用下才存在行波解。(1.4.9) 的解也满足与 (1.2.2) 类似的功率与耗散平衡；详见推论 C.12。

1.5. 主要结果陈述。 现在我们陈述主要结果。为此，我们首先需要引入一些记号，以描述所采用的函数框架。在我们的工作中，与 Leoni 和 Tice [60], Stevenson 和 Tice [97], 以及 Koganemaru 和 Tice [57]关于方程 (1.2.1) 的不可压缩对应问题的行波解的先前工作，以及 Nguyen 和 Tice [82] 关于单相 Muskat 问题的行波解的工作一样，行波结构要求自由表面函数属于一系列非标准各向异性索博列夫空间，而这些空间的性质最终在分析中发挥着关键作用。因此，为了恰当地陈述主定理，我们先介绍这些空间。

对于 $\mathbb{R}\ni s\geqslant 0$ 和 $d\in\mathbb{N}^+$，我们定义各向异性 Sobolev 空间

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{f\in\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})\ :\ \mathscr{F}[f]\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}),\ \|f\|_{\mathcal{H}^s} < \infty\}, \tag{1.5.1}$$

其配备的范数为

$$\|f\|_{\mathcal{H}^s} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\xi|^{-2}(\xi_1^2 + |\xi|^4)\mathbb{1}_{B(0,1)}(\xi) + \langle\xi\rangle^{2s}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,1)}(\xi)\big)|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}. \tag{1.5.2}$$

关于这些函数空间的更多信息，请参见附录 B.1；但为了陈述主定理，我们在此指出，$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 是一个希尔伯特空间，并且 $H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^d) + C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$，其中第一个嵌入为等号当且仅当 $d = 1$。

在陈述主定理时，我们令 $r = 10 + 2\lfloor n/2 \rfloor$，并对 $s \in \mathbb{N}$ 定义集合

$$U_s = H^{1+s+r}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n\times n}) \times H^{s+r}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \times H^{s+r}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^+, \tag{1.5.3}$$

$$V_s = H^{1+s+r}(\Omega) \times H^{2+s+r}(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}^{5/2+s+r}(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{1.5.4}$$

$$V^0 = \{(q, u, \eta) \in V_0 \ : \ \mathrm{Tr}_{\Sigma_0}(u) = 0, \ \mathrm{Tr}_{\Sigma}(u \cdot e_n) + \partial_1 \eta = 0\}. \tag{1.5.5}$$

现在可以陈述我们的主定理，该定理确立了自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程 (1.4.9) 行波表述的适定性。

定理 1 (在定理 7.3 中证明)。假设参数 μ、λ 和 ς 满足 (1.1.7) 且 P 满足 $P' > 0$ 和 (1.1.9)。存在一族 $\{\mathscr{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\mathbb{R}^+}$ 开子集，属于 V^0，以及一个由 $\{\mathscr{U}_s\}_{s=0}^{\infty}$ 开子集构成的非增序列，属于 U_0，使得以下结论成立。

(1) 非退化性：我们有 $\{0\} \times \mathbb{R}^+ \subseteq \bigcap_{s=0}^{\infty} \mathscr{U}_s$ 和 $0 \in \bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \mathscr{V}(\gamma)$。*(2)* 存在唯一性：对于所有由外加应力、比体力、体力和波速组成的元组 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \in \mathscr{U}_0$，存在唯一解 $(q, u, \eta) \in \mathscr{V}(\gamma)$，使得自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程的行波重表述，即系统 *(1.4.9)*，在数据 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 和波速 γ 下经典地成立。*(3)* 给定低范数小性时的正则性：若 $s \in \mathbb{N}^+$ 且 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \in \mathscr{U}_s \cap U_s$，则相应的解满足 $(q, u, \eta) \in \mathscr{V}(\gamma) \cap V_s$。*(4)* 连续依赖性：对于任意 $s \in \mathbb{N}$，解映射

$$\mathscr{U}_s \cap U_s \ni (\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \mapsto (q, u, \eta) \in V_s \cap V^0 \tag{1.5.6}$$

关于 U_s 和 $V_s \cap V^0$ 拓扑连续。

(5) 无真空形成：存在正数 $c, C \in \mathbb{R}^+$，使得对所有 $(q, u, \eta) \in \bigcup_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \mathscr{V}(\gamma)$，均有 $c \leqslant \sigma_{q,\eta} \leqslant C$，其中 $\sigma_{q,\eta}$ 定义见 (1.4.11)。*(6)* 展平映射微分同胚：对于任意 $s \in \mathbb{N}$ 和 $(q, u, \eta) \in V_s \cap \bigcup_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \mathscr{V}(\gamma)$，展平映射 $\mathfrak{F}_\eta$ 由 (1.4.4) 给出，是从 Ω 到 $\Omega[\eta]$ 的光滑微分同胚，并可延拓为从 Ω 到 $\Omega[\eta]$ 的 $C^{12+\lfloor n/2\rfloor+s}$ 微分同胚。

在列举一些推论之前，我们先停下来谈几点看法和说明。首先，我们强调，我们的定理可以概括为：自由边界可压缩纳维–斯托克斯系统的行波具有普遍性：对于所有非平凡波速 $\gamma \in \mathbb{R}^+$，行波都存在；对于固定的正则性指标 $s \in \mathbb{N}$，应力-力-速度数据 $\mathscr{U}_s \cap U_s$ 的集合是开集。特别地，对于每个固定的波速 $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 和 $s \in \mathbb{N}$，能够使我们求解 (1.4.9) 的应力和力数据构成一个包含原点的开集，因此小数据解的存在是一种普遍现象。在 $\mathscr{U}_s \cap U_s$ 中开展研究的优点在于，它使我们能够证明解关于应力-驱动数据（$\mathcal{T}$，$\mathcal{G}$，$\mathcal{F}$）和波速 γ 的联合连续性。事实上，我们还可以进一步说明：我们在定理 7.1 和注 7.2 中证明，解映射 (1.5.6) 具有某种形式的连续可微性，甚至具有更高正则性。要对此作出精确表述，就必须谨慎处理与导数损失有关的更多问题，因此，为了简洁起见，我们在定理 1 的表述中省略了这一技术细节。

其次，值得强调的是，当 $n = 2$ 时，我们的定理与当 $n \geqslant 3$ 时所做的略有不同。在 $n \geqslant 3$ 的情形下，假设 (1.1.7) 要求表面张力系数为正，即 $\varsigma > 0$，而我们的分析关键地利用了这一点以及平均曲率算子的椭圆性，以提升 η 的正则性。当 $n = 2$ 时，我们只要求 $\varsigma \geqslant 0$；因为在这种情况下，方程中还内置了另一种提升正则性的机制，即定义在 Σ 上的方程 $\partial_1 \eta = -u \cdot e_n$，当 $n = 2$ 时它是椭圆的，因为此时 ∂_1 作为作用于 $\Sigma \simeq \mathbb{R}$ 上的微分算子是椭圆的。当 $n \geqslant 3$ 时，我们必须处理属于各向异性空间 $\mathcal{H}^{5/2+s}(\mathbb{R}^{n-1})$ 的自由表面函数 η；这些空间严格大于 $H^{5/2+s}(\mathbb{R}^{n-1})$。但当 $n = 2$ 时，我们有 $\mathcal{H}^{5/2+s}(\mathbb{R}) = H^{5/2+s}(\mathbb{R})$，因此我们的解属于标准索伯列夫空间。有趣的是，当 $n = 2$ 时，有一个条件必须比当 $n \geqslant 3$ 时更强；实际上，(1.1.7) 要求体黏度为正

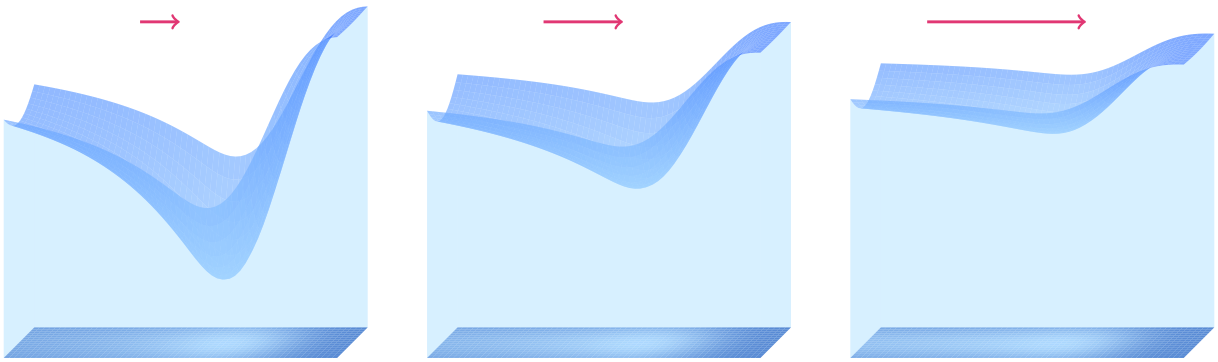

FIGURE 2. 同一应力张量 $\mathcal{T} = -\varphi I_{3\times 3}$ 作用下生成的三个行波自由表面的示意图，其中 $\varphi \geqslant 0$具有紧支集；波速 γ 逐渐增大，并由左向右移动，红色箭头表示这一变化。

体黏度，$\lambda > 0$，当 $n = 2$ 时，而仅当 $n \geqslant 3$ 时才要求 $\lambda \geqslant 0$。这最终与偏差 Korn 不等式的技术问题有关；详情请参见注 A.5。

尽管在精确的函数空间设置方面存在上述维数差异，来自 (1.5.4) 和 (1.5.5) 的空间 $V^0 \cap V_s$ 始终满足该嵌入关系（这得益于命题 B.1 和标准的 Sobolev 嵌入）

$$V^0 \cap V_s \hookrightarrow C_0^{s+k}(\Omega) \times C_0^{s+k+1}(\Omega;\mathbb{R}^n) \times C_0^{s+k+2}(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{1.5.7}$$

对于 $k = 10 + \lfloor n/2 \rfloor$。由于我们的定理保证了包含关系 $(q,\ u,\ \eta) \in V_0 \cap V_s$，我们看到我们的解总是在无穷远处衰减至零，这意味着按照行波文献中的术语，我们的解属于所谓的孤立波。在我们的适定性理论所达到的一般性层面上，关于这些解能够推导出的更多定性信息并不多。然而，针对具体形式的应力-力数据组 $(\mathcal{T},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F})$，我们的结果为开展更为详细的定性研究打开了大门。

我们还要指出，我们的技术只能构造行波解（$\gamma \in \mathbb{R}^+$），而不能构造定常解（$\gamma = 0$）。对 γ 的严格符号条件在我们的分析中起着关键作用，部分原因是它使我们能够在自由表面函数的集合上使用非退化范数。我们所选的泛函框架无法处理 $\gamma = 0$。我们的分析在重力常数方面也遇到了类似问题；事实上，我们只能在 $\mathfrak{g} > 0$ 的情况下构造解。

现在我们转而讨论定理 1 的两个推论。第一个推论将上述关于给定波速 $\gamma \in \mathbb{R}^+$. 时应力-力数据的开集的讨论形式化

推论 2 (已在推论 7.4 中证明)。 与 $r = 10 + 2\lfloor n/2 \rfloor$ 相同，对每个 $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 都存在一个非空开集

$$(0,0,0) \in \mathscr{W}(\gamma) \subset H^{1+r}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n}) \times H^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times H^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \tag{1.5.8}$$

其性质是：对于所有应力-力数据组$(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) \in \mathscr{W}(\gamma)$，都存在唯一的$(q,u,\eta) \in \mathscr{V}(\gamma)$（后一个开集来自定理 *1* 的陈述），使得系统(1.4.9)满足，且其解为(q,u,η)，波速为 γ，数据为$(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})$。

尽管从适定性的角度来看，行波问题的自然表述是在扁平化区域中，如式 (1.4.9) 所示，但我们也可以将解转换回欧拉描述 (1.2.1)。我们在第二个推论中对此作出说明。

推论3 （在推论 7.5 中证明）。 定理 *1* 给出的每个自由边界可压缩 *Navier–Stokes* 行波问题的扁平化可微扰焓公式解，即系统 (1.4.9)，都对应于该问题行波欧拉描述下的一个经典解，其系统为 (1.2.1)。

1.6. 论文策略与结构概述。 本小节旨在概述证明定理 1 时遇到的主要困难，以及我们克服这些困难所采用的策略，同时也将介绍本文的结构。

困难的高层次概述。边值问题 (1.4.9) 定义在一个具有无限测度和非紧边界的无界域中，方程是拟线性的，且不存在变分结构；因此，紧性、Fredholm 理论和变分技术均无法使用。再加上我们预期存在稳健的线性理论，这表明构造解应采用隐函数定理等可微扰技术，或者更根本地，采用基于某种线性化的迭代方案。事实上，近期一项关于 (1.4.9) 不可压版本的研究 [57, 60, 97] 中，针对任意固定波速 $\gamma \in \mathbb{R}^+$，基于应力-力数据和解三元组均为零的平凡解进行方程线性化，并采用隐函数定理策略，取得了成功。因此，我们首先通过陈述 (1.4.9) 的相应线性化来展开讨论：

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varrho u) + \mathfrak{g}^{-1}\varrho' \partial_1 (q + \mathfrak{g}\eta) = g & \text{in } \Omega, \\ -\gamma^2 \varrho \partial_1 u + \varrho \nabla (q + \mathfrak{g}\eta) - \gamma \nabla \cdot \mathbb{S}^{\varrho} u = f & \text{in } \Omega, \\ -(\varrho q - \gamma \mathbb{S}^{\varrho} u) e_n - \varsigma \Delta_{\parallel} \eta e_n = k & \text{on } \Sigma, \\ u \cdot e_n + \partial_1 \eta = 0 & \text{on } \Sigma, \\ u = 0 & \text{on } \Sigma_0, \end{cases} \tag{1.6.1}$$

其中线性化未知量仍标记为 $(q,\ u,\ \eta)$，而线性化数据现在是三元组 $(g,\ f,\ k)$。

熟悉不可压 Stokes 问题椭圆结构的读者会发现，(1.6.1) 的前两个方程中已经出现了一个根本困难：即使忽略 η，或将其视为已知量，这两个方程也不构成 Agmon、Douglis 和 Nirenberg 意义下关于 $(q,\ u)$ 的椭圆系统 [3], ，因为第一个方程中出现了 $\partial_1 q$ 。缺少这一椭圆结构作为分析的基阶，(1.6.1) 是否会导出巴拿赫空间之间的同构便并非显而易见，而这正是扰动策略所必需的要素。值得注意的是，尽管椭圆性失效，我们仍能在定理 6.17 中证明，由 (1.6.1) 定义的正向线性映射 $(q,\ u,\ \eta) \mapsto (g,\ f,\ k)$ 实际上确实在$0,\ 0,\ 0$Sobolev 型 Hilbert 空间 $\mathbb{X}^s$ 与 $\mathbb{Y}^s$ 之间诱导出同构，其中 $s \in \mathbb{N}$，这两个空间分别由 (3.4.36) 和 (3.1.6) 定义。$0,\ 0,\ 0$剖析空间 $\mathbb{X}^s$ 的细节，便会揭示 (1.4.9) 中潜藏的根本困难，并说明我们整体策略的缘由。

粗略看一下空间 $\mathbb{X}^s$ 和 $\mathbb{Y}^s$ 便可^{0,0,0}发现，若形式上将 q 视为不可压缩问题中的压力，则正则性计数基本与不可压缩问题相符：在定义域空间中，若 q具有 $1+s$ 阶导数，则 u 具有 $2+s$，而 η 具有 $5/2+s$；在陪域中， g 具有 $1+s$ 阶导数， f 具有 s，而 k 具有 $1/2+s$。然而，仔细考察后会发现，这些空间及这一计数方案存在两个关键难点。第一个难点在不可压缩问题的分析中就已存在：作用于 (1.6.1) 中 η 的算子结构只允许我们得到以下估计

$$\Delta_{\parallel} \eta \in H^{1/2+s}(\mathbb{R}^{n-1}), \nabla_{\parallel} \eta \in H^{s}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^{n-1}), \text{ and } \partial_1 \eta \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{1.6.2}$$

其中 $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ 由 (1.7.4) 定义，但这不足以保证一般 n 下的包含关系 $\eta \in H^{5/2+s}(\mathbb{R}^{n-1})$。相反，正如我们在命题 B.4 中证明的，这些包含关系实质上刻画了各向异性包含关系 $\eta \in \mathcal{H}^{5/2+s}(\mathbb{R}^{n-1})$。要点是，各向异性空间通过微分算子的结构（以及通过正性 $\mathfrak{g} > 0$ 和 $\gamma > 0$，它们给出了 (1.6.2) 中后两个估计）与行波问题密不可分。第二个困难更为严重，也是可压缩问题中特有的新问题：仅仅知道

$q \in H^{1+s}(\Omega)$、 $u \in H^{2+s}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 和 $\eta \in \mathcal{H}^{5/2+s}(\mathbb{R}^{n-1})$，还不足以保证 $g \in H^{1+s}(\Omega)$。据此，(1.6.1) 中的连续性方程只能推出 $g \in H^s(\Omega)$。为了获得更高正则性的包含关系 $g \in H^{1+s}(\Omega)$，我们必须在定义域空间 $\mathbb{X}^s_{0,0,0}$ 中加入额外条件 $\partial_1 q \in H^{1+s}(\Omega)$；反过来，有了 $g \in H^{1+s}(\Omega)$，我们便能够通过线性化连续性方程恢复 $\partial_1 q \in H^{1+s}(\Omega)$。这正是空间 $\mathbb{X}^s$ 上的 0,0,0 修饰$_{0,0,0}$实际表示的含义：该空间中的 q 元素具有某种“额外部分正则性”，其精确形式由平凡三元组 $(0,0,0)$ 附近线性化算子的结构所决定。额外部分正则性也可以视为问题中各向异性的另一种体现。

(1.6.1) 诱导出同构 $\mathbb{X}^s \ni (q, u, \eta) \mapsto (g, \overset{0\,0\,0}{f}, k) \in \mathbb{Y}^s$ 这一事实固然令人鼓舞，但实际上它揭示了非线性问题 (1.4.9) 中一个更深层次的困难。事实上，如果我们试图将 (1.4.9) 表述为某个空间上的非线性映射问题，其中$_{0,\,0,\,0}(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^s$，那么我们会立即发现，非线性项会使额外部分正则性丧失。更具体地说：任何试图通过基于 (1.6.1) 中同构的迭代方案求解 (1.4.9) 的做法，都会遭受导数损失，使该方案无法奏效。

这一同构问题实际上更具普遍性。我们还在定理 6.17 中证明，对于任意足够小的三元组 (q_0, u_0, η_0)，围绕 (q_0, u_0, η_0) 对 (1.4.9) 在 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0$和 $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 处进行线性化，会诱导出同构 $\mathbb{X}^s_{q_0,u_0,\eta_0} \ni (q,u,\eta) \mapsto (g,f,k) \in \mathbb{Y}^s$；此处，「适配空间」$\mathbb{X}^s_{q_0,u_0,\eta_0}$编码了向量场 v_{q_0,u_0,η_0}的额外部分正则性 $v_{q_0,u_0,\eta_0} \cdot \nabla q \in H^{1+s}(\Omega)$，该向量场由线性化位置 (q_0, u_0, η_0) 决定（该域在 (0, 0, 0) 处与 e_1 共线）。这同样可以看作某种各向异性，但现在显然，偏好的方向取决于背景三元组 (q_0, u_0, η_0)。这些一般的适配空间面临着上述相同的问题：非线性项会使额外正则性丧失，导致任何迭代方案都出现导数损失。非线性项无法保持适配空间，最终可归因于额外正则性并非可微扰的：我们无法利用对 $v_{q_0,u_0,\eta_0} \cdot \nabla q$的控制，推断出关于一般不同三元组 (q_i, u_i, η_i) 且 $i \in \{0,1\}$时的 $v_{q_1,u_1,\eta_1} \cdot \nabla q$ 的任何有用信息。换句话说，一般而言，适配空间 $\mathbb{X}^s$ 和 $\mathbb{X}^s$ 并不等价。

尽管这些问题排除了使用初等扰动技术的可能性，但它们也揭示了更精妙的 Nash-Moser 技术可能具有的效用。事实上，对于任意适当的三元组 (q_0, u_0, η_0)，都有自然的包含关系 $\mathbb{X}^{s+1} \hookrightarrow \mathbb{X}^s_{q_0,u_0,\eta_0}$，其中前一个空间由 (3.1.3) 定义，且不包含任何位置特定的额外正则性。这表明，我们可以在一个由 s 索引的空间尺度上提出 (1.4.9) 中的非线性映射，其中陪域涉及 $\mathbb{Y}^s$，但为补偿导数损失，定义域尺度会发生偏移，并要求 $(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^{s+1}$。

上述同构结果因此表明，映射 $\mathbb{Y}^s \ni (g, f, k) \mapsto (q, u, \eta) \in \mathbb{X}^s \hookrightarrow \mathbb{X}^s_{q_0,u_0,\eta_0}$ 将使我们能够构造该非线性映射的导数的右逆和左逆，前提是我们将视野扩展到巴拿赫空间尺度，并接受导数损失这一现实。这正是 Nash-Moser 技术 [81, 80], 所处理的范畴，因此我们选择它作为证明定理 1 的工具。

纳什–莫泽框架。 研究 (1.4.9) 的目标不仅是证明解的存在唯一性，还要建立适当的适定性理论，证明解在最优拓扑下连续依赖于数据。据我们所知，文献中仅有 Sergeraert [93] 和 Hamilton [40], 的 Nash-Moser 逆函数定理具备这一能力；事实上，它们还能推出逆映射的光滑性。Sergeraert 和 Hamilton 的 Nash-Moser 定理适用于 Fr´echet 空间之间的光滑驯性映射。粗略来说，可以将驯性理解为与映射的导数相关的一族结构化估计

；这些界对于利用 Newton方法的修改来克服证明满射性时的导数损失至关重要。这些定理中作为非线性算子定义域和值域的 Fr´echet 空间，可以看作巴拿赫尺度中所有空间的交（例如 $H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H^k(\mathbb{R}^n)$，相对于巴拿赫尺度 $\{H^k(\mathbb{R}^n)\}_{k\in\mathbb{N}}$）。Sergeraert 和 Hamilton 的 Nash-Moser 变体的假设要求满足若干条件，其中包括存在一族将导数映射到定义域 Fr´echet 空间的右逆。遗憾的是，由于连续性方程的行波表述中出现的双曲结构不具备拟椭圆性，最终导致在我们的情形下只能验证：在平凡解的某个开邻域内，导数的逆映射只能映入巴拿赫尺度中的有限正则性空间，因此无法满足 Sergeraert 或 Hamilton 表述的基本假设。

文献中有一些 Nash-Moser 定理允许这种有限可逆性范围。据我们所知，最早的一个见于 Schwartz [90, 91], 的工作，但它仅针对一种非常特殊的巴拿赫尺度进行表述，所得解位于非最优空间中，而且没有正则性提升机制。H¨ormander [42, 43, 44] 提出的版本适用于一般的巴拿赫尺度，并在相应的“弱巴拿赫尺度”中给出最优或近乎最优空间内的解；在某些情况下，该尺度与原尺度一致（例如 H¨older 尺度），但一般而言会稍大一些（例如，若原尺度是 Sobolev 尺度 $\{H^k(\mathbb{R}^n)\}_{k\in\mathbb{N}}$，那么弱尺度就是更大的贝西科夫尺度$\{B^k_{2,\infty}(\mathbb{R}^n)\}_{k\in\mathbb{N}}$）。这一结果同样没有正则性提升机制。Baldi 和 Haus [5] 最近提出的 Nash-Moser 定理则能在最优空间中给出解，并且具有正则性提升机制。众所周知，Nash-Moser 技术通过采用一族满足大量精确量化估计的平滑算子，克服了导数损失问题。Baldi 和 Haus 通过对这些平滑算子施加比其他 Nash-Moser 表述更严格的条件，实现了这一重大改进；这使他们能够将 Littlewood–Paley理论和拟微分演算中的技术引入抽象框架。

在我们采用的函数空间背景下，构造满足例如 H¨ormander 的纳什-莫泽定理 [43]的假设的平滑算子相对容易。然而，在我们的背景下，要证明这些算子满足 Baldi 和 Haus [5]更强的假设则相当微妙。我们没有把精力集中于这一构造，因为它主要适用于我们所研究的具体问题，而是选择采用一种更一般、更抽象的方法。这种方法是对 Hamilton [40], 定义的温和弗雷歇空间概念的巴拿赫尺度推广，我们认为它或许也能用于其他问题。粗略地说，其思路是将给定的一列巴拿赫空间视为另一列巴拿赫空间的收缩；前者中构造平滑算子很困难，甚至不可能，而后者中已知存在这样的平滑算子。在巴拿赫空间的情形下，我们可以把收缩性质理解为前一列空间是后一列空间的直和项，或可补子空间。我们强调，这一思路并非将平滑算子拉回初始尺度，而是将非线性映射向前推至更大的尺度。因此，从某种意义上说，我们的方法将关注点从构造平滑算子转向识别直和项结构，而后者更适合采用偏微分方程技术。

鉴于上述讨论，我们决定另行构建一个抽象纳什-莫泽逆函数定理版本，综合 Sergeraert、Hamilton 以及 Baldi 和 Haus 表述中所需的要素。该版本能够适用于我们的有限可逆范围情形，在最优空间中给出解，提供正则性提升机制，并为逆映射提供一定程度的正则性，尤其是给出在最优强范数下的连续性断言。我们采用直和项方法，避开了平滑算子的构造。这个新的纳什-莫泽表述，其精确陈述见定理 2.21 和 2.24，是证明定理 1 的关键；但我们认为，由于其假设具有灵活性且结论有所改进，它很可能具有更广泛的价值和适用性。更多说明请参见第 2 节。

有了我们的 Nash-Moser 变体，证明定理 1 的策略便可简述如下：将定理的结论编码为与系统 (1.4.9) 相关的非线性映射的性质，使这些性质能够由我们的 Nash-Moser 逆函数定理保证，然后验证 Nash-Moser 的假设。这些假设在定义 2.20 和定理 2.21 中有精确陈述，分为非线性和线性两类。对于前者，我们需要验证非线性算子满足某些可微性条件，且其导数满足某些温和估计。在线性层面，我们需要研究 (1.4.9) 在零的某个开邻域内一般三元组 $(q_0,\ u_0,\ \eta_0)$ 附近的线性化；特别是，需要构造这些导数的左逆和右逆族，并验证它们也满足一组温和估计。

图 3 展示了本文实施该策略时各部分依赖关系的逻辑流程。灰色框对应第 2 节中的抽象非线性分析，最终以反函数定理告终。绿色框对应非线性分析的主要内容，详见第3节。蓝色框展示了线性分析策略，该策略随后在第4、5和6节中得到实施。最后，在底部，红色框代表我们的结论以及对定理 1 的最终证明，详见第7节。

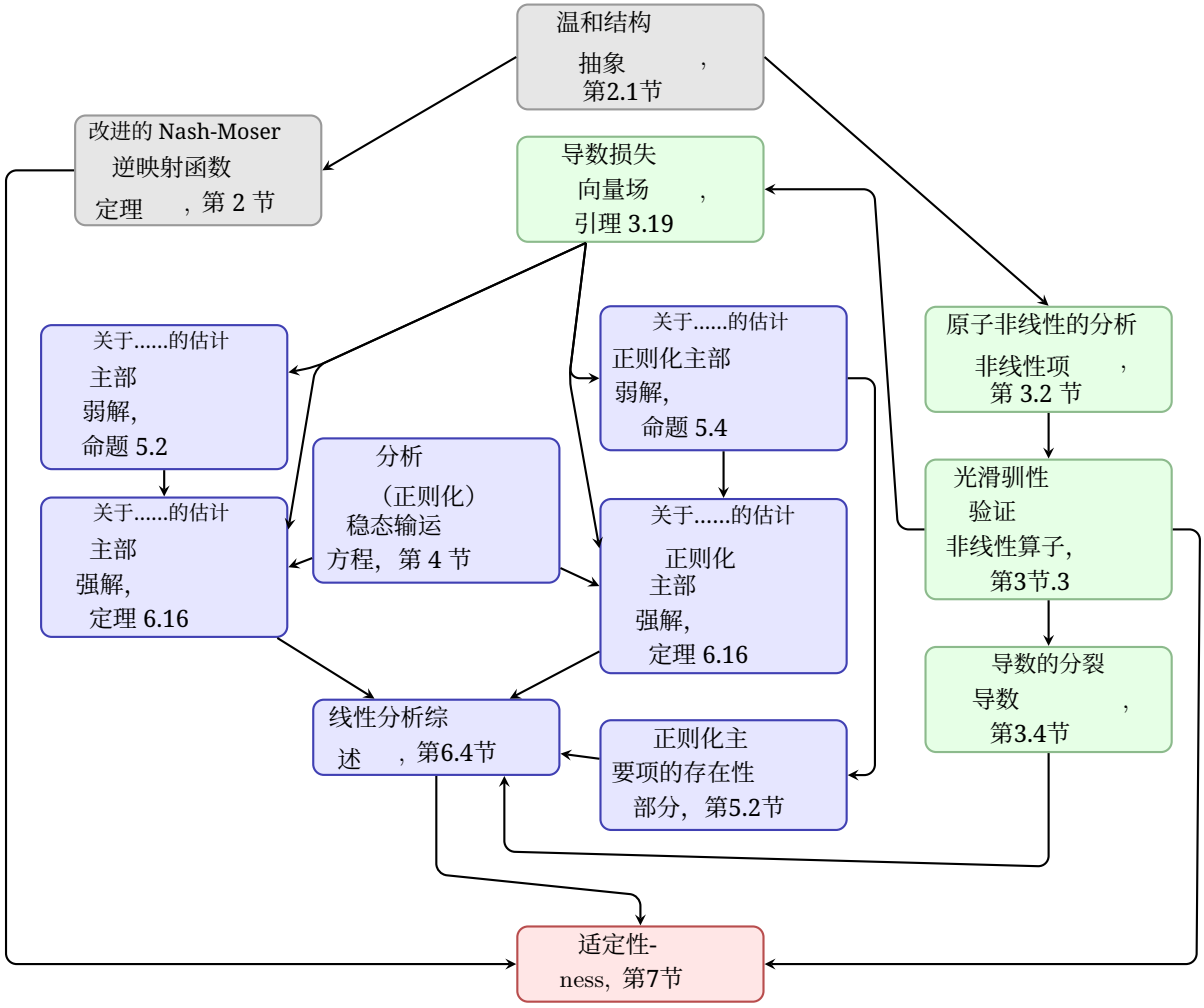

FIGURE 3. 本文的逻辑流程

非线性分析。我们的抽象非线性分析从第 2 节开始，研究巴拿赫空间尺度之间可微映射的温和结构。这些空间尺度构成了我们纳什-莫泽定理的基本

框架。与 Sergeraert [93] 和 Hamilton [40]的框架不同，我们在有限正则性背景下，并在可能为有限的巴拿赫尺度上研究驯性，而非在 Fr´echet 空间上。我们为这类映射建立了一套微积分理论，证明它们在求和、乘积和复合等各种运算下保持闭合。这些结果对于随后验证 Nash-Moser 逆函数定理的“非线性假设”至关重要。完成这些工作后，我们便陈述并证明反函数定理的一个版本。

在第3.1节中，我们精确定义与系统 (1.4.9) 相关的非线性算子，即由 (3.3.1) 定义的 Ψ ，并构造作为其区域和陪域的巴拿赫尺度。我们在引理 3.2 中验证，区域巴拿赫尺度是驯性的，而陪域巴拿赫尺度是区域的一个驯性直和项。随后，我们尝试检验 Ψ 是驯性二次连续可微的，且导数损失为一阶。在标准的 Sobolev 框架下，借助现成工具，大致就能完成这项工作。遗憾的是，在我们的情形中，自由表面函数 η 属于各向异性空间 $\mathcal{H}^{5/2+s}(\mathbb{R}^{n-1})$，而它们在 (1.4.9) 的非线性项中无处不在，因此需要进行更加精细且针对性更强的分析。为使这项任务不那么艰巨，我们首先在 Ψ 中找出若干较简单的“原子”非线性项，以便分别加以分析。

在很大程度上，这些原子项通过附录D.2中的初等高低频估计来处理，并结合温和结构抽象中的一些结果。我们强调，选择焓形式意味着构成动量方程的原子项全都属于这种形式。相比之下，(1.4.9) 中连续性方程产生的非线性项，即

$$(q,u,\eta)\mapsto \Xi(q,u,\eta)=\nabla\cdot(\sigma_{q,\eta}(u-M_\eta e_1)), \tag{1.6.3}$$

则要微妙得多，需要更精细的思想。这里的主要困难在于，我们的函数空间框架要求

$$\int_0^b \Xi(q,u,\eta)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{1.6.4}$$

其中 $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ 由 (1.7.4) 定义。乍看之下，这个包含关系似乎可由恒等式直接推出

$$\int_0^b \Xi(q,u,\eta)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y=(\nabla_\parallel,0)\cdot\int_0^b(\sigma_{q,\eta}(u-M_\eta e_1)+\varrho e_1)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y, \tag{1.6.5}$$

但仔细考察便会发现，由于各向异性空间的存在，右侧散度中的积分自变量一般并不属于 $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$。为解决这一问题，我们结合引理 3.9 中精妙的向量场分解，采用引理 3.8 中的“泰勒展开技巧”。这些方法的关键在于各向异性空间所具有的若干非平凡代数性质。

随后，我们将对原子非线性项的分析与对温和结构的分析结合起来，从而完成对反函数定理中大多数“非线性假设”的验证。这一点在定理 3.17 中完成。

主部识别。 接下来，我们将展示非线性结果的一些应用，以更简单的形式建立线性分析。正如上文所述，我们将线性层面上导数损失的表现识别为线性化连续性方程中的向量场v_{q_0,u_0,η_0}。引理 3.19 列举了这个导数损失向量场的相关性质。基于这一认识，我们可以对非线性算子 Ψ 进行‘导数分裂’，将其写成$D\Psi = D\Psi_{\mathrm{prin}} + D\Psi_{\mathrm{rem}}$的形式，其中线性算子 $D\Psi_{\mathrm{prin}}$ 是‘主部’，而 $D\Psi_{\mathrm{rem}}$ 是可微扰的余项。与主部算子 $D\Psi_{\mathrm{prin}}$ 相关联的是以下主部

偏微分方程组，其线性化未知量为 (q,u,η)，给定数据为 (g,f,k)，波速为 $\gamma\in\mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\varrho u)+\nabla\cdot(v_{q_0,u_0,\eta_0}(q+\mathfrak{g}\eta))=g & \text{in }\Omega,\\ -\gamma^2\varrho\partial_1 u+\varrho\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)-\gamma\nabla\cdot\mathbb{S}^{\varrho}u=f & \text{in }\Omega,\\ -(\varrho q-\gamma\mathbb{S}^{\varrho}u)e_n-\varsigma\Delta_{\parallel}\eta e_n=k & \text{on }\Sigma,\\ u\cdot e_n+\partial_1\eta=0 & \text{on }\Sigma,\\ u=0 & \text{on }\Sigma_0.\end{cases}\tag{1.6.6}$$

这种分裂带来了两项关键益处。首先，问题 (1.6.6) 在保留全部导数损失信息的同时，与围绕平凡背景项的线性化（即 (1.6.1)）尽可能接近。其次，线性化的余项部分不存在导数损失，并且在实质上足够小，因而可以用可微扰的方法处理。关于这种导数分裂的精确细节，请参见命题 3.21 和 3.22。由于进行了这种细致的分裂，我们实际上将大部分线性分析归结为对这一族主部线性方程 (1.6.6) 的研究。

线性分析。 现在我们讨论验证 Nash-Moser 逆函数定理中“线性假设”的策略。大部分工作都致力于研究主部系统 (1.6.6)，其中 $v_{q_0,\ u_0,\ \eta_0}$ 取自零的一个开邻域中的一般背景三元组 $(q_0,\ u_0,\ \eta_0)$，特别是证明它诱导出前述

$_{q_0,u_0,\eta_0}$同构 $\mathbb{X}^s\ \ni(q,u,\eta)\mapsto(g,f,k)\in\mathbb{Y}^s$ 并满足相关的温和估计。这里的根本困难与（1.6.1）中的相同，即 q 和 u的基阶斯托克斯系统缺乏椭圆性；事实上，应将（1.6.6）视为椭圆型（拉梅型和平均曲率型）算子与双曲型（稳态输运型）算子的一个不理想结合，而这两类算子各自的正则性理论彼此不兼容，若不付出相当大的努力，似乎无法将它们结合起来。为处理系统（1.6.6）中固有的困难，先将估计问题与存在性问题分开处理，并在最后时刻再将二者结合起来，是很方便的。

这一策略的关键是在（1.6.6）中引入一个正则化项，使椭圆部分能够更好地与双曲型稳态输运部分衔接。不幸的是，在（1.6.6）的连续性方程中对稳态输运项应用平滑算子的自然方法在 Ω 中效果并不理想：保持良好椭圆能量结构的算子似乎缺乏良好的交换子，因而无法给出高正则性估计；而具有良好交换子的算子似乎又无法保持能量结构。因此，我们不得不采用椭圆正则化，用下列系统替换系统（1.6.6）：

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\varrho u)+\tau\nabla\cdot(v_{q_0,u_0,\eta_0}(q+\mathfrak{g}\eta))+N^{-1}L_m(q+\mathfrak{g}\eta)=g & \text{in }\Omega,\\ -\gamma^2\varrho\partial_1 u+\varrho\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)-\gamma\nabla\cdot\mathbb{S}^{\varrho}u=f & \text{in }\Omega,\\ -(\varrho q-\gamma\mathbb{S}^{\varrho}u)e_n-\varsigma\Delta_{\parallel}\eta e_n=k & \text{on }\Sigma,\\ u\cdot e_n+\partial_1\eta=N^{-1}(-\Delta_{\parallel})^{m-1/4}\eta & \text{on }\Sigma,\\ u=0 & \text{on }\Sigma_0,\\ \partial_n^m q=\cdots=\partial_n^{2m-1}q=0 & \text{on }\partial\Omega,\end{cases}\tag{1.6.7}$$

其中，正则化参数为 N^{-1}，对于 $N\in\mathbb{N}^+$，L_m 是 $2m^{\text{th}}$ 阶线性椭圆微分算子

$$L_m=(-1)^m\sum_{j=1}^{n}\partial_j^{2m},\tag{1.6.8}$$

$(-\Delta_{\parallel})^{m-1/4}$ 是定义在 $\Sigma\simeq\mathbb{R}^{n-1}$上的拉普拉斯算子的标准分数幂，$m\in\mathbb{N}^+$ 是可调的正则性参数，而 $\tau\in[0,1]$ 是算子同伦参数（$\tau=1$ 对应于对 (1.6.6) 的正则化）。注意，针对 q 记录的诺伊曼边界条件出现在

(1.6.7) 的最后一个方程中，相较于 (1.6.6) 是新增的；这些条件的出现是由于我们引入了L_m，但诺伊曼条件的具体选择在后文起着关键作用。

椭圆正则化 (1.6.7) 有诸多益处。首先，(1.6.7) 的定义域空间为 $\mathbb{X}^s_{m,N}$，如 (3.5.7) 所定义。至关重要的是，该空间独立于背景三元组 (q_0, u_0, η_0)，但连续嵌入到依赖于背景项的空间 $\mathbb{X}^s$。因此，该空间非常适合采用基于连续性方法的论证，将可解性理论从 q_0,u_0,η_0 $\tau = 0$ 延拓到 $\tau = 1$；这正是我们真正关心的问题形式。其次，正则化算子在提供相对简单的正则性提升机制的同时，保留了原问题 (1.6.6) 的能量结构。第三，也可能是最重要的一点，它们与推导高正则性下独立于 N–的估计相容；我们将利用这些估计在 $q_0、u_0、\eta_0$ $\mathbb{X}^s$ 通过弱紧性论证。需要注意的是，在此过程中，我们始终需要 $m \geqslant 1 + s$，以确保方程 (1.6.7) 中针对 q 的人工诺伊曼条件不会传递到极限中。当然，正则化也有其弊端；要处理它引入的技术性难题，需要付出相当多的工作。现在，我们将更详细地说明如何利用 (1.6.7) 完成线性分析。

我们同时研究主部及其正则化的先验估计；对于前者，目标是建立所需的温和估计；对于后者，目标则是得到与正则化N–无关的高正则性估计，而关于背景元组（q_0，u_0，η_0），只要求满足较弱形式的驯性。主部分析从弱解的估计入手，这些估计通常可以按标准方法证明，唯一的技术难点是涉及各向异性 Sobolev 空间中元素的某些非线性表达式。更多细节见命题 5.2。得到弱解估计后，我们转而研究强解的高正则性估计。这里的思路是利用这样一个事实：对系统 (1.6.6) 求切向导数不会改变方程的基本结构；因此，我们可以运用弱解估计，像定理 6.5 中那样得到这些切向导数的界。在控制住切向导数之后，还需要恢复对法向导数（即竖直导数）的控制。为此，我们采用 Matsumura 和 Nishida [75], 最初针对带狄利克雷边界条件的固定区域所发展的经典技巧的一个版本，以揭示密度法向导数中微妙的耗散结构。结合对稳态输运方程的补充分析（见命题 4.4），便可仅用数据和切向微分后的解来估计解的高阶范数。这一结果记载于定理 6.15 的第一个结论中。综合以上结果，我们进而推出定理 6.16 的第一个结论，即主部方程所需的先验估计。

正则化问题 (1.6.7) 的先验估计策略从总体上看与之前相似，但论证的具体细节却大不相同。我们再次先证明弱解的先验估计，然后研究切向微分后的解所满足的方程：分别参见命题 5.4 和定理 6.5 的第二个结论。用于推导正规系统估计的方法，即定理 6.15 的第二个结论，由于必须对正则化稳态输运方程进行分析，现在与主部情形所采用的方法有了实质性差异。正是在这里，正则化 L_m 起到了负面作用，而非积极作用。事实上，要推导出对 N 具有良好依赖性的估计在技术上颇为微妙，需要非常谨慎地使用与 L_m 相关的双线性型，以及施加在 q上的精确诺伊曼边界条件。第 4 节的大部分内容都致力于这种正则化输运分析。最终，我们得到关于 N 一致的估计，正如定理 6.16 的第二个结论所述。

通过首先在定理 5.5 中建立弱解的存在性，发展了对所有 $\tau \in [0, 1]$ 的正则化问题 (1.6.7) 的存在性理论。证明采用连续性方法，依据命题 5.4 中的先验估计以及一个针对含有 $\tau = 0$ 的问题的存在性结果；而该结果本身还需要进一步进行双参数正则化并建立紧性

论证。随后通过椭圆正则性论证，在推论 5.6 中将弱解提升为强解。我们强调，尽管该结果表明 (1.6.7) 诱导了一个同构，但它并未建立 $N-$ 一致估计。随后，利用正则化存在理论、 $N-$ 一致先验估计以及另一个弱极限论证，建立主部问题 (1.6.6) 的存在性理论。这就是定理 6.17。

在线性分析的总结中，我们将帮助识别主部方程的工作（即导数分解）与前文讨论的关于估计和存在性的主部分析结合起来。这就是定理 6.18 中线性分析结果的综合。

最后，我们就线性策略作几点说明。首先要强调的是，对于 (1.6.6)，我们的存在性策略有意避开直接提升弱解正则性的做法，转而利用正则化方程 (1.6.7) 的解的弱极限所继承的高正则性。这样做更有优势，因为 (1.6.6) 的椭圆—双曲混合性质给采用标准技术提升正则性（例如有限差分，或磨光与交换子方法）带来了很大的技术困难。我们希望强调的第二个特点是，在这套线性存在理论中处理自由面未知量的方法，与先前关于不可压缩问题 $[60, 97, 57]$ 的工作相比有显著不同，而且更为简单。在那些工作中，自由面未知量仅根据数据构造，通过一个伪微分方程求得，并在仔细进行渐近分析后对该方程的符号求逆。而在我们的工作中，存在性理论完全避开了这些精细的伪微分技术，转而采用正则化、先验估计、弱极限，以及对各向异性 Sobolev 空间 $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 的一种新空间刻画。

结论与附录。 完成非线性和线性分析后，我们便验证了纳什-莫泽定理的假设。随后，我们在定理 7.1 和 7.3 中运用该结果，并辅以少量额外论证，从而完成适定性的证明。

本文其余部分由四个附录组成。附录主要介绍各种分析工具和偏微分方程工具，这些工具针对本文的具体需求进行了定制或优化。不过，其中一些结果似乎是新的，也可能对其他问题具有独立的研究价值。附录 A 汇集了与标准索伯列夫空间相关的工具。附录 B 则讨论本文所用非标准空间的性质，即各向异性空间和适配空间。附录 C 着重介绍偏微分方程工具，尤其是在各种背景下针对特定散度问题的工具。附录 D 则选编了若干非线性分析工具，它们对于我们的抽象温和分析至关重要。

1.7. **记号约定**。 我们提醒读者，本文末尾附有记号索引，其中汇总了全文使用的大量算子、函数空间及其他符号。

我们用 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集、 $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$和 $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$。每当$\alpha \lesssim \beta$ 出现在某个结果中时，它表示存在一个常数 $C \in \mathbb{R}^+$ ，该常数仅依赖于该结果表述中提到的参数，使得 $\alpha \leqslant C\beta$。为强调这种依赖关系，我们有时写作 $\alpha \lesssim_{a,\dots,b} \beta$，以表示参数 $a, \dots, b$。我们还用 $\alpha \asymp \beta$ 表示 $\alpha \lesssim \beta$ 和 $\beta \lesssim \alpha$。我们将使用括号记法

$$\langle x_1, \dots, x_p \rangle = (1 + x_1^2 + \cdots + x_p^2)^{1/2} \tag{1.7.1}$$

表示 $p \in \mathbb{N}^+$ 和 $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$。给定 $x \in \mathbb{R}^d$，我们通常将 $\langle x \rangle = \langle x_1, \dots, x_d \rangle$简写为 U。若V和 $U \Subset V$ 是某些开集，我们写作 U ，表示闭包 $U \subset V$是紧的且。

我们分别用 $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ 和 $\nabla_\parallel = (\partial_1, \dots, \partial_{n-1})$ 表示梯度及其切向对应算子。对于适当的取值于 $\mathbb{R}^n$ 的函数 f，散度算子和切向散度算子分别记为 $\nabla \cdot f = \sum_{j=1}^n \partial_j (f \cdot e_j)$ 和 $(\nabla_\parallel, 0) \cdot f = \sum_{k=1}^{n-1} \partial_k (f \cdot e_k)$。我们还将使用下标“$\parallel$”表示微分算子仅依赖于 $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}$，例如 $\Delta_\parallel = \sum_{\ell=1}^{n-1} \partial_\ell^2$。

若 $\|\cdot\|$ 是赋范空间 $X_1 \times \cdots \times X_q$ 的乘积上的一个范数，我们通常用 $\|x_1, \ldots, x_q\|$ 代替 $\|(x_1, \ldots, x_q)\|$，其中 $x_i \in X_i$ 对于 $i \in \{1, \ldots, q\}$。给定 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$，若递减的巴拿赫空间族 $\{X_s\}_{s\in\Lambda}$ 及其范数 $\{\|\cdot\|_{X_s}\}_{s\in\Lambda}$ 满足：对所有满足 $s_0 < s_1$ 且 $s = (1-\sigma)s_0 + \sigma s_1$ （其中某个 $\sigma \in [0,1]$）的 $s_0, s_1, s \in \Lambda$，都有

$$\|x\|_{X_s} \lesssim_{s_0,s_1,\sigma} \|x\|_{s_0}^{1-\sigma}\|x\|_{s_1}^{\sigma} \text{ for all } x \in X_{s_1}. \tag{1.7.2}$$

设 $k \in \mathbb{N}$ 是开集，V 是有限维实向量空间。对于 $p \in [1,\infty]$，我们用 $W^{k,p}(U; V)$ 表示通常的、以 L^p 为基阶的 k 阶索伯列夫空间，其函数取值于 V；并用 $H^k(U; V) = W^{k,2}(U; V)$ 表示。我们用 $C_b^k(U; V) = C^k(U; V) \cap W^{k,\infty}(U; V)$ 表示，并赋予其显然的范数。空间 $C_0^k(U; V)$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d; V)$ 在 $C_b^k(U; V)$ 中的闭包。我们还用 $C_b^\infty(U; V) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_b^k(U; V)$ 以及 $C_0^\infty(U; V) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_0^k(U; V)$ 表示。类似地，我们用$H^\infty(U; V) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H^k(U; V)$ 以及 $W^{\infty,\infty}(U; V) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W^{k,\infty}(U; V)$ 表示。注意，$W^{\infty,\infty}(U; V) = C_b^\infty(U; V)$。

对于 $S \in \{\Sigma_0, \Sigma\}$，我们用 Tr_S 表示迹算子，它将定义在 Ω 上的适当函数映射到 S 上的函数。$H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 的以下闭子空间经常会用到：

$${}_0H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) = \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) : \mathrm{Tr}_{\Sigma_0}(u) = 0\}. \tag{1.7.3}$$

傅里叶变换记为 $\mathscr{F}$，其归一化方式使其在 L^2 上为酉变换。我们将使用 -1 阶齐次索伯列夫空间，其定义为

$$\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) : \mathscr{F}[f] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}; \mathbb{C}) \text{ and } [f]_{\dot{H}^{-1}} < \infty\} \tag{1.7.4}$$

对应半范数 $[f]_{\dot{H}^{-1}} = \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}|\cdot|^{-1}\mathscr{F}[f]\|_{L^2}$。最后需要强调的是，在处理定义于 Σ 上的函数空间时，我们经常按照规范方式将 Σ 与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 视为相同。

2. A variation on the Nash-Moser inverse function theorem

正如我们在第 1.6 节所述，为证明系统 (1.4.9) 的适定性，我们的策略是采用一种新版本的 Nash-Moser 逆函数定理。本节旨在证明该定理并建立其抽象框架，以便在后续分析中普遍应用。在开始之前，我们先简要概述 Nash-Moser 策略，以及文献中已有的该定理的一些变体。

经典逆函数定理的抽象框架为 C^1 映射 $\Psi : U \to F$，其中 E和 F是巴拿赫空间，$U \subseteq E$是一个开集，并且对某个 $u \in U$，$D\Psi(u) \in \mathcal{L}(E; F)$可逆。典型的证明利用 $D\Psi(u)$的可逆性，通过压缩映射原理证明 Ψ 的局部双射性。特别地，满射性通过Picard迭代方案来证明，该方案关键地使用了映射 $D\Psi(u)^{-1}$。

Nash-Moser 方法旨在处理这样的情形：$D\Psi(u)$ 不可逆，但仍然“近乎可逆”，即它存在一个右逆 $L(u)$，其定义域为 F，但只映射到某个更大的向量空间 $E_0 \supset E$。这种现象通常被称为“导数损失”；因为在实际应用中，E_0 通常由函数构成，而子空间 E 中的函数正则性高于 E_0中的函数。为了充分利用这一点，Nash-Moser 策略将标准反函数定理的适用情形推广到单参数巴拿赫空间尺度之间的映射，例如，对于某个 $S \subseteq \mathbb{R}$，设尺度为 $\{E^s\}_{s\in S}$ 和 $\{F^s\}_{s\in S}$。粗略地说，可以将参数 s 视为衡量空间元素正则性的指标。于是要求沿整个尺度的导数损失是一致的，即 $D\Psi$ 将 $E^{s+\mu}$ 映射到 F^s，其中 $\mu > 0$ 衡量导数损失的程度；但其右逆 L （现在要求它在某个适当开集的整个范围内存在）只将 F^s 映射到 E^s。示意图见图 4。Nash [81], 提出了一个深刻的思想，后来由 Moser [80], 进一步发展：不是通过 Picard 迭代来建立局部满射性（由于导数损失，这种方法行不通），而是采用基于 Newton方法的迭代方案，并使用一族能沿巴拿赫尺度提高正则性的平滑算子。Newton方法的极快收敛速度

是使导数损失与平滑算子相互配合所必需的；为了恰当地实现这一思想，还需要对映射和平滑算子作出各种精确的定量估计。

上述方法极具灵活性且可定制，因此与其说它是一条具体定理，不如说是一种策略。事实上，文献中出现了许多纳什-莫泽定理的变体。其中大多数实际上是局部满射定理，而非完整的反函数定理；完整的反函数定理还必须证明单射性，以及诱导的局部逆映射的连续性或更高正则性。据我们所知，文献中也有少数例外。Sergeraert [93] 和 Hamilton [40] 通过在更严格的 Fr´echet 空间之间的光滑驯性映射这一框架下进行研究，证明了逆映射的光滑性。Berti、Bolle 和 Procesi [10] 研究了一个带参数的隐函数定理，并且只证明了局部解映射关于有限维参数空间的连续可微性。Ekeland [30] 以及 Ekeland 和 S´er´e [31]证明了一个反函数定理，并据此推导出一些次优的逆映射 Lipschitz 估计。

遗憾的是，针对（1.4.9）的适定性问题无法应用上述任何结果，因此我们努力发展了一种新的 Nash-Moser 逆函数定理，使其适用于我们的问题，能在最优空间中产生解，提供正则性提升机制，并为逆映射提供最优连续性，甚至给出一些更高正则性结果。我们的方法是综合 Hamilton [40] 的思想与 Baldi 和 Haus [5], 的迭代方案；后者改进了 H¨ormander [42, 43, 44] 的结果，并采用了 Littlewood–Paley理论中的思想。

与标准反函数定理相比，Nash-Moser 变体的假设复杂得多，但从整体上看仍然相似。要保证非线性算子存在局部逆，需要验证：1）该非线性算子定义在驯性巴拿赫空间尺度上；2）该算子是温和的 C^2，且导数损失固定；3）该算子的导数在某个点的开邻域内存在驯性逆算子族。由于所有这些假设都涉及形容词“温和”，我们在第2.1节中定义驯性结构，并发展驯性映射微积分。完成这一步后，我们在第 2.2 节陈述本版本 Nash-Moser 逆函数定理的精确假设和结论。随后，在第 2.3、2.4 和 2.5 节中，我们分几个部分证明该定理。对于希望将反函数定理视为“黑箱”并更快转入偏微分方程（1.4.9）分析的读者，我们建议先阅读抽象温和结构及 Nash-Moser 定理的陈述，暂时跳过第 2.3、2.4 和 2.5 节。

2.1. **温和结构抽象**。 本小节首先讨论巴拿赫空间尺度之间的温和映射。本文的阐述主要受 Hamilton [40] 以及 Baldi 和 Haus [5]的启发。我们首先关注巴拿赫空间尺度，并从用于为其编制索引的一些记号开始。

定义 2.1 ($\mathbb{N}$的子集)。 给定 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，我们定义 $[\![N]\!] \subseteq \mathbb{N}$为集合 $[\![N]\!] = \{n \in \mathbb{N} : \quad n \leqslant N\}$。

现在我们定义巴拿赫空间尺度。

定义 2.2 (巴拿赫尺度)。 设 $N \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$，并设 $\mathbf{E} = \{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 为一族定义在某个公共域上的巴拿赫空间，该域可以是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。

(1) 如果对每个 $s \in [\![N-1]\!]$，都有非扩张包含关系 $E^{s+1} \hookrightarrow E^s$，即 $\|\cdot\|_{E^s} \leqslant \|\cdot\|_{E^{s+1}}$，我们就称 $\mathbf{E}$ 为巴拿赫尺度。*(2)* 如果 $\mathbf{E}$ 是巴拿赫尺度，我们将该尺度的终端空间定义为 $E^N = \bigcap_{s\in[\![N]\!]} E^s$，并赋予其由范数族 $\{\|\cdot\|_{E^s}\}_{s\in[\![N]\!]}$诱导的弗雷歇拓扑。注意，如果 $N < \infty$，那么 E^N 继承其范数所诱导的标准巴拿赫拓扑。

(3) 如果 $\mathbf{E}$ 是巴拿赫尺度，我们用 $B_{E^r}(u,\delta)\subseteq E^r$ 表示以 $u\in E^r$为中心、半径为 $\delta>0$的 E^r-开球。*(4)* 如果 $\mathbf{E}$ 是巴拿赫尺度，且对每个 $s\in[\![N]\!]$，E^N 在 E^s 中稠密，我们就称 $\mathbf{E}$ 为终端稠密。

我们注意到，有限巴拿赫空间尺度对应于此定义中的情形 $N\in\mathbb{N}$。接下来，我们简要说明巴拿赫尺度的乘积。

注 2.3（巴拿赫尺度的乘积）。设 $\mathbf{E}_i=\{E_i^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是 $i\in\{1,\dots,n\}$上的巴拿赫尺度，且各尺度都定义在同一个域上。则 $\mathbf{F}=\prod_{i=1}^n\mathbf{E}_i=\{\prod_{i=1}^n E_i^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 在每个 $\prod_{i=1}^n E_i^s$ 赋予范数

$$\|u_1,\dots,u_n\|_{\prod_{i=1}^n E_i^s}=\Big(\sum_{i=1}^n\|u_i\|_{E_i^s}^2\Big)^{1/2}. \tag{2.1.1}$$

现在，我们将在下一个定义中考虑巴拿赫尺度之间的温和映射。

定义 2.4（驯性映射）。设 $\mathbf{E}=\{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 和 $\mathbf{F}=\{F^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是定义在同一个域上的巴拿赫尺度，μ，$r\in[\![N]\!]$其中 $\mu\leqslant r$，$U\subseteq E^r$是一个开集，且 $P\colon U\to F^0$。

(1) 如果对所有 $[\![N]\!]\ni s\geqslant r$，都存在一个常数 $C_s\in\mathbb{R}^+$，使得对所有$f\in U\cap E^s$，包含关系 $P(f)\in F^{s-\mu}$成立，并且满足估计，那么我们称 P 满足阶数为 μ、基阶为 r 的温和估计（相对于巴拿赫尺度 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$）。

$$\|P(f)\|_{F^{s-\mu}}\leqslant C_s\langle\|f\|_{E^s}\rangle, \tag{2.1.2}$$

其中，$\langle\cdot\rangle$ 由(1.7.1)定义。

(2) 如果对每个 $f\in U$，都存在一个 E^r-开集 $V\subseteq U$，使得 $f\in V$，且限制映射 $P\restriction V\colon V\to F^0$ 满足阶数为 μ、基阶为 r的温和估计，那么我们称 P 是以 r 为基阶的 μ-温和映射。

(3) 如果在每个 E^r-开有界子集 $V\subseteq U$上，限制映射 $P\restriction V$ 都满足阶数为 μ、基阶为 r的温和估计，那么我们称 P 是以 r 为基阶的强 μ-温和映射。

(4) 我们称 P 是（强）μ-温和的 C^0，基阶为 r，如果 P 是（强）μ-温和的，基阶为 r，并且对于每个 $[\![N]\!]\ni s\geqslant r$，都有 $P\colon U\cap E^s\to F^{s-\mu}$ 是从 E^s 到 $F^{s-\mu}$ 的连续映射。此类映射的集合分别记为 $T^0_{\mu,\,r}(U,\,\mathbf{E};\,\mathbf{F})$ 和 ${}_sT^0_{\mu,\,r}(U,\,\mathbf{E};\,\mathbf{F})$。

(5) 对于 $k\in\mathbb{N}^+$，我们称 P 是（强）μ-温和的 C^k，基阶为 r，如果对于所有 $[\![N]\!]\ni s\geqslant r$，映射 $P\colon U\cap E^s\to F^{s-\mu}$ 是 C^k，并且对于所有 $j\in\{0,1,\dots,k\}$，将导数映射视为映射 $D^jP\colon U\times\prod_{\ell=1}^j E^r\to F^0$ 时，它关于巴拿赫尺度 E^{1+j} 和 F 是（强）μ-温和的，基阶为 r。换言之，$D^jP\in T^0_{\mu,\,r}(U\times\prod_{\ell=1}^j E^r,\,E^{1+j};\,F)$，或者在强情形下，$D^jP\in{}_sT^0_{\mu,\,r}(U\times\prod_{\ell=1}^j E^r,\,E^{1+j};\,F)$。此类映射的集合分别记为 $T^k_{\mu,\,r}(U,\,E;\,F)$ 和 ${}_sT^k_{\mu,\,r}(U,\,E;\,F)$。

(6) 我们用 $T^\infty_{\mu,r}(U,E;F)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}T^k_{\mu,r}(U,E;F)$ 和 ${}_sT^\infty_{\mu,r}(U,E;F)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}{}_sT^k_{\mu,r}(U,E;F)$ 表示具有基阶 r 的（强）μ-温和 C^∞ 映射的集合。*(7)* 当 $U=E^r$ 时，我们通常使用简写记号 $T^k_{\mu,r}(E,F)$ 和 ${}_sT^k_{\mu,r}(E;F)$，分别代替 $T^k_{\mu,r}(E^r,E;F)$ 和 ${}_sT^k_{\mu,r}(U,E;F)$。

以下结果给出了映射中存在多重线性结构时对驯性的一个有用刻画。

引理 2.5（多重线性与驯服映射）。设 $k\in\mathbb{N}^+$和 r，$\mu\in[\![N]\!]$满足 $\mu\leqslant r$。设$\mathbf{F}=\{F^s\}_{s\in[\![N]\!]}$、$\mathbf{G}=\{G^s\}_{s\in[\![N]\!]}$和 $\mathbf{E}_j=\{E_j^s\}_{s\in[\![N]\!]}$，对 $j\in\{1,\dots,k\}$而言，它们是定义在同一域上的巴拿赫尺度。设 $U\subseteq G^r$ 为一个开集。那么，对于所有满足下述条件的映射$P\colon U\times\prod_{j=1}^k E_j^r\to F^0$使得 $P(g,\,\cdot)$对所有 k 都是-多重线性的。$g\in U$。

(1) $P\in T^{0}_{\mu,\,r}(U\times\prod_{j=1}^{k}E^{r}_{j};\ \mathbf{G}\times\prod_{j=1}^{k}\mathbf{E}j;\ \mathbf{F})$。*(2)* 对所有$[\![N]\!]\ni s\geqslant r,\quad P$在$(U\cap G^{s})\times\prod_{j=1}^{k}E^{s}_{j}$上的限制作为映射到 $F^{s-\mu}$ 的映射是连续的；并且对所有 $g\in U$，存在一个 G^{r}-开子集 $V\subseteq U$，使得 $g\in V$，且当 $[\![N]\!]\ni s\geqslant r$、 $f\in V\cap G^{s}$，并且对 $i\in\{1,\dots,k\}$ 有$h_i\in E^{s}_{i}$时，我们有估计

$$\|P(f,h_1,\dots,h_k)\|_{F^{s-\mu}}\lesssim\langle\|f\|_{G^{s}}\rangle\prod_{i=1}^{k}\|h_i\|_{E^{r}_{i}}+\sum_{j=1}^{k}\|h_j\|_{E^{s}_{j}}\prod_{i\neq j}\|h_i\|_{E^{r}_{i}}.\tag{2.1.3}$$

对于映射 $P\in{}_{\mathrm{s}}T^{0}_{\mu,\,r}(U\times\prod_{j=1}^{k}E^{r}_{j};\ \mathbf{G}\times\prod_{j=1}^{k}\mathbf{E}j;\ \mathbf{F})$，类似的等价关系同样成立，前提是我们将第一项中的空间改为强驯性映射空间，并将第二项中对 V 的量词改为“对于所有有界的 G^{r}-开集 $V\subseteq U$”。

证明。 第二项通过如下观察推出第一项：如果 $\{h_i\}_{i=1}^{k}$ 位于 $\prod_{i=1}^{k}E^{r}_{i}$ 的有界子集内，那么根据不等式 (2.1.3)，我们立即可以在 P 上得到所需的温和估计。

现在我们考察逆命题，固定 $g\in U$。第一项给出一个开集 $\widetilde{V}\subseteq U\times\prod_{j=1}^{k}E^{r}_{j}$，使得 $(g,\ 0,\ \dots\dots,\ 0)\in V$，并且如果 $(f,\ h_1,\ \dots\dots,\ h_k)\in V\cap(G^{s}\times E^{s}_{1}\times\cdots\times E^{s}_{k})$ 对于 $[\![N]\!]\ni s\geqslant r$，那么

$$\|P(f,h_1,\dots,h_k)\|_{F^{s-\mu}}\lesssim\langle\|f\|_{G^{s}},\|h_1,\dots,h_k\|_{E^{s}_{1}\times\cdots\times E^{s}_{k}}\rangle.\tag{2.1.4}$$

现在，由于 $\widetilde{V}$是开集，存在 $\delta\in\mathbb{R}^{+}$使得 $V_\delta=B_{G^{r}}(0,\delta)\times\prod_{j=1}^{k}B_{E^{r}_{j}}(0,\delta)\subseteq\widetilde{V}$。因此，若 $f\in B_{G^{r}}(0,\delta)$ 和 $h_1,\dots,h_k\in\prod_{j=1}^{k}(E^{r}_{k}\setminus\{0\})$ 满足条件 $(g,\ h_1,\ \dots,\ h_k)\in G^{s}\times E^{s}_{1}\times\cdots\times E^{s}_{k}$，则有

$$(f,\delta h_1/\|h_1\|_{E^{r}_{1}},\dots,\delta h_k/\|h_k\|_{E^{r}_{k}})\in V_\delta\tag{2.1.5}$$

因此，我们可以应用估计 (2.1.4)，并将两边乘以 $\delta^{-k}\|h_1\|_{E^{r}_{1}}\cdot\dots\cdot\|h_k\|_{E^{r}_{k}}$，从而得到所需的上界 (2.1.3)。强驯性映射的情形也可用类似论证处理。□

注 2.6. 如果 $P\in T^{0}_{\mu,\,r}(\prod_{j=1}^{k}\mathbf{E}j;\ \mathbf{F})$ 是一个 k-多重线性映射，那么对引理 *2.5* 的证明稍作修改即可说明， P 实际上是强驯性的。此外，由多重线性可知， P 自动是一个光滑函数，其导数也都是多重线性映射。结合前一个结论可知，实际上 $P\in{}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{\mu,\,r}(\prod_{j=1}^{k}\mathbf{E}j;\ \mathbf{F})$。

作为前一个引理的推论，我们得到了驯性映射导数的结构化估计。

推论 2.7 (驯性映射的导数估计)。 设 $\mathbf{E}=\{E^{s}\}_{s\in[\![N]\!]}$ 和 $\mathbf{F}=\{F^{s}\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是公共域上的巴拿赫尺度。设 $r,\mu\in[\![N]\!]$ 满足 $\mu\leqslant r$, $U\subseteq E^{r}$ 是一个开集，并且$P\in T^{k}_{\mu,\,r}(U,\ \mathbf{E};\ \mathbf{F})$。那么对每个 $f_0\in U$，都存在一个开集 $f_0\in V\subseteq U$，使得对于每个 $[\![N]\!]\ni s\geqslant r$，都存在一个常数 $C_{s,\,V}\in\mathbb{R}^{+}$，它依赖于 s 和 V，使得对所有 $f\in V\cap E^{s}$ 以及所有 $g_1,\dots,g_k\in E^{s}$，我们有如下估计

$$\|D^{k}P(f)[g_1,\dots,g_k]\|_{F^{s-\mu}}\leqslant C_{s,V}\sum_{\ell=1}^{k}\|g_\ell\|_{E^{s}}\prod_{j\neq\ell}\|g_j\|_{E^{r}}+C_{s,V}\langle\|f\|_{E^{s}}\rangle\prod_{j=1}^{k}\|g_j\|_{E^{r}}.\tag{2.1.6}$$

此外，如果 $P\in{}_{\mathrm{s}}T^{k}_{\mu,\,r}(U,\mathbf{E};\ \mathbf{F})$，那么对每个有界开子集$V\subseteq U$，也有类似的结论。

证明。 这是引理 2.5 的直接应用。 □

接下来的结果将研究温和映射通过复合所产生的相互作用。

引理 2.8 （驯性映射的复合）。 设 $\mathbf{E}=\{E^{s}\}_{s\in[\![N]\!]}$、 $\mathbf{F}=\{F^{s}\}_{s\in[\![N]\!]}$和 $\mathbf{G}=\{G^{s}\}_{s\in[\![N]\!]}$是公共域（$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）上的巴拿赫尺度三元组，并设 $k\in\mathbb{N}$和 μ、μ'、r、$r'\in[\![N]\!]$满足 $\mu\leqslant r$、 $\mu'\leqslant r'$、 $r'+\mu\in[\![N]\!]$。假设 $U\subseteq E^{r}$、 $U'\subseteq F^{r'}$是开集，

$P \in T^k_{\mu、\, r}(U, \mathbf{E};\ \mathbf{F})$，以及 $Q \in T^k_{\mu'、\, r'}(U', \mathbf{F};\ \mathbf{G})$。令 $V = U \cap E^{\max\{r, r'+\mu\}}$。若 $P(V) \subseteq U'$，则 $Q \circ P \in T^k_{\mu+\mu'、\, 最大\{r, \mu+r'\}}(V, \mathbf{E};\ \mathbf{G})$。对于强驯性映射的复合，也有类似结论。

证明。我们对 $k \in \mathbb{N}$ 进行归纳法。首先考虑 $k = 0$ 的情形。固定 $f_0 \in V$。由于 $P(f_0) \in U'$，我们可以利用 Q 的驯性，得到一个开集 $P(f_0) \in W' \subseteq U'$，使得 Q 在 W' 中满足阶数为 μ'、基阶为 r' 的温和估计。映射 P 是连续的，因此 $P^{-1}(W') \subseteq V$ 是一个包含 f_0 的开集。鉴于 P 的驯性，存在一个开集 $f_0 \in W \subseteq V$，在其中 P 满足阶数为 μ、基阶为 r 的温和估计。现在，开集 $W \cap P^{-1}(W') \subseteq V$ 包含 f_0，并且具有如下性质：每当 $[\![N]\!] \ni s \geqslant \max\{r, r'+\mu\}$ 且 $f \in E^s \cap W \cap P^{-1}(W')$ 时，我们可以估计

$$\|Q \circ P(f)\|_{G^{s-(\mu+\mu')}} \lesssim \langle \|P(f)\|_{F^{s-\mu}} \rangle \lesssim \langle \|f\|_{E^s} \rangle. \tag{2.1.7}$$

因此，$Q \circ P$ 确实是以 $\max\{r, r'+\mu\}$ 为基阶的 $(\mu+\mu')$-温和 C^0。

现在设对于 $1 \leqslant k \in \mathbb{N}$，该结果已在 $k-1$ 阶得到证明，并且 P 和 Q 在 k 阶满足假设。应用归纳假设可处理所有阶数不超过 $k-1$ 的导数的驯性，因此只需证明 $D^k(Q \circ P)$ 是以 $\max\{r, r'+\mu\}$ 为基阶的 $(\mu+\mu')$-温和映射。固定 $f_0 \in V$。对于 $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$，我们有 $D^\ell Q$ 是以 r 为基阶的 μ-温和映射，因此存在一个开集 $P(f_0) \in W'_\ell \subseteq U'$，使得在 W'_ℓ 中，$D^\ell Q$ 满足阶数为 μ'、基阶为 r' 的 ℓ-多重线性驯性估计（见引理 2.7）。映射 P 是连续的，因此 $\bigcap_{\ell=1}^k P^{-1}(W'_\ell)$ 是 V 的一个包含 f_0 的开子集。再次利用 P 的驯性和引理 2.7，对于 $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$，存在一个开集 $f_0 \in W_\ell \subseteq V$，使得在 W_ℓ 中，$D^\ell P$ 满足阶数为 μ、基阶为 r 的 ℓ-多重线性驯性估计。

对于每个 $R > 0$，集合 $O_{f_0,\, R} = \bigcap_{\ell=1}^k (W_\ell \cap P^{-1}(W'_\ell)) \times B_{(E^{\max\{r, r'+\mu\})^k}}(0,\ R)$ 是一个包含 $(f_0,\ 0,\ \dots,\ 0)$ 的开集 $V \times \prod_{p=1}^k E^{\max\{r, r'+\mu\}}$。对于 $[\![N]\!] \ni s \geqslant \max\{r, r'+\mu\}$ and $(f,\ g_1,\ \dots,\ g_k) \in O_{f_0,\, R} \cap E^s$，我们使用 Fa`a di Bruno 定理（例如参见 Abraham、Marsden 和 Ratiu 的第2.4节A [1]）来计算

$$\begin{aligned} &D^k(Q \circ P)(f)[g_1, \dots, g_k] \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{\ell=1}^k \sum_{j_1 + \cdots + j_\ell = k} c_{\sigma, \ell, k, j_1, \dots, j_\ell} D^\ell Q \circ P(f)\{D^{j_1} P(f), \dots, D^{j_\ell} P(f)\}[g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(k)}], \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

其中 S_k 表示 $\{1, \dots, k\}$ 上的置换群，而 c_* 表示某个组合常数。我们将估计上面求和中每一项在 $G^{s-(\mu+\mu')}$ 中的范数。固定 $\ell \in \{1, \dots, k\}$ 和 $j_1,\ \dots,\ j_\ell \in \{1, \dots, k\}$，使得 $j_1 + \cdots + j_\ell = k$。利用引理 2.7 以及 $\max_{1 \leqslant i \leqslant k} \|g_i\|_{E^r} \leqslant R$ 这一事实，我们可以自由地估计

$$\begin{cases} \|D^{j_1} P(f)[g_1, \dots, g_{j_1}]\|_{F^{s-\mu}} \\ \qquad \vdots \\ \|D^{j_\ell} P(f)[g_{j_{\ell-k+1}}, \dots, g_k]\|_{F^{s-\mu}} \end{cases} \lesssim_R \langle \|f, g_1, \dots, g_k\|_{E^s \times \cdots \times E^s} \rangle. \tag{2.1.9}$$

用同样的论证，

$$\begin{cases} \|D^{j_1} P(f)[g_1, \dots, g_{j_1}]\|_{F^{r'}} \\ \qquad \vdots \\ \|D^{j_\ell} P(f)[g_{j_{\ell-k+1}}, \dots, g_k]\|_{F^{r'}} \end{cases} \lesssim_R \langle \|f, g_1, \dots, g_k\|_{E^{\max\{r'+\mu\}} \times \cdots \times E^{\{r'+\mu\}}} \rangle \lesssim_R 1. \tag{2.1.10}$$

因此，再次应用引理 2.7 中的估计可得

$$\|D^{\ell}Q\circ P(f)\{D^{j_1}P(f)[g_1,\dots,g_{j_1}],\dots,D^{j_\ell}P(f)[g_{j_\ell-k+1},\dots,g_k]\}\|_{G^{s-(\mu+\mu')}} \lesssim_R \langle\|f,g_1,\dots,g_k\|_{E^s\times\cdots\times E^s}\rangle. \quad (2.1.11)$$

于是，将 (2.1.8) 和 (2.1.11) 合并，得到估计

$$\|D^k(Q\circ P)(f)[g_1,\dots g_k]\|_{G^{s-(\mu+\mu')}} \lesssim_R \langle\|f,g_1,\dots,g_k\|_{E^s\times\cdots\times E^s}\rangle, \quad (2.1.12)$$

所需的 在层级 k 上的驯性上界。因此，通过归纳法，该结果对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均成立 . □

前述结果的一个方便应用是，驯性映射的驯性乘积仍为驯性映射。更确切地说，有如下结论。

推论 *2.9*（驯性 C^k 映射的驯性乘积）。设 $\ell,k\in\mathbb{N}$ 满足 $\ell\geqslant 1$。对于 $j\in\{1,\dots,\ell\}$，设 $E_j=\{E_j^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 和 $F_j=\{E_j^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是公共域上的巴拿赫尺度，且 $G=\{G^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是同一域上的巴拿赫尺度。设 $r_1,\dots,r_\ell\in[\![N]\!]$, $\mu_j\in[\![r_j]\!]$ 对于 $j\in\{1,\dots,\ell\}$,$r'\in[\![N]\!]$，且 $\mu'\in[\![r']\!]$。最后，假设 $U_j\subseteq E_j^{r_j}$ 是开集，$P_j\in T^k_{\mu_j,r_j}(U_j;E_j;F_j)$，并且$B\in T^0_{\mu',r'}(\prod_{j=1}^{\ell}F_j;G)$ 是 k-多重线性的。若令

$$\mu=\mu'+\max\{\mu_1,\dots,\mu_\ell\}\ and\ r=\max\{r_1,\dots,r_\ell,\mu_1+r',\dots,\mu_\ell+r'\} \quad (2.1.13)$$

并假设 $r\in[\![N]\!]$，那么乘积映射满足包含关系

$$B(P_1,\dots,P_\ell)\in T^k_{\mu,r}\Big(\prod_{j=1}^{\ell}U_j\cap E_j^r,\prod_{j=1}^{\ell}\mathbf{E}_j;\mathbf{G}\Big). \quad (2.1.14)$$

强驯性映射的乘积也满足类似的断言。

证明。我们首先 note 注意到，根据注 2.6， B 实际上属于 $_sT^{\infty}_{\mu',\ r'}(\prod_{j=1}^{\ell}\mathbf{F}j;\mathbf{G})$。包含关系

$$(P_1,\dots,P_\ell)\in T^k_{\max\{\mu_1,\dots,\mu_\ell\},\max\{r_1,\dots,r_\ell\}}\Big(\prod_{j=1}^{\ell}U_j\cap E_j^{\max\{r_1,\dots,r_\ell\}},\prod_{j=1}^{\ell}\mathbf{E}_j;\prod_{j=1}^{\ell}\mathbf{F}_j\Big) \quad (2.1.15)$$

显然成立，因此结论可由引理 2.8 得出。 □

我们还可以通过对参数积分，将多个驯性映射族组合起来。虽然存在更一般的结果，但我们只需要这一事实的以下简单实现。

引理 2.10（温和 C^k 映射的单参数族积分）。设 $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，$\mathbf{E}=\{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 和 $\mathbf{F}=\{F^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是定义在同一域上的一对巴拿赫尺度，并且 $\mu,r\in[\![N]\!]$满足 $\mu\leqslant r$。假设 $U\subseteq E^r$ 是一个开集，且对于所有 $t\in[0,1]$，都有 $P_t\in T^k_{\mu,r}(U,\mathbf{E};\mathbf{F})$。此外，假设这些温和估计的定义不等式（如定义 *2.4* 中关于映射及其导数的第一项所述）关于 $t\in[0,1]$ 一致成立，并且对于每个$j\in\{0,\dots,k\}$, $[\![N]\!]\ni s\geqslant r$, $f\in U\cap E^s$和 $f_1,\dots,f_j\in E^s$，映射

$$[0,1]\ni t\mapsto D^jP_t(f)[f_1,\dots,f_j]\in F^{s-\mu} \quad (2.1.16)$$

是连续的。则由 $f\mapsto\int_0^1P_t(f)\,\mathrm{d}t$ 给出的积分映射 $\int_0^1P_t\,\mathrm{d}t\colon U\to F^0$ 定义良好，并满足 $\int_0^1P_t\,\mathrm{d}t\in T^k_{\mu,r}(U,\mathbf{E};\mathbf{F})$。强驯性映射的积分也有类似结论。

证明。 证明的核心在于核对定义，因此我们仅概述论证。假设（2.1.16）保证映射 $\int_0^1P_t\,\mathrm{d}t$ 定义良好，而所假设的一致温和估计则保证被积函数关于 $t\in[0,1]$ 一致有界。由（2.1.16）和标准的控制收敛论证可知，该映射作为从 $U\cap E^s$ 到 $F^{s-\mu}$ 的映射是 C^k。 $\int_0^1P_t\,\mathrm{d}t$ 满足定义不等式，因而是以 r 为基阶的 μ-温和 C^k，这是由 t 中的一致性以及积分的范数不超过范数的积分这一事实得出的。□

本小节的后半部分讨论巴拿赫尺度的各种专门类。其中最理想的几类将在接下来的定义中引入，该定义与 Baldi 和 Haus [5] 的定义密切相关。

定义 2.11 (可光滑化与 LP-可光滑化巴拿赫尺度)。 设 $\mathbf{E} = \{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是一个巴拿赫尺度。

(1) 我们称$\mathbf{E}$ 是可光滑化的，若对每个 $j \in \mathbb{N}^+$，都存在一个线性映射 S_j： $E^0 \to E^N$，满足以下光滑化条件，对任意 $u \in E^0$均成立：

$$\|S_j u\|_{E^s} \lesssim \|u\|_{E^s} \text{ for all } s \in [\![N]\!], \tag{2.1.17}$$

$$\|S_j u\|_{E^t} \lesssim 2^{j(t-s)} \|S_j u\|_{E^s} \text{ for all } s,t \in [\![N]\!] \text{ with } s < t, \tag{2.1.18}$$

$$\|(I - S_j)u\|_{E^s} \lesssim 2^{-j(t-s)} \|(I - S_j)u\|_{E^t} \text{ for all } s,t \in [\![N]\!] \text{ with } s < t, \tag{2.1.19}$$

$$\|(S_{j+1} - S_j)u\|_{E^t} \lesssim 2^{j(t-s)} \|(S_{j+1} - S_j)u\|_{E^s} \text{ for all } s,t \in [\![N]\!], \tag{2.1.20}$$

其中隐含常数与 j 无关，且随 s 和 t 增大。

(2) 若$\mathbf{E}$ 是可光滑化的，且其平滑算子满足以下 *Littlewood–Paley* 条件，则称$\mathbf{E}$ 是 *LP*-可光滑化的：对于 $s \in [\![N]\!]$ 和 $u \in E^s$，有

$$\lim_{j\to\infty} \|(I - S_j)u\|_{E^s} = 0, \tag{2.1.21}$$

并且存在一个常数 $A > 0$（可能依赖于 s），使得

$$A^{-1} \|u\|_{E^s} \leqslant \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|\Delta_j u\|_{E^s}^2 \Big)^{1/2} \leqslant A \|u\|_{E^s}, \tag{2.1.22}$$

其中算子 符号 $\{\Delta_j\}_{j=0}^{\infty}$通过 $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$ 定义，并约定 $S_0 = 0$.

现在给出一些 LP-可光滑化巴拿赫尺度的例子。第一个例子很简单，但颇具启发性 .

例 2.12 （固定巴拿赫空间）。 假设 X 是一个巴拿赫空间，且 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么，由 X 单独生成的尺度 $\{X\}_{s\in[\![N]\!]}$，在定义 *2.11* 的意义下是 *LP*-可光滑化的，前提是我们对所有 $S_j = I$ 取 $j \in \mathbb{N}^+$。

此外，我们还有一个稍复杂的例子：整个欧几里得空间上的索伯列夫空间。

例 2.13 （上的索伯列夫空间 $\mathbb{R}^d$）。 设 V 为有限维实向量空间，且$N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。索伯列夫空间的实巴拿赫尺度 $\{H^s(\mathbb{R}^d; V)\}_{s\in[\![N]\!]}$ 对于由 $S_j = \mathbb{1}_{B(0,2^j)}(\nabla/2\pi\mathrm{i})$ 给出的光滑算子 $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ 是 *LP*-可光滑化的。

遗憾的是，（LP-）可光滑化巴拿赫尺度对于我们的目的而言不够一般。因此，我们引入一个更广泛的类，用以涵盖本质上是 LP-可光滑化巴拿赫尺度的闭且有补的子空间的巴拿赫尺度。这类似于 Hamilton 对驯性 Fr´echet 空间的概念，该概念在 [40]的定义 1.3.2 中给出。

定义 2.14 （驯性直和项与温和巴拿赫尺度）。 设 $\mathbf{E} = \{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是一个巴拿赫尺度。

(1) 假设$\mathbf{F} = \{F^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是与$\mathbf{E}$定义在同一域上的巴拿赫尺度。如果存在有界线性映射 λ: $E^0 \to F^0$和 ρ: $F^0 \to E^0$，并满足以下条件，我们就称$\mathbf{E}$ 是$\mathbf{F}$ 的驯性直和项。*(a)* $\rho\lambda u = u$ 对所有 $u \in E^0$均成立。*(b)* 对于 $s \in [\![N]\!]$，有 $\lambda(E^s) \subseteq F^s$和 $\rho(F^s) \subseteq E^s$，且诱导映射λ: $E^s \to F^s$和 ρ: $F^s \to E^s$是有界线性映射。

在这种情况下，我们称 λ 为提升映射，称 ρ 为限制映射。

(2) 若存在一个 *LP*-可光滑化巴拿赫尺度 $\mathbf{F}$，使得 $\mathbf{E}$ 是$\mathbf{F}$的驯性直和项，则称$\mathbf{E}$ 是温和的。

注 *2.15.* 注意，若 E 是 F 的驯性直和项，则基本的泛函分析表明，$\lambda(E^s) \subseteq F^s$ 是 F^s 的闭且可补子空间，而 $\pi = \lambda \circ \rho : F^s \to F^s$是到 $\lambda(E^s)$ 上的有界线性投影。因此，对于每个 $s \in [\![N]\!]$，都存在一个闭子空间 $G^s \subseteq F^s$，使得 $F^s = \lambda(E^s) \oplus G^s$。这就是称 E 为 F 的直和项的原因。此外，若 E 是 F 的直和项，则对于每个 $s \in \mathbb{N}$，我们有$\|u\|_{E^s} \asymp \|\lambda u\|_{F^s}$ 对 $u \in E^s$成立的等价关系。

下面给出一个驯性巴拿赫尺度的例子。

例 2.16 （区域上的索伯列夫空间）。 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开集，且按照定义 *A.2* 的意义，它是一个 *Stein* 延拓域，并令 $\mathfrak{E}_U$ 表示相应的延拓算子。设V是一个有限维实向量空间，且 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。实巴拿赫尺度索伯列夫空间 $\{H^s(U;\ V)\}_{s\in[\![N]\!]}$ 按照定义 *2.14* 的意义是驯性的。事实上，我们将此尺度实现为 $\{H^s(\mathbb{R}^d;\ V)\}_{s\in[\![N]\!]}$的一个驯性直和项。根据例 *2.13*，该尺度是 *LP*-可光滑化的，其提升算子为 $\lambda = \mathfrak{E}_U$，限制算子则由标准限制给出，$\rho = \mathfrak{R}_U$。

现在我们记录一个关于（LP-）可光滑化巴拿赫尺度与驯性巴拿赫尺度乘积的结果，其证明显而易见，故略去。

引理 2.17 （巴拿赫尺度的乘积）。 有限个定义在同一公共域上的（可光滑化、*LP*-可光滑化、温和）巴拿赫尺度的乘积仍是一个（可光滑化、*LP*-可光滑化、温和）巴拿赫尺度。

现在考虑 关于温和巴拿赫尺度中光滑化的一些有用不等式。

引理 2.18 （温和巴拿赫尺度中的光滑化）。 设 $\mathbf{E} = \{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是定义 *2.14* 意义下的温和巴拿赫尺度。存在一列平滑算子 $\{T_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E^0;\ E^N)$并且对于 $s \in [\![N]\!]$，存在半范数列 $\{\mathbf{m}_j^s\}_{j=0}^{\infty}$，$\{\mathbf{n}_j^s\}_{j=0}^{\infty}$ 定义在 E^s 上，使得以下结论成立。

(1) 对所有 $g \in E^s$，我们有如下估计

$$\|(T_{j+1} - T_j)g\|_{E^s} \lesssim \mathbf{m}_j^s(g) \ \textit{and}\ \|(I - T_j)g\|_{E^s} \lesssim \mathbf{n}_j^s(g), \tag{2.1.23}$$

其中隐含常数仅依赖于 s。

(2) 对于 s、$t \in [\![N]\!]$，我们有

$$\begin{cases} \mathbf{m}_j^s \asymp 2^{j(s-t)}\mathbf{m}_j^t & \textit{for all } s,t, \\ \mathbf{n}_j^s \lesssim 2^{j(s-t)}\mathbf{n}_j^t & \textit{for all } s \leqslant t, \end{cases} \tag{2.1.24}$$

其中隐含常数仅依赖于 s 和 t。

(3) 我们有如下等价关系

$$\|\cdot\|_{E^s}^2 \asymp \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{m}_j^s)^2 \tag{2.1.25}$$

其中隐含常数仅依赖于 s。

(4) 对每个 $g \in E^s$，我们都有 $\mathbf{n}_j^s(g) \lesssim \|g\|_{E^s}$（其中隐含常数仅依赖于 s），且 $\mathbf{n}_j^s(g) \to 0$ 当 $j \to \infty$ 时。*(5)* $\mathbf{E}$ 按照定义 *2.2* 的第四项的含义是终端稠密的。

证明。 设$\mathbf{F}$ 是一个 LP-可光滑化巴拿赫尺度，它见证了$\mathbf{E}$ 的驯性定义，其中提升算子为 $\lambda \in \mathcal{L}(E^0;\ F^0)$，限制为 $\rho \in \mathcal{L}(F^0;\ E^0)$，平滑算子为 $\{S_j\}_{j=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(F^0;\ F^N)$。我们定义 $T_j = \rho \circ S_j \circ \lambda$，并对 $s \in [\![N]\!]$ 和 $g \in E^s$ 置

$$\mathbf{m}_j^s(g) = \|(S_{j+1} - S_j) \circ \lambda g\|_{F^s} \text{ and } \mathbf{n}_j^s(g) = \|(I - S_j) \circ \lambda g\|_{F^s}. \tag{2.1.26}$$

那么，第一项由 ρ 的有界性得出。第二、第三和第四项是定义 2.11 和注 2.15 的直接推论。第五项由第一项和第四项得出。□

接下来给出一个插值结果。

引理 2.19 (温和巴拿赫尺度中的对数凸性)。 设 $\mathbf{E} = \{E^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是定义 *2.14* 意义下定义在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$上的驯性巴拿赫尺度。对于 r， s， $t \in [\![N]\!]$ 满足 $r < s < t$，我们有

$$\|u\|_{E^s} \lesssim \|u\|_{E^r}^{\frac{t-s}{t-r}} \|u\|_{E^t}^{\frac{s-r}{t-r}} \tag{2.1.27}$$

对所有 $u \in E^t$，其中隐含常数随 r、t 增大。

证明。 若 $u = 0$，则该上界显然成立，因此假设 $u \neq 0$。设 $\mathbf{F}$ 为见证 $\mathbf{E}$ 驯性定义的 LP-可光滑化巴拿赫尺度，其提升算子、限制算子和平滑算子分别为 λ、ρ 和 $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$。由注 2.15 可知，对于 $p \in \{s, r, t\}$，有 $\|u\|_{E^p} \asymp \|\lambda u\|_{F^p}$。现在利用定义 2.11 中平滑算子的性质可知，对于任意 $j \in \mathbb{N}$

$$\|\lambda u\|_{F^s} \leqslant \|(I - S_j)\lambda u\|_{F^s} + \|S_j \lambda u\|_{F^s} \lesssim 2^{j(s-t)}\|\lambda u\|_{F^t} + 2^{j(s-r)}\|\lambda u\|_{F^r} \tag{2.1.28}$$

因此 $\|u\|_{E^s} \lesssim 2^{j(s-t)}\|u\|_{E^t} + 2^{j(s-r)}\|u\|_{E^r}$。现在，由于 $1 \leqslant \|u\|_{E^t}/\|u\|_{E^r}$，我们可以选择$j = \lfloor$log$(\|u\|_{E^t}/\|u\|_{E^r})/((t-r)\log 2)\rfloor \in \mathbb{N}$，从而得到所需的不等式。□

2.2. **映射假设与反函数定理的陈述**。现在我们引入一个较为冗长的定义，其中记录了在我们版本的 Nash-Moser 逆函数定理中，非线性映射必须满足的一系列条件。

定义 *2.20*（映射假设）。如果三元组 *(E, F* Ψ*)* 满足带参数 (μ, r, R) 的 *RI* 映射假设，我们称之为..... $\in [\![N]\!]^3$ 如果 $E = \{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 且 $F = \{F^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是定义在某个公共域上的巴拿赫尺度， $1 \leqslant \mu \leqslant r < R < \infty$, $R + \mu \in [\![N]\!]$，并且存在 $0 < \delta_r \in \mathbb{R}$ 使得Ψ： $B_{E^r}(0, \delta_r) \to F^{r-\mu}$ 是一个满足以下条件的映射。

(1) Ψ（0） $= 0$。*(2)* μ-温和地 C^2：对于每个 $r - \mu \leqslant s \in [\![N - \mu]\!]$，我们都有 Ψ： B_{E^r}（0, δ_r） $\cap E^{s+\mu} \to F^s$ 是C^2，并且对于每个 $u_0 \in B_{E^r}$（0, δ_r） $\cap E^{s+\mu}$，我们有温和估计

$$\left\|D^2\Psi(u_0)[v, w]\right\|_{F^s} \leqslant C_1(s)(\|v\|_{E^{s+\mu}}\|w\|_{E^r} + \|v\|_{E^r}\|w\|_{E^{s+\mu}} + \langle\|u_0\|_{E^{s+\mu}}\rangle\|v\|_{E^r}\|w\|_{E^r}). \tag{2.2.1}$$

这里的常数 C_1（s）随 s 增大。换言之，根据定义 *2.4* 中的记号，我们有包含关系 $\Psi \in_{\mathbf{S}} T^2_{\mu,\, r}$（$B_{E^r}$（0, δ_r）， $\mathbf{E}$； $\mathbf{F}$）。

（*3*）导数求逆：存在满足 $0 < \delta_R \leqslant \delta_r$ 的 $\delta_R \in \mathbb{R}$，使得对于每个$u_0 \in B_{E^r}$（0, δ_R） $\cap E^N$，存在一个有界线性算子 L（u_0）： $F^r \to E^r$，满足以下三个条件。

(a) 对每个 $s \in \mathbb{N} \cap [r, R]$，限制 $L(u_0)$ 到 F^s 定义了一个取值于 E^s 的有界线性算子，即 $L(u_0) \in \mathcal{L}(F^s; E^s)$。*(b)* 对每个 $f \in F^r$， $D\Psi(u_0)L(u_0)f = f$。*(c)* 我们有温和估计

$$\|L(u_0)f\|_{E^s} \leqslant C_2(s)(\|f\|_{F^s} + \langle\|u_0\|_{E^{s+\mu}}\rangle\|f\|_{F^r}) \tag{2.2.2}$$

对每个 $f \in F^s$ 和 $r \leqslant s \leqslant R$，其中常数 $C_2(s)$ 仍随 s 增大。

这里使用前缀 *RI-* 意在表明，映射 $L(u_0)$ 只需是右逆。若第三项中的条件 (b) 再加上左逆条件 (b'):，我们就称三元组 $(\mathbf{E}, \mathbf{F}\ \Psi)$ 满足 *LRI* 映射假设。

$$L(u_0)D\Psi(u_0)v = v \text{ for every } v \in E^{r+\mu}. \tag{2.2.3}$$

图 *4* 以示意图的形式展示了 $L(u_0)$ 和 $D\Psi(u_0)$ 与 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$之间的相互作用。

最后，我们陈述本小节中使用的 Nash-Moser 逆函数定理版本，它分为两部分。

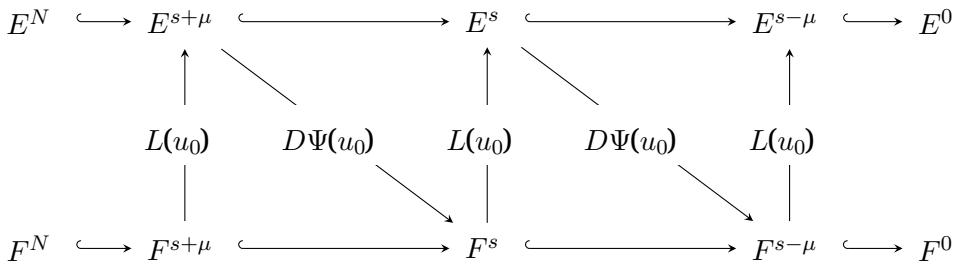

FIGURE 4. 由$u_0 \in E^N \cap B_{E^r}(0,\delta_R)$和 $r+\mu \leqslant s \leqslant R-\mu$的 LRI 映射假设得出的交换图。“$\hookrightarrow$”是包含映射。

定理 2.21 (反函数定理)。 设 $\mathbf{E} = \{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 和 $\mathbf{F} = \{F^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是定义在同一域上的巴拿赫尺度，并假设 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 满足以下两个条件之一：

I：$\mathbf{E}$ 和$\mathbf{F}$ 是 *LP*-可光滑化的（见定义 *2.11*）；或者 *II*：$\mathbf{E}$ 是温和的，且 $\mathbf{F}$ 是$\mathbf{E}$ 的温和直和项（见定义 *2.14*）。

假设三元组$(\mathbf{E}、\mathbf{F}\ \Psi)$满足定义 *2.20* 的 *LRI* 映射假设，参数(μ, r, R)满足$2(r+\mu)+1<(r+R)/2$，并令 $\beta = 2(r+\mu)+1 \in [\![N]\!]$。那么存在$\varepsilon$、$\kappa_1$、$\kappa_2>0$，使得以下结论成立。

(1) 局部逆映射的存在性：对于每个 $g \in B_{F^\beta}(0,\varepsilon)$，存在唯一的 $u \in B_{E^\beta}(0,\kappa_1\varepsilon)$，使得 $\Psi(u) = g$。*(2)* 局部逆映射的估计：所诱导的双射 $\Psi^{-1}\colon B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \to \Psi^{-1}(B_{F^\beta}(0,\varepsilon)) \cap B_{E^\beta}(0,\kappa_1\varepsilon)$ 满足以下估计

$$\|\Psi^{-1}(g)\|_{E^\beta} \leqslant \kappa_1\|g\|_{F^\beta} \text{ for all } g \in B_{F^\beta}(0,\varepsilon). \tag{2.2.4}$$

此外，若 $\mathbb{N} \ni \nu \leqslant R+r-2\beta$，则有

$$\Psi^{-1} : B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^{\beta+\nu} \to E^{\beta+\nu} \tag{2.2.5}$$

其估计为

$$\|\Psi^{-1}(g)\|_{E^{\beta+\nu}} \lesssim \|g\|_{F^{\beta+\nu}}, \tag{2.2.6}$$

其中隐含常数与 g 无关。

(3) 基本连续依赖性：映射 Ψ^{-1} 满足 *Lipschitz*界

$$\|\Psi^{-1}(g_0)-\Psi^{-1}(g_1)\|_{E^{\beta-\mu}} \leqslant \kappa_2\|g_0-g_1\|_{F^{\beta-\mu}} \tag{2.2.7}$$

对所有 $g_0, g_1 \in B_{F^\beta}(0,\varepsilon)$均成立。

注释2.22。 不等式 $3r+4\mu+2<R$ 等价于 $\beta = 2(r+\mu)+1<(r+R)/2$。此外，当 $[\![N]\!]$有限时，映射假设要求 $R+\mu \leqslant N$，因此我们得到必要关系 $3r+5\mu+2<N$。

我们将在第2.4节给出定理 2.21 的证明；在此之前，先建立另外两个定理，它们分别在不同假设下证明该定理的不同分量。现在我们转向反函数定理第二部分的陈述，先介绍一些记号。由于所考虑的非线性算子存在导数损失，局部逆映射的更高正则性，用某种对 Gateaux导数的变体来表述，比采用通常的 Fr´echet 可微性概念更为方便。这与 Hamilton [40] 的第I.3节及其他部分中的做法类似。

定义2.23 （连续Gateaux可微性）。 设 X 和 Y 是公共域上的巴拿赫空间，$U \subseteq X$ 是一个开集，且 $f\colon U \to Y$。

(1) 若存在一个连续映射 f 使得 U 连续*Gateaux*可微，则称 f 在 U 上连续*Gateaux*可微: $U \times X \to Y$，使得对于所有 $x \in U$，有 $Df(x) \in \mathcal{L}(X;Y)$，并且对于所有 $z \in X$

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(f(x+tz)-f(x)) = Df(x)z. \tag{2.2.8}$$

(2) 对于 $\mathbb{N} \ni \ell \geqslant 2$，如果 f 是 ℓ 次连续盖托可微的，则称其为 ℓ 次连续盖托可微，当且仅当 f 是连续盖托可微的，并且 $Df\colon\ U \times X \to Y$ 是 $(\ell-1)$ 次连续盖托可微的。

现在我们可以陈述 Nash-Moser 逆函数定理的第二部分，其证明见第2.5节。

定理 2.24（反函数定理的进一步结论）。假设定理 *2.21* 的假设成立，并且巴拿赫尺度 $\mathbf{E}$ 由自反空间组成。对于局部逆映射 $\Psi^{-1}\colon\ B_{F^\beta}(\mathbf{0},\varepsilon) \to E^\beta$，以下附加结论成立。

(1) 连续性：对于 $s \in [\beta, R+r-\beta-\mu) \cap \mathbb{N}$ 映射

$$\Psi^{-1} : B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^s \to E^s \tag{2.2.9}$$

是连续的。

(2) 连续可微性：对于 $s \in [\beta, R+r-\beta-\mu) \cap \mathbb{N}$，映射

$$\Psi^{-1} : B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^s \to E^{s-\mu} \tag{2.2.10}$$

在 *Fr´echet* 意义下可微，且满足 $D\Psi^{-1} = L \circ \Psi^{-1}$。此外，将 $D\Psi^{-1}$视为映射时

$$D\Psi^{-1} : (B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^s) \times F^{s-\mu} \to E^{s-\mu} \tag{2.2.11}$$

我们有它是连续的。

(3) 更高正则性：设 $\mathbb{N} \ni \ell \geqslant 2$，并假设映射 Ψ 是 ℓ 次连续盖托可微的。对于 $s \in [\beta + (\ell(\ell+1)/2-1)\mu,\ R+r-\beta-\mu) \cap \mathbb{N}$，我们有映射

$$\Psi^{-1} : B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^s \to E^{s-\frac{\ell(\ell+1)}{2}\mu} \tag{2.2.12}$$

也同样是 ℓ 次连续盖托可微的。

2.3. **局部满射性与单射性**。本节首先证明一个存在性结果，该结果以 Baldi 和 Haus [5], 的主定理为模型，但针对我们的具体情形进行了调整。需要强调的是，下面的定理仅要求映射假设中右逆的存在性。

定理 *2.25*（局部满射性）。设 $\boldsymbol{E} = \{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 和 $\boldsymbol{F} = \{F^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是定义在同一域上的巴拿赫尺度，并假设 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}\ \Psi)$ 满足定义 *2.20* 的 *RI* 映射假设，其参数为 (μ, r, R)，且 $2(r+\mu)+1 < (r+R)/2$。令 $\beta = 2(r+\mu)+1 \in [\![N]\!]$，并令$A_\beta > 0$满足：对所有 $j \in \mathbb{N}$和 $f \in F^\beta$，都有 $\|\Delta_j f\|_{F^\beta} \leqslant A_\beta \|f\|_{F^\beta}$。令 $C_i = C_i(R)$ 表示映射假设中关于 $i \in \{1,2\}$ 的常数。

那么，存在 K_1、K_2、K_3、$K_4 \in \mathbb{R}^+$，使得对于满足以下条件的每个 $g \in F^\beta$

$$\|g\|_{F^\beta} < \frac{\delta_R}{2[(1+A_\beta)K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + (1+A_\beta)^2 K_1(K_1+K_3)]} \tag{2.3.1}$$

存在一个序列 $\{(u_j、v_j、h_j、y_j、f_j、e_j)\}_{j=0}^\infty \subseteq (B_{E^r}(\mathbf{0}、\delta_R) \cap E^R) \times E^N \times E^R \times F^N \times F^N \times F^{R-\mu}$，满足以下条件。

(1) 当 $j=0$ 时，我们有如下恒等式

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & v_0 &= S_0 u_0 = 0, \\ y_0 &= 0, & f_0 &= \Delta_0 g = S_1 g, \\ h_0 &= L(u_0) f_0 = L(0) S_1 g, & e_0 &= \Psi(u_0+h_0) - \Psi(u_0) - f_0, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

而对于 $j\geqslant 1$，我们有如下递推关系

$$\begin{aligned} u_j &= u_{j-1}+h_{j-1}, & v_j &= S_j u_j,\\ y_j &= -S_j\sum_{n=0}^{j-1} e_n - \sum_{n=0}^{j-1} y_n, & f_j &= \Delta_j g + y_j,\\ h_j &= L(v_j)f_j, & e_j &= \Psi(u_j+h_j)-\Psi(u_j)-f_j. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

(2) 对于 $j\in\mathbb{N}$，我们有如下估计

$$\|h_j\|_{E^s}\leqslant K_1(\|g\|_{F^\beta}2^{-j}+\|\Delta_j g\|_{F^\beta})2^{j(s-\beta)} \text{ for all } s\in[r,R]\cap\mathbb{N}, \tag{2.3.4}$$

$$\|v_j\|_{E^s}\leqslant K_2\|g\|_{F^\beta}2^{j(s-\beta)} \text{ for all } \beta\leqslant s\in[\![N]\!], \tag{2.3.5}$$

$$\|u_j-v_j\|_{E^s}\leqslant K_3\|g\|_{F^\beta}2^{j(s-\beta)} \text{ for all } s\in[0,R]\cap\mathbb{N}, \tag{2.3.6}$$

$$\|u_j\|_{E^\beta}\leqslant K_4\|g\|_{F^\beta}. \tag{2.3.7}$$

and

$$\|e_j\|_{F^s}\lesssim C_1\|g\|_{F^\beta}2^{j(s+\mu+r-2\beta)} \text{ for all } s\in[r-\mu,R-\mu]\cap\mathbb{N}. \tag{2.3.8}$$

(3) 存在 $u\in E^\beta$，使得 $u_j\to u$ 在 E^β 中，当 $j\to\infty$、$\|u\|_{E^\beta}\leqslant K_4\|g\|_{F^\beta}$ 和 $\Psi(u)=g$ 时成立。

(4) 如果我们另外知道 $\nu\in\mathbb{N}$ 满足 $\nu\leqslant R+r-2\beta$ 和 $g\in F^{\beta+\nu}$，那么实际上 $u_j\to u$ 在 $E^{\beta+\nu}$ 中，当 $j\to\infty$ 时成立，并且我们有估计 $\|u\|_{E^{\beta+\nu}}\lesssim\|g\|_{F^{\beta+\nu}}$。这里隐含的常数取决于 K_1，……，K_4、A_β、$A_{\beta+\nu}$、μ、r、δ_R 和 R。

证明。我们将证明分为几个步骤。前三个步骤确立了三项关键断言，这些断言将在第四步中用于归纳构造该序列。随后在第五步证明收敛结果。第四项中的更高正则性断言则在第六步证明。在整个证明过程中，我们将使用由下式定义的序列 $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty\subseteq[0,\infty)$

$$\xi_n=\|g\|_{F^\beta}2^{-n}+\|\Delta_n g\|_{F^\beta}. \tag{2.3.9}$$

步骤 1：Littlewood–Paley理论风格的估计。设 $\ell,k\in\mathbb{N}$ 满足 $0\leqslant\ell\leqslant k$。我们断言，若给定 $\{h_j\}_{j=0}^k\subseteq E^R$ 且它们满足 $0\leqslant j\leqslant k$对应的 (2.3.4)，则

$$\Big\|\sum_{n=\ell}^k h_n\Big\|_{E^\beta}\lesssim K_1\Big(\sum_{n=\ell}^k\xi_n^2\Big)^{1/2}, \tag{2.3.10}$$

其中 ξ_n 由 (2.3.9) 定义

为证明该断言，我们先注意到，对于任意 $j\in\mathbb{N}$、$0\leqslant n\leqslant k$ 和 $s=\beta+\mathrm{sgn}(j-n)\in[r,R]\cap\mathbb{N}$，由 (2.1.20) 和 (2.3.4)，我们可以得到如下上界：

$$\|\Delta_j h_n\|_{E^\beta}\lesssim 2^{j(\beta-s)}\|h_n\|_{E^s}\lesssim K_1\xi_n 2^{j(\beta-s)}2^{n(s-\beta)}=K_1\xi_n 2^{(j-n)(\beta-s)}=K_1\xi_n 2^{-|j-n|}. \tag{2.3.11}$$

我们利用“Littlewood-Paley”刻画 (2.1.22)、上界 (2.3.11) 和 Young卷积不等式（令 $\xi_n=0$ 为 $n\in\mathbb{Z}$，使得 $0<n$），来估计 (2.3.10) 左侧的和：

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{n=\ell}^k h_n\Big\|_{E^\beta}^2 &\lesssim \sum_{j=0}^\infty\Big\|\Delta_j\sum_{n=\ell}^k h_n\Big\|_{E^\beta}^2\leqslant\sum_{j=0}^\infty\Big(\sum_{n=\ell}^k\|\Delta_j h_n\|_{E^\beta}\Big)^2\lesssim K_1^2\sum_{j=0}^\infty\Big(\sum_{n=\ell}^k\xi_n 2^{-|j-n|}\Big)^2\\ &\leqslant K_1^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\xi_n\mathbb{1}_{[\ell,k]}(n)2^{-|j-n|}\Big)^2\leqslant K_1^2\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\xi_n^2\mathbb{1}_{[\ell,k]}(n)\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^{-|n|}\Big)^2\lesssim K_1^2\sum_{n=\ell}^k\xi_n^2. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

这就是 (2.3.10)。

步骤 2：利用泰勒定理进行估计。设 $k \in \mathbb{N}$。我们声称，若 $g \in F^\beta$ 满足 (2.3.1)，且给定了 $\{(u_j, v_j, h_j)\}_{j=0}^k \subseteq (B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^R) \times E^N \times E^R$ 并满足 (2.3.4)–(2.3.7)（对于$0 \leqslant j \leqslant k$），以及条件 $u_0 = v_0 = 0$ 和 $u_j = u_{j-1} + h_{j-1}$（若 $1 \leqslant j \leqslant k$），则

$$\{u_j\}_{j=0}^k, \{u_j + h_j\}_{j=0}^k, \{v_j\}_{j=0}^k \subseteq B_{E^r}(0, \delta_R) \subseteq B_{E^r}(0, \delta_r) \tag{2.3.13}$$

and

$$\|\Psi(u_j + h_j) - \Psi(u_j) - D\Psi(v_j)h_j\|_{F^s} \lesssim C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{j(s+\mu+r-2\beta)} \tag{2.3.14}$$

对所有 $s \in [r - \mu, R - \mu] \cap \mathbb{N}$。

为证明这一断言，我们首先使用 (2.3.1)。事实上，(2.3.1) 和 (2.3.7) 推出 $\|u_j\|_{E^r} \leqslant \|u_j\|_{E^\beta} \leqslant K_4 \|g\|_{F^\beta} < \frac{\delta_R}{2} \leqslant \frac{\delta_r}{2}$，(2.3.5) 和 (2.3.1) 推出 $\|v_j\|_{E^r} \leqslant \|v_j\|_{E^\beta} \leqslant K_2 \|g\|_{F^\beta} < \frac{\delta_R}{2} \leqslant \frac{\delta_r}{2}$ for $0 \leqslant j \leqslant k$，而 (2.3.4) 和 (2.3.1) 则对相同范围的 j 推出 $\|h_j\|_{E^r} \leqslant \|h_j\|_{E^\beta} \leqslant K_1(\|g\|_{F^\beta} + A_\beta \|g\|_{F^\beta}) = K_1(1 + A_\beta) \|g\|_{F^\beta} < \frac{\delta_R}{2} \leqslant \frac{\delta_r}{2^\circ}$ 这三个界共同推出包含关系 (2.3.13)。

既然（2.3.13）已经得证，我们便知道 $\Psi(u_j + h_j)$、$\Psi(u_j)$ 和 $D\Psi(v_j)$ 都定义良好。于是，我们可以利用微积分基本定理、泰勒定理以及$B_{E^r}(0, \delta_r)$的凸性，得到

$$\begin{aligned}\Psi(u_j + h_j) - \Psi(u_j) - D\Psi(v_j)h_j &= (D\Psi(u_j) - D\Psi(v_j))h_j + \int_0^1 (1-t)D^2\Psi(u_j + th_j)[h_j, h_j]dt \\ &= \int_0^1 D^2\Psi((1-t)v_j + tu_j)[h_j, u_j - v_j]dt + \int_0^1 (1-t)D^2\Psi(u_j + th_j)[h_j, h_j]dt = \mathbf{I}_j + \mathbf{II}_j.\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

利用定义 2.20 中映射假设给出的温和 C^2 估计，我们很容易推出对于 $r - \mu \leqslant s \in [\![N - \mu]\!]$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{I}_j\|_{F^s} \lesssim C_1 \langle \|u_j - v_j\|_{E^r} \rangle \|u_j - v_j\|_{E^{s+\mu}} \|h_j\|_{E^r} \\ + C_1 \langle \|v_j\|_{E^{s+\mu}} \rangle \|u_j - v_j\|_{E^r} \|h_j\|_{E^r} + C_1 \|u_j - v_j\|_{E^r} \|h_j\|_{E^{s+\mu}}\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

and

$$\|\mathbf{II}_j\|_{F^s} \lesssim C_1 \langle \|h_j\|_{E^r} \rangle \|h_j\|_{E^{s+\mu}} \|h_j\|_{E^r} + C_1 \langle \|u_j\|_{E^{s+\mu}} \rangle \|h_j\|_{E^r}^2 . \tag{2.3.17}$$

综合这些界，我们得到

$$\begin{aligned}\|\Psi(u_j + h_j) - \Psi(u_j) - D\Psi(v_j)h_j\|_{F^s} &\lesssim C_1 \langle \|u_j - v_j\|_{E^r} \rangle \|u_j - v_j\|_{E^{s+\mu}} \|h_j\|_{E^r} \\ &+ C_1 \|u_j - v_j\|_{E^r} \|h_j\|_{E^{s+\mu}} + C_1 \langle \|h_j\|_{E^r} \rangle \|h_j\|_{E^{s+\mu}} \|h_j\|_{E^r} \\ &+ C_1 \langle \|u_j, v_j\|_{E^{s+\mu}} \rangle \|h_j\|_{E^r} (\|h_j\|_{E^r} + \|u_j - v_j\|_{E^r})\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

对于 $r - \mu \leqslant s \in [\![N - \mu]\!]$。

接下来，我们来估计 u_j 和 v_j。注意，若 $1 \leqslant j \leqslant k$，则恒等式$u = \sum_{n=0}^{j-1} h_n$ 和（2.3.4）蕴含

$$\|u_j\|_{E^R} \leqslant \sum_{n=0}^{j-1} \|h_n\|_{E^R} \leqslant K_1(1 + A_\beta) \|g\|_{F^\beta} \sum_{n=0}^{j-1} 2^{n(R-\beta)} \lesssim K_1(1 + A_\beta) \|g\|_{F^\beta} 2^{j(R-\beta)}. \tag{2.3.19}$$

反过来，将这一结果与定义 2.11 中的平滑估计、引理 2.19 中的插值结果以及（2.3.7）结合起来，可得

$$\|v_j\|_{E^s} \lesssim \|u_j\|_{E^s} \lesssim \|u_j\|_{E^\beta}^{\frac{R-s}{R-\beta}} \|u_j\|_{E^R}^{\frac{s-\beta}{R-\beta}} \lesssim K_4^{\frac{R-s}{R-\beta}} (K_1(1 + A_\beta))^{\frac{s-\beta}{R-\beta}} \|g\|_{F^\beta} 2^{j(s-\beta)} \tag{2.3.20}$$

对所有 $s \in \mathbb{N} \cap [\beta, R]$。然而，(2.3.1) 表明 $K_4^{\frac{R-s}{R-\beta}} (K_1(1 + A_\beta))^{\frac{s-\beta}{R-\beta}} \|g\|_{F^\beta} \leqslant 1$，因此我们可以进一步给出 $\|v_j\|_{E^s} \lesssim \|u_j\|_{E^s} \lesssim 2^{j(s-\beta)}$ 的上界，对所有 $s \in \mathbb{N} \cap [\beta, R]$。

另一方面，由 (2.3.7) 和 (2.3.1) 可得，对所有 $s \in \mathbb{N} \cap [r, \beta]$，有 $\|v_j\|_{E^s} \lesssim \|u_j\|_{E^s} \lesssim \|u_j\|_{E^\beta} \lesssim K_4 \|g\|_{F^\beta} \lesssim 1$。结合这两者，我们得到

$$\|u_j\|_{E^s} + \|v_j\|_{E^s} \lesssim 2^{j \max\{0, s-\beta\}} \text{ for all } s \in \mathbb{N} \cap [r, R] \text{ and } 0 \leqslant j \leqslant k, \tag{2.3.21}$$

这里注意到，对于 $j = 0$，这些界是显然的，因为 $u_0 = v_0 = 0$。

现在，我们将 (2.3.18) 和 (2.3.21) 与 (2.3.4)–(2.3.7) 结合起来，从而对 $0 \leqslant j \leqslant k$ 和 $s \in \mathbb{N} \cap [r-\mu, R-\mu]$ 作出上界估计：

$$\begin{aligned}
&\|\Psi(u_j + h_j) - \Psi(u_j) - D\Psi(v_j)h_j\|_{F^s} \\
&\quad\lesssim C_1\langle K_3 \|g\|_{F^\beta} 2^{j(r-\beta)}\rangle K_3 \|g\|_{F^\beta} 2^{j(s+\mu-\beta)} \cdot K_1(1+A_\beta) \|g\|_{F^\beta} 2^{j(r-\beta)} \\
&\qquad + C_1 K_3 \|g\|_{F^\beta} 2^{j(r-\beta)} \cdot K_1(1+A_\beta) \|g\|_{F^\beta} 2^{j(s+\mu-\beta)} \\
&\quad + C_1\langle K_1(1+A_\beta) \|g\|_{F^\beta} 2^{j(r-\beta)}\rangle K_1(1+A_\beta) 2^{j(s+\mu-\beta)} \cdot K_1(1+A_\beta) 2^{j(r-\beta)} \\
&+ C_1\langle 2^{j \max\{0, s+\mu-\beta\}}\rangle K_1(1+A_\beta) \|g\|_{F^\beta} 2^{j(r-\beta)} \cdot (K_1(1+A_\beta) \|g\|_{F^\beta} 2^{j(r-\beta)} + K_3 \|g\|_{F^\beta} 2^{j(r-\beta)}).
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

对于最后一项，我们注意到

$$\begin{cases} r - \mu \leqslant s \leqslant \beta - \mu \Rightarrow 2r - 2\beta \leqslant s + \mu + r - 2\beta \\ \beta - \mu \leqslant s \leqslant R - \mu \Rightarrow s + \mu - \beta + 2r - 2\beta \leqslant s + \mu + r - 2\beta. \end{cases} \tag{2.3.23}$$

因此，重新组合各项并利用 (2.3.1)，我们便得到

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u_j + h_j) - \Psi(u_j) - D\Psi(v_j)h_j\|_{F^s} &\lesssim C_1(1+A_\beta)^2 K_1(K_1+K_3) \|g\|_{F^\beta}^2 2^{j(s+\mu+r-2\beta)} \\
&\lesssim C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{j(s+\mu+r-2\beta)}
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

对所有 $s \in \mathbb{N} \cap [r-\mu, R-\mu]$ 和 $0 \leqslant j \leqslant k$ 均成立。这就是 (2.3.14)，因此该命题的证明已完成。

步骤 3：递归恒等式。假设给定了 $\{(y_j,\ e_j)\}_{j=0}^k \subseteq F^N \times F^{R-\mu}$，且满足 $y_0 = 0$ 和递归条件

$$y_j = -S_j \sum_{n=0}^{j-1} e_n - \sum_{n=0}^{j-1} y_n \text{ for } 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{2.3.25}$$

我们断言

$$y_j = -S_j e_{j-1} - \Delta_{j-1} \sum_{n=0}^{j-2} e_n \text{ for } 2 \leqslant j \leqslant k. \tag{2.3.26}$$

为此，注意到由 (2.3.25) 可推出，对于任意 $1 \leqslant j \leqslant k$，恒等式 $\sum_{n=0}^{j} y_n = -S_j \sum_{n=0}^{j-1} e_n$ 成立。因此，对于 $2 \leqslant j \leqslant k$，我们有 $y_j = -S_j \sum_{n=0}^{j-1} e_n - S_{j-1} \sum_{n=0}^{j-2} e_n$；但根据 Δ_n 和 e_n 的定义，这与 $y_j = -S_j e_{j-1} - \Delta_{j-1} \sum_{n=0}^{j-2} e_n$ 相同，因此 (2.3.26) 成立。

步骤 4：序列的归纳构造。现在，我们将在对常数 K_1、K_2、K_3、K_4作出一些假设的基础上，尝试归纳构造所需的序列；这些假设将在后续推导中给出。

我们首先通过 $j = 0$ 初始化该序列，即构造其各项。定义 $u_0 = 0 \in B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^R$, $v_0 = S_0 u_0 = 0 \in E^N$, $y_0 = 0 \in F^N$, $f_0 = \Delta_0 g = S_1 g \in F^N$, $h_0 = L(u_0) f_0 = L(0) S_1 g \in E^R$，并令 $e_0 = \Psi(h_0) - \Psi(0) - f_0 \in F^{R-\mu}$。根据构造，当 $j = 0$ 时，对于 $K_2, K_3, K_4 > 0$ 的所有可能取值，界 (2.3.5)、(2.3.6) 和 (2.3.7) 显然成立。另一方面，

我们可以应用 ta　由映射假设得到 $L(0)$ 的估计，可知对于 $s \in \mathbb{N} \cap [r, R$],

$$\|h_0\|_{E^s} \leqslant C_2 \|S_1 g\|_{F^s} + C_2(1 + \|0\|_{E^{s+\mu}}) \|S_1 g\|_{F^r} \lesssim C_2 \|\Delta_0 g\|_{F^\beta} + C_2 \|g\|_{F^\beta} \\ \leqslant K_1 \left(\|g\|_{F^\beta} 2^{-0} + \|\Delta_j g\|_{F^\beta} \right) 2^{0(s-\beta)}, \quad (2.3.27)$$

前提是常数 K_1 满足上界

$$C_2 \lesssim K_1, \quad (2.3.28)$$

以下我们假设该条件成立。于是，对于 $j = 0$, (2.3.4) 成立。

现在我们继续进行归纳步骤。设 $k \in \mathbb{N}$ ，并假设

$$\{(u_j, v_j, h_j, y_j, f_j, e_j)\}_{j=0}^k \subseteq (B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^R) \times E^N \times E^R \times F^N \times F^N \times F^{R-\mu} \quad (2.3.29)$$

已给定，并且满足 $0 \leqslant j \leqslant k$ 的 (2.3.2)、(2.3.4)–(2.3.7)，以及在 $1 \leqslant j \leqslant k$ 时满足 (2.3.3)。我们将构造 (u_{k+1}, v_{k+1}, h_{k+1}, y_{k+1}, f_{k+1}, e_{k+1}) $\in (B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^R) \times E^N \times E^R \times F^N \times F^N \times F^{R-\mu}$，并证明 (2.3.4)–(2.3.7) 对 $j = k + 1$ 仍然成立。

首先，我们定义 $u_{k+1} = u_k + h_k \in E^R$。步骤 2 中确立的断言保证了$u_{k+1} \in B_r(0, \delta_R) \subseteq B_r(0, \delta_r)$。此外，我们可以使用望远镜求和论证得到 $u_{k+1} = u_{k+1} - u_0 = \sum_{n=0}^k h_n$。因此，步骤 1 中确立的断言表明

$$\|u_{k+1}\|_{E^\beta} \lesssim K_1 \Big(\sum_{n=0}^\infty \xi_n^2 \Big)^{1/2} \lesssim K_1 \|g\|_{F^\beta}, \quad (2.3.30)$$

在最后一个不等式中，我们使用了 Littlewood-Paley估计 (2.1.22)。因此，只要 K_1 和 K_4 满足以下条件， $u_{k+1} \in B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^R$ 就满足 (2.3.7)，其中 $j = k + 1$:

$$K_1 \lesssim K_4, \quad (2.3.31)$$

以下我们假设这一条件成立。

其次，我们定义 $v_{k+1} = S_{k+1} u_{k+1} \in E^N$。然后利用 (2.3.4) 和光滑估计 (2.1.17)– (2.1.20) 来估计

$$\|v_{k+1} - u_{k+1}\|_{E^R} = \|(I - S_{k+1}) u_{k+1}\|_{E^R} \lesssim \|u_{k+1}\|_{E^R} \leqslant \sum_{n=0}^k \|h_n\|_{E^R} \leqslant K_1 \sum_{n=0}^k \xi_n 2^{n(R-\beta)} \\ \leqslant K_1 \Big(\sum_{n=0}^\infty \xi_n^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^k 2^{2n(R-\beta)} \Big)^{1/2} \lesssim K_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{(k+1)(R-\beta)}. \quad (2.3.32)$$

另一方面，(2.3.30) 和光滑估计 (2.1.17)–(2.1.20) 表明

$$\|v_{k+1} - u_{k+1}\|_{E^0} = \|(I - S_{k+1}) u_{k+1}\|_{E^0} \lesssim 2^{-(k+1)\beta} \|(I - S_{k+1}) u_{k+1}\|_{E^\beta} \\ \lesssim 2^{-(k+1)\beta} \|u_{k+1}\|_{E^\beta} \lesssim K_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{-(k+1)\beta}. \quad (2.3.33)$$

结合这两个估计，并借助引理 2.19 进行插值，我们得到，对于 $s \in \mathbb{N} \cap [0, R]$,

$$\|v_{k+1} - u_{k+1}\|_{E^s} \lesssim \|v_{k+1} - u_{k+1}\|_{E^0}^{1-s/R} \|v_{k+1} - u_{k+1}\|_{E^R}^{s/R} \lesssim K_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{(k+1)(s-\beta)}, \quad (2.3.34)$$

因此，只要 K_1 和 K_3 满足以下条件， $v_{k+1} \in E^N$ 就满足 (2.3.6)，其中 $j = k + 1$:

$$K_1 \lesssim K_3, \quad (2.3.35)$$

以下我们均作此假设。

继续考虑 v_{k+1}，我们注意到，对于 $\beta \leqslant s \in [\![N]\!]$，可以利用定义 2.11 中的平滑估计来估计

$$\begin{aligned}\|v_{k+1}\|_{E^s} = \|S_{k+1}u_{k+1}\|_{E^s} &\lesssim 2^{(k+1)(s-\beta)} \|S_{k+1}u_{k+1}\|_{E^\beta} \lesssim 2^{(k+1)(s-\beta)} \|u_{k+1}\|_{E^\beta} \\ &\lesssim K_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{(k+1)(s-\beta)}, \quad (2.3.36)\end{aligned}$$

这里我们再次使用了 (2.3.30)。因此，只要 K_1 和 K_2 满足以下条件，v_{k+1} 对 $j = k+1$ 就满足上界 (2.3.5)：

$$K_1 \lesssim K_2, \tag{2.3.37}$$

我们从此假设这一点，而在此情形下，(2.3.1) 进而意味着

$$\|v_{k+1}\|_{E^r} \leqslant \|v_{k+1}\|_{E^\beta} \leqslant K_2 \|g\|_{F^\beta} < \delta_R. \tag{2.3.38}$$

第三，我们为项 $\{e_j\}_{j=0}^k$ 引入一些有用的估计。对于 $0 \leqslant j \leqslant k$，我们知道 $h_j = L(v_j) f_j$，因此根据 RI 映射假设，$f_j = D\Psi(v_j) h_j$。于是，我们可以调用步骤 2 中确立的结论，从而得到对于 $0 \leqslant j \leqslant k$，(2.3.14) 意味着

$$\begin{aligned}\|e_j\|_{F^s} = \|\Psi(u_j + h_j) - \Psi(u_j) - f_j\|_{F^s} &= \|\Psi(u_j + h_j) - \Psi(u_j) - D\Psi(v_j)h_j\|_{F^s} \\ &\lesssim C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{j(s+\mu+r-2\beta)} \quad (2.3.39)\end{aligned}$$

对所有 $s \in \mathbb{N} \cap [r-\mu, R-\mu]$ 均成立。

第四，我们来定义 y_{k+1}。若 $k = 0$，则直接令 $y_1 = -S_1 e_0 \in F^N$；若 $k \geqslant 1$，则令 $y_{k+1} = -S_{k+1} \sum_{n=0}^k e_n - \sum_{n=0}^k y_n \in F^N$。接着，我们可以调用步骤 3 中的结论，得到公式

$$y_j = -S_j e_{j-1} - \Delta_{j-1} \sum_{n=0}^{j-2} e_n \tag{2.3.40}$$

当 $1 \leqslant j \leqslant k+1$ 时成立，前提是我们将空范围上的求和视为零。接下来，我们利用 (2.3.39) 估计 y_{k+1}。首先，我们结合平滑算子性质与 (2.3.39) 来估计

$$\|S_{k+1}e_k\|_{F^s} \lesssim \begin{cases} \|e_k\|_{F^s} & \text{if } r-\mu \leqslant s \leqslant R-\mu \\ 2^{(k+1)(s-R+\mu)} \|e_k\|_{F^{R-\mu}} & \text{if } R-\mu \leqslant s \in [\![N]\!] \end{cases} \lesssim C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{k(s+\mu+r-2\beta)} \tag{2.3.41}$$

对每个 $r-\mu \leqslant s \in [\![N]\!]$ 都成立。同样，若 $k \geqslant 1$，则可利用 $R+r-2\beta > 0$ 这一事实来估计

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_k e_j \Big\|_{F^s} &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \|\Delta_k e_j\|_{F^s} \lesssim 2^{k(s-R+\mu)} \sum_{j=0}^{k-1} \|\Delta_k e_j\|_{F^{R-\mu}} \lesssim 2^{k(s-R+\mu)} \sum_{j=0}^{k-1} \|e_j\|_{F^{R-\mu}} \\ &\lesssim C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{k(s-R+\mu)} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j(R+r-2\beta)} \lesssim C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{k(s+\mu+r-2\beta)} \quad (2.3.42)\end{aligned}$$

对每个 $r-\mu \leqslant s \in [\![N]\!]$。综合 (2.3.40)、(2.3.41) 和 (2.3.42)，我们推得

$$\|y_{k+1}\|_{F^s} \lesssim C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{k(s+\mu+r-2\beta)} \tag{2.3.43}$$

对每个 $r-\mu \leqslant s \in [\![N]\!]$ 都成立。

作为倒数第二次更新，我们定义 $f_{k+1} = \Delta_{k+1} g + y_{k+1} \in F^N$。我们知道 v_{k+1} 满足 (2.3.38)，因此算子 $L(v_{k+1})$ 存在，并且可以通过设定 $h_{k+1} = L(v_{k+1}) f_{k+1} \in E^R$ 来完成最后一次更新。随后，$L(v_{k+1})$ 的温和估计给出上界

$$\|h_{k+1}\|_{E^s} \leqslant C_2(\|\Delta_{k+1}g\|_{F^s} + \|y_{k+1}\|_{F^s}) + C_2\langle \|v_{k+1}\|_{E^{s+\mu}} \rangle (\|\Delta_{k+1}g\|_{F^r} + \|y_{k+1}\|_{F^r}) \tag{2.3.44}$$

对于 $s \in \mathbb{N} \cap [r, R]$。根据我们上文已证明对 $j = k+1$ 成立的 (2.3.5) 以及 (2.3.1)，我们可以估计 $\|v_{k+1}\|_{E^{s+\mu}} \lesssim K_4 \|g\|_{F^\beta} 2^{(k+1)(s+\mu-\beta)} \lesssim 2^{(k+1)(s+\mu-\beta)}$。将此结果和 (2.3.43) 代入 (2.3.44)，即可得到

$$\begin{aligned}\|h_{k+1}\|_{E^s} &\lesssim C_2 \left(\|\Delta_{k+1} g\|_{F^\beta} 2^{(k+1)(s-\beta)} + C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{k(s+\mu+r-2\beta)} \right) \\ &\quad + C_2 \langle 2^{(k+1)(s+\mu-\beta)} \rangle \left(\|\Delta_{k+1} g\|_{F^\beta} 2^{(k+1)(r-\beta)} + C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{k(2r+\mu-2\beta)} \right) \\ &\lesssim C_2(1+C_1) 2^{(k+1)(s-\beta)} (\|\Delta_{k+1} g\|_{F^\beta} (2^{(k+1)(r-s)} + 2^{(k+1)(\mu+r-\beta)}) \\ &\quad + \|g\|_{F^\beta} (2^{(k+1)(\mu+r-\beta)} + 2^{(k+1)(\mu+2r-s-\beta)} + 2^{(k+1)(2r+2\mu-\beta)}). \quad (2.3.45)\end{aligned}$$

为了合并所有指数，我们回顾一下 $r - s \leqslant 0$ 和 $1 = \beta - 2r - 2\mu > 0$，它们表明 $\mu + r - \beta \leqslant 2\mu + 2r - \beta = -1 \leqslant 0$ 和 $\mu + 2r - s - \beta \leqslant \mu + r - \beta \leqslant -1$。因此，前面的估计意味着 $\|h_{k+1}\|_{E^s} \lesssim C_2(1+C_1) 2^{(k+1)(s-\beta)} (\|\Delta_{k+1} g\|_{F^\beta} + \|g\|_{F^\beta} 2^{-(k+1)})$，由此我们推得，对于 $j = k+1$， h_{k+1} 满足 (2.3.4)，前提是 K_1 满足

$$C_2(1 + C_1) \lesssim K_1, \quad (2.3.46)$$

我们假设该条件成立。

我们现在已经为 K_1、K_2、K_3 和 K_4 建立了充分条件，以构造 $(u_{k+1}, v_{k+1}, h_{k+1}, y_{k+1}, f_{k+1}, e_{k+1}) \in (B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^R) \times E^N \times E^R \times F^N \times F^N \times F^{R-\mu}$，即 (2.3.28)、(2.3.31)、(2.3.35)、(2.3.37) 和 (2.3.46)。满足这些条件的参数很容易选取，因此只要选定这些参数，归纳步骤就完成了。由此我们得到了所需的序列。注意，如上所述，(2.3.8) 可由步骤 2 中得到的断言推出。

步骤 5：序列的收敛。利用步骤 4 得到的序列，我们结合 $0 \leqslant \ell \leqslant k$ 使用步骤 1 中的断言，并利用 $u_{k+1} - u_\ell = \sum_{n=\ell}^k h_\ell$ 这一事实，得到

$$\|u_{k+1} - u_\ell\|_{E^\beta} \leqslant \sum_{n=\ell}^k \|h_n\|_{E^\beta} \lesssim K_1 \Big(\sum_{n=\ell}^\infty \|g\|_{F^\beta}^2 2^{-2n} + \|\Delta_n g\|_{F^\beta}^2 \Big)^{1/2} \to 0 \quad (2.3.47)$$

如 $\ell \to \infty$。因此， $\{u_j\}_{j=0}^\infty$ 是 E^β 中的柯西序列，故收敛到某个 $u \in E^\beta$。将 $j \to \infty$ 代入（2.3.7）可得 $\|u\|_{E^\beta} \leqslant K_4 \|g\|_{F^\beta}$。

只需证明 $\Psi(u) = g$。为此，我们再次作望远镜求和，并利用 $\Psi(0) = \Psi(u_0) = 0$ 以及（2.3.3），对 $k \geqslant 2$ 可写为：

$$\begin{aligned}\Psi(u_{k+1}) &= \sum_{j=0}^k (\Psi(u_{k+1}) - \Psi(u_k)) = \sum_{j=0}^k (\Psi(u_k + h_k) - \Psi(u_k)) = \sum_{j=0}^k (e_j + f_j) \\ &= \sum_{j=0}^k \Delta_j g + \sum_{j=0}^k e_j + \sum_{j=0}^k y_j = S_{k+1} g + \sum_{j=0}^k e_j - S_k \sum_{j=0}^{k-1} e_j = S_{k+1} g + e_k + (I - S_k) \sum_{j=0}^{k-1} e_j. \quad (2.3.48)\end{aligned}$$

现在，根据定义 2.11 中给出的平滑算子的性质，我们知道，当 $k \to \infty$ 时， $\|(I - S_{k+1}) g\|_{F^\beta} \to 0$，而 (2.3.8) 表明

$$\|e_k\|_{F^{\beta-\mu}} \lesssim C_1 \|g\|_{F^\beta} 2^{k(r-\beta)} \to 0 \text{ as } k \to \infty \quad (2.3.49)$$

并且（注意到 $\beta-\mu-1\geqslant 2r+\mu\geqslant 1$）

$$\Big\|(I-S_k)\sum_{j=0}^{k-1}e_j\Big\|_{F^{\beta-\mu-1}}\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\|(I-S_k)e_j\|_{F^{\beta-\mu-1}}\lesssim 2^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}\|(I-S_k)e_j\|_{F^{\beta-\mu}}$$
$$\lesssim C_1\|g\|_{F^\beta}2^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}2^{j(r-\beta)}\lesssim C_1\|g\|_{F^\beta}2^{-k}\to 0\text{ as }k\to\infty.\quad(2.3.50)$$

综合这些结果，我们发现 $\|\Psi(u_{k+1})-g\|_{F^{\beta-\mu-1}}\to 0$ 当 $k\to\infty$ 时；但由于 $u_k\to u$ 在 E^β中，当 $k\to\infty$时， Ψ 的连续性保证 $\Psi(u_{k+1})\to\Psi(u)$ 在 $F^{\beta-\mu}$中。因此， $\Psi(u)=g$。

步骤 6：更高正则性。设 $\mathbb{N}\ni\mathrm{v}\leqslant R+r-2\beta$，并进一步假设 $g\in F^{\beta+\mathrm{v}}$。我们希望证明在步骤 5 中构造的解 $u\in E^\beta$ 实际上属于 $E^{\beta+\mathrm{v}}$，并满足 $\|u\|_{E^{\beta+\mathrm{v}}}\lesssim\|g\|_{F^{\beta+\mathrm{v}}}$。我们将通过有限归纳法来证明这一点。需要通过归纳法证明的命题是下面这个依赖于 $\nu\in\{0,1,\dots,\mathrm{v}\}$的陈述：若 $j\in\mathbb{N}$且 $s\in\mathbb{N}\cap[r,R]$，则

$$\|h_j\|_{E^s}\lesssim 2^{j(s-(\beta+\nu))}(\|\Delta_j g\|_{F^{\beta+\nu}}+2^{-j}\|g\|_{F^{\beta+\nu}})\quad(2.3.51)$$

对于一个依赖于 ν 的隐含常数，以及 K_1、.....、K_4、 A_β， $A_{\beta+\nu}$、 μ、 r、 δ_R 和 R。情形 $\nu=0$ 已在第四步中确立，特别是在验证 (2.3.4) 时。现在假设对于某个 $\nu\in\{0,1,\dots,\mathrm{v}-1\}$，归纳假设 (2.3.51) 在层级 ν 上成立。我们希望证明它在层级 $\nu+1$ 上也成立。

我们先仿照步骤 1，推导序列 $\{u_j\}_{j=0}^\infty$的改进界。对于$n\in\mathbb{N}$，我们令 $\xi_n^\nu=\|\Delta_n g\|_{F^{\beta+\nu}}+2^{-n}\|g\|_{F^{\beta+\nu}}$。按照第一步中的论证，我们可以证明，对任意 $0\leqslant j\leqslant k$，都有如下估计

$$\Big\|\sum_{n=\ell}^k h_n\Big\|_{E^{\beta+\nu}}\lesssim\Big(\sum_{n=\ell}^k(\xi_n^\nu)^2\Big)^{1/2}.\quad(2.3.52)$$

由于 $g\in F^{\beta+\mathrm{v}}$，由 (2.1.22) 可得 $\{\xi_n^\nu\}_{n=0}^\infty\in\ell^2(\mathbb{N})$；因此，部分和序列$\{\sum_{n=0}^j h_n\}_{j=0}^\infty\subset E^{\beta+\nu}$是柯西序列。我们已经证明该方案收敛，因此 $u=\sum_{n=0}^\infty h_j$ 属于 E^β。因此， $u\in E^{\beta+\nu}$，并且由 (2.3.52) 可得，对所有 $j\in\mathbb{N}$

$$\|u_j\|_{E^{\beta+\nu}}\lesssim\Big(\sum_{n=0}^{j-1}(\xi_n^\nu)^2\Big)^{1/2}\lesssim\|g\|_{F^{\beta+\nu}}.\quad(2.3.53)$$

现在我们推导序列 $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的改进界。由平滑算子的性质 (2.1.17) 和 (2.1.18)，以及 (2.3.53) 中的改进界，可得对 $\beta+\nu\leqslant s\in[\![N]\!]$ 有

$$\|v_j\|_{E^s}=\|S_j u_j\|_{E^s}\lesssim 2^{j(s-(\beta+\nu))}\|u_j\|_{E^{\beta+\nu}}\lesssim 2^{j(s-(\beta+\nu))}\|g\|_{F^{\beta+\nu}}.\quad(2.3.54)$$

接下来，我们对序列 $\{u_j-v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 给出上界。根据引理 2.19，对于 $s\in\mathbb{N}\cap[0,R]$，我们有如下上界：

$$\|u_j-v_j\|_{E^s}\lesssim\|u_j-v_j\|_{E^0}^{1-s/R}\|u_j-v_j\|_{E^R}^{s/R}.\quad(2.3.55)$$

对于 E^0-范数项，我们利用平滑算子的性质 (2.1.17) 和 (2.1.19)，以及估计 (2.3.53) 来给出上界：

$$\|u_j-v_j\|_{E^0}=\|(I-S_j)u_j\|_{E^0}\lesssim 2^{-j(\beta+\nu)}\|u_j\|_{E^{\beta+\nu}}\lesssim 2^{-j(\beta+\nu)}\|g\|_{E^{\beta+\nu}}.\quad(2.3.56)$$

另一方面， E^R 项通过 (2.1.17)、望远镜恒等式 $u_j = \sum_{n=0}^{j-1} h_n$、归纳假设 (2.3.51) 以及上界 $\xi_n^\nu \lesssim \|g\|_{F^{\beta+\nu}}$ 来处理：

$$\|u_j - v_j\|_{E^R} \leqslant \sum_{n=0}^{j-1} \|(I - S_j)h_n\|_{E^R} \lesssim \sum_{n=0}^{j-1} \|h_n\|_{E^R} \lesssim \|g\|_{F^{\beta+\nu}} \sum_{n=0}^{j-1} 2^{n(R-(\beta+\nu))} \lesssim 2^{j(R-(\beta+\nu))} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}. \tag{2.3.57}$$

我们综合 (2.3.55)、(2.3.56) 和 (2.3.57)，得到

$$\|u_j - v_j\|_{E^s} \lesssim 2^{j(s-(\beta+\nu))} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}. \tag{2.3.58}$$

接下来，我们要为序列 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 推导更精细的界。我们转而使用关于 $s \in [r-\mu, R-\mu] \cap \mathbb{N}$ 的估计 (2.3.18)。为处理右端，我们调用以下界：

$$\begin{aligned} \max\{\|u_j - v_j\|_{E^r}, \|h_j\|_{E^r}\} &\lesssim 2^{j(r-\beta)} \min\{1, 2^{-j\nu} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}\}, \\ \max\{\|u_j - v_j\|_{E^{s+\mu}}, \|h_j\|_{E^{s+\mu}}\} &\lesssim 2^{j(s+\mu-\beta)} \min\{1, 2^{-j\nu} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}\}, \\ \|u_j, v_j\|_{E^{s+\mu}} &\lesssim 2^{j \max\{0, s+\mu-\beta\}}, \end{aligned} \tag{2.3.59}$$

这些界是 (2.3.4)、(2.3.6)、(2.3.1)、(2.3.51)、(2.3.58) 以及最后的 (2.3.21) 的推论。由此我们得到估计

$$\|e_j\|_{F^s} \lesssim 2^{j(s+\mu+r-2\beta-\nu)} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}. \tag{2.3.60}$$

现在我们估计序列 $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$。为此，我们回顾恒等式 (2.3.26)。如同在 (2.3.41) 中那样进行论证，但使用 (2.3.60) 中为 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 建立的界，我们得知，对于 $j \in \mathbb{N}$ and$r - \mu \leqslant s \in [\![N]\!]$

$$\|S_{j+1} e_j\|_{F^s} \lesssim 2^{j(s+\mu+r-2\beta-\nu)} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}. \tag{2.3.61}$$

类似地，按照 (2.3.42) 中的论证，但改用 (2.3.60) 以及 $R + r - 2\beta - \nu > 0$ 这一事实（因为 $\nu < \mathfrak{v}$），我们得到如下上界

$$\Big\| \sum_{n=0}^{j-1} \Delta_j e_n \Big\|_{F^s} \lesssim 2^{j(s+\mu+r-2\beta-\nu)} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}. \tag{2.3.62}$$

结合 (2.3.61) 和 (2.3.62)，可知对于 $j \in \mathbb{N}$ 和 $r - \mu \leqslant s \in [\![N]\!]$,

$$\|y_j\|_{F^s} \lesssim 2^{(j-1)(s+\mu+r-2\beta-\nu)} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}. \tag{2.3.63}$$

最后，我们可以对序列 $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 得到更好的估计，并结束归纳。利用恒等式 $h_j = L(v_j)(\Delta_j g + y_j)$以及方程 (2.2.2) 的右逆估计，我们得到对于 $j \in \mathbb{N}$,

$$\|h_j\|_{E^s} \lesssim \|\Delta_j g\|_{F^s} + \|y_j\|_{F^s} + \langle \|v_j\|_{E^{s+\mu}} \rangle (\|\Delta_j g\|_{F^r} + \|y_j\|_{E^r}) \text{ for } s \in [r, R] \cap \mathbb{N}. \tag{2.3.64}$$

根据 (2.3.63) 的改进估计来估计 $\|y_j\|_{F^s}$ 和 $\|y_j\|_{F^r}$； $\Delta_j g$ 范数则通过平滑估计 (2.1.20) 处理，即对于 $k \in \{r, s\}$，有 $\|\Delta_j g\|_{F^k} = 2^{j(k-(\beta+\nu+1))} \|\Delta_j g\|_{F^{\beta+\nu+1}}$；而 v_j项在 $s \leqslant \beta$ 的情况下根据 (2.1.17) 和 (2.3.7) 估计，否则通过 (2.3.5) 估计。因此，估计 (2.3.64) 给出

$$\begin{aligned} \|h_j\|_{E^s} \lesssim{}& 2^{j(s-(\beta+\nu+1))} \|\Delta_j g\|_{F^{\beta+\nu+1}} + 2^{j(s+\mu+r-2\beta-\nu)} \|g\|_{F^{\beta+\nu}} \\ &+ \langle 2^{j(s-\beta)} \rangle (2^{j(r-(\beta+\nu+1))} \|\Delta_j g\|_{F^{\beta+\nu+1}} + 2^{j(\mu+2r-2\beta-\nu)} \|g\|_{F^{\beta+\nu}}). \end{aligned} \tag{2.3.65}$$

重新分组后，我们得到上界

$$\begin{aligned} \|h_j\|_{E^s} \lesssim{}& 2^{j(s-(\beta+\nu+1))} (1 + \langle 2^{j(s-\beta)} \rangle 2^{j(r-s)}) \|\Delta_j g\|_{F^{\beta+\nu+1}} \\ &+ 2^{j(s-(\beta+\nu+1))} 2^{-j} (2^{j(2+\mu+r-\beta)} + \langle 2^{j(s-\beta)} \rangle 2^{j(2+\mu+2r-\beta-s))}) \|g\|_{F^{\beta+\nu}}. \end{aligned} \tag{2.3.66}$$

由于 $r \leqslant \min\{s, \beta\}$，我们有

$$1 + \langle 2^{j(s-\beta)} \rangle 2^{j(r-s)} \lesssim 1. \tag{2.3.67}$$

不等式 $1 \leqslant \mu + r$ 和 $2(\mu + r) < \beta$ 意味着

$$2^{j(2+\mu+r-\beta)} \lesssim 1. \tag{2.3.68}$$

不等式 $\mu \geqslant 1$ 意味着 $\min\{2\beta, s+\beta\} \geqslant \beta \geqslant 1 + 2(\mu + r) \geqslant 2 + \mu + 2r$，因此

$$\langle 2^{j(s-\beta)} \rangle 2^{j(2+\mu+2r-\beta-s)} \lesssim 1. \tag{2.3.69}$$

结合不等式 (2.3.66)、(2.3.67)、(2.3.68) 和 (2.3.69)，可得

$$\|h_j\|_{E^s} \lesssim 2^{j(s-(\beta+\nu+1))}(\|\Delta_j g\|_{F^{\beta+\nu+1}} + 2^{-j}\|g\|_{F^{\beta+\nu}}). \tag{2.3.70}$$

这意味着归纳命题 (2.3.51) 已对 $\nu + 1$ 得到验证，因此归纳法已经完成。因此，我们知道 (2.3.51) 对 $\nu = \mathfrak{n}$ 成立。接着，我们对序列 $\{\xi_n^{\mathfrak{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 采用与 (2.3.52) 和 (2.3.53) 中相同的论证，推得 $u \in E^{\beta+\mathfrak{n}}$，并得到估计 $\|u\|_{E^{\beta+\mathfrak{n}}} \lesssim \|g\|_{F^{\beta+\mathfrak{n}}}$。□

现在，我们用以下局部单射性结果补充前面的局部满射性结果。Baldi 和 Haus [5] 的工作中没有与之对应的结果，但它类似于 Hamilton [40]的一个结果。我们强调，以下只需要左逆，以及比 LRI 映射假设中更弱形式的温和估计。

定理 2.26（局部单射性）。设 $\mathbf{E} = \{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 和 $\mathbf{F} = \{F^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 是定义在同一域上的巴拿赫尺度，并且 $\mathbf{E}$ 按照定义 *2.2* 的意义是终端稠密的。设 σ，$\mu \in \mathbb{N}$ 满足 $\sigma + \mu \in [\![N]\!]$。假设存在 $\gamma_\sigma \in \mathbb{R}^+$ 以及一个 C^2 映射 $\Psi\colon B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma) \to F^\sigma$，使得以下条件成立。

(1) 对每个 $u_0 \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma)$，我们都有上界

$$\left\|D^2\Psi(u_0)[v, w]\right\|_{F^\sigma} \lesssim \langle \|u_0\|_{E^{\sigma+\mu}} \rangle \left(\|v\|_{E^{\sigma+\mu}} \|w\|_{E^\sigma} + \|v\|_{E^\sigma} \|w\|_{E^{\sigma+\mu}}\right). \tag{2.3.71}$$

(2) 对每个 $u_0 \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma) \cap E^N$，存在一个有界线性算子 $L(u_0)\colon F^\sigma \to E^\sigma$，满足以下两个条件。

(a) $L(u_0)D\Psi(u_0)v = v$ 对每个 $v \in E^{\sigma+\mu}$ 均成立。*(b)* 我们有估计 $\|L(u_0)f\|_{E^\sigma} \lesssim \langle \|u_0\|_{E^{\sigma+\mu}} \rangle \|f\|_{F^\sigma}$，对每个 $f \in F^\sigma$ 均成立。

那么存在 $0 < \delta_{\mathrm{inj},\sigma} \leqslant \gamma_\sigma/4$，使得若 $u_0 - u_1 \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, 2\delta_{\mathrm{inj},\sigma})$，且对于 $i \in \{0, 1\}$，有 $u_i \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma)$，则

$$\|u_1 - u_0\|_{E^\sigma} \lesssim \|\Psi(u_1) - \Psi(u_0)\|_{F^\sigma}. \tag{2.3.72}$$

特别地，限制 $\Psi\colon B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \delta_{\mathrm{inj},\sigma}) \to F^\sigma$ 是单射。

证明。首先假设对于某个 $0 < \delta \leqslant \gamma_\sigma/4$，$u_0 - u_1 \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, 2\delta) \cap E^N$ 和 $u_i \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma)$。我们可以利用泰勒定理写出

$$\Psi(u_1) - \Psi(u_0) = D\Psi(u_0)(u_1 - u_0) + \int_0^1 (1-t)D^2\Psi((1-t)u_0 + tu_1)[u_1 - u_0, u_1 - u_0]\,\mathrm{d}t, \tag{2.3.73}$$

其中需要理解的是，该等式在空间 F^σ 中成立。接着，我们应用有界线性映射 $L(u_0)\colon F^\sigma \to E^\sigma$，并重新排列，得到

$$u_1 - u_0 = L(u_0)\Big(\Psi(u_1) - \Psi(u_0) - \int_0^1 (1-t)D^2\Psi((1-t)u_0 + tu_1)[u_1 - u_0, u_1 - u_0]\,\mathrm{d}t\Big). \tag{2.3.74}$$

接下来，我们将恒等式 (2.3.74) 与关于 $L(u_0)$ 的估计以及平凡上界 $\langle \|u_0\|_{E^{\sigma+\mu}} \rangle \lesssim 1$结合，得到

$$\|u_1 - u_0\|_{E^\sigma} \lesssim \|\Psi(u_1) - \Psi(u_0)\|_{F^\sigma} + \int_0^1 (1-t) \left\| D^2\Psi((1-t)u_0 + tu_1)[u_1 - u_0, u_1 - u_0] \right\|_{F^\sigma} \, \mathrm{d}t. \tag{2.3.75}$$

对于后一项，我们使用 C^2 估计来给出上界

$$\begin{aligned} &\left\| D^2\Psi((1-t)u_0 + tu_1)[u_1 - u_0, u_1 - u_0] \right\|_{F^\sigma} \lesssim \\ &\qquad \langle \|(1-t)u_0 + tu_1\|_{E^{\sigma+\mu}} \rangle \|u_1 - u_0\|_{E^{\sigma+\mu}} \|u_1 - u_0\|_{E^\sigma} \lesssim \|u_1 - u_0\|_{E^{\sigma+\mu}} \|u_1 - u_0\|_{E^\sigma} \end{aligned} \tag{2.3.76}$$

对每个 $t \in [0,1]$均成立。随后将此上界代入 (2.3.75)，得到

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_0\|_{E^\sigma} &\lesssim \|\Psi(u_1) - \Psi(u_0)\|_{F^\sigma} + \|u_1 - u_0\|_{E^{\sigma+\mu}} \|u_1 - u_0\|_{E^\sigma} \\ &\lesssim \|\Psi(u_1) - \Psi(u_0)\|_{F^\sigma} + \delta \|u_1 - u_0\|_{E^\sigma}. \end{aligned} \tag{2.3.77}$$

由此可直接推出存在 $0 < \delta_{\mathrm{inj}} \leqslant \gamma_\sigma/4$，使得若 $\delta \leqslant \delta_{\mathrm{inj}}$，则可将最右侧的项吸收到左侧，从而得出

$$\|u_1 - u_0\|_{E^\sigma} \lesssim \|\Psi(u_1) - \Psi(u_0)\|_{F^\sigma} \text{ for all } u_0 - u_1 \in B_{\sigma+\mu}(0, 2\delta_{\mathrm{inj}}) \cap E^N. \tag{2.3.78}$$

估计 (2.3.78) 并非完全是所需结果，因为它要求 $u_0, u_1 \in E^N$，但我们可以利用 E 终端稠密这一事实来推广该结果。事实上，给定 $u_0, u_1 \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma)$，使得 $u_0 - u_1 \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, 2\delta_{\mathrm{inj}})$，我们可以选取 $\{u_i^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^N$，使得对于 $i \in \{0,1\}$，$u_i^n \to u_i$ 属于 $E^{\sigma+\mu}$。由于 $B_{E^{\sigma+\mu}}(0, 2\delta_{\mathrm{inj}})$ 和 $B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma)$ 是开集，不失一般性，我们可以假设 $\{u_0^n - u_1^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{E^{\sigma+\mu}}(0, 2\delta_{\mathrm{inj}})$，且对于 $i \in \{0,1\}$, $\{u_i^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma)$, $\cap E^N$。随后对该序列应用 (2.3.78)，可得 $\|u_1^n - u_0^n\|_{E^\sigma} \lesssim \|\Psi(u_1^n) - \Psi(u_0^n)\|_{F^\sigma}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。令 $n \to \infty$ 趋于极限，并利用 $\Psi\colon B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma) \to F^\sigma$ 的连续性，我们推出对于所有 $u_0 - u_1 \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, 2\delta_{\mathrm{inj}})$, $\|u_1 - u_0\|_{E^\sigma} \lesssim \|\Psi(u_1) - \Psi(u_0)\|_{F^\sigma}$ 均成立，其中 $u_0, u_1 \in B_{E^{\sigma+\mu}}(0, \gamma_\sigma)$，这就是 (2.3.72)。□

2.4. 反函数定理的证明。现在我们可以开始证明反函数定理了。证明将分别在条件 I 和 II 下给出。

定理 *2.21* 的证明，假设 I。假设条件 I 成立，即 **E** 和 **F** 均可由 LP 光滑化。

首先注意到，引理 2.18 蕴含**E** 是终端稠密的。这一点以及定义 2.20 中的 LRI 映射假设，蕴含了定理 2.26 在 $\sigma = \beta - \mu$ 和$\gamma_\sigma = \delta_R \leqslant \delta_r$. 下的假设。令 $\delta_{\mathrm{inj},\sigma} > 0$ 为定理 2.26 中的常数。那么该定理告诉我们，$\Psi\colon B_{E^\beta}(0, \delta_{\mathrm{inj},\sigma}) \to F^{\beta-\mu}$是单射，并满足估计 (2.3.72)。

另一方面，根据假设，我们知道不等式 $2(r+\mu) < \beta < (r+R)/2$ 成立。令 K_1, K_2, K_3和 K_4 为定理 2.25 中的常数，并令 $\varepsilon_{\mathrm{surj}} > 0$ 表示 (2.3.1) 右侧出现的常数。那么定理 2.25 保证，对于每个$g \in B_{F^\beta}(0, \varepsilon_{\mathrm{surj}})$，都存在 $u \in E^\beta$满足 $\Psi(u) = g$以及上界

$$\|u\|_{E^\beta} \leqslant K_4 \|g\|_{F^\beta}. \tag{2.4.1}$$

令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{\mathrm{surj}}, \delta_{\mathrm{inj},\sigma}/K_4\}$, $\kappa_1 = K_4$和 $\kappa_2 > 0$ 为 (2.3.72) 右侧的常数。由于$\kappa_1\varepsilon \leqslant \delta_{\mathrm{inj},\sigma}$，上述分析表明，对于每个 $g \in B_{F^\beta}(0, \varepsilon)$，都存在唯一的 $u \in B_{E^\beta}(0, \kappa_1\varepsilon)$，使得 $\Psi(u) = g$。此外，根据 (2.4.1) 和 (2.3.72)，诱导映射 $\Psi^{-1}\colon B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \to \Psi^{-1}(B_{F^\beta}(0,\varepsilon)) \cap B_{E^\beta}(0, \kappa_1\varepsilon)$ 满足 (2.2.4) 和 (2.2.7)。

现在假设 $\mathbb{N} \ni \nu \leqslant R + r - 2\beta$。由定理 2.25 的第四项，我们推得 (2.2.5) 和 (2.2.6)，即逆映射 Ψ^{-1} 将 $B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^{\beta+\nu}$映射为 $E^{\beta+\nu}$，且满足温和估计$\|\Psi^{-1}(g)\|_{E^{\beta+\nu}} \lesssim \|g\|_{F^{\beta+\nu}}$。□

要在假设 II 下证明反函数定理，需要采用类似但稍微复杂一些的论证。

定理 *2.21* 的证明，假设 II。假设条件 II 成立，即$\mathbf{E}$ 是温和的，且$\mathbf{F}$ 是$\mathbf{E}$的直和项。

由于$\mathbf{E}$ 是温和的，因此存在一个 LP-可光滑化巴拿赫尺度$\mathbf{G}=\{G^s\}_{s\in[\![N]\!]}$，使$\mathbf{E}$ 成为$\mathbf{G}$ 的驯性直和项，并配有提升算子和限制算子 $\lambda_{\mathbf{E}}\colon E^0\to G^0$ 以及 $\rho_{\mathbf{E}}\colon G^0\to E^0$。同样，由于$\mathbf{F}$ 是$\mathbf{E}$ 的驯性直和项，我们可以选取相应的提升算子和限制算子 $\lambda_{\mathbf{F}}\colon F^0\to E^0$ 以及 $\rho_{\mathbf{F}}\colon E^0\to F^0$。

继续之前，我们需要引入三个记号。首先，为明确起见，我们定义$\mathbf{H}=\mathbf{G}^3,$，并赋予其 2–范数；根据引理 2.17，这使$\mathbf{H}$ 成为一个 LP-可光滑化巴拿赫尺度。接下来，对于 $s\in[\![N]\!]$，记作 $Q_s=\|\rho_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(G^s;E^s)}$。由此构造可得

$$\rho_{\mathbf{E}}(B_{G^s}(0,\delta/Q_s))\subseteq B_{E^s}(0,\delta)\text{ for all }s\in[\![N]\!],0<\delta. \tag{2.4.2}$$

第三，我们定义映射 $\Phi\colon B_{H^r}(0,\delta_r/Q_r)\to G^{r-\mu}$ 如下：

$$\Phi(u,v,w)=\lambda_{\mathbf{E}}(\lambda_{\mathbf{F}}\Psi(\rho_{\mathbf{E}}u)+(I-\lambda_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{F}})\rho_{\mathbf{E}}v)+(I-\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}})w, \tag{2.4.3}$$

根据 (2.4.2) 以及 $\Psi\colon B_{E^r}(0,\delta_r)\to F^{r-\mu}$这一事实，该映射定义良好。

现在我们声称，($\mathbf{H}$,$\mathbf{G}$ Φ) 满足带参数 (μ,r,R) 的 RI 映射假设。显然，$\Phi(0)=0$。现在令 $r-\mu\leqslant s\in[\![N-\mu]\!]$。根据 Ψ 的映射性质以及提升算子和限制算子的性质，我们很容易推出 $\Phi\colon B_{H^r}(0,\delta_r/Q_r)\cap H^{s+1}\to G^s$ 是 C^2，并且满足

$$D\Phi(u_0,v_0,w_0)(a,b,c)=\lambda_{\mathbf{E}}(\lambda_{\mathbf{F}}D\Psi(\rho_{\mathbf{E}}u_0)\rho_{\mathbf{E}}a+(I-\lambda_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{F}})\rho_{\mathbf{E}}b)+(I-\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}})c \tag{2.4.4}$$

and

$$D^2\Phi(u_0,v_0,w_0)[(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)]=\lambda_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{F}}D^2\Psi(\rho_{\mathbf{E}}u_0)[\rho_{\mathbf{E}}a_1,\rho_{\mathbf{E}}a_2]. \tag{2.4.5}$$

进而，$D^2\Psi$ 的温和 C^2 估计以及 (2.4.5) 推出

$$\begin{aligned}&\left\|D^2\Phi(u_0,v_0,w_0)[(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)]\right\|_{H^s}\\&\quad\leqslant C_1'(s)[\|(a_1,b_1,c_1)\|_{H^{s+\mu}}\|(a_2,b_2,c_2)\|_{H^r}+\|(a_1,b_1,c_1)\|_{H^r}\|(a_2,b_2,c_2)\|_{H^{s+\mu}}]\\&\qquad+C_1'(s)\left\langle\|(u_0,v_0,w_0)\|_{H^{s+\mu}}\right\rangle\|(a_1,b_1,c_1)\|_{H^r}\|(a_2,b_2,c_2)\|_{H^r}\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

for

$$C_1'(s)=C_1(s)\,\|\lambda_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}(F^s;G^s)}\,(1+Q_{s+\mu})(Q_r+Q_r^2). \tag{2.4.7}$$

这就证明了 RI 映射假设的第一项和第二项。

为完成该命题的证明，尚需证明 RI 映射假设的第三项成立。令 $0<\delta_R\leqslant\delta_r$ 为 RI 映射假设针对 ($\mathbf{E}$,$\mathbf{F}$ Ψ) 给出的映射。对于 $(u_0,v_0,w_0)\in B_{H^r}(0,\delta_R/Q_R)\cap H^N$，我们定义有界线性算子 $\Lambda(u_0,v_0,w_0)\colon G^s\to H^s$，其中 $r\leqslant s\leqslant R$，定义如下：

$$\Lambda(u_0,v_0,w_0)\xi=(\lambda_{\mathbf{E}}L(\rho_{\mathbf{E}}u_0)\rho_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{E}}\xi,\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}}\xi,\xi), \tag{2.4.8}$$

由于只要 $(u_0,v_0,w_0)\in B_{H^r}(0,\delta_R/Q_R)\cap H^N$，就有 $\rho_{\mathbf{E}}u_0\in B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^N$，因此其定义良好。现在我们利用 (2.4.4) 和恒等式$\rho_{\mathbf{F}}\lambda_{\mathbf{F}}=1$ 及 $\rho_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{E}}=1$，验证 $\Lambda(u_0,v_0,w_0)$ 是 $D\Phi(u_0,v_0,w_0)$ 的右逆：

$$\begin{aligned}&D\Phi(u_0,v_0,w_0)L(u_0,v_0,w_0)\xi=\lambda_{\mathbf{E}}(\lambda_{\mathbf{F}}D\Psi(\rho_{\mathbf{E}}u_0)\rho_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{E}}L(\rho_{\mathbf{E}}u_0)\rho_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{E}}\xi+(I-\lambda_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{F}})\rho_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}}\xi)\\&+(I-\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}})\xi=\lambda_{\mathbf{E}}(\lambda_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{E}}\xi+(I-\lambda_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{F}})\rho_{\mathbf{E}}\xi)+(I-\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}})\xi=\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}}\xi+(I-\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}})\xi=\xi\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

对所有 $\xi \in G^r$。此外，对于 $\xi \in G^s$， $L(u_0)$ 的温和估计使我们能够对其作上界估计

$$\begin{aligned}\|\Lambda(u_0,v_0,w_0)\xi\|_{H^s} &= \|\lambda_{\mathbf{E}} L(\rho_{\mathbf{E}}u_0)\rho_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{E}}\xi\|_{G^s} + \|\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}}\xi\|_{G^s} + \|\xi\|_{G^s} \\ &\leqslant C_2(s)\,\|\lambda_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(E^s;G^s)}\left(\|\rho_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{E}}\xi\|_{F^s} + \langle\|\rho_{\mathbf{E}}u_0\|_{E^{s+\mu}}\rangle\,\|\rho_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{E}}\xi\|_{F^r}\right) \\ &\quad + \langle\|\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(G^s)}\rangle\,\|\xi\|_{G^s} \leqslant C_2'(s)\,\|\xi\|_{G^s} + \langle\|(u_0,v_0,w_0)\|_{H^{s+\mu}}\rangle\,\|\xi\|_{F^r}\,, \quad (2.4.10)\end{aligned}$$

其中，常数 $C_2'(s)$ 依赖于 $C_2(s)$，也依赖于量 $\|\lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(G^s)}$、$\|\lambda_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(E^s;G^s)}$、$\|\rho_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(G^s;F^s)}$ 和 $\|\rho_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(G^{s+\mu};E^{s+\mu})}$。因此，RI 假设的第三项由带有参数 (μ, r, R) 的三元组 $(\mathbf{H}, \mathbf{G}, \Phi)$ 满足，断言得证。不过，我们强调，这并不意味着 LRI 假设成立，因为对于 $D\Phi$ 和 Λ，左逆条件通常不成立。

有了这一断言，我们现在考虑 $\beta = 2(r+\mu)+1 \in [\![N]\!]$，并对三元组 $(\mathbf{H}, \mathbf{G}, \Phi)$ 应用定理 2.25。令 K_1、K_2、K_3 和 K_4 为定理 2.25 中的常数，并令 $\varepsilon'_{\mathrm{surj}} > 0$ 表示 (2.3.1) 右侧出现的常数。于是，定理 2.25 保证，对于每个 $\xi \in B_{G^\beta}(0, \varepsilon'_{\mathrm{surj}})$，都存在 $(u', v', w') \in H^\beta = (G^\beta)^3$，满足 $\Phi(u', v', w') = \xi$，且具有如下上界

$$\|u'\|_{G^\beta} + \|v'\|_{G^\beta} + \|w'\|_{G^\beta} = \|(u', v', w')\|_{H^\beta} \leqslant K_4\|\xi\|_{G^\beta}. \quad (2.4.11)$$

令 $\varepsilon_{\mathrm{surj}} = \varepsilon'_{\mathrm{surj}}/\|\lambda_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}(F^\beta;\, G^\beta)}$，并注意到

$$\lambda_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{F}}(B_{F^\beta}(0, \varepsilon_{\mathrm{surj}})) \subseteq B_{G^\beta}(0, \varepsilon'_{\mathrm{surj}}) \quad (2.4.12)$$

根据构造。因此，对于任意 $g \in B_{F^\beta}(0, \varepsilon_{\mathrm{surj}})$，存在 $(u', v', w') \in H^\beta$，使得 $\Phi(u', v', w') = \lambda_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{F}}g$，化简后得到

$$\lambda_{\mathbf{E}}(\lambda_{\mathbf{F}}\Psi(\rho_{\mathbf{E}}u') + (I - \lambda_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{F}})\rho_{\mathbf{E}}v') + (I - \lambda_{\mathbf{E}}\rho_{\mathbf{E}})w' = \lambda_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{F}}g. \quad (2.4.13)$$

应用 $\rho_{\mathbf{E}}$ 并利用恒等式 $\rho_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{E}} = 1$，可推出恒等式

$$\lambda_{\mathbf{F}}\Psi(\rho_{\mathbf{E}}u') + (I - \lambda_{\mathbf{F}}\rho_{\mathbf{F}})\rho_{\mathbf{E}}v' = \lambda_{\mathbf{F}}g, \quad (2.4.14)$$

对其应用 $\rho_{\mathbf{F}}$ 并利用恒等式 $\rho_{\mathbf{F}}\lambda_{\mathbf{F}} = 1$，可得

$$\Psi(\rho_{\mathbf{E}}u') = g. \quad (2.4.15)$$

因此，若令 $u = \rho_{\mathbf{E}}u' \in E^\beta$，则 $\Psi(u) = g$，而 (2.4.11) 推出

$$\|u\|_{E^\beta} \leqslant \kappa_1\,\|g\|_{F^\beta} \quad (2.4.16)$$

对于 $\kappa_1 = K_4\,\|\rho_{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{L}(G^\beta;\, E^\beta)}\,\|\lambda_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}(F^\beta;\, G^\beta)}$，这尤其意味着 $u \in B_{E^\beta}(0, \kappa_1\varepsilon_{\mathrm{surj}})$。

另一方面，引理 2.18 表明 $\mathbf{E}$ 是终端稠密的。由此以及 LRI 映射假设可知，三元组 $(\mathbf{E}, \mathbf{F}, \Psi)$ 满足定理 2.26 的假设，其中 $\sigma = \beta - \mu$ 且 $\gamma_\sigma = \delta_R \leqslant \delta_r$. 令 $\delta_{\mathrm{inj},\,\sigma} > 0$ 为定理 2.26 中的常数。于是，根据该定理，$\Psi\colon B_{E^\beta}(0, \delta_{\mathrm{inj},\,\sigma}) \to F^{\beta-\mu}$ 是单射，并满足估计 (2.3.72)。

取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{\mathrm{surj}}, \delta_{\mathrm{inj},\sigma}/\kappa_1\}$，并令 $\kappa_2 > 0$ 为 (2.3.72) 右侧的常数。由于 $\kappa_1\varepsilon \leqslant \delta_{\mathrm{inj},\,\sigma}$，上述分析表明，对于每个 $g \in B_{F^\beta}(0, \varepsilon)$，都存在唯一的 $u \in B_{E^\beta}(0, \kappa_1\varepsilon)$，使得 $\Psi(u) = g$。此外，诱导映射 $\Psi^{-1}\colon B_{F^\beta}(0, \varepsilon) \to \Psi^{-1}(B_{F^\beta}(0, \varepsilon)) \cap B_{E^\beta}(0, \kappa_1\varepsilon)$ 根据 (2.4.16) 和 (2.3.72) 满足 (2.2.4) 和 (2.2.7)。

最后，若我们假设 $\mathbb{N} \ni \nu \leqslant R + r - 2\beta$ 和 $g \in B_{F^\beta}(0, \varepsilon) \cap F^{\beta+\nu}$，那么由定理 2.25 的第四项可知，存在 $(u', v', w') \in H^{\beta+\nu}$，使得 $\Phi(u', v', w') = \lambda_{\mathbf{E}}\lambda_{\mathbf{F}}g$。按照 (2.4.13)–(2.4.15) 中的方法展开可得，对于 $u = \rho_{\mathbf{E}}u' \in E^{\beta+\nu}$，有 $\Psi(u) = g$ 和 $\|u\|_{E^{\beta+\nu}} \lesssim \|g\|_{F^{\beta+\nu}}$。 □

2.5. **改进**。 本小节旨在加强定理 2.21 的结论。具体而言，我们将研究该定理给出的逆映射 Ψ^{-1} 的连续性和高阶光滑性。首先，我们通过将终端空间 E^N 之外的背景项进行延拓，分析右、左线性逆映射 L，并证明若干连续性与可微性结论。其次，我们回到映射 Ψ^{-1}，并证明一个比 (2.2.7) 的基本结论更精细的连续性估计。接着，我们证明 Ψ^{-1} 的可微性，并将其导数与算子 L 联系起来。完成这些工作后，我们最后给出更高正则性的结论。

现在我们进一步列举逆映射族 L 的性质。

定理 2.27 (右逆与左逆的延拓及正则性)。 在定义 *2.20* 中提出的 *LRI* 映射假设以及以下附加假设成立时： $r+\mu\leqslant R$ 且巴拿赫尺度 $\{E^s\}_{s\in[\![N]\!]}$ 由自反空间构成，则 L 具有以下性质。

(1) 延拓的存在性：存在一族有界线性映射 $L\colon B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^{r+\mu}\to\mathcal{L}(F^r;\overline{E^r})$ 满足以下延拓性质。

(a) $\overline{L}=L$ 在子集 $B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^N$ 上。*(b)* 若 $g\in F^r$ 且 $u_0\in B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^{r+\mu}$，则有 $D\Psi(u_0)L(u_0)g=g$。此外，若 $u\in E^{r+\mu}$，则 $L(u_0)D\Psi(u_0)u=u$。*(c)* 对于 $s\in[r,R]\cap\mathbb{N}$，有 $L\colon B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^{s+\mu}\to\mathcal{L}(F^s;E^s)$，并满足温和估计 $\|L(u_0)g\|_{E^s}\lesssim\|g\|_{F^s}+\langle\|u_0\|_{E^{s+\mu}}\rangle\|g\|_{F^r}$。*(2)* 连续性：对于 $s\in[r,R-\mu]\cap\mathbb{N}$，若将 L 视为映射 $L\colon(B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^{s+\mu})\times F^s\to E^s$，则该映射连续。*(3)* 更高正则性：假设对于某个 $\mathbb{N}\ni\ell\geqslant 2$，映射 Ψ 在定义 *2.23* 的意义下是 ℓ 次连续盖托可微的。若对于 $s\in[r,R-\ell\mu]\cap\mathbb{N}$，将 L 视为映射

$$\overline{L}:(B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^{s+\ell\mu})\times F^{s+(\ell-1)\mu}\to E^s, \tag{2.5.1}$$

那么，$\overline{L}$ 是$(\ell-1)$次连续盖托可微的。

证明。 我们将证明分为几个步骤。

步骤 1：构造 L。首先，我们给出左右逆映射 L 的连续性估计（它先验上仅对 E^N-背景项有定义）。假设 $u_0,w_0\in B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^N$,$s\in[r,R-\mu]\cap\mathbb{N}$, 且 $g\in F^{s+\mu}$。我们将估计差值

$$\begin{aligned}L(u_0)g-L(w_0)g&=-L(u_0)(D\Psi(u_0)-D\Psi(w_0))L(w_0)g\\&=-\int_0^1 L(u_0)D^2\Psi((1-t)w_0+tu_0)(u_0-w_0,L(w_0)g)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

在 E^s 中。反复应用 (2.2.1) 和 (2.2.2) 的温和估计，以及定义 2.2 第一个条目的嵌入不等式，我们得到如下略显粗糙的估计

$$\begin{aligned}\|L(u_0)g-L(w_0)g\|_{E^s}\lesssim{}&\langle\|u_0,w_0\|_{E^{s+\mu}}\rangle^3\|u_0-w_0\|_{E^{s+\mu}}\|g\|_{F^r}\\&+\langle\|u_0,w_0\|_{E^{s+\mu}}\rangle\|u_0-w_0\|_{E^r}(\|g\|_{F^{s+\mu}}+\langle\|w_0\|_{E^{s+2\mu}}\rangle\|g\|_{F^r}).\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

尽管没有保持驯性，这个估计仍足以让我们定义延拓。

事实上，令 $u_0\in B_{E^r}(0,\delta_R)\cap E^{r+\mu}$，并固定某个 $g\in F^r$。我们声称序列$\{L(T_ju_0)T_jg\}_{j=\ell}^{\infty}\subset E^r$ 是柯西序列，其中算子 $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ 来自引理 2.18，而 $\ell\in\mathbb{N}$ 是满足以下条件的首个指标：对于所有 $\mathbb{N}\ni j\geqslant\ell$，均有 $T_ju_0\in B_{E^r}(0,\delta_R)$。我们首先通过估计以下表达式来验证这一点

$$\begin{aligned}\|L(T_{j+k}u_0)T_{j+k}g-L(T_ju_0)T_jg\|_{E^r}\leqslant{}&\|L(T_{j+k}u_0)(T_{j+k}g-T_jg)\|_{F^r}\\&+\|(L(T_{j+k}u_0)-L(T_ju_0))T_jg\|_{E^r}=\mathbf{I}_{j,k}+\mathbf{II}_{j,k}.\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

对于$\mathbf{I}_{j,k}$，我们只需应用估计 (2.2.2) 和引理 2.18：

$$\mathbf{I}_{j,k} \lesssim \langle \|T_{j+k}u_0\|_{E^{r+\mu}} \rangle \|T_{j+k}g - T_j g\|_{F^r} \lesssim \langle \|u_0\|_{E^{r+\mu}} \rangle (\mathbf{n}_j^r(g) + \mathbf{n}_{j+k}^r(g)). \tag{2.5.5}$$

因此 $\lim_{j,k\to\infty} \mathbf{I}_{j,k} = 0$。另一方面，对于 $\mathbf{II}_{j,k}$，我们首先使用估计 (2.5.3)：

$$\begin{aligned}\mathbf{II}_{j,k} \lesssim{}& \langle \|T_{j+k}u_0, T_j u_0\|_{E^{r+\mu}} \rangle^3 \|T_{j+k}u_0 - T_j u_0\|_{E^{r+\mu}} \|T_j g\|_{F^r} \\ &+ \langle \|T_{j+k}u_0, T_j u_0\|_{E^{r+\mu}} \rangle \|T_{j+k}u_0 - T_j u_0\|_{E^r} (\|T_j g\|_{F^{r+\mu}} + \langle \|T_j u_0\|_{E^{r+2\mu}} \rangle \|T_j g\|_{F^r}).\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

再次利用引理 2.18，我们可以作出如下界：

$$\begin{aligned} \|T_{j+k}u_0\|_{E^{r+\mu}}, \|T_j u_0\|_{E^{r+\mu}} &\lesssim \|u_0\|_{F^{r+\mu}}, & \|T_j g\|_{F^r} &\lesssim \|g\|_{F^r}, \\ \|T_{j+k}u_0 - T_j u_0\|_{E^r} &\lesssim 2^{-j\mu}(\mathbf{n}_j^{r+\mu}(u_0) + \mathbf{n}_{j+k}^{r+\mu}(u_0)), & \|T_j g\|_{F^{r+\mu}} &\lesssim 2^{j\mu}\|g\|_{F^r}, \\ \|T_{j+k}u_0 - T_j u_0\|_{E^{r+\mu}} &\lesssim \mathbf{n}_j^{r+\mu}(u_0) + \mathbf{n}_{j+k}^{r+\mu}(u_0) & \|T_j u_0\|_{E^{r+2\mu}} &\lesssim 2^{j\mu}\|u_0\|_{E^{r+\mu}}. \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

结合 (2.5.6) 和 (2.5.7)，我们得到估计

$$\mathbf{II}_{j,k} \lesssim \langle \|u_0\|_{E^{r+\mu}} \rangle^3 \|g\|_{F^r} (\mathbf{n}_j^{r+\mu}(u_0) + \mathbf{n}_{j+k}^{r+\mu}(u_0)), \tag{2.5.8}$$

因此 $\lim_{j,k\to\infty} \mathbf{II}_{j,k} = 0$。我们推得序列 $\{L(T_j u_0) T_j g\}_{j=\ell}^\infty \subset E^r$ 是柯西序列。因此存在

$$\overline{L}(u_0)g = \lim_{j\to\infty} L(T_j u_0) T_j g, \tag{2.5.9}$$

这便定义了 L 作为一族线性映射。

步骤 2：L的性质。现在我们考察在这一尺度中，将 L 限制到更高正则性（更大的 s）空间上的情形。假设 $u_0 \in B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^{s+\mu}$，并且对某个 $s \in [r, R] \cap \mathbb{N}$有 $g \in F^s$。当 $\mathbb{N} \ni j$ 充分大时，我们可以应用估计 (2.2.2)，并再次应用引理 2.18，得到

$$\|L(T_j u_0) T_j g\|_{E^s} \lesssim \|T_j g\|_{F^s} + \langle \|T_j u_0\|_{E^{s+\mu}} \rangle \|T_j g\|_{F^r} \lesssim \|g\|_{F^s} + \langle \|u_0\|_{E^{s+\mu}} \rangle \|g\|_{F^r}. \tag{2.5.10}$$

因此，序列 $\{L(T_j u_0) T_j g\}_{j=\ell}^\infty \subset E^s$ 受上文右侧表达式的上界控制。空间 E^s 是自反的，而该序列已在 E^r中收敛，因此极限 $L(u_0)g$ 属于E^s，并且由于范数的弱序列下半连续性，其范数不超过 (2.5.10) 右侧的值。

接下来证明，L 是 $D\Psi$的一族右逆与左逆。首先假设 $g \in F^r$和 $u_0 \in B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^{r+\mu}$。当 $j \in \mathbb{N}$充分大时，我们有

$$D\Psi(T_j u_0) L(T_j u_0) T_j g = T_j g. \tag{2.5.11}$$

由于 $\Psi\colon B_{E^r}(0, \delta_r) \cap E^r \to F^{r-\mu}$是 C^2，$\{L(T_j u_0) T_j g\}_{j=0}^\infty \subset E^r$收敛到 $L(u_0)g$，并且当 $j \to \infty$时，我们有 $T_j u_0 \to u_0$ 在 $E^{r+\mu} \hookrightarrow E^r$ 中以及 $T_j g \to g$ 在 F^r 中的收敛，因此可在（2.5.11）中令 $j \to \infty$，得到 $D\Psi(u_0) L(u_0)g = g$。

另一方面，若假设 $u \in E^{r+\mu}$和 $u_0 \in B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^{r+\mu}$，那么我们有

$$L(T_j u_0) T_j D\Psi(u_0) u = u + L(T_j u_0)(T_j D\Psi(u_0) - D\Psi(T_j u_0))u. \tag{2.5.12}$$

左端在 E^r to $L(u_0)D\Psi(u_0)u$ as $j \to \infty$时收敛。对于右端，我们可以进行估计

$$\begin{aligned}\|L(T_j u_0)(T_j D\Psi(u_0) - D\Psi(T_j u_0))u\|_{E^r} &\lesssim \langle \|u_0\|_{E^{r+\mu}} \rangle \|(T_j D\Psi(u_0) - D\Psi(T_j u_0))u\|_{F^r} \\ &\lesssim \langle \|u_0\|_{E^{r+\mu}} \rangle (\|(I - T_j)D\Psi(u_0)u\|_{F^r} + \|(D\Psi(u_0) - D\Psi(T_j u_0))u\|_{F^r}),\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

并且，由于引理 2.18 中 $I - T_j$ 的性质、$D\Psi$ 的连续性以及 u，$u_0 \in E^{r+\mu}$ 这一事实，根据 $j \to \infty$，该式右端显然趋于零。因此，在（2.5.12）中令 $j \to \infty$，可得 $L(u_0)\, D\Psi(u_0)\, u = u$。

现在我们准备证明， L 实际上是 L 的延拓。假设 $u_0 \in B_{E^r}(0,\ \delta_R) \cap E^N$ 且 $g \in F^r$。那么，根据左右逆性质，对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们都有恒等式

$$\overline{L}(u_0)T_j g = \overline{L}(u_0)D\Psi(u_0)L(u_0)T_j g = L(u_0)T_j g. \tag{2.5.14}$$

令 $j \to \infty$ 并利用 $L(u_0)$ 和 $L(u_0)$ 有界，可推得 $L(u_0)g = L(u_0)g$。至此，第一项中的所有断言均得证。

步骤 3：连续性。现在我们研究连续性。我们已经证明，对于 $s \in [r, R-\mu] \cap \mathbb{N}$,$u_0, w_0 \in B_{E^r}(0, \delta_R) \cap E^{s+2\mu}$，且 $g \in F^{s+\mu}$序列 $\{L(T_j u_0)T_j g - L(T_j w_0)T_j g\}_{j=0}^{\infty} \subset E^{s+\mu}$在 $E^{s+\mu}$ 中弱收敛（取子序列后），并在 E^r 中强收敛到极限 $L(u_0)g - L(w_0)g$。因此，利用引理 2.19 的对数凸性，我们得到取子序列后的 E^s 中的强收敛。沿着该子序列对 (2.5.3) 取极限，然后对 $\|g\|_{F^{s+\mu}} \leqslant 1$ 取上确界，可得 Lipschitz 估计

$$\|\overline{L}(u_0) - \overline{L}(w_0)\|_{\mathcal{L}(F^{s+\mu}, E^s)} \lesssim \langle \|u_0, w_0\|_{E^{s+2\mu}} \rangle^3 \|u_0 - w_0\|_{E^{s+\mu}}. \tag{2.5.15}$$

我们将 (2.5.15) 作为推导定理陈述中第二项所述连续性的中间步骤。令 $u_0,\ w_0 \in B_{E^r}(0,\ \delta_R) \cap E^{s+\mu}$ 且 $g,\ h \in F^s$。当 $j \in \mathbb{N}$ 充分大时，我们考察差值

$$\begin{aligned}\overline{L}(u_0)g - \overline{L}(w_0)h &= (\overline{L}(u_0)g - \overline{L}(T_j u_0)T_j g) \\ &+ (\overline{L}(T_j u_0)T_j g - \overline{L}(T_j w_0)T_j h) + (\overline{L}(T_j w_0)T_j h - \overline{L}(w_0)h) = \mathbf{I}_j + \mathbf{II}_j + \mathbf{III}_j\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

并分别估计这三项。对于 $\mathbf{I}_j$，注意到 (2.5.4)、(2.5.5)、(2.5.6) 和 (2.5.7) 在将 r 替换为 s 后仍然成立（证明相同），因此我们可以令 $k \to \infty$ 趋于无穷以得到上界

$$\|\mathbf{I}_j\|_{E^s} \lesssim \langle \|u_0\|_{E^{s+\mu}} \rangle^3 \big(\|g\|_{F^s} \mathbf{n}_j^{s+\mu}(u_0) + \mathbf{n}_j^s(g) \big). \tag{2.5.17}$$

对于 $\mathbf{II}_j$，我们直接应用局部 Lipschitz 估计 (2.5.15)，并利用算子 T_j的性质：

$$\|\mathbf{II}_j\|_{E^s} \lesssim \langle 2^{j\mu} \|g\|_{F^s} \rangle \langle 2^{j\mu} \|u_0, w_0\|_{E^{s+\mu}} \rangle^3 \|u_0 - w_0, g - h\|_{E^{s+\mu} \times F^s}. \tag{2.5.18}$$

对于$\mathbf{III}_j$，我们首先按照 (2.5.17) 对其进行上界估计：

$$\|\mathbf{III}_j\|_{E^s} \lesssim \langle \|w_0\|_{E^{s+\mu}} \rangle^3 \big(\|h\|_{F^s} \mathbf{n}_j^{s+\mu}(w_0) + \mathbf{n}_j^s(h) \big). \tag{2.5.19}$$

现在，根据引理 2.18，我们可以估计

$$\mathbf{n}_j^{s+\mu}(w_0) \lesssim \mathbf{n}_j^{s+\mu}(u_0) + \|u_0 - w_0\|_{E^{s+\mu}} \text{ and } \mathbf{n}_j^s(h) \lesssim \mathbf{n}_j^s(g) + \|g - h\|_{F^s}, \tag{2.5.20}$$

从而可推出

$$\begin{aligned}\|\overline{L}(u_0)g - \overline{L}(w_0)h\|_{E^s} &\lesssim 2^{3\mu j} \langle \|u_0, w_0\|_{E^{s+\mu}}, \|g, h\|_{F^s} \rangle^3 \|u_0 - w_0, g - h\|_{E^{s+\mu} \times F^s} \\ &+ \langle \|u_0, w_0\|_{E^{s+\mu}}, \|g, h\|_{F^s} \rangle^3 (\mathbf{n}_j^{s+\mu}(u_0) + \mathbf{n}_j^s(g)).\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

取 j 相对于 u_0 和 g 足够大，再取 w_0 和 h 充分接近 u_0 和 g，我们便可得知， L 是从 $E^{s+\mu} \times F^s$ 到 E^s 的连续映射，但未必是一致连续的。至此，第二项的证明完成。

第 4 步：更高正则性。最后，我们证明第三个断言。仿照推导 (2.5.10) 的论证可知，对于 $s \in [r, R-2\mu] \cap \mathbb{N}$、$w_0,\ h_0,\ w_0 + h_0 \in B_{E^r}(0,\ \delta_R) \cap E^{s+2\mu}$、$g \in F^{s+\mu}$ 和 $\tau \in (0,\ 1)$，我们有如下分解

$$\tau^{-1}(\overline{L}(w_0 + \tau h_0)g - \overline{L}(w_0)g) + \overline{L}(w_0)D^2\Psi(w_0)(h_0, \overline{L}(w_0)g) = \mathbf{I}_\tau + \mathbf{II}_\tau \tag{2.5.22}$$

其中

$$\mathbf{I}_\tau = -(\overline{L}(w_0 + \tau h_0) - \overline{L}(w_0)) \int_0^1 D^2\Psi(w_0 + \tau h_0)(h_0, \overline{L}(w_0)g)\, \mathrm{d}t \tag{2.5.23}$$

and

$$\mathbf{II}_\tau = -\overline{L}(w_0)\int_0^1 (D^2\Psi(w_0+t\tau h_0) - D^2\Psi(w_0))(h_0, \overline{L}(w_0)g)\,\mathrm{d}t. \tag{2.5.24}$$

由于 Ψ 是 μ-温和的，$\overline{L}$ 满足第二项的连续性断言，并且 L 遵循与 L相同的温和估计，因此有 $\|\mathbf{I}_\tau, \mathbf{II}_\tau\|_{E^s} \to 0$作为 $\tau \to 0$。这证明了映射

$$\overline{L} : (B_{E^r}(0,\delta_R) \cap E^{s+2\mu}) \times F^{s+\mu} \to E^s \tag{2.5.25}$$

是盖托可微的，其导数由下式给出

$$D\overline{L}(u_0,g_0)[w,h] = -\overline{L}(u_0)D^2\Psi(u_0)(w, L(u_0)g_0) + \overline{L}(u_0)h \tag{2.5.26}$$

对于 $u_0 \in B_{E^r}(0,\delta_R) \cap E^{s+2\mu}$, $w \in E^{s+2\mu}$和 $g_0, h \in F^{s+\mu}$。现在假设 $\mathbb{N} \ni \ell \geqslant 3$，且 Ψ 是 ℓ 次连续盖托可微的。利用公式 (2.5.26) 进行简单的归纳论证，即可得到第三项中其余的结论。□

现在我们对右逆与左逆族 L 的映射性质有了更深入的理解，接下来回到对局部逆映射 Ψ^{-1} 的研究。回顾一下，根据定理 2.21 的结论，该局部逆映射确实存在。事实上，我们现在证明定理 2.24。

定理 *2.24* 的证明。在整个证明过程中，我们将使用定理 2.27 中的算子 $\overline{L}$，它是 LRI 映射假设中的算子 L 的延拓。稍微滥用一下记号，在下文中我们用 L 代替 L。

在假设 I 或 II中的任一条件下，巴拿赫尺度 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 是温和的，因此存在如引理 2.18 中所述的平滑算子 $\{T_j\}_{j=0}^\infty$。我们的目标是证明，若 $s \in [\beta, R+r-\beta-\mu) \cap \mathbb{N}$ 且$g \in B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^s$，则 $\Psi^{-1}(T_j g) \to \Psi^{-1}(g)$ 在空间 E^s 中属于 $j \to \infty$。按照引理 2.26 的证明，对 Ψ在$T_j g$ 处进行二阶泰勒展开，并利用 $D\Psi(T_j g)$ 关于$L \circ \Psi^{-1}(T_j g)$ 的左可逆性，我们得到恒等式

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g) &= L\circ\Psi^{-1}(T_j g)(T_{j+1}-T_j)g \\ &- L\circ\Psi^{-1}(T_j g)\int_0^1 (1-t)D^2\Psi((1-t)\Psi^{-1}(T_j g) + t\Psi^{-1}(T_{j+1}g))(\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g))^{\otimes 2}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{I}_j + \mathbf{II}_j.\end{aligned} \tag{2.5.27}$$

我们将在空间 $E^{s+\sigma}$ 中估计上述右端，其中 $\sigma \in \{-1,0,1\}$。根据假设的温和结构，我们得到如下估计

$$\|L\circ\Psi^{-1}(T_j g)h\|_{E^{s+\sigma}} \lesssim \langle \|\Psi^{-1}(T_j g)\|_{E^{s+\mu+\sigma}}\rangle \|h\|_{F^r} + \|h\|_{F^{s+\sigma}} \lesssim \langle 2^{j(\mu+\sigma)}\|g\|_{F^s}\rangle \|h\|_{F^r} + \|h\|_{F^{s+\sigma}}. \tag{2.5.28}$$

对于 $h = (T_{j+1}-T_j)g$，我们估计

$$\begin{cases} \|(T_{j+1}-T_j)g\|_{F^r} \lesssim 2^{j(r-s)}\mathbf{m}_j^s(g), \\ \|(T_{j+1}-T_j)g\|_{F^{s+\sigma}} \lesssim 2^{j\sigma}\mathbf{m}_j^s(g), \end{cases} \tag{2.5.29}$$

因此（由于 $\mu + r \leqslant s$） $\|\mathbf{I}_j\|_{E^{s+\sigma}} \lesssim 2^{j\sigma}\langle \|g\|_{F^s}\rangle \mathbf{m}_j^s(g)$，其中我们回顾一下，半范数 $\mathbf{m}_j^s$来自引理 2.18。另一方面，对于某个 $t \in [0,1]$，我们取

$$h_t = D^2\Psi((1-t)\Psi^{-1}(T_j g) + t\Psi^{-1}(T_{j+1}g))(\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g))^{\otimes 2} \tag{2.5.30}$$

以及对 $\ell \in \{r, s+\sigma\}$ 的估计

$$\begin{aligned}\|h_t\|_{E^\ell} \lesssim \langle \|T_j g, T_{j+1}g\|_{F^{\ell+\mu}}\rangle &\|\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)\|_{E^r}^2 \\ &+ \|\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)\|_{E^r}\|\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)\|_{E^{\ell+\mu}}.\end{aligned} \tag{2.5.31}$$

若 j 足够大，例如 $j \geqslant J(g)$，则有 $T_j g, T_{j+1} g \in B_{F^\beta}(0,\varepsilon)$，因此我们可以应用定理 2.21 的第三条结论中的估计来界定

$$\begin{cases} \|\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)\|_{E^r} \\ \|\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)\|_{E^{r+\mu}} \end{cases} \lesssim \|(T_{j+1} - T_j)g\|_{E^{\beta-\mu}} \lesssim 2^{j(\beta-\mu-s)} \mathbf{m}_j^s(g). \tag{2.5.32}$$

另一方面，我们显然有如下上界

$$\|\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)\|_{E^{s+\sigma+\mu}} \lesssim \|T_{j+1}g, T_j g\|_{F^{s+\sigma+\mu}} \lesssim 2^{j(\mu+\sigma)} \|g\|_{F^s}. \tag{2.5.33}$$

因此，我们得到

$$\|h_t\|_{E^{s+\sigma}} \lesssim 2^{2j(\beta-\mu-s)+j(\mu+\sigma)} \langle \|g\|_{F^s} \rangle \mathbf{m}_j^s(g)^2 + 2^{j(\beta+\sigma-s)} \|g\|_{F^s} \mathbf{m}_j^s(g) \lesssim 2^{j\sigma} \langle \|g\|_{F^s} \rangle^2 \mathbf{m}_j^s(g) \tag{2.5.34}$$

以及 $\langle 2^{j(\mu+\sigma)} \|g\|_{F^s} \rangle \|h_t\|_{E^r} \lesssim 2^{j\sigma} \langle \|g\|_{F^s} \rangle^3 \mathbf{m}_j^s(g)$。综合这些界，我们得到估计 $\|\mathbf{II}_j\|_{E^{s+\sigma}} \lesssim 2^{j\sigma} \langle \|g\|_{F^s} \rangle^3 \mathbf{m}_j^s(g)$，因此（对于 $\sigma \in \{-1,0,1\}$ 和 $\mathbb{N} \ni j \geqslant J(g)$），我们有

$$\|\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)\|_{E^{s+\sigma}} \lesssim 2^{j\sigma} \langle \|g\|_{F^s} \rangle^3 \mathbf{m}_j^s(g). \tag{2.5.35}$$

现在我们利用 (2.5.35) 证明序列 $\{\sum_{j=J(g)}^n (\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g))\}_{n=J(g)}^\infty$ 在 E^s 中是柯西序列。同样，巴拿赫尺度 E 和 F 按定义 2.14 的意义是温和的，因此存在 LP-可光滑化巴拿赫尺度 E 和 F，以及提升与限制对 $\lambda_{\mathbf{E}}, \rho_{\mathbf{E}}$ 和 $\lambda_{\mathbf{F}}, \rho_{\mathbf{F}}$，分别用于证明 E 和 F 具有驯性。令 $\xi_j(g) = \lambda_{\mathbf{E}}(\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)) \in E^{R+r-\beta}$，且 $\eta_j(g) = \langle \|g\|_{F^s} \rangle^3 (S_{j+1} - S_j) \mathbin{\circledcirc} \lambda_{\mathbf{F}} g \in F^{R+r-\beta}$。根据 $\lambda_{\mathbf{E}}$ 的连续性、(2.5.35) 以及定义 2.11 中 LP-平滑算子的性质，我们推得对于满足 $j \geqslant J(g)$ 的 $j, k \in \mathbb{N}$，有如下上界

$$\|\Delta_k \xi_j(g)\|_{\overline{E}^s} \lesssim 2^{-|j-k|} \|\eta_j(g)\|_{\overline{F}^s}. \tag{2.5.36}$$

因此，我们得到以下关于 ℓ，$n \in \mathbb{N}$（其中 $\ell \geqslant J(g)$）的估计：

$$\Big\| \sum_{j=\ell}^{\ell+n} \xi_j(g) \Big\|_{\overline{E}^s}^2 \lesssim \sum_{k=0}^\infty \Big(\sum_{j=\ell}^{\ell+n} \|\Delta_k \xi_j(g)\|_{\overline{E}^s} \Big)^2 \lesssim \sum_{k=0}^\infty \Big(\sum_{j=\ell}^{\ell+n} 2^{-|j-k|} \|\eta_j(g)\|_{\overline{F}^s} \Big)^2 \lesssim \sum_{j=\ell}^{\ell+n} \|\eta_j(g)\|_{\overline{F}^s}^2, \tag{2.5.37}$$

在上面的最后一个不等式中，我们使用了 Young卷积不等式，与 (2.3.12) 中的做法相同。由于 $g \in F^s$，我们有包含关系 $\{\|\eta_j(g)\|_{F^s}\}_{j=0}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$，因此由 (2.5.37) 可推出 $\{\sum_{j=J(g)}^n \xi_j(g)\}_{n=J(g)}^\infty \subset E^s$ 是柯西序列。映射 $\rho_{\mathbf{E}}$ 是连续线性的，因此对该序列取像可知：

$$\Big\{ \sum_{j=J(g)}^n (\Psi^{-1}(T_{j+1}g) - \Psi^{-1}(T_j g)) \Big\}_{n=J(g)}^\infty = \{\Psi^{-1}(T_{n+1}g) - \Psi^{-1}(T_{J(g)}g)\}_{n=0}^\infty \subset E^s \tag{2.5.38}$$

是柯西序列 列，正如所需。另一方面，定理 2.21 的第三个结论给出：

$$\|\Psi^{-1}(T_{n+1}g) - \Psi^{-1}(g)\|_{E^{\beta-\mu}} \lesssim \|(I - T_{n+1})g\|_{F^{\beta-\mu}} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{2.5.39}$$

因此，上述序列在 E^s 中的极限（由满足柯西条件可知该极限存在）必为 $\Psi^{-1}(g)$。回顾这些估计，我们得到关于 $n \geqslant J(g)$ 的如下定量收敛速率：

$$\|\Psi^{-1}(T_{n+1}g) - \Psi^{-1}(g)\|_{E^s} \lesssim \langle \|g\|_{F^s} \rangle^3 \Big(\sum_{j=n}^\infty \mathbf{m}_j^s(g)^2 \Big)^{1/2}. \tag{2.5.40}$$

现在，我们已经具备了所需的全部工具，可以证明映射 $\Psi^{-1}\colon B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^s \to E^s$ 对每个 $s \in [\beta, R+r-\beta-\mu) \cap \mathbb{N}$ 都是连续的。设 $g, h, g+h \in B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^s$，并假设 $\|h\|_{F^s}$ 足够小，使得 $J(g+h) \leqslant J(g) + 1$；再一次，我们用 $J(g+h)$ 表示

满足 $j \geqslant J(g+h)$ 即可推出 $T_j(g+h) \in B_{F^\beta}(0,\varepsilon)$ 的第一个指标。于是，对于任意 $\mathbb{N} \ni n \geqslant J(g)+1$，我们可以估计

$$\begin{aligned}\|\Psi^{-1}(g)-\Psi^{-1}(g+h)\|_{E^s} &\leqslant \|\Psi^{-1}(T_{n+1}g)-\Psi^{-1}(g)\|_{E^s}\\ &\quad+\|\Psi^{-1}(T_{n+1}g)-\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h))\|_{E^s}+\|\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h))-\Psi^{-1}(g+h)\|_{E^s}\\ &= \mathbf{I}_n+\mathbf{II}_n+\mathbf{III}_n. \quad (2.5.41)\end{aligned}$$

对于 $\mathbf{I}_n$ 和 $\mathbf{III}_n$，我们采用收敛速率 (2.5.40) 以及不等式（由引理 2.18 可知该不等式成立）

$$\Big(\sum_{j=n}^{\infty}\mathbf{m}_j^s(g+h)^2\Big)^{1/2} \lesssim \|h\|_{F^s}+\Big(\sum_{j=n}^{\infty}\mathbf{m}_j^s(g)^2\Big)^{1/2} \quad (2.5.42)$$

从而得到

$$\mathbf{I}_n+\mathbf{III}_n \lesssim \langle\|g,h\|_{F^s}\rangle^3\Big(\|h\|_{F^s}+\Big(\sum_{j=n}^{\infty}\mathbf{m}_j^s(g)^2\Big)^{1/2}\Big). \quad (2.5.43)$$

剩下需要处理的是 $\mathbf{II}_n$。和之前一样，我们有

$$\begin{aligned}&\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h))-\Psi^{-1}(T_{n+1}g)=L\circ\Psi^{-1}(T_{n+1}g)\Big(T_{n+1}h-\\ &\int_0^1(1-t)D^2\Psi((1-t)\Psi^{-1}(T_{n+1}g)+t\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h)))(\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h))-\Psi^{-1}(T_{n+1}g))^{\otimes 2}\,\mathrm{d}t\Big) \quad (2.5.44)\end{aligned}$$

这是泰勒定理的推论。因此，我们有如下估计

$$\begin{aligned}\mathbf{II}_n &\lesssim \langle 2^{\mu n}\|g\|_{F^s}\rangle\big(\|h\|_{F^s}+\\ &\quad\langle 2^{\mu n}\|g,h\|_{F^s}\rangle\|\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h))-\Psi^{-1}(T_{n+1}g)\|_{E^{s+\mu}}\|\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h))-\Psi^{-1}(T_{n+1}g)\|_{E^r}\big). \quad (2.5.45)\end{aligned}$$

接下来，我们粗略地估计

$$\|\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h))-\Psi^{-1}(T_{n+1}g)\|_{E^{s+\mu}} \lesssim 2^{n\mu}\|g,h\|_{F^s} \quad (2.5.46)$$

并且应用定理 2.21 的第三个结论可知

$$\|\Psi^{-1}(T_{n+1}(g+h))-\Psi^{-1}(T_{n+1}g)\|_{E^r} \leqslant \|T_{n+1}h\|_{F^{\beta-\mu}} \lesssim \|h\|_{F^s}. \quad (2.5.47)$$

综合这些界可得$\mathbf{II}_n \lesssim \langle 2^{\mu n}\|g,h\|_{F^s}\rangle^3\|h\|_{F^s}$，因此

$$\|\Psi^{-1}(g)-\Psi^{-1}(g+h)\|_{E^s} \lesssim \langle\|g,h\|_{F^s}\rangle^3\Big(\|h\|_{F^s}+\Big(\sum_{j=n}^{\infty}\mathbf{m}_j^s(g)^2\Big)^{1/2}\Big)+\langle 2^{\mu n}\|g,h\|_{F^s}\rangle^3\|h\|_{F^s}. \quad (2.5.48)$$

通过令 n 相对于 g 足够大，然后令 h 足够小，可知上述估计证明了Ψ^{-1} 在 g处连续。至此，第一个条目的证明完成。

我们继续研究逆映射 Ψ^{-1} 的可微性。设 $s \in [\beta, R+r-\beta-\mu) \cap \mathbb{N}$, $g,h,g+h \in B_{F^\beta}(0,\varepsilon) \cap F^s$。通过利用带积分余项的泰勒定理将 Ψ 展开至二阶，并利用 L 的左可逆性（例如参见 (2.5.44)），我们得到等式

$$\begin{aligned}&\Psi^{-1}(g+h)-\Psi^{-1}(g)-L\circ\Psi^{-1}(g)h=\\ &-L\circ\Psi^{-1}(g)\int_0^1(1-t)D^2\Psi((1-t)\Psi^{-1}(g)+t\Psi^{-1}(g+h))(\Psi^{-1}(g+h)-\Psi^{-1}(g))^{\otimes 2}\,\mathrm{d}t. \quad (2.5.49)\end{aligned}$$

对两边在空间 $E^{s-\mu}$中取范数，应用温和估计，并利用定理 2.21 的第三项，我们得到

$$\begin{aligned}\|\Psi^{-1}(g+h)-\Psi^{-1}(g)-L\circ\Psi^{-1}(g)h\|_{E^{s-\mu}}&\\ \lesssim \langle\|g,h\|_{F^s}\rangle^2\|\Psi^{-1}(g+h)-\Psi^{-1}(g)\|_{E^s}\|\Psi^{-1}(g+h)-\Psi^{-1}(g)\|_{E^r}&\\ \lesssim \langle\|g,h\|_{F^s}\rangle^2\|\Psi^{-1}(g+h)-\Psi^{-1}(g)\|_{E^s}\|h\|_{F^{\beta-\mu}}.&\quad(2.5.50)\end{aligned}$$

由于 $F^s\hookrightarrow F^{\beta-\mu}$，并且我们已经证明 Ψ^{-1} 关于 F^s 和 E^s 拓扑连续，因此估计式 (2.5.50) 表明，将 Ψ^{-1} 视为从 F^s 到 $E^{s-\mu}$ 的映射时，它在 g 处可微，且导数公式为 $D\Psi^{-1}(g)h=L\circ\Psi^{-1}(g)h$。此外，由于 Ψ^{-1} 关于 F^s 和 E^s 拓扑连续，而 L 关于 $E^s\times F^{s-\mu}$ 和 $E^{s-\mu}$ 拓扑连续，由连续性的复合可知，$D\Psi^{-1}$ 关于 $F^s\times F^{s-\mu}$ 和 $E^{s-\mu}$ 拓扑连续。由此证明了第二项。

第三项现在可由定理 2.27 的最后一项与导数公式 $D\Psi^{-1}=L\circ\Psi^{-1}$ 结合简单的归纳论证得出。□

3. Nonlinear analysis of traveling free boundary compressible Navier-Stokes

现在，我们已经以抽象形式建立了非线性分析所需的工具，接下来回到我们的主要目标：分析行波自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程 (1.4.9)。本节将验证 Nash-Moser 逆函数定理中的大多数“非线性”假设，并为后续各节中的线性分析做好准备。

我们选取一个非线性映射，其定义域和陪域均采用驯性巴拿赫尺度。在第3.1节中，我们验证定理 2.21 的条件 II。为了检验这个相当复杂的算子是否为 1-驯性的 C^2，我们先在第 3.2 节中逐一分析各个原子非线性项，再利用第2.1节的驯性映射微积分，在第3.3节中将它们综合起来。完成这一步后，我们在第3.4节中运用对该非线性映射新近形成的认识，将其导数分解为主部和余项。最后，在第3.5节中给出线性分析的一些初步结果。

3.1. 行波问题的 Banach 尺度。 我们先定义一些函数空间，作为我们的巴拿赫尺度。首先，我们引入一些在非线性映射的定义域中发挥作用的空间。对于 $s\in\{-1,0\}\cup\mathbb{R}^+$，我们定义

$$\mathbb{X}_s=H^{1+s}(\Omega)\times H^{2+s}(\Omega;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{H}^{5/2+s}(\Sigma),\tag{3.1.1}$$

其中 $\mathcal{H}^{5/2+s}(\Sigma)$ 表示在 (B.1.1) 中定义的各向异性 Sobolev 空间，其中 Σ 与$\mathbb{R}^{n-1}$相对应，并在 $\mathbb{X}_s$ 上赋予希尔伯特范数

$$\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s}=\sqrt{\|q\|^2_{H^{1+s}}+\|u\|^2_{H^{2+s}}+\|\eta\|^2_{\mathcal{H}^{5/2+s}}}.\tag{3.1.2}$$

我们从 $\mathbb{X}_s$ 中挑出一个重要的闭子空间：

$$\mathbb{X}^s=\{(q,u,\eta)\in\mathbb{X}_s\ :\ \mathrm{Tr}_{\Sigma_0}(u)=0,\ \mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)+\partial_1\eta=0\}.\tag{3.1.3}$$

其次，我们定义一些在非线性映射的陪域中发挥作用的空间。对于$s\in\{-1,0\}\cup\mathbb{R}^+$，我们定义空间

$$\mathbb{Y}_s=\begin{cases}L^2(\Omega)\times({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^* & \text{if } s=-1,\\ H^{1+s}(\Omega)\times H^s(\Omega;\mathbb{R}^n)\times H^{1/2+s}(\Sigma;\mathbb{R}^n) & \text{if } s\geqslant 0\end{cases}\tag{3.1.4}$$

并赋予其范数

$$\begin{cases}\|g,F\|_{\mathbb{Y}_s}=\sqrt{\|g\|^2_{L^2}+\|F\|^2_{({}_0H^1)^*}} & \text{if } s=-1,\\ \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}_s}=\sqrt{\|g\|^2_{H^{1+s}}+\|f\|^2_{H^s}+\|k\|^2_{H^{1/2+s}}} & \text{if } s\geqslant 0.\end{cases}\tag{3.1.5}$$

我们还特别指出 $\mathbb{Y}_s$ 的一个重要子空间：

$$\mathbb{Y}^s = \begin{cases} \left\{(g,F) \in \mathbb{Y}_s \ : \ \int_0^b g(\cdot,y)\,\mathrm{d}y \in \dot{H}^{-1}(\Sigma)\right\} & \text{if } s=-1, \\ \left\{(g,f,k) \in \mathbb{Y}_s \ : \ \int_0^b g(\cdot,y)\,\mathrm{d}y \in \dot{H}^{-1}(\Sigma)\right\} & \text{if } s \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

我们赋予其如下范数

$$\begin{cases} \|g,F\|_{\mathbb{Y}^s} = \sqrt{\|g,F\|_{\mathbb{Y}_{-1}}^2 + [\int_0^b g(\cdot,y)\,\mathrm{d}y]_{\dot{H}^{-1}}^2} & \text{if } s=-1, \\ \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^s} = \sqrt{\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}_s}^2 + [\int_0^b g(\cdot,y)\,\mathrm{d}y]_{\dot{H}^{-1}}^2} & \text{if } s \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

空间 $\mathbb{Y}_s$ 和 $\mathbb{Y}^s$ 显然是完备的；当 $s \geqslant 0$时，它们是希尔伯特空间。

注 3.1。 按照 (C.1.1)中的记号，$\mathbb{Y}^s = \hat{}H^{1+s}(\Omega) \times H^s(\Omega;\mathbb{R}^n) \times H^{1/2+s}(\Sigma;\ \mathbb{R})$对于 $\mathbb{R} \ni s \geqslant 0$成立，而 $\mathbb{Y}^{-1} = \hat{}H^0(\Omega) \times ({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*$。

第三，我们引入一些空间，用于容纳应力与强迫数据元组 $(T,\ G,\ F)$。对于$\mathbb{R} \ni s \geqslant 0$，我们定义空间

$$\mathbb{W}_s = H^{1+s}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n}) \times H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \tag{3.1.8}$$

并赋予其如下范数

$$\|\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}_s} = \sqrt{\|\mathcal{T}\|_{H^{1+s}}^2 + \|\mathcal{G}\|_{H^s}^2 + \|\mathcal{F}\|_{H^s}^2}. \tag{3.1.9}$$

最后，对于 $s \in \mathbb{N}$，我们设

$$\mathbb{E}^s = \mathbb{X}^s \times \mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \mathbb{F}^s = \mathbb{Y}^s \times \mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R} \tag{3.1.10}$$

并赋予它们注 2.3 中的范数。

现在由这些空间定义以下巴拿赫尺度：

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \{\mathbb{X}^s\}_{s\in\mathbb{N}}, & \mathbf{Y} &= \{\mathbb{Y}^s\}_{s\in\mathbb{N}}, & \mathbf{W} &= \{\mathbb{W}_{1+s}\}_{s\in\mathbb{N}}, \\ \mathbf{E} &= \{\mathbb{E}^s\}_{s\in\mathbb{N}}, & \mathbf{F} &= \{\mathbb{F}^s\}_{s\in\mathbb{N}}. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

不难验证，它们都满足定义 2.2 中关于巴拿赫尺度的条件。

在下一个结果中，我们验证这些尺度满足定理 2.21 陈述中的第二个条件。

引理 3.2 (定义域与陪域的驯性)。 巴拿赫尺度 $\mathbf{E}$ 是温和的，而巴拿赫尺度 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{E}$ 在定义 *2.14* 意义下的驯性直和项。

证明。 我们首先证明 $\mathbf{E}$ 是一个驯性巴拿赫尺度。根据引理 2.17 和例 2.13，尺度 $\mathbf{W}$ 是驯性的，因为它是定义在 $\mathbb{R}^n$上所有 L^2基索伯列夫空间所构成的尺度乘积。由于$\mathbf{W}$ 是驯性的，这个引理也表明，只需证明 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbf{X} = \{\mathbb{X}^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是驯性的。 $\mathbb{R}$ 可由例 2.12 处理，因此只剩下 $\mathbf{X}$需要处理。

对于 $s \in \mathbb{N}$，令 $\mathbb{X}_s = H^{1+s}(\mathbb{R}^n) \times H^{2+s}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}^{5/2+s}(\Sigma)$。根据引理 B.6、例 2.13 和引理 2.17，巴拿赫尺度 $\{\mathbb{X}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是 LP 可平滑化的。现在，我们通过证明 $\{\mathbb{X}^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $\{\mathbb{X}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 的一个驯性直和项，来说明它是温和的。为此，我们定义辅助映射 $\mathcal{E}_1\colon H^{1/2+s}(\Sigma_0;\mathbb{R}^n) \times H^{1/2+s}(\Sigma) \to H^{1+s}(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$，如下所示：$\mathcal{E}_1(\phi,\ \varphi) = w$，其中 w 是偏微分方程的唯一解

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \phi & \text{on } \Sigma_0, \\ (I - e_n \otimes e_n)w = 0 & \text{on } \Sigma, \\ w \cdot e_n = \varphi & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

此外，令 $\mathfrak{E}_\Omega$ 表示一个 Stein 延拓算子（其含义见定义 A.2），并用 $\mathfrak{R}_\Omega$ 表示对应于从 $\mathbb{R}^n$ 到 Ω 的限制的线性算子。接着，我们通过以下方式定义提升算子$\lambda_{\mathbb{X}}:\mathbb{X}^s\to\mathbb{X}_s$ 和限制算子 $\rho_{\mathbb{X}}:\mathbb{X}_s\to\mathbb{X}^s$

$$\lambda_{\mathbb{X}}(q,\ u,\ \eta)=(\mathfrak{E}_\Omega q,\ \mathfrak{E}_\Omega u,\ \eta)\text{ 和 }\rho_{\mathbb{X}}(q,\ u,\ \eta)=(\mathfrak{R}_\Omega q,\ \mathfrak{R}_\Omega u-\mathcal{E}_1(\mathrm{Tr}_{\Sigma_0}u,\ \mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)+\partial_1\eta)\ \eta)。\tag{3.1.13}$$

根据命题 B.4，直接检验可知，$\lambda_{\mathbb{X}}$ 和 $\rho_{\mathbb{X}}$ 确实在其所述区域与陪域之间定义了有界线性映射。此外，我们有 $\rho_{\mathbb{X}}\lambda_{\mathbb{X}}=\mathrm{id}_{\mathbb{X}^0}$，由此完成了 $\{\mathbb{X}^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $\{\mathbb{X}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$的驯性直和项且因而是驯性的证明。进而，这也完成了 $\mathbb{E}$ 是驯性的证明。

接下来我们证明 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$的驯性直和项。为此，只需证明 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$的驯性直和项即可。事实上，我们有更强的结论：这些空间是同构的。为此，考虑映射 $\Gamma:\ \mathbb{X}^s\to\mathbb{Y}^s$，其由 $\Gamma(q,\ u,\ \eta)=(g,\ f,\ k)$ 定义，其中

$$\begin{cases}\nabla\cdot u=g & \text{in }\Omega,\\ -\partial_1 u+\nabla(q+\eta)-\Delta u=f & \text{in }\Omega,\\ -(q-\mathbb{D}u)e_n-\Delta_{\|}\eta e_n=k & \text{on }\Sigma,\\ u\cdot e_n+\partial_1\eta=0 & \text{on }\Sigma,\\ u=0 & \text{on }\Sigma_0.\end{cases}\tag{3.1.14}$$

根据命题 B.4，这一定义良好。Leoni 和 Tice [60]对定理 6.6 的证明表明，该映射是一个巴拿赫同构，尽管定理本身陈述的是略有不同的空间之间的同构；由于通过取 q 和 η的特定线性组合改变了未知量，因此 [60] 中需要这样的同构。□

3.2. 原子非线性的分析。 在本小节中，我们将运用第2.1节关于光滑驯性结构的抽象分析，以及附录 D.1 和附录D.2 中用于验证光滑性和温和估计的工具，研究所考虑方程中的非线性表达式，即系统 (1.4.9)。本小节的大部分结果，都是用第 2 节的语言重新表述附录D.2中的驯性微积分估计。因此，有些证明不过是简单引述；随着后续讨论的推进，重要的是这些命题本身。确立这些结果后，我们将在本小节最后考察两个在我们分析 (1.4.9) 时起着特殊作用的非线性项。它们有助于理解连续性方程的映射性质，而这颇为微妙。

本小节中使用的巴拿赫尺度由以下原子尺度组合而成：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(U;V)&=\{H^s(U;V)\}_{s\in\mathbb{N}},&\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^d)&=\{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)\}_{s\in\mathbb{N}},\\ \mathbf{W}(U;V)&=\{W^{s,\infty}(U;V)\}_{s\in\mathbb{N}},&\mathbf{W}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{(\kappa)}&=\{W^{s,\infty}((0,b);\mathcal{H}^s_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d))\}_{s\in\mathbb{N}},\\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d)&=\{\mathcal{H}^s_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d)\}_{s\in\mathbb{N}},\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

其中，$\kappa\in\mathbb{R}^+$、$d\in\mathbb{N}^+$、$U\subseteq\mathbb{R}^d$ 是一个 Stein 延拓域（见定义 A.2），V 是一个定义在 $\mathbb{R}$上的有限维向量空间，而空间 $\mathcal{H}^s$、$\mathcal{H}^s_{(\kappa)}$ 则在附录 B.1 中定义。上下文明确时，我们通常会在此记号中省略区域和陪域。很容易验证，这些确实是巴拿赫尺度。

我们先考察乘积。回顾一下定义 2.4 中引入的（强）驯性映射空间。

引理 3.3 (乘积的光滑驯性，1)。 设 V_1、V_2 和 W 为实有限维向量空间，$B:\ V_1\times V_2\to W$ 为双线性映射，且 $U\subseteq\mathbb{R}^d$ 为 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*）。将 B 视为取值于 V_1 和 V_2的函数乘积时，以下包含关系成立。

(1) $B \in {}_{\mathrm{s}}T_0^{\infty,1+\lfloor d/2\rfloor}(\mathbf{H}(U;\, V_1) \times \mathbf{H}(U;\, V_2);\, \mathbf{H}(U;\, W))$.

(2) $B \in {}_{\mathrm{s}}T_0^{\infty,0}(\mathbf{H}(U;\, V_1) \times \mathbf{W}(U;\, V_2);\, \mathbf{H}(U;\, W))$.

证明。 利用张量积的泛性质，将 $B = L \circ \otimes$ 分解为线性映射 $L : V_1 \otimes V_2 \to W$，再逐分量处理，可知这直接由推论 D.7 的高低频乘积估计得出。□

现在我们也处理涉及求和的更复杂乘积。

引理 *3.4*（乘积的光滑驯性，*2*）。设 $m \in \mathbb{N}^+$、V、W 和 V_1、. . . 、V_m 是实有限维向量空间，$B\colon V_1 \times \cdots \times V_m \times V \to W$ 是 $(m+1)$-线性的，且 $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 是 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*）。通过 $P_B((g_j, \psi_j)_{j=1}^m, \varphi) = B(g_1 + \psi_1, \ldots, g_m + \psi_m, \varphi)$ 定义的 $(m+1)$-线性映射 P_B 满足包含关系

$$P_B \in {}_{\mathrm{s}}T_{0,1+\lfloor d/2\rfloor}^{\infty}\Big(\prod_{j=1}^{m}(\mathbf{W}(U;V_j) \times \mathbf{H}(U;V_j)) \times \mathbf{H}(U;V);\mathbf{H}(U;W)\Big). \tag{3.2.2}$$

证明。 我们对 $m \in \mathbb{N}^+$ 进行归纳。基例 $m = 1$ 是引理 3.3 的简单应用。现在假设 $m \in \mathbb{N}^+$，且结论对 m 成立。我们要证明结论对 $m+1$ 也成立，因此设 $B\colon V_1 \times \cdots V_m \times V_{m+1} \times V \to W$ 是定义在某些有限维实向量空间上的 $(m+2)$-线性映射。我们断言，存在一个双线性映射 $B_1\colon V_1 \times (V_2 \otimes \cdots \otimes V_{m+1} \otimes V) \to W$，以及一个 $(m+1)$-线性映射 $B_2\colon V_2 \times \cdots \times V_{m+1} \times V \to V_2 \otimes \cdots \otimes V_{m+1} \otimes V$，使得

$$B(v_1, \ldots, v_{m+1}, v) = B_1(v_1, B_2(v_2, \ldots, v_{m+1}, v)). \tag{3.2.3}$$

事实上，根据张量积的泛性质，存在一个线性映射 $L\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_{m+1} \otimes V \to W$，其定义如下：

$$L(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{m+1} \otimes v) = B(v_1, \ldots, v_{m+1}, v), \tag{3.2.4}$$

因此，我们设 $B_1(v_1,\ \tau) = L(v_1 \otimes \tau)$，并设 $B_2(v_2,\ \ldots\ldots,\ v_{m+1},\ v) = v_2 \otimes \cdots \otimes v_{m+1} \otimes v$。然后，我们对算子 P_{B_2} 应用归纳假设，得到

$$P_{B_2} \in {}_{\mathrm{s}}T_{0,1+\lfloor d/2\rfloor}^{\infty}\Big(\prod_{j=2}^{m+1}(\mathbf{W}(U;V_j) \times \mathbf{H}(U;V_j)) \times \mathbf{H}(U;V);\mathbf{H}(U;V_2 \otimes \cdots \otimes V_{m+1} \otimes V)\Big) \tag{3.2.5}$$

类似地，我们对算子 P_{B_1} 应用基例，得到包含关系

$$P_{B_1} \in {}_{\mathrm{s}}T_{0,1+\lfloor d/2\rfloor}^{\infty}(\mathbf{W}(U;V_1) \times \mathbf{H}(U;V_1) \times \mathbf{H}(U;V_2 \otimes \cdots \otimes V_{m+1} \otimes V);\mathbf{H}(U;W)). \tag{3.2.6}$$

方程 (3.2.3) 表明 $P_B((g_j,\ \psi_j)_{j=1}^{m+1},\ \varphi) = P_{B_1}((g_1,\ \varphi_1)\ P_{B_2}((g_j,\ \psi_j)_{j=2}^{m+1},\ \varphi))$。因此，包含关系 $P_B \in {}_{\mathrm{s}}T_0^{\infty,\ 1+\lfloor d/2\rfloor}$ 是由光滑驯性映射的复合以及引理 2.8 得出的。□

我们还考虑与各向异性 Sobolev 空间中的元素作乘积，这些空间在附录 B.1 中定义。

引理 3.5 (乘积的光滑驯性，3)。 以下结论成立。

(1) 设 $r_d \in \mathbb{N}^+$ 如命题 *B.2* 第二项中所定义。映射 $\prod_{j=1}^{r_d} \mathcal{H}^0_{(1)}(\mathbb{R}^d) \ni (\eta_1, \ldots, \eta_{r_d}) \mapsto \prod_{j=1}^{r_d} \eta_j \in H^0(\mathbb{R}^d)$ 属于 $sT_0^{\infty,0}(\prod_{j=1}^{r_d} H^{(1)}; H)$。*(2)* 对任意 $\chi \in W^{\infty,\infty}(0, b)$ 以及 $\nu \in \mathbb{N}^+$，映射 $\prod_{j=1}^{\nu} \mathcal{H}^0_{(1)}(\mathbb{R}^d) \ni (\eta_1, \ldots, \eta_\nu) \mapsto \chi \prod_{j=1}^{\nu} \eta_j \in W^{0,\infty}((0, b);\ \mathcal{H}^0_{(\nu)}(\mathbb{R}^d))$ 属于 $sT_0^{\infty,0}(\prod_{j=1}^{\nu} H^{(1)};\ WH^{(\nu)})$。

证明。 陈述中的映射定义良好且光滑，这一事实可由多线性和命题 B.2 得出。注意，对于 $s \in \mathbb{N}$，第一项的乘积映射实际上将 $\prod_{j=1}^{r_d} \mathcal{H}^0_{(1)}(\mathbb{R}^d) \to H^s(\mathbb{R}^d)$ 光滑地映射到，而第二项的映射则将 $\prod_{j=1}^{\nu} \mathcal{H}^0_{(1)}(\mathbb{R}^d) \to W^{s,\ \infty}((0,\ b);\ \mathcal{H}^s_{(\nu)}(\mathbb{R}^d))$ 光滑地映射到。然后，根据注 2.6 以及这些改进后的映射性质，可得所有导数的强温和估计。□

第 n 我们要处理的下一个关键非线性结构，是作为 Sobolev 乘子的叠加。

引理 *3.6*（叠加乘子的光滑驯性）。设 V_1、V_2、W 和 Z 为实有限维向量空间，且 $B: V_1 \times V_2 \to W$ 为双线性映射。设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $O \subseteq Z$ 为 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*），且 $f \in C_b^\infty(O; V_1)$。最后，假设 $Y \subseteq W^{2+\lfloor n/2 \rfloor,\infty}(U; Z) \times H^{2+\lfloor n/2 \rfloor}(U; Z)$ 是一个开集，并具有如下性质：若 $(g, \psi) \in Y$，则 $(g+\psi)(U) \subseteq O$。那么，由 $P(g, \psi, \varphi) = B(f(g+\psi)\ \varphi)$ 定义的非线性算子 P 属于

$$ {}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,2+\lfloor n/2 \rfloor}(Y \times H^{2+\lfloor n/2 \rfloor}(U; V_2), \mathbf{W}(U; Z) \times \mathbf{H}(U; Z) \times \mathbf{H}(U; V_2); \mathbf{H}(U; W)). \tag{3.2.7} $$

证明。 通过逐分量处理并利用张量积的普遍性可知，作为定理 D.3 以及 Sobolev 乘子与 Sobolev 到 Sobolev 配对的光滑性的推论，对于任意 $s \geqslant 2 + \lfloor n/2 \rfloor$，映射

$$ P : (Y \times H^{2+\lfloor n/2 \rfloor}(U, V_2)) \cap (W^{s,\infty}(U; Z) \times H^s(U; Z) \times H^s(U; V_2)) \to H^s(U; W) \tag{3.2.8} $$

定义良好且光滑。因此，我们只需检验 P 的导数是否满足所需的温和估计。首先考虑零阶导数的情形，我们称之为基例。利用推论 D.9 的第三项，逐分量进行处理，并利用张量积的普适性，我们很容易得出，(3.2.8) 中的映射属于空间 ${}_{\mathrm{s}}T^0_{0,2+\lfloor n/2 \rfloor}$。

现在，对于 $k \in \mathbb{N}^+$，我们考虑 P 的 k 阶导数情形。经过简短计算可得导数公式

$$ D^k P(g, \psi, \varphi)(g_j, \psi_j, \varphi_j)_{j=1}^k = B(D^k f(g+\psi)(g_j + \psi_j)_{j=1}^k, \varphi) + \sum_{i=1}^k B(D^{k-1} f(g+\psi)(g_j + \psi_j)_{j \neq i}, \varphi_i). \tag{3.2.9} $$

同样利用张量积的普适性，可得线性映射

$$ L^k : \mathcal{L}^k(Z; V_1) \otimes \Big(\bigotimes_{j=1}^k Z \Big) \otimes V_2 \to W \text{ and } L_{k-1} : \mathcal{L}^{k-1}(Z; V_1) \otimes \Big(\bigotimes_{j=1}^{k-1} Z \Big) \otimes V_2 \to W \tag{3.2.10} $$

（仅依赖于 k 和 B），使得

$$ B(D^k f(g+\psi)(g_j + \psi_j)_{j=1}^k, \varphi) = L^k \Big(D^k f(g+\psi) \otimes \bigotimes_{j=1}^k (g_j + \psi_j) \otimes \varphi \Big) \tag{3.2.11} $$

and

$$ B(D^{k-1} f(g+\psi)(g_j + \psi_j)_{j \neq i}, \varphi_i) = L_{k-1} \Big(D^{k-1} f(g+\psi) \otimes \bigotimes_{j \neq i} (g_j + \psi_j) \otimes \varphi_i \Big). \tag{3.2.12} $$

接着，利用基例、引理 2.8 中复合的驯性，以及乘积驯性的第二种形式（引理 3.4），可知 (3.2.11) 和 (3.2.12) 中的算子属于 ${}_{\mathrm{s}}T^0_{0,2+\lfloor n/2 \rfloor}$。这表明，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$D^k P$ 确实属于 ${}_{\mathrm{s}}T^0_{0,2+\lfloor n/2 \rfloor}$。□

我们接下来考察的非线性结构是叠加。

引理 3.7 (S mooth 温和驯性 of 叠加)。 设 $\mathbb{N} \ni k \geqslant 2 + \lfloor n/2 \rfloor$。以下结论成立。

(1) 设 V、W 为实有限维向量空间，$0 \in O \subseteq V$ 为关于原点星形的 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*），$U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 *Stein* 延拓域，并且 $f \in C^\infty(O; W)$ 满足 $f(0) = 0$ 且 $Df \in C_b^\infty(O; \mathcal{L}(V; W))$。设 $Y \subseteq H^{2+\lfloor n/2 \rfloor}(U; V)$ 为一个开集，具有如下性质：若 $\varphi \in Y$，则 $\varphi(U) \subseteq O$。那么，算子 $\varphi \mapsto f(\varphi)$ 属于 ${}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,2+\lfloor n/2 \rfloor}(Y, H(U; V); H(U; W))$。

(2) 假设 $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 是一个双 *Lipschitz* 同胚，也是一个 C^1 微分同胚，并且满足 $D\Phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})$。存在开集 $0 \in U_\Phi \subseteq W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times H^{2+\lfloor n/2\rfloor}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$，它仅依赖于 Φ 和维数；对任意 $m \in \mathbb{N}$，由 $P(f,g,h) = f(\Phi+g+h)$ 定义的算子 P 满足

$$P \in {}_{\mathrm{s}}T^m_{0,2+\lfloor n/2\rfloor}(H^{m+2+\lfloor n/2\rfloor}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d) \times U_\Phi, \mathbf{I}_m; \mathbf{H}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)), \tag{3.2.13}$$

其中 $\mathbf{I}_m = \{H^{m+s}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d) \times W^{s,\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\}_{s\in\mathbb{N}}$。

证明。 我们首先证明第一项。注意到，利用微积分基本定理，第一项中的映射可写成等价形式

$$\varphi \mapsto f(\varphi) = \int_0^1 Df(t\varphi)(\varphi)\,\mathrm{d}t. \tag{3.2.14}$$

对于每个 $t \in [0,1]$，映射 $\varphi \mapsto Df(t\varphi)(\varphi)$ 可见是${}_{\mathrm{s}}T^{\infty,}_{0,\ 2+\lfloor n/2\rfloor}$ 这是我们关于叠加乘子的光滑驯性所得到的先前结果（引理 3.6）以及光滑驯性映射的复合（引理 2.8）的结果。事实上，很容易验证，相对于 t，定义不等式实际上也是一致的，并且引理 2.10 的其余假设也得到满足。因此，第一项由应用该引理即可得出。

接下来考虑第二项。定理 D.2 证明存在一个开集$U_\Phi \subseteq W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times H^{2+\lfloor n/2\rfloor}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$，使得对于每个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $s \geqslant 2+\lfloor n/2\rfloor$，映射

$$P : H^{m+s}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d) \times (U_\Phi \cap (W^{s,\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))) \to H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d) \tag{3.2.15}$$

定义良好且 C^m。因此，我们只需验证 P 的导数（列于 (D.1.7) 中）属于 ${}_{\mathrm{s}}T^0_{0,2+\lfloor n/2\rfloor}$。对于 0th 导数（$m=0$）的情形，由推论 D.10 的第二项以及对所有 $(g,h) \in U_\Phi$ 都成立的上界 $\|\det D(g+h)^{-1}\|_{L^\infty} \leqslant 2^n\|D\Phi^{-1}\|^n_{L^\infty}$ 可立即得到；这由引理 D.1 和定理 D.2 推出。当 $m>0$ 时，公式 (D.1.7) 表明，m^{th} 导数由简单乘积和 0th 导数结构构成。因此，将这一观察与引理 2.8 和 3.4 相结合，即可在此情形下得到所需结果。□

下面的两个结果恰好涉及非线性分析中最微妙的部分，讨论了其自变量包含各向异性 Sobolev 空间元素的类叠加非线性。回顾附录 B.1，其中给出了这些专门空间的记号及基本性质的列举。在下面的陈述中，对于 $r_d \in \mathbb{N}^+$，$d = n-1$ 指的是命题 B.2 第二项中定义的数。

引理 3.8 (泰勒展开技巧)。 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个包含 $[-\mathfrak{g}b, 0]$ 和$\phi \in C^\infty(I)$的开区间。存在一个 $\rho_I \in \mathbb{R}^+$，

$$\mathcal{N}^{(1)}_\phi \in {}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,2+\lfloor n/2\rfloor}(B_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_I) \times B_{\mathcal{H}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_I), \mathbf{H}(\Omega) \times \boldsymbol{\mathcal{H}}(\Sigma); \mathbf{H}(\Omega)), \tag{3.2.16}$$

and

$$\mathcal{N}^{(2)}_\phi \in {}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,0}(\boldsymbol{\mathcal{H}}_{(1)}(\Sigma); \mathbf{W}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{(r_{n-1}-1)}) \tag{3.2.17}$$

使得 $\mathcal{N}^{(1)}_\phi(0,\ 0) = 0$，$\mathcal{N}_{(2)\phi}(0) = 0$，并且

$$\mathcal{N}_\phi(q,\eta) - \mathcal{N}_\phi(0,0) = \mathcal{N}^{(1)}_\phi(q,\eta) + \mathcal{N}^{(2)}_\phi(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta), \tag{3.2.18}$$

其中投影算子 Π 定义于 (B.1.4) 中，我们记

$$\mathcal{N}_\phi(q,\eta) = \phi(-\mathfrak{g}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_n + q + \mathfrak{g}(I-\mathcal{E})\eta) \text{ and } \mathcal{N}_\phi(0,0) = \phi(-\mathfrak{g}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_n). \tag{3.2.19}$$

证明。 我们首先选取 ρ_I。令 $R_I = \operatorname{dist}(\mathbb{R}\setminus I, [-\mathfrak{g}b, 0])/2 \in (0, \infty]$。得益于超临界 Sobolev 嵌入、命题 B.1 中各向异性 Sobole夫空间的性质，以及引理 A.1 中延拓算子 $\mathcal{E}$ 的有界性，我们看到该映射

$$H^{2+\lfloor n/2\rfloor}(\Omega) \times \mathcal{H}^{2+\lfloor n/2\rfloor}(\Sigma) \ni (q, \eta) \mapsto q + \mathfrak{g}(I - \mathcal{E})\eta \in L^\infty(\Omega) \tag{3.2.20}$$

是定义良好且连续的。因此， $B_{L^\infty}(0, R_I)$ 在此映射下的原像是一个包含原点的开集U_I。我们取 $\rho_I = \operatorname{dist}(0, \partial U_I)/\sqrt{2}$，使得

$$B_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0, \rho_I) \times B_{\mathcal{H}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0, \rho_I) \subseteq U_I. \tag{3.2.21}$$

现在令 $(q, \eta) \in B_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0, \rho_I) \times B_{\mathcal{H}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0, \rho_I)$。注意，按 (3.2.19) 定义的 $\mathcal{N}_\phi(q, \eta)$ 是一个从 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的定义良好的函数。记

$$\mathcal{N}_\phi(q, \eta) = \phi(g_0 + g + \varphi), \tag{3.2.22}$$

其中 $g_0 = -\mathfrak{g}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \cdot e_n$、 $g = \mathfrak{g}(I - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \cdot e_n/b)\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta$，且 $\varphi = q + \mathfrak{g}(I - \mathcal{E})\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta$。因此，

$$\mathcal{N}_\phi(q, \eta) - \mathcal{N}_\phi(0, 0) = (\phi(g_0 + g + \varphi) - \phi(g_0 + g)) + (\phi(g_0 + g) - \phi(g_0)) = \mathbf{I} + \mathbf{II}. \tag{3.2.23}$$

对于**I**，我们使用微积分基本定理来表示

$$\mathbf{I} = \varphi \int_0^1 \phi'(g_0 + g + \tau\varphi)\, \mathrm{d}\tau, \tag{3.2.24}$$

而对于 **II**，我们使用带积分余项的泰勒公式来写出

$$\mathbf{II} = \sum_{j=1}^{r_d - 1} \frac{\phi^{(j)}(g_0)}{j!} g^j + g^{r_d} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{r_d - 1}}{(r_d - 1)!} \phi^{(r_d)}(g_0 + \tau g)\, \mathrm{d}\tau, \tag{3.2.25}$$

其中 $r_d = r_{n-1} \geqslant 1$ 由 (B.1.5) 给出，空区间上的求和约定为零。这引出如下定义

$$\mathcal{N}^{(1)}_\phi(q, \eta) = \varphi \int_0^1 \phi'(g_0 + g + \tau\varphi)\, \mathrm{d}\tau + g^{r_d} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{r_d - 1}}{(r_d - 1)!} \phi^{(r_d)}(g_0 + \tau g) \mathrm{d}\tau \tag{3.2.26}$$

and

$$\mathcal{N}^{(2)}_\phi(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta) = \sum_{j=1}^{r_d - 1} \frac{\phi^{(j)}(g_0)}{j!} g^j. \tag{3.2.27}$$

导出这些定义的计算表明，分解 (3.2.18) 成立，并且 $\mathcal{N}^{(1)}_\phi$ 和 $\mathcal{N}^{(2)}_\phi$ 在原点处为零。

现在我们分析 $\mathcal{N}_{(1)\phi}$ 和 $\mathcal{N}_{(2)\phi}$ 的温和光滑性。根据光滑驯性映射加法的结果、引理 2.10、叠加乘子的光滑驯性、引理 3.6、光滑驯性映射的复合、引理 2.8，以及乘积光滑驯性的第三种形式（引理 3.5），前者是 ${}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,2+\lfloor n/2\rfloor}$。另一方面，由引理 3.5 可知，映射 $\mathcal{N}_{(2)\phi}$ 是 ${}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,0}$。□

现在，我们利用前面的结果来理解式 (1.4.9) 的连续性方程中散度的向量场自变量的映射性质。

引理 3.9（向量场分解）。 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个包含 $[-\mathfrak{g}b, 0]$,$\phi \in C^\infty(I)$ 的开区间，并且 ρ_I 如引理 *3.8* 中所述。设开集 O_I 由 $B_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0, \rho_I) \times H^{2+\lfloor n/2\rfloor}(\Omega; \mathbb{R}^n) \times B_{\mathcal{H}^{3+\lfloor n/2\rfloor}}(0, \rho_I)$ 给出，并考虑巴拿赫尺度

$$\mathbf{J} = \{H^s(\Omega) \times H^s(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}^{1+s}(\Sigma)\}_{s \in \mathbb{N}}. \tag{3.2.28}$$

存在

$$\mathcal{M}^{(1)}_\phi \in {}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,2+\lfloor n/2\rfloor}(O_I, \mathbf{J}; \mathbf{H}(\Omega; \mathbb{R}^n)) \tag{3.2.29}$$

and

$$e_1 \cdot \mathcal{M}_\phi^{(2)} \in {}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,0}(\boldsymbol{\mathcal{H}}_{(1)}(\Sigma); \mathbf{W}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{(r_{n-1})}) \tag{3.2.30}$$

使得 $\mathcal{M}_\phi^{(1)}(0,0,0) = 0$, $e_1 \cdot \mathcal{M}_\phi^{(2)}(0) = 0$,

$$\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\mathcal{M}_\phi^{(1)}(q,u,\eta)\cdot e_n) = \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\mathcal{N}_\phi(q,\eta))\big((\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)+\partial_1\eta)\mathbb{1}_\Sigma + \mathrm{Tr}_{\Sigma_0}(u\cdot e_n)\mathbb{1}_{\Sigma_0}\big), \tag{3.2.31}$$

and

$$\mathcal{M}_\phi(q,u,\eta) - \mathcal{M}_\phi(0,0,0) = \mathcal{M}_\phi^{(1)}(q,u,\eta) + e_1\cdot\mathcal{M}_\phi^{(2)}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta)e_1, \tag{3.2.32}$$

其中我们记

$$\mathcal{M}_\phi(q,u,\eta) = \mathcal{N}_\phi(q,\eta)(u - M_\eta e_1) \text{ and } \mathcal{M}_\phi(0,0,0) = -\mathcal{N}_\phi(0,0)e_1 \tag{3.2.33}$$

对于 $\mathcal{N}_\phi(q,\eta)$、 M_η 以及由 (3.2.19)、(1.4.10) 和 (B.1.4) 分别给出的 Π .

证明。 使用引理 3.8 以及恒等式$M_\eta e_1 = (1+\partial_n\mathcal{E}\eta)e_1 - \partial_1\mathcal{E}\eta e_n$ 和 $\partial_n\mathcal{E}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta = \Pi^1_{\mathrm{L}}\eta/b$ 的分解 (3.2.32) 的精确形式为

$$\mathcal{M}_\phi^{(1)}(q,u,\eta) = \mathcal{N}_\phi(q,\eta)(u - \partial_n\mathcal{E}\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta e_1 + \partial_1\mathcal{E}\eta e_n) - \mathcal{N}_\phi^{(1)}(q,\eta)(1+\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta/b)e_1 \tag{3.2.34}$$

and

$$e_1\cdot\mathcal{M}_\phi^{(2)}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta) = -(\mathcal{N}_\phi(0,0)\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta/b + \mathcal{N}_\phi^{(2)}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta)(1+\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta/b)). \tag{3.2.35}$$

$\mathcal{M}_\phi^{(1)}$ 是${}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,\ 2+\lfloor n/2\rfloor}$ 这一事实，是驯性映射的复合、引理 2.8、第二乘积结果、引理 3.4、 $\mathcal{N}_\phi$ 的映射性质、引理 3.8，以及 (B.1.25) 和命题 B.1 中列出的各向异性 Sobolev 空间性质的结果。
$e_1\cdot\mathcal{M}_\phi^{(2)}$ 是${}_{\mathrm{s}}T^\infty_{0,\ 0}$ 这一事实，是引理 3.5 和 3.8 的结果。□

3.3. **非线性算子的光滑驯性**。 我们首先定义一个与偏微分方程 (1.4.9) 相关的非线性算子。我们将采用第3.1节中定义的巴拿赫尺度。对于某些$r \geqslant 2+\lfloor n/2\rfloor$、 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中 ρ_{WD} 由定理 3.17 确定，且 $s \geqslant r$，我们令

$$\overline{\Psi} : (B_{\mathbb{X}^r}(0,\rho)\cap\mathbb{X}^{1+s})\times\mathbb{W}_s\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{Y}^s\times\mathbb{W}_s\times\mathbb{R} \tag{3.3.1}$$

via

$$\overline{\Psi}(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma) = (\Psi(q,u,\eta,\gamma) + \Phi(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}),\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma), \tag{3.3.2}$$

其中

$$\Psi : (B_{\mathbb{X}^r}(0,\rho)\cap\mathbb{X}^{1+s})\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{Y}^s \text{ and } \Phi : (B_{\mathbb{X}^r}(0,\rho)\cap\mathbb{X}^s)\times\mathbb{W}_s \to \mathbb{Y}^s \tag{3.3.3}$$

是 Ψ的主部和辅助部分，其定义如下：

$$\Psi(q,u,\eta,\gamma) = (\Psi_1(q,u,\eta),\Psi_2(q,u,\eta,\gamma),\Psi_3(q,u,\eta,\gamma)) \tag{3.3.4}$$

and

$$\Phi(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) = (0,\Phi_2(q,\eta,\mathcal{G},\mathcal{F}),\Phi_3(\eta,\mathcal{T})), \tag{3.3.5}$$

其中

$$\Psi_1(q,u,\eta) = \nabla\cdot(\sigma_{q,\eta}(u - M_\eta e_1)), \tag{3.3.6}$$

$$\Psi_2(q,u,\eta,\gamma) = \gamma^2\sigma_{q,\eta}M_\eta^{-\mathrm{t}}((u-\gamma M_\eta e_1)\cdot\nabla(M_\eta^{-1}u)) + \sigma_{q,\eta}\nabla(q+\mathfrak{g}\eta) - \gamma M_\eta^{-\mathrm{t}}\nabla\cdot(\mathbb{S}^{\sigma_{q,\eta}}_{\mathcal{A}_\eta}(M_\eta^{-1}u)M_\eta^{\mathrm{t}}), \tag{3.3.7}$$

$$\Psi_3(q,u,\eta,\gamma) = -((P-P_{\mathrm{ext}})\circ\sigma_{q,\eta} - \gamma\mathbb{S}^{\sigma_{q,\eta}}_{\mathcal{A}_\eta}(M_\eta^{-1}u))M_\eta^{\mathrm{t}}e_n - \varsigma\mathscr{H}(\eta)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n, \tag{3.3.8}$$

$$\Phi_2(q,\eta,\mathcal{G},\mathcal{F}) = -J_\eta M_\eta^{-\mathrm{t}}(\sigma_{q,\eta}\mathcal{G}\circ\mathfrak{F}_\eta + \mathcal{F}\circ\mathfrak{F}_\eta), \tag{3.3.9}$$

and

$$\Phi_3(\eta,\mathcal{T}) = -\mathcal{T}\circ\mathfrak{F}_\eta M_\eta^{\mathrm{t}}e_n. \tag{3.3.10}$$

这里回顾一下， $\mathfrak{F}_\eta$ 由 (1.4.4) 定义， $\mathcal{A}_\eta$ 和 J_η 由 (1.4.5) 定义， $\mathbb{S}^{\mathfrak{r}}_{\mathcal{A}}$ 由 (1.4.8) 定义， M_η 由 (1.4.10) 定义，而$\sigma_{q,\ \eta}$ 由 (1.4.11) 定义。我们还回顾一下 (1.1.7) 中关于 ς、 μ和 λ 的假设。

利用前两个小节的结果，我们现在着手研究 (3.3.1) 中映射 Ψ 的光滑驯性。我们的策略是分别逐分量处理 Ψ和 Φ 部分。我们的第一个结果研究连续性方程部分 Ψ_1，我们回顾一下，它定义于 (3.3.6)。这一 Ψ_1 项是导数损失的来源，在光滑驯性验证结果中也需要最细致的分析。

命题 3.10（连续性方程的光滑驯性）。 存在一个 $\rho_{\mathrm{cont}} \in (0,\infty)$，它仅取决于逆焓的定义域（见 (1.1.11)），使得以下结论成立

(1) 存在常数 $c, C \in \mathbb{R}^+$，使得对所有 $(q,u,\eta) \in B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{cont}})$，都有估计 $c \leqslant \sigma_{q,\eta} \leqslant C$，其中 $\sigma_{q,\eta}$ 定义见 (1.4.11)。 *(2)* $\Psi_1 \in {}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{1,1+\lfloor n/2\rfloor}(B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{cont}})\ \mathbf{X};\{\mathring{H}^{1+s}(\Omega)\}_{s\in\mathbb{N}})$，这里回顾一下，空间 $\mathring{H}^s(\Omega)$定义于 (C.1.1)（另见注 *3.1*）。

证明。 我们首先证明第二项。首先，利用引理 3.9 设定 $\rho_{\mathrm{cont}} = \rho_{(H_{\min},H_{\max})}$，其中 $H_{\min}$ 和 $H_{\max}$ 由 (1.1.11) 定义，从而得到 $\nabla\cdot\mathcal{M}_{H^{-1}}(0,\ 0,\ 0) = 0$，并令其等于

$$\Psi_1(q,u,\eta) = \nabla\cdot(\mathcal{M}^{(1)}_{H^{-1}}(q,u,\eta)) + \partial_1(e_1\cdot\mathcal{M}^{(2)}_{H^{-1}}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta)) = \Psi^{\mathbf{I}}_1(q,u,\eta) + \Psi^{\mathbf{II}}_1(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta). \tag{3.3.11}$$

上文中的 H^{-1} 指的是逆焓函数（见 1.1.10）。作为引理 3.9 的直接推论，我们得到包含关系

$$\Psi^{\mathbf{I}}_1 \in {}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{1,1+\lfloor n/2\rfloor}(B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{cont}}),\mathbf{X};\{H^{1+s}(\Omega)\}_{s\in\mathbb{N}}). \tag{3.3.12}$$

另一方面，根据 (3.1.3) 中 $\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}$ 空间的定义，其中包含的边界条件与条件 (3.2.31) 一起，意味着

$$\int_0^b \Psi^{\mathbf{I}}_1(q,u,\eta)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y = (\nabla_{\|},0)\cdot\int_0^b \mathcal{M}^{(1)}_{H^{-1}}(q,u,\eta)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y, \tag{3.3.13}$$

因此我们推得，$\Psi^{\mathbf{I}}_1$ 也光滑地映射到空间 $\mathring{H}^0(\Omega)$ 中。结合 (3.3.12)，这一事实证明，关于假设中所述的巴拿赫尺度，$\Psi^{\mathbf{I}}_1$ 是 ${}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{1,\ 1+\lfloor n/2\rfloor}$。

接下来处理 $\Psi^{\mathbf{II}}_1$ 部分。根据（B.1.25）中给出的各向异性 Sobolev 空间的范数，我们很容易看出嵌入 $W^{0,\ \infty}((0,\ b);\partial_1\mathcal{H}^0_{(r_{n-1})}(\Sigma)) \hookrightarrow H^0(\Omega)$ 成立，因此由引理 3.9 的结论（3.2.30）可推得 $\Psi^{\mathbf{II}}_1 \in {}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{0,\ 0}(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)}(\Sigma);\mathbf{H}(\Omega))$。

再次观察（B.1.25）中的各向异性范数，我们还可推出嵌入

$$W^{0,\infty}((0,b);\partial_1\mathcal{H}^0_{(r_{n-1})}(\Sigma)) \hookrightarrow W^{0,\infty}((0,b);\dot{H}^{-1}(\Sigma)), \tag{3.3.14}$$

因此映射

$$\mathcal{H}^0_{(1)}(\Sigma) \ni \zeta \mapsto \int_0^b \Psi^{\mathbf{II}}_1(\zeta)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y \in \dot{H}^{-1}(\Sigma) \tag{3.3.15}$$

是定义良好且光滑的。综合这些事实可知，关于巴拿赫尺度 $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)}(\Sigma)$ 和 $\{\mathring{H}^s(\Omega)\}_{s\in\mathbb{N}}$，$\Psi^{\mathbf{II}}_1$ 属于${}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{0,\ 0}$。我们综合关于 $\Psi^{\mathbf{I}}_1$ 和 $\Psi^{\mathbf{II}}_1$ 的结果，以完成第二项的证明。

现在我们推导第一项中所述的界。展开引理 3.8 中 $\rho_{\mathrm{cont}} = \rho_I$ 的含义可知，对于 $I = (H_{\min},\ H_{\max})$，对 $(q,u,\eta) \in B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{cont}})$，我们有包含关系

$$(-\mathfrak{g}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_n + q + \mathfrak{g}(I-\mathcal{E})\eta)(\Omega) \subseteq (h_\star,h^\star) \Subset (H_{\min},H_{\max}), \tag{3.3.16}$$

对于某个普适的 $h_\star,h^\star \in (H_{\min},H_{\max})$。因此，应用逆焓后，我们得到$H^{-1}(h_\star) \leqslant \sigma_{q,\eta} \leqslant H^{-1}(h^\star)$，这就是第一项，其中 $c = H^{-1}(h_\star)$ $C = H^{-1}(h^\star) \in \mathbb{R}^+$。□

接下来我们考察动量方程的 Ψ_2 部分，回顾一下，它定义于 (3.3.7) 中。

命题 3.11（动量方程的光滑驯性，1）。 存在 $\rho_{\mathrm{mome}} \in (0,\ \rho_{\mathrm{cont}}]$，使得以下结论成立。

(1) 对于 $(q、u、\eta) \in B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0、\rho_{\mathrm{mome}})$，有界 $1/2 \leqslant J_\eta \leqslant 3/2$，其中 J_η 定义于 (1.4.5)。(2) $\Psi_2 \in {}_{\mathrm{s}}T_0^{\infty,\,1+\lfloor n/2\rfloor}(B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0、\rho_{\mathrm{mome}}) \times \mathbb{R}^+、\mathbf{X} \times \mathbb{R}; \mathbf{H}(\Omega; \mathbb{R}^n)$。

证明。我们首先选取 ρ_{mome}。映射

$$\mathcal{H}^{3/2+\lfloor n/2\rfloor}(\Sigma) \ni \eta \mapsto J_\eta - 1 = \partial_n \mathcal{E}\eta \in L^\infty(\Omega) \tag{3.3.17}$$

由于超临界 Sobolev 嵌入以及命题 A.1 中 $\mathcal{E}$ 的连续性，该映射有界。将集合 $B_{L^\infty}(0, 1/2)$ 在此映射下的原像记为 $O \subseteq \mathcal{H}^{3/2+\lfloor n/2\rfloor}(\Sigma)$。$O$ 是开集，我们令 $\widetilde{\rho}_{\mathrm{mome}} = = \mathrm{dist}(0, \partial O) \in \mathbb{R}^+$，并令 $\rho_{\mathrm{mome}} = = \min\{\widetilde{\rho}_{\mathrm{mome}}, \rho_{\mathrm{cont}}\}$，其中后者在命题 3.10 中定义。

作此选择后，我们有 $1/2 \leqslant J_\eta \leqslant 3/2$，因此只要 $\|\eta\|_{\mathcal{H}^{3/2+\lfloor n/2\rfloor}} < \rho_{\mathrm{mome}}$，逆矩阵 M_η^{-1} 就存在。由此，Ψ_2 中出现的所有表达式在逐点意义下都有定义。接下来我们分解

$$\Psi_2(q, u, \eta, \gamma) = \gamma^2 \Psi_2^{\mathbf{I}}(q, u, \eta) + \Psi_2^{\mathbf{II}}(q, \eta) + \gamma \Psi_2^{\mathbf{III}}(q, u, \eta), \tag{3.3.18}$$

其中

$$\begin{cases} \Psi_2^{\mathbf{I}}(q, u, \eta) = \sigma_{q,\eta} M_\eta^{-\mathrm{t}}[(u - M_\eta e_1) \cdot \nabla(M_\eta^{-1} u)], \\ \Psi_2^{\mathbf{II}}(q, \eta) = \sigma_{q,\eta} \nabla(q + \mathfrak{g}\eta), \\ \Psi_2^{\mathbf{III}}(q, u, \eta) = -M_\eta^{-\mathrm{t}} \nabla \cdot (\mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{\sigma_{q,\eta}}(M_\eta^{-1} u) M_\eta^{\mathrm{t}}). \end{cases} \tag{3.3.19}$$

(3.3.18) 中对 γ 的依赖关系很简单，因此只需分别研究 (3.3.19) 的各个部分。对于第一部分，我们利用引理 3.8 将其写为

$$\sigma_{q,\eta} = \varrho + \mathcal{N}_{H^{-1}}^{(1)}(q, \eta) + \mathcal{N}_{H^{-1}}^{(2)}(\Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta), \tag{3.3.20}$$

其中，H^{-1} 是焓的逆映射（见 (1.1.10)）。命题 B.1 第二项中的嵌入使我们可以将后一个映射视为 $\mathcal{N}(2)_{H^{-1}} \in \mathrm{s}T_0^{\infty,0}(\mathrm{H}^{(1)}(\Sigma); \mathrm{W}(\Omega))$。得益于命题 3.6 所证明的叠加乘子的光滑驯性，映射 $(u, \eta) \mapsto \nabla(M_\eta^{-1} u)$ 关于巴拿赫尺度 $\{H^{2+s}(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}^{5/2+s}(\Sigma)\}_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $\{H^s(\Omega; \mathbb{R}^n)\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{s}T_0^{\infty,1+\lfloor n/2\rfloor}$。应用引理 3.4 中的驯映射乘积结果和引理 2.8 中的光滑驯性映射复合结果，我们便可得出，映射 $(u, \eta) \mapsto (u - M_\eta e_1) \cdot \nabla(M_\eta^{-1} u)$ 关于上述巴拿赫尺度也是 $\mathrm{s}T_0^{\infty,1+\lfloor n/2\rfloor}$。再次应用引理 3.6 和 2.8，可知映射 $(u, \eta) \mapsto M_\eta^{-\mathrm{t}}[(u - M_\eta e_1) \cdot \nabla(M_\eta^{-1} u)]$ 也有相同的结论。最后，利用引理 3.8、3.4 和 2.8，我们推出 $(q, u, \eta) \mapsto (\varrho + \mathcal{N}(1)_{H^{-1}}(q, \eta) + \mathcal{N}(2)_{H^{-1}}(\Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta)) M_\eta^{-\mathrm{t}}[(u - M_\eta e_1) \cdot \nabla(M_\eta^{-1} u)],$，即 $\Psi_2^{\mathbf{I}}$，关于巴拿赫尺度 $\{\mathbb{X}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $\{H^s(\Omega; \mathbb{R}^n)\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{s}T_0^{\infty,1+\lfloor n/2\rfloor}$。

现在我们考察 $\Psi_2^{\mathbf{II}}$ 部分。我们再次使用 (3.3.20) 中的密度分解。由引理 3.8 和 3.4 可知，对于巴拿赫尺度 $\{H^{1+s}(\Omega) \times \mathcal{H}^{5/2+s}(\Sigma)\}_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $\{H^s(\Omega; \mathbb{R}^n)\}_{s\in\mathbb{N}}$，$\Psi_2^{\mathbf{II}}$ 是 ${}_{\mathrm{s}}T_0^{\infty,1+\lfloor n/2\rfloor}$。

最后，我们考察 $\Psi_2^{\mathbf{III}}$ 部分，并进一步进行分解：

$$\Psi_2^{\mathbf{III}}(q, u, \eta) = \Psi_2^{\mathbf{III_1}}(q, u, \eta) + \Psi_2^{\mathbf{III_2}}(q, u, \eta) + \Psi_2^{\mathbf{III_3}}(q, u, \eta) + \Psi_2^{\mathbf{III_4}}(q, u, \eta), \tag{3.3.21}$$

其中

$$\begin{cases} \Psi_2^{\mathbf{III_1}}(q, u, \eta) = -M_\eta^{-\mathrm{t}} \nabla \cdot \big(\mu(\sigma_{q,\eta}) J_\eta^{-1} \nabla(M_\eta^{-1} u) M_\eta M_\eta^{\mathrm{t}}\big), \\ \Psi_2^{\mathbf{III_2}}(q, u, \eta) = -M_\eta^{-\mathrm{t}} \nabla \cdot (\mu(\sigma_{q,\eta}) J_\eta^{-1} M_\eta^{\mathrm{t}} \nabla(M_\eta^{-1} u)^{\mathrm{t}} M_\eta^{\mathrm{t}}), \\ \Psi_2^{\mathbf{III_3}}(q, u, \eta) = 2M_\eta^{-\mathrm{t}} \nabla \cdot (\mu(\sigma_{q,\eta}) J_\eta^{-1} (\nabla \cdot u) M_\eta^{\mathrm{t}}), \\ \Psi_2^{\mathbf{III}_4}(q, u, \eta) = -M_\eta^{-\mathrm{t}} \nabla \cdot (\lambda(\sigma_{q,\eta}) J_\eta^{-1} (\nabla \cdot u) M_\eta^{\mathrm{t}}). \end{cases} \tag{3.3.22}$$

我们以大致相同的方式处理这四项。将 μ 和 λ 黏性系数分解为

$$\begin{cases}\mu(\sigma_{q,\eta})=\mu(\varrho)+\mathcal{N}^{(1)}_{\mu\circ H^{-1}}(q,\eta)+\mathcal{N}^{(2)}_{\mu\circ H^{-1}}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta),\\ \lambda(\sigma_{q,\eta})=\lambda(\varrho)+\mathcal{N}^{(1)}_{\lambda\circ H^{-1}}(q,\eta)+\mathcal{N}^{(2)}_{\lambda\circ H^{-1}}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta),\end{cases}\tag{3.3.23}$$

由引理 3.8 得出，而 M_η, M_η^{-1}, $M_{\mathrm{t}\eta}$, $M^{-}{}_{\mathrm{t}\eta}$ 和 J_η^{-1} 项被视为叠加乘子，因此通过引理 3.6 处理。因此，每个 $\Psi_2^{\mathbf{III}_j}$, $j\in\{1,\dots,4\}$ 相对于巴拿赫尺度 $\{\mathbb{X}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $\{H^s(\Omega;\mathbb{R}^n)\}_{s\in\mathbb{N}}$ 都是 ${}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{0,1+\lfloor n/2\rfloor}$ 的事实，是上述引理、关于乘积的第二个结果、引理 3.4，以及光滑驯性映射复合结果（引理 2.8）的推论。□

现在我们来考察动态边界条件的 Ψ_3 部分；回想一下，它定义于 (3.3.8) 中。

命题 3.12 (动态边界条件的光滑驯性，1)。 根据 $\rho_{\mathrm{dyna}}=\rho_{\mathrm{mome}}\in\mathbb{R}^+$ 命题 *3.11* 中的条件，我们有

$$\Psi_3\in{}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{0,1+\lfloor n/2\rfloor}(B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{dyna}})\times\mathbb{R}^+,\mathbf{X}\times\mathbb{R};\{H^{1/2+s}(\Sigma;\mathbb{R}^n)\}_{s\in\mathbb{N}}).\tag{3.3.24}$$

证明。 与之前一样，我们先通过分解来证明

$$\Psi_3(q,u,\eta,\gamma)=\Psi_3^{\mathbf{I}}(q,\eta)+\gamma\Psi_3^{\mathbf{II}}(q,u,\eta)+\Psi_3^{\mathbf{III}}(\eta)\tag{3.3.25}$$

其中

$$\begin{cases}\Psi_3^{\mathbf{I}}(q,\eta)=-(P\circ\sigma_{q,\eta}-P_{\mathrm{ext}})M_\eta^{\mathrm{t}}e_n,\\ \Psi_3^{\mathbf{II}}(q,u,\eta)=\mathbb{S}^{\sigma_{q,\eta}}_{\mathcal{A}_\eta}(M_\eta^{-1}u)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n,\\ \Psi_3^{\mathbf{III}}(\eta)=-\varsigma\mathscr{H}(\eta)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n.\end{cases}\tag{3.3.26}$$

对于第一部分，我们回想起 H^{-1} 是焓的逆映射，如式 (1.1.10) 所示，并利用以下事实：$\sigma_{q,\eta}=H^{-1}(-\mathfrak{g}b+q)$ 和 $P_{\mathrm{ext}}=P\circ\varrho(b)=P\circ H^{-1}(-\mathfrak{g}b)$ 在 Σ 上，从而改写为

$$\Psi_3^{\mathbf{I}}(q,\eta)=(P\circ H^{-1}(\cdot-\mathfrak{g}b)-P\circ H^{-1}(-\mathfrak{g}b))(q)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n.\tag{3.3.27}$$

由此可直接看出，算子 $\Psi_3^{\mathbf{I}}$ 属于 ${}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{0,1+\lfloor n/2\rfloor}$，相对于巴拿赫尺度$\{H^{1+s}(\Omega)\times\mathcal{H}^{5/2+s}(\Sigma)\}_{s\in\mathbb{N}}$和 $\{H^{1/2+s}(\Sigma;\mathbb{R}^n)\}_{s\in\mathbb{N}}$。这一结论是引理 3.7 第一项（关于叠加的驯性光滑性）、叠加乘子的驯性光滑性结果、引理 3.6，以及关于光滑驯性映射的复合的结果（引理 2.8）的推论。

由与引理 3.11 证明中对 $\Psi_2^{\mathbf{III}}$ 项的分析类似的论证可知，对于尺度 $\{\mathbb{X}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $\{H^{1/2+s}(\Sigma;\mathbb{R}^n)$，$\Psi_3^{\mathbf{II}}$ 是${}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{0,1+\lfloor n/2\rfloor}\}_{s\in\mathbb{N}}$。

最后，我们处理 $\Psi_3^{\mathbf{III}}$。平均曲率算子的表达式为 $\mathscr{H}(\eta)=\nabla_{\|}\cdot(\widetilde{\mathscr{H}(\nabla_{\|}\eta)}$，其中映射 $\mathscr{H}\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{R}^{n-1})$ 由 $\widetilde{\mathscr{H}(v)}=\langle v\rangle^{-1}v$ 给出。结合引理 3.7（第一项）、3.6 和 2.8 的结论，我们据此推出 $\Psi_3^{\mathbf{III}}$ 是${}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{0,1+\lfloor n/2\rfloor}$。□

现在，我们综合先前的结果，推导出式 (3.3.4) 中主部非线性算子的光滑驯性。

定理 3.13 (主部非线性算子的光滑驯性)： 存在 $\rho_{\mathrm{prin}}\in\mathbb{R}^+$ 使得

$$\Psi\in{}_{\mathrm{s}}T^{\infty}_{1,1+\lfloor n/2\rfloor}(B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{prin}})\times\mathbb{R}^+,\mathbf{X}\times\mathbb{R};\mathbf{Y}).\tag{3.3.28}$$

证明。 我们令 $\rho_{\mathrm{prin}}=\min\{\rho_{\mathrm{cont}},\rho_{\mathrm{mome}},\rho_{\mathrm{dyna}}\}$，并应用命题 3.10、3.11 和 3.12。 □

本小节余下部分将研究非线性算子 Ψ 的辅助部分 Φ。下一个结果处理 Φ_2 部分；回顾一下，它在 (3.3.9) 中定义。

命题 3.14（动量方程的光滑驯性，2）。 存在一个 $\rho_{\mathrm{bulk}} \in \mathbb{R}^+$使得对于每个 $m \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_2 \in {}_{\mathrm{s}}T^m_{0,2+\lfloor n/2\rfloor}(B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{bulk}}) \times \mathbb{W}_{m+2+\lfloor n/2\rfloor}, \{\mathbb{X}^s \times \mathbb{W}_{m+s}\}_{s\in\mathbb{N}}; \mathbf{H}(\Omega;\mathbb{R}^n)). \tag{3.3.29}$$

证明。 得益于叠加乘子的光滑驯性（引理 3.6）、引理 3.8 中 $\sigma_{q,\eta} = \mathcal{N}_{(1)H^{-1}}(q,\eta) + \mathcal{N}^{(2)}_{H^{-1}}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta) + \varrho$的分解，以及关于光滑驯性映射复合的结果（引理 2.8），我们可知，只需证明该非线性算子

$$\Lambda : H^{m+2+\lfloor n/2\rfloor}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times B_{\mathcal{H}^{9/2+\lfloor n/2\rfloor}(\Sigma)}(0,\rho) \to H^0(\Omega;\mathbb{R}^n) \text{ given by } \Lambda(\mathcal{I},\eta) = \mathcal{I}\circ\mathfrak{F}_\eta \tag{3.3.30}$$

对于某个 $\rho > 0$，是定义良好的且为${}_{\mathrm{s}}T^m_{0,2+\lfloor n/2\rfloor}$，适用于尺度 $\{H^{m+s}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}^{5/2+s}(\Sigma)\}_{s\in\mathbb{N}}$和$\{H^s(\Omega;\mathbb{R}^n)\}$。为此，我们令 $\mathfrak{E}_\Omega$ 和 $\mathfrak{R}_\Omega$ 分别表示 Ω 上的 Stein 延拓（见定义 A.2）和限制算子，并注意到有如下等价公式

$$\Lambda(\mathcal{I},\eta) = \mathfrak{R}_\Omega \mathcal{I}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + \mathfrak{E}_\Omega \mathcal{E}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta + \Pi^1_{\mathrm{H}}\eta)). \tag{3.3.31}$$

因此，根据引理 D.2 以及映射 $\mathcal{E}$ 和 $\mathfrak{E}_\Omega$ 的性质（见引理 A.1 和例 2.16），存在一个 $\rho_{\mathrm{comp}} \in \mathbb{R}^+$（仅取决于维数和 Ω），使得只要 $\rho \leqslant \rho_{\mathrm{comp}}$，映射 (3.3.30) 关于上述巴拿赫尺度就是 ${}_{\mathrm{s}}T^m_{0,\,2+\lfloor n/2\rfloor}$。□

本小节倒数第二个结果考察 Ψ的 Φ_3 部分，它在 (3.3.10) 中定义。

命题 3.15（动态边界条件的光滑驯性，2）。 对于 $\rho_{\mathrm{surf}} = \rho_{\mathrm{bulk}} \in \mathbb{R}^+$，其中后者来自命题 *3.14*，我们有：对于每个 $m \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_3 \in {}_{\mathrm{s}}T^m_{0\,2+\lfloor \mathfrak{n}/2\rfloor}(B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{surf}}) \times \mathbb{W}_{m+2+\lfloor n/2\rfloor}, \{\mathbb{X}^s \times \mathbb{W}_{m+s}\}_{s\in\mathbb{N}}; \{H^{1/2+s}(\Sigma;\mathbb{R}^n)\}_{s\in\mathbb{N}} \tag{3.3.32}$$

证明。 我们按照命题 3.14 的证明进行论证，并将问题归结为研究映射

$$\widetilde{\Lambda} : H^{m+2+\lfloor n/2\rfloor}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times B_{\mathcal{H}^{9/2+\lfloor n/2\rfloor}(\Sigma)}(0,\rho) \to H^0(\Sigma;\mathbb{R}^n) \tag{3.3.33}$$

由 $\widetilde{\Lambda}(\mathcal{T},\eta) = \mathrm{Tr}_\Sigma(\mathcal{T}\circ\mathfrak{F}_\eta)$ 给出。接着我们使用等价公式

$$\widetilde{\Lambda}(\mathcal{T},\eta) = \mathrm{Tr}_\Sigma \mathfrak{R}_\Omega \mathcal{T}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + \mathfrak{E}_\Omega \mathcal{E}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta + \Pi^1_{\mathrm{H}}\eta)), \tag{3.3.34}$$

并像之前一样得出结论。 □

注 3.16. 命题 *3.14* 和 *3.15*（以及随后定理 *3.17*）中出现的参数 $m \in \mathbb{N}$ 使数据项 $(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})$ m多出若干导数，以确保 Φ_2 和 Φ_3 中的复合型非线性项 C^m 属于正确的陪域空间。考察导数公式 (D.1.6) 和 (D.1.7)便可看出这种额外正则性是必要的。

最后，我们已准备好推导非线性算子 Ψ 的光滑驯性；回顾一下，它定义于 (3.3.1) 中。在下面的陈述中，WD 是“定义良好”（well-defined）的缩写。

定理 3.17 (非线性算子的光滑驯性)。 存在一个 $\rho_{\mathrm{WD}} \in \mathbb{R}^+$，使得以下结论成立。

(1) 对于 $\mathbb{N} \ni s \geqslant 2 + \lfloor n/2\rfloor$ 以及 $(q,u,\eta) \in \mathbb{X}^s \cap B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{WD}})$，由 *(1.4.4)* 定义的展平映射 $\mathfrak{F}_\eta$ 是从 Ω 到 $\Omega[\eta]$ 的光滑微分同胚，并可延拓为从 Ω 到 $\Omega[\eta]$的$C^{s+2-\lfloor n/2\rfloor}$ 微分同胚。*(2)* 对任意 $m \in \mathbb{N}$, $\Psi \in {}_{\mathrm{s}}T^m_{+,2+\lfloor n/2\rfloor}(B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{WD}}) \times \mathbb{W}_{m+1+\lfloor n/2\rfloor} \times \mathbb{R}^+, O_m; P_m)$，其中我们记 $O_m = \{\mathbb{X}^s \times \mathbb{W}_{m-1+s} \times \mathbb{R}\}_{s\in\mathbb{N}}$ 和 $P_m = \{\mathbb{Y}^s \times \mathbb{W}_{m+s-1} \times \mathbb{R}\}_{s\in\mathbb{N}}$。

证明。令 $\rho_{\mathrm{WD}}=\min\{\rho_{\mathrm{prin}},\rho_{\mathrm{bulk}},\rho_{\mathrm{surf}}\}$，并应用定理 3.13 以及命题 3.14 和 3.15。由此立即得到第二项。对于第一项，我们注意到命题 3.11 保证 $J_\eta>0$ 和 $J_\eta, 1/J_\eta\in L^\infty(\Omega)$，这意味着 $\mathfrak{F}_\eta$ 是从 Ω 到 $\Omega[\eta]$的连续双射。另一方面，恒等式 $\partial_n(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n)=J_\eta=\det(\nabla\mathfrak{F}_\eta)$ 以及反函数定理保证 $\mathfrak{F}_\eta:\Omega\to\Omega[\eta]$ 是光滑微分同胚。由 Sobolev 嵌入和命题 B.1 可得 $\mathfrak{F}_\eta:\Omega\to\Omega[\eta]$及其逆映射的正则性。□

注 3.18。 在 $m=2$ 的情形下，定理 *3.17* 的第二项表明，对于巴拿赫尺度 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{F}$，有 $\Psi\in {}_{\mathrm{s}}T^2_{1,2+\lfloor n/2\rfloor}$；这些尺度在 (3.1.10) 中引入。

3.4. 导数分裂。 现在我们来研究 (3.3.1) 中映射Ψ的导数。将其完整写出会相当复杂，因此我们现在着重于识别主部并处理余项。令

$$(q_0,u_0,\eta_0)\in B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{WD}}),\quad (\mathcal{T}_0,\mathcal{G}_0,\mathcal{F}_0)\in\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor},\tag{3.4.1}$$

$$(q,u,\eta)\in\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor},\quad (\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})\in\mathbb{W}_{2+\lfloor n/2\rfloor},\quad \gamma_0\in\mathbb{R}^+,\ \gamma\in\mathbb{R},\tag{3.4.2}$$

并写出 6–元组

$$\theta_0=(q_0,u_0,\eta_0,\mathcal{T}_0,\mathcal{G}_0,\mathcal{F}_0).\tag{3.4.3}$$

映射 Ψ 的导数公式为

$$D\overline{\Psi}(\theta_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma)=\big(D\Psi(q_0,u_0,\eta_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\gamma)+D\Phi(\theta_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}),\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma\big).\tag{3.4.4}$$

我们将上述内容分解为主部 A 和余项 P、Q 及 R（这些符号会带有各种修饰，但为简洁起见，在正文中我们通常会省略这些修饰）。导数 $D\Psi$ 分解如下：

$$D\Psi(w_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\gamma)=\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)+\overset{w_0,\gamma_0}{P}(q,u,\eta,\gamma),\tag{3.4.5}$$

为简便起见，我们定义三元组

$$w_0=(q_0,u_0,\eta_0).\tag{3.4.6}$$

A 部分旨在尽可能接近 $D\Psi(0,0,0,\gamma_0)$，同时保留连续性方程中导致导数损失的全部结构。为此，我们设

$$\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)=\big(\overset{w_0}{A^1}(q,u,\eta),\overset{\gamma_0}{A^2}(q,u,\eta),\overset{\gamma_0}{A^3}(q,u,\eta)\big),\tag{3.4.7}$$

其中

$$\overset{w_0}{A^1}(q,u,\eta)=\nabla\cdot(\varrho u)+\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta)),\tag{3.4.8}$$

$$\overset{\gamma_0}{A^2}(q,u,\eta)=D\Psi_2(0,0,0,\gamma_0)(q,u,\eta,0)=-\gamma_0^2\varrho\partial_1 u+\varrho\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)-\gamma_0\nabla\cdot\mathbb{S}^\varrho u,\tag{3.4.9}$$

and

$$\overset{\gamma_0}{A^3}(q,u,\eta)=D\Psi_3(0,0,0,\gamma_0)(q,u,\eta,0)=-(\varrho q-\gamma_0\mathbb{S}^\varrho u)e_n-\varsigma\Delta_{\|}\eta e_n.\tag{3.4.10}$$

这里，$v_{w_0}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是向量场

$$v_{w_0}=\mathcal{M}_{(H^{-1})'}(q_0,u_0,\eta_0)=(H^{-1})'(-\mathfrak{g}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_n+q_0+\mathfrak{g}(I-\mathcal{E})\eta_0)(u_0-M_{\eta_0}e_1),\tag{3.4.11}$$

其中，$\mathcal{M}$ 记号来自引理 3.9，而$(H^{-1})'$ 表示逆焓的导数（见方程 (1.1.10)）。注意，由于对于 $y\in[0,b]$，$\varrho(y)=H^{-1}(-\mathfrak{g}y)$，我们有

$$v_0=-(H^{-1})'(-\mathfrak{g}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_n)e_1=\mathfrak{g}^{-1}\varrho' e_1.\tag{3.4.12}$$

The P 部分当然是 Ψ 的导数的余项，其公式为 a

$$\overset{w_0,\gamma_0}{P}(q,u,\eta,\gamma)=\big(\overset{w_0}{P^1}(q,u,\eta),\ \overset{w_0,\gamma_0}{P^2}(q,u,\eta,\gamma),\ \overset{w_0,\gamma_0}{P^3}(q,u,\eta,\gamma)\big)\tag{3.4.13}$$

其中

$$\overset{w_0}{P}{}^1(q,u,\eta) = \nabla\cdot((\sigma_{q_0,\eta_0}-\varrho)(u-\dot{M}[\eta]e_1)) - \mathfrak{g}\nabla\cdot((v_{w_0}-\varrho' e_1/\mathfrak{g})\mathcal{E}\eta) - \nabla\cdot(\varrho\dot{M}[\eta]e_1) - \nabla\cdot(\varrho'\mathcal{E}\eta e_1), \tag{3.4.14}$$

$\dot{M}[\eta]:\Omega\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 是由下式给出的矩阵域

$$\dot{M}[\eta] = \begin{pmatrix} \partial_n\mathcal{E}\eta I_{(n-1)\times(n-1)} & 0_{(n-1)\times 1} \\ -\mathcal{E}(\nabla_{\parallel}\eta) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4.15}$$

and

$$\overset{w_0,\gamma_0}{P}{}^j(q,u,\eta,\gamma) = (D\Psi_j(w_0,\gamma_0) - D\Psi_j(0,0,0,\gamma_0))(q,u,\eta,0) + D\Psi_j(w_0,\gamma_0)(0,0,0,\gamma) \tag{3.4.16}$$

当 $j\in\{2,3\}$ 时。

在定义 $D\Psi$ 的 $D\Phi$ 部分的类似分解之前，我们先证明关于 $A+\overline{P}$ 分解的一些基本性质。首先，有如下引理；除最后一项外，它是引理 3.9 的重述。

引理 3.19 (导数损失向量场的性质)。 设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者在定理 *3.17* 中定义，并且 $w_0=(q_0,u_0,\eta_0)\in B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho)\cap\mathbb{X}^\infty$。定义向量场$v_{w_0}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 如 (3.4.11)所示。存在一个分解

$$v_{w_0} = \mathfrak{g}^{-1}\varrho' e_1 + v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0} + v^{(2)}_{\eta_0} \tag{3.4.17}$$

使得以下结论成立。

(1) 向量场 $v^{(1)}_{q_0,\,u_0,\,\eta_0}$ 的法向迹为零，$\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(v^{(1)}_{q_0,\,u_0,\,\eta_0}\cdot e_n)=0$，满足包含关系 $v^{(1)}_{q_0,\,u_0,\,\eta_0}\in H^\infty(\Omega;\,\mathbb{R}^n)$，并满足以下估计

$$\|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{H^{1+s}} \lesssim \begin{cases} \rho & \text{if } s = 1+\lfloor n/2\rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s} & \text{if } s > 1+\lfloor n/2\rfloor. \end{cases} \tag{3.4.18}$$

(2) 向量场 $v^{(2)}_{\eta_0}$与 e_1平行，满足包含关系

$$v^{(2)}_{\eta_0}\cdot e_1 \in W^{\infty,\infty}((0,b);\mathcal{H}^0_{(r_{n-1})}(\Sigma)) \hookrightarrow W^{\infty,\infty}(\Omega), \tag{3.4.19}$$

并满足以下估计

$$\|v^{(2)}_{\eta_0}\cdot e_1\|_{W^{s,\infty}((0,b);\mathcal{H}^0_{(r_{n-1})}(\Sigma))} \lesssim \rho \text{ for } s\geqslant 1+\lfloor n/2\rfloor, \tag{3.4.20}$$

其中，$r_{n-1}\in\mathbb{N}$ 来自命题 *B.2* 的第二项，其中 $d=n-1$。

(3) 我们有包含关系 $\nabla\cdot v_{w_0}\in H^\infty(\Omega;\,\mathbb{R}^n)$，以及以下估计

$$\|\nabla\cdot v_{w_0}\|_{H^s} \lesssim \begin{cases} \rho & \text{if } s = 1+\lfloor n/2\rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s} & \text{if } s > 1+\lfloor n/2\rfloor. \end{cases} \tag{3.4.21}$$

(4) 如果 $s\in\mathbb{N}$、$q\in H^{1+s}(\Omega)$，且 $\eta\in\mathcal{H}^{1+s}(\Sigma)$，那么我们有 $\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))\in\dot{H}^{1+s}(\Omega)$，其中后一个空间定义于(C.1.1)（另见注 *3.1*），以及以下估计

$$\|\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))\|_{\dot{H}^s} \lesssim \|q,\eta\|_{H^{1+s}\times\mathcal{H}^{1+s}} + \begin{cases} 0 & \text{若 } s\leqslant\lfloor n/2\rfloor, \\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}\rangle\|q,\eta\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{若 } \lfloor n/2\rfloor < s. \end{cases} \tag{3.4.22}$$

在上述内容中，$\lesssim$ 隐式常数依赖于维数、物理参数、s 和 ρ_{WD} .

证明。 应用引理 3.9，可得恒等式 (3.4.17)，其中 $\varrho' e_1/\mathfrak{g} = \mathcal{M}_{(H^{-1})'}(0,0,0)$、 $v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0} = \mathcal{M}^{(1)}{}_{(H^{-1})'}(q_0,u_0,\eta_0)$ 以及 $v^{(2)}_{\eta_0} = e_1 \cdot \mathcal{M}^{(2)}{}_{(H^{-1})'}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta_0)e_1$。第一、第二和第三项中的定性光滑性断言由该引理立即得出。我们将利用微积分基本定理证明定量界。由于 $\mathcal{M}^{(1)}{}_{(H^{-1})'}(0,0,0) = 0$，因此有

$$v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0} = \int_0^1 D\mathcal{M}^{(1)}_{(H^{-1})'}(tq_0,tu_0,t\eta_0)(q_0,u_0,\eta_0)\,\mathrm{d}t, \tag{3.4.23}$$

因此，利用引理 3.9 中强光滑驯性的结论，以及引理 2.7 中关于光滑驯性映射的导数估计，我们得到对于 $s \geqslant 1 + \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{H^{1+s}} \leqslant \int_0^1 \|D\mathcal{M}^{(1)}_{(H^{-1})'}(tq_0,tu_0,t\eta_0)[q_0,u_0,\eta_0]\|_{H^{1+s}}\,\mathrm{d}t \lesssim \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}. \tag{3.4.24}$$

同样的技巧可以证明第二项中所述的定量界 .

接下来，我们证明第三项中的散度估计。利用 (3.4.1 7)，我们计算得

$$\nabla \cdot v_{w_0} = \nabla \cdot v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0} + \partial_1(v^{(2)}_{\eta_0} \cdot e_1). \tag{3.4.25}$$

由此恒等式、第一项和第二项的定量估计，以及命题 B.1 中关于带限各向异性索伯列夫空间的性质，我们推得对于 $s \geqslant 1 + \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\|\nabla \cdot v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{H^s} \lesssim \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{H^{1+s}} \lesssim \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s} \tag{3.4.26}$$

and

$$\|\partial_1(v^{(2)}_{\eta_0} \cdot e_1)\|_{H^{1+s}} \lesssim \|v^{(2)}_{\eta_0} \cdot e_1\|_{W^{1+s,\infty}((0,b);\mathcal{H}^0_{(r_{n-1})}(\Sigma))} \lesssim \rho. \tag{3.4.27}$$

由此完成第三项的证明。

最后，为证明第四项，我们首先注意到 (3.4.17) 得出如下公式 a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta)) &= \nabla \cdot (v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta)) + \mathfrak{g}\nabla \cdot (v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta) \\ &\quad + \mathfrak{g}\partial_1(e_1 \cdot v^{(2)}_{\eta_0}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta) + \varrho'\partial_1\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta = \mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} + \mathbf{IV}.\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

对于**I** ，我们利用命题 B.1、上述第一项和第二项以及推论 D.7 进行估计

$$\begin{aligned}\|\mathbf{I}\|_{H^s} &\lesssim \|v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta)\|_{H^{1+s}} \leqslant \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}(q+\mathfrak{g}\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta)\|_{H^{1+s}} + \|(v^{(2)}_{\eta_0} + \varrho' e_1/\mathfrak{g})(q+\mathfrak{g}\eta_{\mathrm{H}})\|_{H^{1+s}} \\ &\lesssim \|q,\eta\|_{H^{1+s}\times\mathcal{H}^{1+s}} + \begin{cases} 0 & \text{if } s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \langle \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s} \rangle \|q,\eta\|_{H^{1+\lfloor n/2 \rfloor}\times\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < s. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.4.29}$$

另一方面，由于 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(v_{q_0,u_0,\eta_0} \cdot e_n) = 0$，我们利用命题 B.10 中的估计 (B.2.12) 得到上界

$$\Big[\int_0^b \mathbf{I}(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta)\|_{L^2} \lesssim \|q,\eta\|_{L^2\times\mathcal{H}^0}. \tag{3.4.30}$$

由 (3.4.29) 和 (3.4.30) 可推得

$$\|\mathbf{I}\|_{\hat{H}^s} \lesssim \|q,\eta\|_{H^{1+s}\times\mathcal{H}^{1+s}} + \begin{cases} 0 & \text{if } s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \langle \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s} \rangle \|q,\eta\|_{H^{1+\lfloor n/2 \rfloor}\times\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < s. \end{cases} \tag{3.4.31}$$

对于**II**，我们利 再次结合命题 B.1 和推论 D.7 使用第一项进行估计

$$\|\mathbf{II}\|_{H^s} \lesssim \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{L^2}\|\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{W^{1+s,\infty}} + \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{H^{1+s}}\|\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{L^\infty} \lesssim \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}\|\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{3.4.32}$$

另一方面，由于 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(v^{(1)}_{q_0,\,u_0,\,\eta_0} \cdot e_n) = 0$，我们有

$$\Big[\int_0^b \mathbf{II}(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{L^2} \lesssim \|\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{3.4.33}$$

由 (3.4.32) 和 (3.4.33) 可推出，$\|\mathbf{II}\|_{\hat{H}^s}$ 受 (3.4.22) 右端控制。现在我们利用第二项以及命题 B.2 中各向异性 Sobolev 空间的代数性质来估计 **III**，从而得到

$$\|\mathbf{III}\|_{H^s} \lesssim \|e_1 \cdot v_{\eta_0}^{(2)} \Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta\|_{W^{s,\infty}((0,b);\mathcal{H}^0_{(r_{n-1}+1)}(\Sigma))} \lesssim \|e_1 \cdot v_{\eta_0}^{(2)}\|_{W^{s,\infty}\mathcal{H}^0_{(r_{n-1})}} \|\Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim \|\Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta\|_{\mathcal{H}^0} \tag{3.4.34}$$

and

$$\Big[\int_0^b \mathbf{III}(\cdot, y)\, \mathrm{d}y\Big]_{\dot{H}^{-1}} \leqslant \Big\|\Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta \int_0^b e_1 \cdot v_{\eta_0}^{(2)}(\cdot, y)\, \mathrm{d}y\Big\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim \int_0^b \|e_1 \cdot v_{\eta_0}^{(2)}(\cdot, y)\|_{\mathcal{H}^0}\, \mathrm{d}y \cdot \|\Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim \|\Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{3.4.35}$$

(3.4.34) 和 (3.4.35) 中的界表明，$\|\mathbf{III}\|_{\hat{H}^s}$ 受 (3.4.22) 右端控制。得益于 (B.1.25)，范数 $\|\mathbf{IV}\|_{\hat{H}^s}$ 显然也受同一量控制。综合**I**、**II**、**III**和**IV**上的这些界，即可完成第四项的证明。□

现在，我们引入一族新的适配空间，以用于分析 A 部分的 $D\Psi$。正如我们将看到的，这些空间是使 A 成为巴拿赫空间之间同构的自然区域。为定义这些空间，我们只需在空间 $\{\mathbb{X}^s\}_{s\in\mathbb{N}}$中加入一个额外条件；回顾一下，这些空间定义于 (3.1.3) 中。这样便得到一个新的空间族，其中导数损失的影响有所减轻。值得注意的是，这些区域以一种非平凡的方式依赖于背景点 $w_0 = (q_0,\ u_0,\ \eta_0)$。对于满足引理 3.19 假设的 $s \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{R}^+$ 和 $(q_0,\ u_0,\ \eta_0)$，我们定义空间

$$\overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^s} = \{(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^s \ :\ \nabla \cdot (v_{w_0} q) \in H^{1+s}(\Omega)\}. \tag{3.4.36}$$

并赋予其以下范数

$$\|q, u, \eta\|_{\overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^s}} = \sqrt{\|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}_s}^2 + \|\nabla \cdot (v_{w_0} q)\|_{H^{1+s}}^2}. \tag{3.4.37}$$

注 3.20。 对命题 *B.7* 第一项证明稍作修改即可得出$q_0,\ u_0,\ \eta_0$这些空间 $\mathbb{X}^s$ 是希尔伯特空间。

以下结果说明，来自（3.4.5）的 $D\Psi$ 的 $A + P$分解具有这样的性质：A包含所有导数损失，而 P 是不含导数损失的小修正项。请注意，以下结论比直接应用光滑温和性验证结果（即定理 3.13）所能推出的结论更强。

命题 3.21（的 $A+P$分解的性质） $D\Psi$）。 设 $\rho \in \mathbb{R}^+$和 $w_0 = (q_0,\ u_0,\ \eta_0)$ 满足引理 *3.19* 的假设，并设 $I \Subset \mathbb{R}^+$ 是一个满足 $\gamma_0 \in I$的区间。以下结论成立。

（*1*）对每个 $s \in \mathbb{N}$，映射 $w_0,\ \overset{\gamma_0}{A}:\ _{q_0,\ \overset{u_0\ \eta_0}{\mathbb{X}^s}} \to \mathbb{Y}^s$，定义良好且连续。（*2*）对每个 $\mathbb{N} \ni s \geqslant 1 + \lfloor n/2 \rfloor$，映射 $w_0,\ \overset{\gamma_0}{P}:\ \ \mathbb{X}^s \times \mathbb{R} \to \mathbb{Y}^s$ 定义良好、连续，并满足以下估计

$$\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{P}(q, u, \eta, \gamma)\big\|_{\mathbb{Y}^s} \lesssim \rho \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}^s} + \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}} \|q, u, \eta, \gamma\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor} \times \mathbb{R}}. \tag{3.4.38}$$

隐含常数取决于维数、物理参数、 s、 ρ_{WD}和 I。

证明。 检查 (3.4.7) 中各分量后可知，第二项和第三项显然定义良好且连续。因此，为了证明第一项，我们需要结合注 3.1，将问题归结为证明该映射

$$\overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^s} \ni (q, u, \eta) \mapsto \overset{w_0}{A}{}^1(q, u, \eta) \in \hat{H}^{1+s}(\Omega) \tag{3.4.39}$$

定义良好的一个 且连续。根据引理 3.19 的第四项，恒等 y

$$\int_0^b \nabla\cdot(\varrho u)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y=(\nabla_{\|},0)\cdot\int_0^b(\varrho u)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y-\varrho(b)\partial_1\eta \tag{3.4.40}$$

（由于 $\mathbb{X}^s$ 空间中内置了边界条件（其定义见（3.1.3）），这一点成立），再结合命题 B.4 中的范数等价关系（B.1.25），可知（3.4.39）中的算子连续映射到 $\hat{}H^0$(Ω) 中。另一方面，利用引理 3.19 的第一项、第二项和第三项，可得等式

$$\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))=\mathfrak{g}\nabla\cdot(v_{w_0}\eta)+\nabla\cdot(v_{w_0}q), \tag{3.4.41}$$

$_{w_0}$以及（3.4.37）中的范数定义，我们立即推得 A^1 有界映射到 H^{1+s}(Ω) 中。这就完成了第一项的证明。

$_{w_0,\ \gamma_0}$现在转而证明第二项。由（3.4.13）回忆得，P 具有分量$_{w_0,\ \gamma_0}P^i$ 对 $i\in\{1,2,3\}$成立。我们将证明的其余部分分为三个步骤，每一步分别处理其中一个分量。

$_{w_0}$**步骤 1**：对 P^1 的估计。我们首先注意到˙，(3.4.14) 中最后两项之和为零，从而利用其中隐藏的消去。事实上，由于 $M[\eta]e_1=\partial_n\mathcal{E}\eta e_1-\partial_1\mathcal{E}\eta e_n$ 我们˙有 $\nabla\cdot(M[\eta]e_1)=0$，因此

$$-\nabla\cdot(\varrho'\mathcal{E}\eta e_1)-\nabla\cdot(\varrho\dot{M}[\eta]e_1)=-\varrho'\partial_1\mathcal{E}\eta-\varrho'(\partial_n\mathcal{E}\eta e_1-\partial_1\mathcal{E}\eta e_n)\cdot e_n=0. \tag{3.4.42}$$

因此，我们得到更便于处理的公式

$$\overset{w_0}{P^1}(u,\eta)=\nabla\cdot((\sigma_{q_0,\eta_0}-\varrho)(u-\dot{M}[\eta]e_1))-\mathfrak{g}\nabla\cdot((v_{w_0}-\varrho' e_1/\mathfrak{g})\mathcal{E}\eta)=\mathbf{I}+\mathbf{II}, \tag{3.4.43}$$

我们将分别处理**I** 和**II** 。

利用引理 3.8 中的泰勒展开技巧处理**I** 项，即我们分解$\sigma_{q_0,\ \eta_0}-\varrho=\sigma^{(1)}_{q_0,\ \eta_0}+\sigma^{(2)}_{\eta_0}$，其中

$$\sigma^{(1)}_{q_0,\eta_0}=\mathcal{N}^{(1)}_{H^{-1}}(q_0,\eta_0)\text{ and }\sigma^{(2)}_{\eta_0}=\mathcal{N}^{(2)}_{H^{-1}}(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta). \tag{3.4.44}$$

E采用上述分解并回顾 (3.4.15)，我们还可以进一步改写 e

$$\mathbf{I}=\nabla\cdot((\sigma_{q_0,\eta_0}-\varrho)(u+\partial_1\mathcal{E}\eta e_n)-\sigma^{(1)}_{q_0,\eta_0}\partial_n\mathcal{E}\eta e_1-\sigma^{(2)}_{\eta_0}\partial_n\mathcal{E}_0\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta e_1)-\partial_1(\sigma^{(2)}_{\eta_0}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta)/b=\nabla\cdot\mathbf{I}_1+\partial_1\mathbf{I}_2. \tag{3.4.45}$$

为了处理 $\nabla\cdot\mathbf{I}_1$，我们首先将推导 $\mathbf{I}_1$ 的索伯列夫估计。事实上，借助多次应用推论 D.7 和引理 A.1，我们可以对任意 $s\in\mathbb{N}$ 求界，

$$\begin{aligned}\|\mathbf{I}_1\|_{H^s}&\lesssim\|\sigma^{(1)}_{q_0,\eta_0},\sigma^{(2)}_{\eta_0}\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\|u,\eta\|_{H^s\times\mathcal{H}^{1/2+s}}\\&\quad+\begin{cases}0&\text{if }s\leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\\|\sigma^{(1)}_{q_0,\eta_0},\sigma^{(2)}_{\eta_0}\|_{H^s\times W^{s,\infty}}\|u,\eta\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathcal{H}^{3/2+\lfloor n/2\rfloor}}&\text{if }1+\lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.4.46}$$

然后，我们结合引理 3.8 和微积分基本定理，如同引理 3.19 证明的第一部分那样，得到以下界

$$\|\sigma^{(1)}_{q_0,\eta_0},\sigma^{(2)}_{\eta_0}\|_{H^s\times W^{s,\infty}}\lesssim\begin{cases}\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\lfloor n/2\rfloor}}&\text{if }s\leqslant 2+\lfloor n/2\rfloor,\\\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{s-1}}&\text{if }2+\lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases} \tag{3.4.47}$$

综合界 (3.4.46) 和 (3.4.47)，我们得到

$$\|\mathbf{I}_1\|_{H^s}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{s-2}}+\begin{cases}0&\text{if }s\leqslant 2+\lfloor n/2\rfloor,\\\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{s-1}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor-1}}&\text{if }2+\lfloor n/2\rfloor<s,\end{cases} \tag{3.4.48}$$

这就是前述索伯列夫估计。然后，根据 (3.4.48)、$\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\mathbf{I}_1\cdot e_n)=0$ 这一事实，以及命题 C.1 中散度与法向迹的相容性估计，我们得到上界

$$\|\nabla\cdot\mathbf{I}_1\|_{\hat{H}^{1+s}}\leqslant\|\mathbf{I}_1\|_{H^{2+s}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s}+\begin{cases}0 & \text{if } s\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor-1}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases}\tag{3.4.49}$$

处理完$\mathbf{I}_1$, 后，我们转而关注 (3.4.45) 中的$\mathbf{I}_2$ 项。乘积 $\sigma^{(2)}_{\eta_0}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta$ 依据引理 3.8 以及命题 B.2 中列出的 $\mathcal{H}^0(\Sigma)$ 带限元素的代数性质来处理，并将其应用于 $\sigma^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,\ y)\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta$，其中 $y\in[0,b]$:

$$\begin{aligned}\|\partial_1\mathbf{I}_2\|_{\hat{H}^{1+s}}&\lesssim\Big[\partial_1\Big(\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\int_0^b\sigma^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big)\Big]_{\dot{H}^{-1}}+\max_{0\leqslant j\leqslant 1+\nu}\sup_{y\in[0,b]}\|\partial_1\partial_n^j\mathbf{I}_2(\cdot,y)\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^{n-1})}\\&\lesssim\Big\|\int_0^b\sigma^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big\|_{\mathcal{H}^0}\|\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{\mathcal{H}^0}+\max_{0\leqslant j\leqslant 1+s}\sup_{y\in[0,b]}[\partial_1\partial_n^j(\sigma^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,y)\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta)]_{\dot{H}^{-1}}\\&\lesssim\max_{0\leqslant j\leqslant 1+s}\sup_{y\in[0,b]}\|\partial_n^j\sigma^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,y)\|_{\mathcal{H}^0}\|\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{\mathcal{H}^0}\lesssim\rho\|\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{\mathcal{H}^0},\end{aligned}\tag{3.4.50}$$

在推导最后一个不等式时，我们再次使用引理 3.8 中 $\sigma^{(2)}_{\eta_0}$ 的驯性映射性质，并像之前一样结合微积分基本定理。至此，$\mathbf{I}_2$, 的处理完成，因而$\mathbf{I}$也已处理完毕。

接下来，我们考虑方程 (3.4.43) 中的$\mathbf{II}$。借助引理 3.19 中 v_{w_0} 的分解，$\mathbf{II}$ 还可进一步分解为

$$\mathbf{II}=-\mathfrak{g}\nabla\cdot((v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}+v^{(2)}_{\eta_0})\mathcal{E}_0\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta+v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\mathcal{E}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta)-\mathfrak{g}\partial_1(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_nv^{(2)}_{\eta_0}\cdot e_1\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta)/b=\nabla\cdot\mathbf{II}_1+\partial_1\mathbf{II}_2.\tag{3.4.51}$$

与 (3.4.48) 的证明类似，我们使用推论 D.7 以及引理 3.19 中 $v^{(1)}_{q_0,\ u_0,\ \eta_0}$ 和 η_0 的映射性质，可知对任意 $s\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{II}_1\|_{H^s}&\lesssim\|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0},v^{(2)}_{\eta_0}\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\|\eta\|_{\mathcal{H}^{s-1/2}}\\&\quad+\begin{cases}0 & \text{if } s\leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0},v^{(2)}_{\eta_0}\|_{H^s\times W^{s,\infty}}\|\eta\|_{\mathcal{H}^{1/2+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor<s,\end{cases}\\&\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{s-3}}+\begin{cases}0 & \text{if } s\leqslant 2+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{s-1}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor-2}} & \text{if } 2+\lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases}\end{aligned}\tag{3.4.52}$$

进而，由 (3.4.52)、$\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\mathbf{II}_1\cdot e_n)=0$ 这一事实以及命题 C.1，可得上界

$$\|\nabla\cdot\mathbf{II}_1\|_{H^{1+s}}\lesssim\|\mathbf{II}_1\|_{H^{2+s}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{s-1}}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor-1}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases}\tag{3.4.53}$$

对于 $\mathbf{II}_2$,, 我们采用与 (3.4.50) 相同的论证，通过调用引理 3.19 的第二项以及命题 B.2 中 $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^{n-1})$ 的频带限制成员所具有的代数性质，来估计乘积 $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\cdot e_n)(v^{(2)}_{\eta_0}\cdot e_1)\eta_{\mathrm{L}}$；由此得到上界

$$\|\partial_1\mathbf{II}_2\|_{\hat{H}^{1+s}}\lesssim\rho\|\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta\|_{\mathcal{H}^0}.\tag{3.4.54}$$

最后，我们综合 (3.4.43)、(3.4.45)、(3.4.49)、(3.4.50)、(3.4.51)、(3.4.52) 和 (3.4.54)，得到 w_0 P^1 估计

$$\big\|{}^{q_0,u_0,\eta_0}_{\ \ \ P^1}(u,\eta)\big\|_{\hat{H}^{1+s}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s}+\begin{cases}0 & \text{if } s\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor-1}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases}\tag{3.4.55}$$

步骤 2：关于 P^2 的估计。这比前一步简单，因为我们可以使用命题 3.11 的温和微积分结论。回忆一下，

$$P^2_{w_0,\gamma_0}(q,u,\eta,\gamma) = (D\Psi_2(w_0,\gamma_0) - D\Psi_2(0,0,0,\gamma_0))(q,u,\eta,0) + D\Psi_2(w_0,\gamma_0)(0,0,0,\gamma) = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \tag{3.4.56}$$

其中，Ψ_2 是在 (3.3.7) 中定义的非线性映射。我们可以利用 Ψ_2 与微积分基本定理 C^2 配合，写成

$$\mathbf{J}_1 = \int_0^1 D^2\Psi_2(tw_0,\gamma_0)((q_0,u_0,\eta_0,0),(q,u,\eta,0))\,\mathrm{d}t. \tag{3.4.57}$$

因此，根据命题 3.11 中关于二阶导数的强温和估计、$\mathbb{X}_s$-空间范数的对数凸性（见引理 3.25）以及杨氏不等式，对于 $\nu \geqslant 1+\lfloor n/2\rfloor$，可得：

$$\|\mathbf{J}_1\|_{H^s} \lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s} + \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{1+\lfloor n/2\rfloor}}. \tag{3.4.58}$$

另一方面，直接观察可知 $D\Psi_2(0,\gamma_0)(0,0,0,\gamma) = 0$。因此，采用类似的微积分基本定理论证可得

$$\mathbf{J}_2 = \int_0^1 D^2\Psi_2(tw_0,\gamma_0)((w_0,0),(0,0,0,\gamma))\,\mathrm{d}t. \tag{3.4.59}$$

这使我们能够再次对二阶导数应用强温和估计，从而得到上界

$$\|\mathbf{J}_2\|_{H^s} \lesssim |\gamma|\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}. \tag{3.4.60}$$

结合方程 (3.4.58) 和 (3.4.60)，我们得到所述的界 $P^2_{w_0,\gamma_0}$。

步骤 3：关于……的估计 P^3。我们进行相同的分析，使用微积分基本定理和第二步中的温和 C^2估计，但这次用命题 3.12 代替命题 3.11。□

本小节其余部分将致力于把由方程 (3.3.9) 和 (3.3.10) 得出的 $D\Psi$ 的 $D\Phi$ 部分分解为子分量 Q 和 R。这里的关键观察是，$\Phi: B_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{WD}}) \times \mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor} \to \mathbb{Y}^0$ 对第二个因子是线性的，因此，对于 (3.4.3) 中的 θ_0，我们可以写成：

$$D\Phi(\theta_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) = \overset{\theta_0}{Q}(q,u,\eta) + \overset{q_0,u_0,\eta_0}{R}(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) \tag{3.4.61}$$

其中

$$\overset{\theta_0}{Q}(q,u,\eta) = D\Phi(\theta_0)(q,u,\eta,0,0,0) \tag{3.4.62}$$

and

$$\overset{q_0,u_0,\eta_0}{R}(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) = D\Phi(q_0,u_0,\eta_0,0,0,0)(0,0,0,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}). \tag{3.4.63}$$

以下结果揭示了 $Q+R$ $D\Phi$分解的意义：当背景项较小时，Q 也较小，而 R 与（q，u，η）无关，因而具有有用的解耦性质。与 $A+P$ 分解（命题 3.21）相比，下一个结果不那么微妙，只依赖于命题 3.14 和 3.15 中的光滑驯性结果。

命题 3.22（$Q+R$ 分解的性质 $D\Phi$）。设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$，其中 ρ_{WD}在定理 *3.17* 中定义，并且

$$\theta_0 = (q_0,u_0,\eta_0,\mathcal{T}_0,\mathcal{G}_0,\mathcal{F}_0) \in (B_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho) \times B_{\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho)) \cap (\mathbb{X}_\infty \times \mathbb{W}_\infty). \tag{3.4.64}$$

以下结论对 $\mathbb{N} \ni s \geqslant 2+\lfloor n/2\rfloor$ 成立。

(1) 映射 $\overset{\theta_0}{Q}\colon\ \mathbb{X}_s \to \mathbb{Y}^s$ 定义良好、连续，并满足估计

$$\big\|\overset{\theta_0}{Q}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^s} \lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s} + \|\theta_0\|_{\mathbb{X}_s\times\mathbb{W}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}}. \tag{3.4.65}$$

(2) 映射 $R\colon\ \mathbb{W}_{1+s} \to \mathbb{Y}^s$ 定义良好、连续，并满足估计

$$\big\|\overset{q_0,u_0,\eta_0}{R}(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})\big\|_{\mathbb{Y}^s} \lesssim \|\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}_{1+s}} + \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}\rangle\|\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}}. \tag{3.4.66}$$

上述估计中的隐含常数取决于维数、物理参数、 s 和 ρ_{WD}。

证明。 $\overset{\theta_0}{Q}$ 定义良好且连续，并且当 $\rho=\rho_{\mathrm{WD}}$ 和 $s\geqslant 2+\lfloor n/2\rfloor$ 时，满足如下形式的温和估计

$$\big\|\overset{\theta_0}{Q}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^s} \lesssim \|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s} + \langle\|\theta_0\|_{\mathbb{X}_s\times\mathbb{W}_{1+s}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}} \tag{3.4.67}$$

这由公式 (3.4.62)、命题 3.14 和 3.15 中关于温和光滑性的断言，以及引理 2.7 中关于导数的温和估计可知。利用如下事实，可以改进上述估计：对于固定的 $(q_0,\ u_0,\ \eta_0)$，映射 $(\mathcal{T}_0,\ \mathcal{G}_0,\ \mathcal{F}_0)\mapsto\overset{\theta_0}{Q}$ 是线性的；事实上，按照引理 2.5 的证明进行推导，由估计 (3.4.67) 可得

$$\big\|\overset{\theta_0}{Q}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^s} \lesssim \|\mathcal{T}_0,\mathcal{G}_0,\mathcal{F}_0\|_{\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s} + \|\theta_0\|_{\mathbb{X}_s\times\mathbb{W}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}}. \tag{3.4.68}$$

第一项现已得证。第二项的断言和估计直接由公式 (3.4.63)、命题 3.14 和 3.15 的温和光滑性断言，以及引理 2.7 中关于导数的温和估计得出。□

3.5. **线性分析的预备知识**。回顾一下， Ψ 是与偏微分方程 (1.4.9) 相关联的非线性算子，定义见 (3.3.2)。我们现在的目标是证明该映射满足反函数定理的假设，这些假设列于定义 2.20、定理 2.21 和定理 2.24 中。本节前面的分析，尤其是引理 3.2 和定理 3.17，表明该反函数定理的“非线性假设”均已满足，只有区域方面的一个显然问题和定义 2.20 的第一项尚待处理。

因此，只需证明定义 2.20 第三项中给出的“线性假设”成立。换言之，我们旨在证明关于导数 $D\Psi$ 的以下断言。给定 $\mathbb{N}\ni s\geqslant 2+\lfloor n/2\rfloor$ 和一个区间 $I\Subset\mathbb{R}^+$，存在一个 存在性与估计 参数 $\rho_{\mathrm{EE}}(s)\in(0,\ \rho_{\mathrm{WD}}]$（也取决于 I），其中 $\rho_{\mathrm{WD}}\in\mathbb{R}^+$ 来自定理 3.17，并具有如下性质：只要（回忆一下， θ_0 在 (3.4.3) 中定义）

$$(\theta_0,\gamma_0)\in(B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{EE}}(s))\times B_{\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{EE}}(s))\times I)\cap(\mathbb{X}^{1+s}\times\mathbb{W}_{2+s}\times\mathbb{R}^+) \tag{3.5.1}$$

and

$$(g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma)\in\mathbb{Y}^s\times\mathbb{W}_{1+s}\times\mathbb{R}, \tag{3.5.2}$$

存在唯一的 $(q,u,\eta)\ \in\ \mathbb{X}^s$，满足 $D\Psi(\theta_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma)\ =(g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma)$；此外，若令 $\Xi=(g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma)$ 和 $\Theta=(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma)$，则该解元组满足温和估计

$$\|\Theta\|_{\mathbb{X}^s\times\mathbb{W}_{1+s}\times\mathbb{R}} \lesssim \|\Xi\|_{\mathbb{Y}^s\times\mathbb{W}_{1+s}\times\mathbb{R}} + \langle\|\theta_0\|_{\mathbb{X}^{1+s}\times\mathbb{W}_{2+s}}\rangle\|\Xi\|_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{R}} \tag{3.5.3}$$

其中隐含常数仅依赖于维数、各种物理参数、 s、 I 和 $\rho_{\mathrm{EE}}(s)$。

根据上一小节的分析，即命题 3.21 和 3.22，我们得出， $D\Psi$ 的行为受在（3.4.7）中定义的主部算子 A 支配。因此，只要证明以下断言，除少量补充分析外，我们上述的目标基本就实现了。对于任意 $s\in\mathbb{N}$ 和 $\gamma_0\in I\Subset\mathbb{R}^+$区间，存在一个存在性和

估计主部参数 $\rho_{\mathrm{EEP}}(s) \in (0, \rho_{\mathrm{WD}}]$（还取决于 I），其具有以下性质：每当

$$w_0 = (q_0, u_0, \eta_0) \in B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2 \rfloor}}(0, \rho_{\mathrm{EEP}}(s)) \cap \mathbb{X}^\infty \text{ and } (g, f, k) \in \mathbb{Y}^s, \tag{3.5.4}$$

w_0, γ_0存在唯一的 $(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^s$ 满足方程 $A(q, u, \eta) = (g, f, k)$；此外，该解满足温和估计

$$\|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}^s} \lesssim \|g, f, k\|_{\mathbb{Y}^s} + \begin{cases} 0 & \text{if } s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \langle \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}} \rangle \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < s. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

同样，我们允许隐含常数依赖于维数、物理参数、 s、 I 和$\rho_{\mathrm{EEP}}(s)$。我们将看到，估计 (3.5.5) 成立的必要条件是算子w_0, γ_0

A $\mathbb{X}^{s q_0, u_0, \eta_0} \to \mathbb{Y}^s$ 是巴拿赫同构。回顾一下，适配空间定义见 (3.4.36)。这体现了线性分析的核心困难之一：算子族 $\{\overset{w_0,\gamma_0}{A}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}^{1+s}; \mathbb{Y}^s)$ 要么定义在公共巴拿赫空间 $\mathbb{X}^{1+s}$ 上，但并非w_0, γ_0同构；要么每个单独的算子 A 定义在更大的适配巴拿赫空间q_0, u_0, η_0

$\mathbb{X}^s$ 使其成为映 onto $\mathbb{Y}^s$ 的同构，但空间 $\{$ $\mathbb{X}^s$ $\}$ 是不等价的。因此，即使我们先验地建立了 (3.5.5) 中的估计，也无法通过连续性方法将一个算子的可逆性传递给下一个算子。

我们通过椭圆正则化过程克服这一困难，现将其描述如下。对于$m \in \mathbb{N}^+$，我们定义 $2m^{\mathrm{th}}$ 阶线性椭圆微分算子

$$L_m = (-1)^m \sum_{j=1}^n \partial_j^{2m}. \tag{3.5.6}$$

我们将考虑一列算子：通过向 A 的连续性方程分量中加入该算子的一个趋于零的项，并向运动学边界条件中加入 $(-\Delta_\parallel)^{m-1/4}$ 的一个趋于零的项，得到这一列算子。这些新算子的定义域如下：对于 $m, N \in \mathbb{N}^+$ 和 $s \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$，我们定义空间

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^s_{m,N} = \{(q, u, \eta) \in \mathbb{X}_s \ : \ & \mathrm{Tr}_{\Sigma_0}(u) = 0, \ \mathrm{Tr}_\Sigma(u \cdot e_n) + \partial_1 \eta = N^{-1}(-\Delta_\parallel)^{m-1/4}\eta \\ & (q, \eta) \in H^{1+s+2m}(\Omega) \times \mathcal{H}^{1+s+2m}(\Sigma), \ \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^m q) = \cdots = \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{2m-1} q) = 0\} \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

并赋予其范数

$$\|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}^s_{m,N}} = \sqrt{\|q, u, \eta\|^2_{\mathbb{X}_s} + N^{-2}\|q, \eta\|^2_{H^{1+s+2m} \times \mathcal{H}^{1+s+2m}}}, \tag{3.5.8}$$

and

$$\|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}^s_{m,N}}^{q_0, u_0, \eta_0} = \sqrt{\|q, u, \eta\|^2_{\mathbb{X}^s_{m,N}} + \|\nabla \cdot (v_{q_0, u_0, \eta_0} q)\|^2_{H^{1+s}}}. \tag{3.5.9}$$

我们注意到，根据引理 3.19 的第四项， $\|\cdot\|_{q_0, \mathbb{X}^s_{m,N}}^{u_0, \eta_0}$ 是一个范数，与 $\|\cdot\|_{\mathbb{X}^s_{m,N}}$ 等价，其等价常数取决于 s、 m、 N 和 ρ_{WD}。

对于 $s \in \mathbb{N}$，我们接着定义正则化主部算子

$$\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N} : \mathbb{X}^s_{m,N} \to \mathbb{Y}^s \tag{3.5.10}$$

via

$$\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N}(q, u, \eta) = (N^{-1} L_m(q + \mathfrak{g}\eta) + \overset{w_0,\gamma_0}{A^1}(q, u, \eta), \overset{\gamma_0}{A^2}(q, u, \eta), \overset{\gamma_0}{A^3}(q, u, \eta)), \tag{3.5.11}$$

其中的 A^i 项与 (3.4.7) 中相同。

$w_0,\ \gamma_0$总之，算子 $\{A_{m,N}\}$都包含在空间 $\mathcal{L}(\mathbb{X}^s_{m,\ N},\ \mathbb{Y}^s)$ 中，并且正如我们将看到的，它们满足一系列良好的先验估计。因此，连续性方法可用于正则化算子的存在性理论。

一旦证明正则化算子的存在性，我们便希望证明可以令 $N \to \infty$ 趋于极限，从而得到 A的存在性。为此，需要通过从弱解的先验估计这一基例逐步归纳，仔细证明对$A_{m,\ N}$ 而言与 N无关的先验估计。我们还将与算子 A配合进行这一归纳估计过程，以获得所需的 (3.5.5) 先验估计。

因此，我们需要为算子 A 和$A_{m,\ N}$的弱形式设定记号。首先回顾 (1.7.3) 中空间 ${}_0H^1$ 的定义。与动量方程弱形式相关联的算子定义如下

$$\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}} : \mathbb{X}_{-1} \to ({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^* \tag{3.5.12}$$

定义为

$$\langle \overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta), w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1} = \int_\Omega -\gamma_0^2\varrho\partial_1 u\cdot w - q\nabla\cdot(\varrho w) + \mathfrak{g}\varrho\nabla\eta\cdot w + \gamma_0\mathbb{S}^\varrho u : \nabla w \\ - \varsigma\langle \Delta_{\|}\eta, \mathrm{Tr}_\Sigma(w\cdot e_n)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} \tag{3.5.13}$$

对于 $(q,\ u,\ \eta) \in \mathbb{X}_{-1}$和 $w \in {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$。接下来，我们通过如下设定，定义一族与完整问题的弱形式相关联的算子

$$\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{I}} :\ \overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^{-1}} \to \mathbb{Y}^{-1} \tag{3.5.14}$$

via

$$\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta) = \big(\nabla\cdot(\varrho u) + \nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta)), \overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta)\big), \tag{3.5.15}$$

其中，我们回顾一下，向量场 v_{w_0} 定义于 (3.4.11) 中。此外，给定 $\tau \in [0,1]$ 和 $m,\ N \in \mathbb{N}^+$，其中 $m \geqslant 2$，我们定义映射

$$\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{I}^\tau_{m,N}} : \mathbb{X}^{-1}_{m,N} \to \mathbb{Y}^{-1} \tag{3.5.16}$$

via

$$\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{I}^\tau_{m,N}}(q,u,\eta) = (\nabla\cdot(\varrho u) + \tau\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta)) + N^{-1}L_m(q+\mathfrak{g}\eta), \overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta)). \tag{3.5.17}$$

We n现在给出这些算子良定义性和连续性的一个基本结果 .

引理 3.23 (线性分析的良定义性检验)。 设 $\rho \in \mathbb{R}^+$ 和 $w_0 = (q_0,u_0,\eta_0)$ 满足引理 *3.19* 的假设。设 $I \Subset \mathbb{R}^+$ 为一个区间，且 $\gamma_0 \in I$。以下结论成立。

(1) (3.5.14) 的弱形式算子定义良好且有界。*(2)* 对于 $\mathbb{N} \ni m \geqslant 2$、$N \in \mathbb{N}^+$ 和 $\tau \in [0,1]$，其正则化弱形式算子定义良好且有界。*(3)* 对于 $\mathbb{N} \ni m \geqslant 2$ 和 $N \in \mathbb{N}^+$，由(3.5.10) 定义的全部算子的正则化定义良好且有界。 (3.5.16)

证明。对于第一项，只需验证其第一分量 $\overset{\gamma_0,w_0}{\mathscr{I}}$ 是良定义的，并且有界地映射到 $H^0(\Omega)$ 中。为此，我们可以采用与命题 3.21 证明的第一部分中研究 (3.4.39) 时类似的方法。唯一的区别在于如何处理 $\nabla\cdot(v_{w_0}q)$ 项。根据定义，$\nabla\cdot(v_{w_0}q)$ 有界地映射到 $L^2(\Omega)$ 中这一点显而易见，$u_0,\ \eta_0 q_0$ 上的范数。然后结合命题 B.10 以及 $v_{w_0} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 这一事实，可得 $q \mapsto \int_0^b \nabla\cdot(v_{w_0}q)(\cdot,\ y)\,\mathrm{d}y$ 有界地映射到 $\dot{H}^{-1}(\Omega)$ 中。

只要我们验证以下内容，第二项和第三项便可得出。

$$\mathbb{X}_{m,N}^{-1} \ni (q,u,\eta) \mapsto \nabla\cdot(\varrho u) + \tau\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta)) + N^{-1}L_m(q+\mathfrak{g}\eta) \in \hat{H}^0(\Omega) \tag{3.5.18}$$

是一个定义良好且有界的线性映射。我们采用与处理命题 3.21 中的 (3.4.41) 相同的方法处理 $\tau\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))$ 项。对于 $N^{-1}L_m(q+\mathfrak{g}\eta)$ 项，显然它映射到 $L^2(\Omega)$ 中。为获得散度相容条件，我们利用区域 $\mathbb{X}_{m}^{-1}{}_{,N}$ 中所包含的诺伊曼边界条件进行计算

$$\int_0^b \frac{1}{N}L_m(q+\mathfrak{g}\eta)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n-1}\partial_j^{2m}\Big(\mathfrak{g}b\eta + \int_0^b q(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big), \tag{3.5.19}$$

但由于 $m\geqslant 1$，由此可得上界

$$\Big[\int_0^b \frac{1}{N}L_m(q+\mathfrak{g}\eta)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \frac{1}{N}(\|\nabla_\parallel\eta\|_{H^{2m-2}} + \|q\|_{H^{2m-1}}) \lesssim \|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{m,N}^{-1}}. \tag{3.5.20}$$

最后，我们处理 (3.5.18) 中的 $\nabla\cdot(\varrho u)$ 项。显然，它映射到 $L^2(\Omega)$ 中，因此只需检验散度相容条件。通过积分可得

$$\int_0^b \nabla\cdot(\varrho u)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y = (\nabla_\parallel,0)\cdot\int_0^b(\varrho u)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y - \varrho(b)\partial_1\eta + \frac{\varrho(b)}{N}(-\Delta_\parallel)^{m-1/4}\eta, \tag{3.5.21}$$

由于 $m\geqslant 2$，因此得到估计

$$\Big[\int_0^b \nabla\cdot(\varrho u)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|u\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0} + \frac{1}{N}\|\nabla_\parallel\eta\|_{H^{2m-5/2}} \lesssim \|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{m,N}^{-1}}. \tag{3.5.22}$$

□

现在，我们通过引入一个将数据的强形式映射为数据弱形式的泛函，来考察弱算子与强算子 $\mathscr{J}$, $\mathscr{J}_{m,N}^{\tau}$ 以及 A,$A_{m,N}$之间的关系。对于 $s\in\mathbb{N}$，我们定义强到弱数据映射

$$\mathscr{K} : H^s(\Omega;\mathbb{R}^n)\times H^{1/2+s}(\Sigma;\mathbb{R}^n) \to ({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^* \tag{3.5.23}$$

由.....给出

$$\langle\mathscr{K}(f,k),w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1} = \int_\Omega f\cdot w + \int_\Sigma k\cdot w, \tag{3.5.24}$$

其中 $w\in{}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$，$(f,\ k)\in H^s(\Omega;\mathbb{R}^n)\times H^{1/2+s}(\Sigma;\mathbb{R}^n)$，且 $s\in\mathbb{N}$。

引理 3.24 (强解与弱解)。 在引理 *3.23* 的假设下，对于 $(g,\ f,\ k)\in\mathbb{Y}^0$成立。

(1) If $(q,u,\eta)\in\overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^0}$, *then* $\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)=(g,f,k)$ *if and only if* $\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}}(q,u,\eta)=(g,\mathscr{K}(f,k))$.

(2) If $m,N\in\mathbb{N}^+$, $m\geqslant 2$, *and* $(q,u,\eta)\in\mathbb{X}_{m,N}^0$, *then* $\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N}(q,u,\eta)=(g,f,k)$ *if and only if* $\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}}{}_{m,N}^{1}(q,u,\eta)=(g,\mathscr{K}(f,k))$.

证明。 这些结论可直接由分部积分得到。 □

本节以如下关于对数凸性的简单引理作结。回顾一下，对数凸性定义于第 1.7 节。

引理 3.25 (范数的对数凸性)。 以下巴拿赫尺度对于所述范数是对数凸的：

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{X}^s, \|\cdot\|_{\mathbb{X}^s}\right)_{s\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^s}, \|\cdot\|_{\overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^s}}\right)_{s\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\mathbb{X}^s_{m,N}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}^s_{m,N}}\right)_{s\in\mathbb{N}},\\ &\left(\mathbb{X}^s_{m,N}, \|\cdot\|_{\overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^s_{m,N}}}\right)_{s\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\mathbb{Y}^s, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}^s}\right)_{s\in\mathbb{N}},\end{aligned} \tag{3.5.25}$$

其中，我们取 $m, N \in \mathbb{N}$ 和 (q_0, u_0, η_0) 如引理 *3.19* 的假设所述。

证明。 引理 B.5 表明，各向异性 Sobole夫空间 $\{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是对数凸的。由标准索伯列夫空间的对数凸性（见定理 D.4 和推论 D.5），以及乘积显然保持对数凸性可知，结论成立。□

4. Analysis of steady transport equations and their regularizations

在上一节中，我们引入了正则化主部算子 $A_{m,N}^{\gamma_0,w_0}$（定义见方程 (3.5.10)），它通过将椭圆算子 L_m（定义见 (3.5.6)）的倍数添加到 A 中对应于线性化连续性方程的部分，对算子 A（定义见方程 (3.4.7)）进行扰动。本节将重点研究这类正则化稳态输运方程的解，旨在推导出不依赖于正则化参数的精确估计。这些估计将在后续的线性分析中发挥关键作用。此外，我们还将推导标准稳态输运方程解的一些估计。

确切地说，我们现在研究如下类型的方程

$$\alpha f + \nabla\cdot(vf) + \varepsilon L_m f = g \text{ in } \Omega, \tag{4.0.1}$$

其中 α，$g : \Omega \to \mathbb{R}$ 是给定函数，$v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是给定向量场，$\varepsilon \geqslant 0$ 很小，L_m 是由 (3.5.6) 给出的线性椭圆算子，而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是未知量。本节的主要结果是命题 4.4 和定理 4.8。

在下文中，一个关键对象是满足 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(X\cdot e_n) = 0$的向量场 $X \in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$。设 $X_0 \in H^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$，$X_1 \in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$，$\rho_{\max} \in \mathbb{R}^+$ 任意但固定，$0 < \rho \leqslant \rho_{\max}$,$r \in \mathbb{N}$,

$$X = X_0 + X_1, \text{ and } (DX_0, DX_1) \in B_{H^r}(0,\rho) \times B_{W^{r,\infty}}(0,\rho). \tag{4.0.2}$$

当需要对这类向量场进行量化时，我们会经常引用这个方程。

4.1. 初步驯性估计。 给定 $m \in \mathbb{N}^+$，我们定义一个与 L_m 相关的双线性型：

$$B_m : H^m(\Omega)\times H^m(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ via } B_m(\varphi_0,\varphi_1) = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \partial_j^m\varphi_0\partial_j^m\varphi_1. \tag{4.1.1}$$

我们已在附录 C.2 中记录了 B_m 的若干基本性质。这里的第一个结果考虑了 B_m 的一个估计，借助分部积分，我们能够少用一个导数。

引理 4.1 （双线性估计）。 设 $m \in \mathbb{N}^+$。假设 $\varphi \in H^m$（Ω）、$X \in W^{\infty,\infty}$（Ω；$\mathbb{R}^n$）满足 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}$（$X\cdot e_n$）$= 0$ 以及（4.0.2），其中 $r = 1 + \lfloor n/2\rfloor$ 和 $0 < \rho \leqslant \rho_{\max}$，且$\nabla\cdot$（$X\varphi$）$\in H^m$（$\Omega$）。则有以下估计

$$|B_m(\varphi, \nabla\cdot(X\varphi))| \lesssim \rho\|\varphi\|_{H^m}^2 + \rho^{-1-\lfloor n/2\rfloor}\langle\|DX_0, DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{H^m}\|\varphi\|_{L^2} \tag{4.1.2}$$

and

$$|B_m(\varphi, \nabla\cdot(X\varphi))| \lesssim \rho\|\varphi\|_{H^m}^2 + \|\varphi\|_{H^m}\begin{cases}0 & \text{if } m \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|DX_0, DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < m.\end{cases} \tag{4.1.3}$$

这里的隐含常数取决于 m、 $\rho_{\max}$ 和维数。

证明。 由于 φ, $\nabla\cdot(X\varphi)\in H^m(\Omega)$ 且 $X\in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$，我们可以应用莱布尼茨法则，得到

$$\nabla\cdot(X\partial_j^m\varphi)=\partial_j^m\nabla\cdot(X\varphi)-\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\nabla\cdot(\partial_j^kX\partial_j^{m-k}\varphi)\in L^2(\Omega),\tag{4.1.4}$$

因此 $\partial_j^m\varphi\in H^0_X(\Omega)$，即附录 B.2 中由 (B.2.1) 定义的空间。引入交换子并运用命题 B.9，可得恒等式

$$B_m(\nabla\cdot(X\varphi),\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\Big(\frac{\nabla\cdot X}{2}\partial_j^m\varphi+\nabla\cdot([\partial_j^m,X]\varphi)\Big)\partial_j^m\varphi.\tag{4.1.5}$$

因此，我们得到估计

$$|B_m(\nabla\cdot(X\varphi),\varphi)|\lesssim\Big(\|DX\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{H^m}+\sum_{j=1}^{n}\|[\partial_j^m,X]\varphi\|_{H^1}\Big)\|\varphi\|_{H^m}.\tag{4.1.6}$$

根据推论 D.8，我们得到估计

$$\|[\partial_j^m,X_0]\varphi\|_{H^1}\lesssim\|\partial_jX_0\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}}\|\varphi\|_{H^m}+\begin{cases}0&\text{if } m\leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|\partial_jX_0\|_{H^m}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}}&\text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor<m,\end{cases}\tag{4.1.7}$$

and

$$\|[\partial_j^m,X_1]\varphi\|_{H^1}\lesssim\|\partial_jX_1\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{H^m}+\|\partial_jX_1\|_{W^{m,\infty}}\|\varphi\|_{L^2}.\tag{4.1.8}$$

结合估计 (4.1.7) 和 (4.1.8) 可知

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\|[\partial_j^m,X]\varphi\|_{H^1}&\lesssim\|DX_0,DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\|\varphi\|_{H^m}\\&\quad+\begin{cases}0&\text{if } m\leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|DX_0,DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}}&\text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor<m.\end{cases}\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

这就证明了 (4.1.3)。

现在继续证明 (4.1.2)。对于 (4.1.9) 的后一种情形，我们使用插值和杨氏不等式来给出上界

$$\begin{aligned}\|DX_0,DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}}&\lesssim\rho^{-\frac{1+\lfloor n/2\rfloor}{m-1-\lfloor n/2\rfloor}}\|DX_0,DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}^{\frac{m}{m-1-\lfloor n/2\rfloor}}\|\varphi\|_{L^2}+\rho\|\varphi\|_{H^m}\\&\lesssim_{\rho_{\max}}\rho^{-1-\lfloor n/2\rfloor}\langle\|DX_0,DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}+\rho\|\varphi\|_{H^m}.\end{aligned}\tag{4.1.10}$$

综合 (4.1.9) 和 (4.1.10)，可得上界

$$\sum_{j=1}^{n}\|[\partial_j^m,X]\varphi\|_{H^1}\lesssim\rho\|\varphi\|_{H^m}+\rho^{-1-\lfloor n/2\rfloor}\langle\|DX_0,DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}.\tag{4.1.11}$$

现在回到 (4.1.6)，代入 (4.1.11) 可得估计

$$\begin{aligned}&|B_m(\nabla\cdot(X\varphi)\ \varphi)\\&|\lesssim\rho\|\varphi\|_{H^m}^2+\rho^{-1-\lfloor n/2\rfloor}\langle\|DX_0,DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{H^m}\|\varphi\|_{L^2},\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

这就是 (4.1.2)。 □

在接下来的两个结果中，我们使用记号 $\nabla_X\varphi=X\cdot\nabla\varphi$。下面这个颇为技术性的引理讨论了 $\nabla_X\varphi$ 的法向导数迹，其中 X 的法向迹为零，且 φ 的某些法向导数迹为零。关键在于，法向导数迹的高阶范数只取决于 X 和 φ 的一个低阶范数。

引理 4.2（迹估计）。假设 $X \in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(X\cdot e_n)=0$，并分解为 $X=X_0+X_1$，其中 $DX_0 \in H^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$ 且 $DX_1 \in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$。此外，假设 $\varphi \in H^{2m+1}(\Omega)$ 并满足诺伊曼条件

$$\partial_n^m \varphi = \cdots = \partial_n^{2m-1}\varphi = 0 \quad on\ \partial\Omega. \tag{4.1.13}$$

那么，对于 $\ell \in \{0,1,\dots,m-1\}$，我们有以下法向导数估计 :

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{m+\ell}\nabla_X\varphi)\|_{H^{-1/2}} &\lesssim \|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell,\infty}}\|\varphi\|_{H^m}\\ &\quad+\begin{cases}0 & if\ m\leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|DX_0,DX_1\|_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & if\ 1+\lfloor n/2\rfloor<m,\end{cases}\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

and

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{m+\ell}\nabla_X\varphi)\|_{H^{-1/2}} &\lesssim \langle\|DX_0,DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell,\infty}}\rangle\|\varphi\|_{H^m}\\ &\quad+\langle\|DX_0,DX_1\|_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

这里的隐含常数取决于区域、维数、 m 和 ℓ。

证明。我们先计算所述估计中迹的自变量。固定 $\ell \in\{0,1,\dots,m-1\}$。根据莱布尼茨法则，我们有

$$\begin{aligned}\partial_n^{m+\ell}\nabla_X\varphi &= \sum_{k=0}^{m+\ell}\binom{m+\ell}{k}\partial_n^{m+\ell-k}X\cdot\nabla\partial_n^k\varphi\\ &= \sum_{k=0}^{m+\ell}\binom{m+\ell}{k}\partial_n^{m+\ell-k}X\cdot(\nabla_\parallel,0)\partial_n^k\varphi+\sum_{k=0}^{m+\ell}\binom{m+\ell}{k}\partial_n^{m+k-\ell}(X\cdot e_n)\partial_n^{k+1}\varphi.\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

应用 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}$，并利用 $\partial_n^m\varphi=\cdots=\partial_n^{2m-1}\varphi=0$ 和 $X\cdot e_n=0$ 在 $\partial\Omega$ 上这一事实，我们计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{m+\ell}\nabla_X\varphi) &= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+\ell}{k}\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{m+\ell-k}X\cdot(\nabla_\parallel,0)\partial_n^k\varphi)\\ &\quad+\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m+\ell}{k}\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{m+\ell-k}(X\cdot e_n)\partial_n^{k+1}\varphi)+\begin{cases}0 & \text{if } \ell<m-1,\\ \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(X\cdot e_n\partial_n^{2m}\varphi) & \text{if } \ell=m-1.\end{cases}\\ &= \sum_{k=0}^{m-2}\binom{m+\ell}{k}\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{m+\ell-k}X\cdot\nabla\partial_n^k\varphi)+\binom{m+\ell}{m-1}\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{\ell+1}X\cdot(\nabla_\parallel,0)\partial_n^{m-1}\varphi)=\mathbf{I}+\mathbf{II}.\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

接着取 $H^{-1/2}$-范数，并分别处理 **I** 和**II** 。

我们利用嵌入 $H^{1/2}\hookrightarrow H^{-1/2}$ 和迹映射的 $H^1\to H^{1/2}$ 连续性，得到 **I** 的上界：

$$\begin{aligned}\|\mathbf{I}\|_{H^{-1/2}} &\lesssim \sum_{k=0}^{m-2}\|\partial_n^{m+\ell-k}X\cdot\nabla\partial_n^k\varphi\|_{H^1}\lesssim\sum_{k=0}^{m-2}\|D^{m+\ell-k}X\otimes D^{k+1}\varphi\|_{L^2}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{m-1}\|D^{m+1+\ell-k}X\otimes D^{k+1}\varphi\|_{L^2}=\mathbf{III}+\mathbf{IV}.\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

对于 **III** 和 **IV**，我们采用分解 $X = X_0 + X_1$ 和推论 D.7：

$$\begin{aligned}\mathbf{III} &\leqslant \sum_{k=0}^{m-2} \left(\|D^{m-1-k}(D^{1+\ell}X_0)\otimes D^{k+1}\varphi\|_{L^2} + \|D^{m-1-k}(D^{1+\ell}X_1)\otimes D^{k+1}\varphi\|_{L^2}\right)\\ &\lesssim \|D^{1+\ell}X_0, D^{1+\ell}X_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}, W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\|\varphi\|_{H^m}\\ &\quad + \begin{cases} 0 & \text{if } m \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|D^{1+\ell}X_0, D^{1+\ell}X_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < m,\end{cases}\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\mathbf{IV} &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \left(\|D^{m-1-k}(D^{2+\ell}X_0)\otimes D^{k+1}\varphi\|_{L^2} + \|D^{m-1-k}(D^{2+\ell}X_1)\otimes D^{k+1}\varphi\|_{L^2}\right)\\ &\lesssim \|D^{2+\ell}X_0, D^{2+\ell}X_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}, W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\|\varphi\|_{H^m}\\ &\quad + \begin{cases} 0 & \text{if } m \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|D^{2+\ell}X_0, D^{2+\ell}X_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < m.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

因此，我们对 **I** 得到的估计为

$$\begin{aligned}\|\mathbf{I}\|_{H^{-1/2}} &\lesssim \|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell,\infty}}\|\varphi\|_{H^m}\\ &\quad + \begin{cases} 0 & \text{if } m \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < m.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

对于**II**，我们构造一个恰当的散度，以利用 $H^{-1/2}$ 空间中的负范数，即

$$\partial_n^{\ell+1}X\cdot(\nabla_{\|},0)\partial_n^{m-1}\varphi = (\nabla_{\|},0)\cdot(\partial_n^{\ell+1}X\partial_n^{m-1}\varphi) - (\nabla_{\|},0)\cdot(\partial_n^{\ell+1}X)\partial_n^{m-1}\varphi. \tag{4.1.22}$$

再由迹映射的连续性和推论 D.7，可得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{II}\|_{H^{-1/2}} &\lesssim \|\partial_n^{\ell+1}X\partial_n^{m-1}\varphi\|_{H^1} + \|(\nabla_{\|},0)\cdot(\partial_n^{\ell+1}X)\partial_n^{m-1}\varphi\|_{H^1} \lesssim \|D^{\ell+1}X\otimes D^{m-1}\varphi\|_{H^1}\\ &\quad + \|D^{\ell+2}X\otimes D^{m-1}\varphi\|_{H^1} \lesssim \|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell,\infty}}\|\varphi\|_{H^m}\\ &\quad + \begin{cases} 0 & \text{if } m \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < m.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

将**I** 和**II** 的估计合并，即完成估计 (4.1.14) 的证明。

对于剩余的估计，我们先取 $1+\lfloor n/2\rfloor < m$，并利用插值和杨氏不等式给出上界

$$\begin{aligned}\|DX_0, DX_1\|_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} &\lesssim \|\varphi\|_{H^m} + \|DX_0, DX_1\|^{\frac{m}{m-(1+\lfloor n/2\rfloor)}}_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}}\|\varphi\|_{L^2}\\ &\lesssim \|\varphi\|_{H^m} + \langle\|DX_0, DX_1\|_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

因此，对于任意 m，我们可得 (4.1.15) 成立。 □

作为前一结果的应用，我们针对映射 B_m 推导如下估计。与引理 4.1 的情形相同，这个估计的要点在于，右端所依赖的导数比对左端进行朴素考察时预期的要少。

引理 4.3 (另一个双线性估计)。 设 $m\in\mathbb{N}^+$ 和 $X\in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(X\cdot e_n) = 0$，并分解为 $X = X_0 + X_1$，其中 $DX_0\in H^{\infty}(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$ 和 $DX_1\in$

$W^{\infty,\infty}(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$。假设 $\varphi \in H^{3m}(\Omega)$ 满足诺伊曼条件 $\partial_n^m\varphi = \cdots = \partial_n^{2m-1}\varphi = 0$在 $\partial\Omega$上。则

$$\begin{aligned}|B_m(\nabla_X\varphi, L_m\varphi)| \lesssim{}& \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\rangle \|\varphi\|_{H^{3m}}\|\varphi\|_{H^m}\\ &+ \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{H^{3m}}\|\varphi\|_{L^2}\\ &+ \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m,\infty}}\rangle^{6}\|\varphi\|_{H^m}\|\varphi\|_{L^2}. \quad (4.1.25)\end{aligned}$$

这里的隐含常数取决于区域、维数和 m。

证明。 我们先分部积分。根据引理 C.6，我们有恒等式

$$B_m(\nabla_X\varphi, L_m\varphi) = \int_\Omega L_m(\nabla_X\varphi)L_m\varphi + \sum_{\ell=0}^{m-1}\Big(\int_\Sigma - \int_{\Sigma_0}\Big)(-1)^\ell \partial_n^{m+\ell}(\nabla_X\varphi)\partial_n^{m-1-\ell}L_m\varphi. \quad (4.1.26)$$

因此，根据迹理论，我们有如下估计

$$|B_m(\nabla_X\varphi, L_m\varphi)| \lesssim \Big|\int_\Omega L_m(\nabla_X\varphi)L_m\varphi\Big| + \sum_{\ell=0}^{m-1}\|\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{m+\ell}(\nabla_X\varphi))\|_{H^{-1/2}}\|L_m\varphi\|_{H^{m-\ell}} = \mathbf{I} + \mathbf{II}. \quad (4.1.27)$$

我们将分别处理 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{II}$ 。

对于 $\mathbf{I}$，我们首先使用 $\nabla_X\varphi = \nabla\cdot(\varphi X) - \varphi\nabla\cdot X$ 来展开

$$\begin{aligned}\int_\Omega L_m(\nabla_X\varphi)L_m\varphi &= \int_\Omega \nabla\cdot L_m(\varphi X)L_m\varphi - L_m(\varphi(\nabla\cdot X))L_m\varphi\\ &= \int_\Omega \nabla\cdot(XL_m\varphi)L_m\varphi + \nabla\cdot([L_m, X]\varphi)L_m\varphi - L_m(\varphi(\nabla\cdot X))L_m\varphi, \quad (4.1.28)\end{aligned}$$

以及 n 对右侧第一项应用命题 B.9。由此得到上界

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &\leqslant \Big|\int_\Omega \frac{\nabla\cdot X}{2}(L_m\varphi)^2\Big| + \Big|\int_\Omega \nabla\cdot([L_m, X]\varphi)L_m\varphi\Big| + \Big|\int_\Omega L_m(\varphi(\nabla\cdot X))L_m\varphi\Big|\\ &\lesssim \Big(\|DX\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{H^{2m}} + \sum_{j=1}^n \|[\partial_j^{2m}, X]\varphi\|_{H^1} + \|(\nabla\cdot X)\varphi\|_{H^{2m}}\Big)\|\varphi\|_{H^{2m}}. \quad (4.1.29)\end{aligned}$$

接下来，我们使用推论 D.7，再结合插值和杨氏不等式，估计

$$\begin{aligned}\|(\nabla\cdot X)\varphi\|_{H^{2m}} &\lesssim \|DX_0,\ DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\ \infty}}\|\varphi\|_{H^{2m}}\\ &\quad + \begin{cases}0 & \text{if } 2m \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < 2m,\end{cases}\\ &\lesssim \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\rangle\|\varphi\|_{H^{2m}} + \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}. \quad (4.1.30)\end{aligned}$$

面，对于 $j \in \{1, \dots, n\}$，我们使用推论 D.8，并通过另一种插值与杨氏不等式论证来估计

$$\begin{aligned}\|[\partial_j^{2m}, X]\varphi\|_{H^1} &\lesssim \|DX_0,\ DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\ \infty}}\|\varphi\|_{H^{2m}}\\ &\quad + \begin{cases}0 & \text{if } 2m \leqslant 1+\lfloor n/2,\\ \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < 2m,\end{cases}\\ &\lesssim \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\ \infty}}\rangle\|\varphi\|_{H^{2m}} + \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}. \quad (4.1.31)\end{aligned}$$

综合 (4.1.29)、(4.1.30) 和 (4.1.31)，我们得到

$$\mathbf{I} \lesssim \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\rangle\|\varphi\|_{H^{2m}}^2 + \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{H^{2m}}\|\varphi\|_{L^2}. \quad (4.1.32)$$

现在我们 我们将注意力转向 **II**。首先，我们引入引理 4.2 中的估计 (4.1.15) :

$$\mathbf{II} \leqslant \|\varphi\|_{H^m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell,\infty}}\rangle \|L_m\varphi\|_{H^{m-\ell}} + \|\varphi\|_{L^2} \sum_{\ell=0}^{m-1} \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor} \|L_m\varphi\|_{H^{m-\ell}}. \quad (4.1.33)$$

接下来我们利用插值不等式

$$\|L_m\varphi\|_{H^{m-\ell}} \lesssim \|L_m\varphi\|_{H^1}^{\frac{\ell}{m-1}} \|L_m\varphi\|_{H^m}^{\frac{m-1-\ell}{m-1}}, \quad (4.1.34)$$

$$\|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor+\ell,\ \infty}} \lesssim \|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}^{\frac{m-1-\ell}{m-1}} \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m,\infty}}^{\frac{\ell}{m-1}}, \quad (4.1.35)$$

and

$$\|DX_0, DX_1\|_{H^{1+m+\ell}\times W^{1+m+\ell,\infty}} \lesssim \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+m}\times W^{1+m,\infty}}^{\frac{m-1-\ell}{m-1}} \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}^{\frac{\ell}{m-1}}, \quad (4.1.36)$$

结合杨氏不等式来估计

$$\begin{aligned}\mathbf{II} \leqslant \|\varphi\|_{H^m} \big(&\langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\rangle \|L_m\varphi\|_{H^m} \\ &+ \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m,\infty}}\rangle \|L_m\varphi\|_{H^1}\big) \\ &+ \|\varphi\|_{L^2} \big(\langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+m}\times W^{1+m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor} \|L_m\varphi\|_{H^m} \\ &+ \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor} \|L_m\varphi\|_{H^1}\big). \quad (4.1.37)\end{aligned}$$

结合 (4.1.32) 和 (4.1.37)，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{I}+\mathbf{II} \lesssim &\langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\rangle (\|\varphi\|_{H^{2m}}^2 + \|\varphi\|_{H^m}\|\varphi\|_{H^{3m}}) \\ &+ \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor} \|\varphi\|_{H^{3m}}\|\varphi\|_{L^2} \\ &+ \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m,\infty}}\rangle \|\varphi\|_{H^m}\|\varphi\|_{H^{2m+1}}. \quad (4.1.38)\end{aligned}$$

然后我们再次进行插值： $\|\varphi\|_{H^{2m}}^2 \lesssim \|\varphi\|_{H^m}\|\varphi\|_{H^{3m}}$，若 $m \geqslant 2$，则利用杨氏不等式给出上界

$$\langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}}\rangle \|\varphi\|_{H^{2m+1}} \lesssim \|\varphi\|_{H^{3m}} + \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}}\rangle^{\frac{3m}{m-1}} \|\varphi\|_{L^2}. \quad (4.1.39)$$

结合这些结果与 (4.1.38)，我们证明了 (4.1.25)。 □

4.2. 关于稳态输运方程与椭圆正则化的一些结果。有了第 4.1 节中的引理，我们现在可以开始推导稳态输运方程及其正则化所需的精确估计。前者要简单得多，我们的第一个结果给出了所有必要的先验估计。

命题 4.4 (稳态输运的先验估计)。 设 $m \in \mathbb{N}$。假设 $\varphi \in H^m(\Omega), X \in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足 (4.0.2)，且 $r = 1+\lfloor n/2\rfloor$ 和 $0 < \rho \leqslant \rho_{\max}$，并且 $\nabla\cdot(X\varphi) \in H^m(\Omega)$。此外，假设 $\Lambda \in W^{\infty,\infty}(\Omega)$ 满足 $\Lambda > 0$, $1/\Lambda \in L^\infty(\Omega)$，并且

$$\Lambda\varphi + \nabla\cdot(X\varphi) = \psi \ in\ \Omega. \quad (4.2.1)$$

存在一个 $\rho^{(m)} \in \mathbb{R}^+$，仅依赖于 m、Λ 和维数，使得如果 $0 < \rho \leqslant \rho^{(m)}$，则

$$\|\varphi\|_{H^m} \lesssim \|\psi\|_{H^m} + \begin{cases} 0 & \text{if } m \leqslant 1 + \lfloor n/2 \rfloor, \\ \|DX_0, DX_1\|_{H^m \times W^{m,\infty}} \|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } 1 + \lfloor n/2 \rfloor < m. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

此处的隐含常数仅依赖于 m、$\rho^{(m)}$、Λ 和维数。

证明。我们首先将 (4.2.1) 乘以 φ，并应用命题 B.9，得到恒等式

$$\int_\Omega \Big(\Lambda + \frac{\nabla \cdot X}{2}\Big)\varphi^2 = \int_\Omega \varphi\psi. \tag{4.2.3}$$

选取充分小的 $\rho^{(0)}$（取决于 $\|1/\Lambda\|_{L^\infty}$），并在右端应用柯西-施瓦茨不等式，可得先验估计

$$\|\varphi\|_{L^2} \lesssim \|\psi\|_{L^2}. \tag{4.2.4}$$

现在假设 $m \geqslant 1$ 和 $0 < \rho \leqslant \rho^{(0)}$。将 (4.2.1) 代入 (4.1.1) 中的双线性型 B_m，得到恒等式 $B_m(\Lambda\varphi + \nabla \cdot (X\varphi)\ \varphi) = B_m(\psi,\ \varphi)$，因此

$$B_m(\Lambda\varphi, \varphi) \leqslant \|\psi\|_{H^m}\|\varphi\|_{H^m} + |B_m(\nabla \cdot (X\varphi), \varphi)|. \tag{4.2.5}$$

应用 G̊arding 不等式和引理 C.5，可得上界

$$\|\varphi\|_{H^m}^2 \lesssim \|\psi\|_{H^m}\|\varphi\|_{H^m} + \|\varphi\|_{L^2}^2 + |B_m(\nabla \cdot (X\varphi), \varphi)|. \tag{4.2.6}$$

现在，我们对 $\|\psi\|_{H^m}\|\varphi\|_{H^m}$ 项使用柯西不等式，对 $\|\varphi\|_{L^2}^2$ 项使用估计 (4.2.4)，并对上面的最后一项使用引理 4.1 中的估计 (4.1.3)；由此得到上界

$$\|\varphi\|_{H^m}^2 \lesssim \|\psi\|_{H^m}^2 + \rho\|\varphi\|_{H^m}^2 + \|\varphi\|_{H^m} \begin{cases} 0 & \text{if } m \leqslant 1 + \lfloor n/2, \\ \|DX_0, DX_1\|_{H^m \times W^{m,\infty}} \|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } 1 + \lfloor n/2 \rfloor < m. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

我们将 $\rho^{(m)} \in (0,\ \rho^{(0)}]$ 定义得足够小，使得取 $\rho \leqslant \rho^{(m)}$ 时，可以将右端的 $\|\varphi\|_{H^m}^2$ 项吸收到左端。完成这一步后，只需对 (4.2.7) 中的最后一项再应用一次柯西不等式，即可得到估计 (4.2.2)。□

本小节余下部分将针对正则化稳态输运方程建立相应的先验估计，并确保其关于逼近参数具有恰当的一致性。这比命题 4.4 更复杂，因为现在的理论必须兼顾椭圆结构与双曲结构之间颇为棘手的结合。我们在这方面的第一个结果处理低正则性情形，即 L^2 数据。

命题 4.5 (数据属于 L^2 的正则化定常输运先验估计)。 令 $m \in \mathbb{N}^+$和 L_m 为 (3.5.6) 中给出的算子。假设 $\psi \in L^2(\Omega)$、$\varphi \in H^{2m}(\Omega)$、$X \in W^{\infty,\infty}(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$满足 (4.0.2)，其中 $r = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$ 且 $0 < \rho \leqslant \rho_{\max}$，$\Lambda \in W^{\infty,\infty}(\Omega)$ 满足 $\Lambda > 0$ 且$1/\Lambda \in L^\infty(\Omega)$，并且 $N \in \mathbb{N}^+$。进一步假设方程

$$\begin{cases} N^{-1}\Lambda L_m\varphi + \nabla \cdot (X\varphi) = \psi & \text{in } \Omega, \\ \partial_n^m\varphi = \cdots = \partial_n^{2m-1}\varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.8}$$

成立。如果

$$N \gtrsim \langle \|DX_0, DX_1\|_{H^m \times W^{m,\infty}} \rangle^{4+2\lfloor n/2 \rfloor}, \tag{4.2.9}$$

那么我们有先验估计

$$\|\varphi\|_{H^{2m}} \lesssim N\|\varphi, \psi\|_{L^2 \times L^2}, \tag{4.2.10}$$

其中，隐含常数取决于 m、维数、Λ 和 $\rho_{\max}$。

证明。 我们将（4.2.8）中的第一个方程乘以 $N^{-1}L_m\varphi$ ，并在 Ω 上积分。对 $\nabla\cdot(X\varphi)$ 项应用引理 C.6，可得到恒等式

$$\frac{1}{N^2}\int_\Omega \Lambda(L_m\varphi)^2+\frac{1}{N}B_m(\nabla\cdot(X\varphi),\varphi)=\int_\Omega \psi\frac{1}{N}L_m\varphi. \tag{4.2.11}$$

现在，我们对 Λ 使用假设，并结合柯西不等式与吸收技巧：

$$\frac{1}{N^2}\|L_m\varphi\|_{L^2}^2\lesssim\|\psi\|_{L^2}^2+\frac{1}{N}|B_m(\nabla\cdot(X\varphi),\varphi)|. \tag{4.2.12}$$

现在，我们通过使用引理 4.1 中的估计 (4.1.2)（其中 $\rho=\rho_{\max}$），再进行插值，来处理 $B_m(\nabla\cdot(X\varphi)\ \varphi)$ 项：

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}|B_m(\nabla\cdot(X\varphi),\varphi)|&\lesssim\frac{1}{N}\|\varphi\|_{H^m}^2+\frac{1}{N}\langle\|DX_0,DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{H^m}\|\varphi\|_{L^2}\\&\lesssim\frac{1}{N}\|\varphi\|_{H^{2m}}\|\varphi\|_{L^2}+\frac{1}{N^{1/2}}\langle\|DX_0,DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\frac{\|\varphi\|_{H^{2m}}^{1/2}}{N^{1/2}}\|\varphi\|_{L^2}^{3/2}.\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

因此，若满足 (4.2.9)，则

$$\frac{1}{N}|B_m(\nabla\cdot(X\varphi),\varphi)|\lesssim\frac{1}{N}\|\varphi\|_{H^{2m}}\|\varphi\|_{L^2}+\frac{\|\varphi\|_{H^{2m}}^{1/2}}{N^{1/2}}\|\varphi\|_{L^2}^{3/2}. \tag{4.2.14}$$

回到 (4.2.12)，可知

$$\|L_m\varphi\|_{L^2}\lesssim N\|\psi\|_{L^2}+N^{1/2}\|\varphi\|_{H^{2m}}^{1/2}\|\varphi\|_{L^2}^{1/2}+N^{3/4}\|\varphi\|_{H^{2m}}^{1/4}\|\varphi\|_{L^2}^{3/4}. \tag{4.2.15}$$

由于满足 (4.2.8) 中的边界条件，因此我们可以调用引理 C.7 中关于 L_m 的先验估计，从而得到上界

$$\|\varphi\|_{H^{2m}}\lesssim\|\varphi,L_m\varphi\|_{L^2\times L^2}\lesssim N\|\varphi,\psi\|_{L^2\times L^2}+N^{1/2}\|\varphi\|_{H^{2m}}^{1/2}\|\varphi\|_{L^2}^{1/2}+N^{3/4}\|\varphi\|_{H^{2m}}^{1/4}\|\varphi\|_{L^2}^{3/4}. \tag{4.2.16}$$

应用杨氏不等式，将 $\|\varphi\|_{H^{2m}}$ 项从右边吸收到左边后，证明即告完成。□

接下来的两个结果讨论：当正则化稳态输运方程的数据比 L^2 具有更高正则性时会发生什么。第一个结果分析了椭圆项趋于零所带来的解的额外正则性。

命题 4.6（高正则性数据下正则化稳态输运的先验估计，1）。 设 $m\in\mathbb{N}^+$。假设 $\psi\in H^m(\Omega)$、$\varphi\in H^{3m}(\Omega)$、$X\in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足 (4.0.2) 且$r=2+\lfloor n/2\rfloor$ 以及 $0<\rho\leqslant\rho_{\max}$，$\Lambda\in W^{\infty,\infty}(\Omega)$ 满足 $\Lambda>0$ 且 $1/\Lambda\in L^\infty(\Omega)$，并且 $N\in\mathbb{N}^+$。另外假设 (4.2.8) 成立。若

$$N\gtrsim\langle\|DX_0,DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m,\infty}}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor}, \tag{4.2.17}$$

于是我们得到先验估计

$$\|\varphi\|_{H^{3m}}\lesssim N\|\psi,\varphi\|_{H^m\times H^m}+N\langle\|DX_0,DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{4.2.18}$$

这里的隐含常数仅依赖于 m、维数、 Λ 和 $\rho_{\max}$。

证明。 我们将 (4.2.8) 中的第一个方程重写为

$$N^{-1}\Lambda L_m\varphi=\psi-(\nabla\cdot X)\varphi-\nabla_X\varphi \tag{4.2.19}$$

然后将上述方程与 $N^{-1}L_m\varphi$ 作 B_m-乘积。应用 G$\mathring{a}$rding 不等式和引理 C.5，再利用命题 4.5 的 L^2-先验估计，我们得到

$$N^{-2}\|L_m\varphi\|_{H^m}^2\lesssim\|\varphi,\psi\|_{L^2\times L^2}^2+N^{-1}\|\psi,(\nabla\cdot X)\varphi\|_{H^m\times H^m}\|L_m\varphi\|_{H^m}+N^{-1}|B_m(\nabla_X\varphi,L_m\varphi)|. \tag{4.2.20}$$

因此，由柯西不等式可得上界

$$N^{-2}\|L_m\varphi\|_{H^m}^2 \lesssim \|\varphi,\psi\|_{L^2\times L^2}^2 + \|\psi,(\nabla\cdot X)\varphi\|_{H^m\times H^m}^2 + N^{-1}|B_m(\nabla_X\varphi, L_m\varphi)|. \tag{4.2.21}$$

现在，我们应用引理 C.7 中关于 L_m 的先验估计，得到

$$N^{-2}\|\varphi\|_{H^{3m}}^2 \lesssim \|\varphi,\psi\|_{L^2\times L^2}^2 + \|\psi,(\nabla\cdot X)\varphi\|_{H^m\times H^m}^2 + N^{-1}|B_m(\nabla_X\varphi, L_m\varphi)|. \tag{4.2.22}$$

由推论 D.7，并通过一个运用插值和杨氏不等式的常见论证，我们推得

$$\begin{aligned}\|(\nabla\cdot X)\varphi\|_{H^m} &\lesssim \|\varphi\|_{H^m} + \begin{cases} 0 & \text{if } m \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor, \\ \|DX_0, DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < m, \end{cases} \\ &\lesssim \|\varphi\|_{H^m} + \langle\|DX_0, DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

另一方面，引理 4.3 表明

$$\begin{aligned}|B_m(\nabla_X\varphi, L_m\varphi)| \lesssim{}& \|\varphi\|_{H^{3m}}\|\varphi\|_{H^m} + \langle\|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{H^{3m}}\|\varphi\|_{L^2} \\ &+ \langle\|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}}\rangle^{6}\|\varphi\|_{H^m}\|\varphi\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

将 (4.2.23) 和 (4.2.24) 代入 (4.2.22)，再运用柯西不等式，可得

$$\begin{aligned}N^{-2}\|\varphi\|_{H^{3m}}^2 \lesssim{}& \|\varphi,\psi\|_{H^m\times H^m}^2 + \langle\|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}^2 \\ &+ N^{-1}\langle\|DX_0, DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor+m,\infty}}\rangle^{6}\|\varphi\|_{H^m}^2, \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

结合假设 (4.2.17)，我们便可推得上界

$$N^{-2}\|\varphi\|_{H^{3m}}^2 \lesssim \|\varphi,\psi\|_{H^m\times H^m}^2 + \langle\|DX_0, DX_1\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}^2. \tag{4.2.26}$$

这就是所述的估计。 □

接下来，我们旨在估计正则化稳态输运方程的解在与正则数据相同的空间中的范数，且该估计与逼近参数无关。

命题 4.7 (高正则性数据下正则化稳态输运的先验估计，2)。设 m，$N\in\mathbb{N}^+$。假设 $\psi\in H^m(\Omega)$，$\varphi\in H^{3m}(\Omega)$，$X\in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足 (4.0.2)，其中$r = 1+\lfloor n/2\rfloor$ 且 $0<\rho\leqslant\rho_{\max}$。进一步假设，对于 $i\in\{0,1\}$，$\Lambda_i\in W^{\infty,\infty}(\Omega)$ 满足$\Lambda_i>0$，并且 $1/\Lambda_i\in L^\infty(\Omega)$，且方程

$$\begin{cases}\Lambda_0\varphi + N^{-1}\Lambda_1 L_m\varphi + \nabla\cdot(X\varphi) = \psi & in\ \Omega, \\ \partial_n^m\varphi = \cdots = \partial_n^{2m-1}\varphi = 0 & on\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2.27}$$

成立。存在一个仅依赖于维数、 m、 Λ_0和 Λ_1 的 $\widetilde{\rho}^{(m)}\in\mathbb{R}^+$，使得若 $0<\rho\leqslant\widetilde{\rho}^{(m)}$，则有如下先验估计

$$\|\varphi\|_{H^m} \lesssim \|\psi\|_{H^m} + \langle\|DX_0, DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}, \tag{4.2.28}$$

其中，隐含常数仅依赖于 m、 $\widetilde{\rho}^{(m)}$、 Λ_0、 Λ_1 和维数 n.

证明。 我们将 (4.2.27) 中的第一个方程与 $L_m\varphi$ 在 $L^2(\Omega)$ 中作内积，并利用引理 C.6 分部积分，得到恒等式

$$B_m(\Lambda_0\varphi,\varphi) + N^{-1}\|\sqrt{\Lambda_1}L_m\varphi\|_{L^2}^2 = B_m(\psi,\varphi) + B_m(\nabla\cdot(X\varphi),\varphi). \tag{4.2.29}$$

因此， $B_m(\Lambda_0\varphi,\ \varphi)\leqslant\|\psi\|_{H^m}\|\varphi\|_{H^m} + |B_m(\nabla\cdot(X\varphi)\ \varphi)|$。这正是命题 4.4 中的不等式 (4.2.5)。因此，我们可以在此完全以相同的方式论证，从而得出所需结论。□

本节的最终结果是我们定常输运分析的总结。基本上，我们在命题 4.5 的低正则性估计与命题 4.6 和 4.7 的高正则性估计之间进行插值。这样做时，我们力求保留先前估计的一个关键结构：所有涉及向量场的范数都乘以数据或解的最低正则性范数。这需要一些精细的插值结果，这些结果在附录 A.3 中得到证明。

定理 4.8 (正则化稳态输运的估计)。 设 m、$N \in \mathbb{N}^+$ 和 $j \in \{1,\dots,m\}$。假设 $\psi \in H^j(\Omega)$、$\varphi \in H^{j+2m}(\Omega)$ 以及 $X \in W^{\infty,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足 (4.0.2)，其中 $r = 2+\lfloor n/2\rfloor$ 且 $0<\rho\leqslant\rho_{\max}$。进一步假设 $\Lambda_i \in W^{\infty,\infty}(\Omega)$ 满足 $\Lambda_i > 0$，且 $1/\Lambda_i \in L^\infty(\Omega)$ 对于 $i\in\{0,1\}$ 成立，并且这些方程

$$\begin{cases} \Lambda_0\varphi + N^{-1}L_m\varphi + \nabla\cdot(\Lambda_1 X\varphi) = \psi & in\ \Omega,\\ \partial_n^m\varphi = \cdots = \partial_n^{2m-1}\varphi = 0 & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.30}$$

满足 。存在一个 $\rho^{(m)}\in\mathbb{R}^+$，它仅依赖于 m、Λ_0 和 Λ_1，使得如果

$$\max\{\rho, \|X_0\cdot\nabla\Lambda_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}}, \|X_1\cdot\nabla\Lambda_1\|_{W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\} \leqslant \bar\rho^{(m)} \tag{4.2.31}$$

and

$$N \gtrsim \langle \|X_0, X_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor+m}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor+m,\infty}}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor}, \tag{4.2.32}$$

那么我们有先验估计

$$\|\varphi, \nabla\cdot(\Lambda_1 X\varphi), N^{-1}\varphi\|_{H^j\times H^j\times H^{j+2m}} \lesssim \|\psi\|_{H^j} + \langle \|X_0, X_1\|_{H^{1+2m}\times W^{1+2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\psi\|_{L^2}. \tag{4.2.33}$$

这里的隐含常数仅取决于 Λ_0、Λ_1、m、维数和 $\rho^{(m)}$。

证明。 令 $\rho\in\mathbb{R}^+$ 使得

$$\max\{\rho, \|X_0\cdot\nabla\Lambda_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}}, \|X_1\cdot\nabla\Lambda_1\|_{W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\} \leqslant \bar\rho. \tag{4.2.34}$$

在整个证明过程中，我们将不断减小 $\bar\rho$ 以满足各种条件。最后，我们将 $\rho^{(m)}$ 定义为证明结束时所得的 ρ 的值。

对于 $\ell\in\mathbb{N}$，我们还将使用巴拿赫空间

$$Z(m,\ell) = \{\phi\in H^{\ell+2m}(\Omega) \,:\, \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^m\phi) = \cdots = \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{2m-1}\phi) = 0\} \tag{4.2.35}$$

以及有界线性映射 $L: Z(m,\ell)\to H^\ell(\Omega)$，该映射由 $L\varphi = \Lambda_0\varphi + N^{-1}L_m\varphi + \nabla\cdot(\Lambda_1 X\varphi)$ 定义。我们将证明的其余部分分为几个步骤。

步骤 1：建立可逆性。我们断言，对于每个 $\ell\in\mathbb{N}$，L 都是巴拿赫同构。一旦确立由下式定义的双线性型 $\mathfrak{B}$ 这一事实，该结论便可由标准椭圆理论论证得到

$$H^m(\Omega)\times H^m(\Omega)\ni(\varphi_0,\varphi_0)\overset{\mathfrak{B}}{\mapsto}\int_\Omega \Lambda_0\varphi_0\varphi_1 + \nabla\cdot(\Lambda_1 X\varphi_0)\varphi_1 + N^{-1}B_m(\varphi_0,\varphi_1)\in\mathbb{R} \tag{4.2.36}$$

当 ρ 足够小时具有强制性。为证明强制性，我们首先使用命题 B.9 计算

$$\mathfrak{B}(\varphi,\varphi) = \int_\Omega \big(\Lambda_0 + 2^{-1}\nabla\cdot(\Lambda_1 X)\big)\varphi^2 + N^{-1}B_m(\varphi,\varphi). \tag{4.2.37}$$

根据 (4.0.2)、(4.2.34) 以及 Sobolev 嵌入，我们可以得到上界

$$\|\nabla\cdot(\Lambda_1 X)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\Lambda_1\nabla\cdot X\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\Lambda_1\cdot X\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim \bar\rho, \tag{4.2.38}$$

其中隐含常数取决于 Λ_0 和 Λ_1。因此，如果我们取 $0<\rho\leqslant\rho^{(0)}$ 足够小，就得到

$$\mathfrak{B}(\varphi,\varphi) \gtrsim \|\varphi\|_{L^2}^2 + N^{-1}B_m(\varphi,\varphi), \tag{4.2.39}$$

因此，引理 C.5 表明 $\mathfrak{B}$ 是强制的。

步骤 2：逆映射的低范数估计。假设 $\psi \in L^2(\Omega)$、 $\varphi \in Z(m,\ 0)$，且 $L\varphi = \psi$。根据 (4.2.39)，我们有估计 $\|\varphi\|_{L^2}^2 \lesssim \mathfrak{B}(\varphi,\ \varphi) = \int_\Omega \psi\varphi$，因此

$$\|L^{-1}\psi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2} \lesssim \|\psi\|_{L^2}. \tag{4.2.40}$$

现在我们可以应用命题 4.5（由于 (4.2.32)，其假设均已满足），然后利用 (4.2.40)，得到 $\|L^{-1}\psi\|_{H^{2m}} = \|\varphi\|_{H^{2m}} \lesssim N\|\psi - \Lambda_0\varphi,\ \varphi\|_{L^2\times L^2} \lesssim N\|\psi\|_{L^2}$。因此，我们证明了 L^{-1} 将映射 $L^2(\Omega)$ 映入 $Z(m,\ 0) \subset H^{2m}(\Omega)$，且算子界为

$$\|L^{-1}\psi, N^{-1}L^{-1}\psi\|_{L^2\times H^{2m}} \lesssim \|\psi\|_{L^2}. \tag{4.2.41}$$

步骤 3：逆映射的高范数估计。现在假设 $\psi \in H^m(\Omega)$ 和 $\varphi \in Z(m,\ m) \subset H^{3m}(\Omega)$ 满足 $L\varphi = \psi$。注意，该方程等价于

$$\widetilde{\Lambda}_0\varphi + \nabla\cdot(X\varphi) + N^{-1}\widetilde{\Lambda}_1 L_m\varphi = \widetilde{\psi}, \tag{4.2.42}$$

其中 $\widetilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0/\Lambda_1$、 $\widetilde{\Lambda}_1 = 1/\Lambda_1$ 和 $\widetilde{\psi} = (\psi - \varphi X\cdot\nabla\Lambda_1)/\Lambda_1$。我们取 $\rho \leqslant \widetilde{\rho}^{(m)}$，其中后者由命题 4.7 给出，然后应用该命题得到上界

$$\|L^{-1}\psi\|_{H^m} \lesssim \|\widetilde{\psi}\|_{H^m} + \langle\|DX_0, DX_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\widetilde{\psi}\|_{L^2}. \tag{4.2.43}$$

由推论 D.7、插值和杨氏不等式可得

$$\|\widetilde{\psi}\|_{H^m} \lesssim \|\psi\|_{H^m} + \overline{\rho}\|\varphi\|_{H^m} + \langle\|X_0\cdot\nabla\Lambda_1, X_1\cdot\nabla\Lambda_1\|_{H^m\times W^{m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{4.2.44}$$

另一方面，(4.2.41) 给出了上界

$$\|\widetilde{\psi}\|_{L^2} \lesssim \|\psi\|_{L^2}. \tag{4.2.45}$$

我们合并 (4.2.40)、(4.2.43)、(4.2.44) 和 (4.2.45)，然后取 $\rho \leqslant \rho^{(m)} \leqslant \overline{\rho}^{(0)}$ 足够小，使得右端的 $\|\varphi\|_{H^m}$ 项可以被左端吸收；由此得到上界

$$\|L^{-1}\psi\|_{H^m} \lesssim \|\psi\|_{H^m} + \langle\|X_0, X_1\|_{H^{1+m}\times W^{1+m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\psi\|_{L^2}. \tag{4.2.46}$$

接下来，我们应用命题 4.6，随后使用估计 (4.2.46) 和 (4.2.41)：

$$\begin{aligned} N^{-1}\|\varphi\|_{H^{3m}} &\lesssim \|\psi - \Lambda_0\varphi, \varphi\|_{H^m} + \langle\|D(\Lambda_1X_0), D(\Lambda_1X_1)\|_{H^{2m}\times W^{2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\psi\|_{H^m} + \langle\|X_0, X_1\|_{H^{1+2m}\times W^{1+2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\psi\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

这一分析的最终结果是，我们证明了 L^{-1} 将 $H^m(\Omega)$ 映射到 $Z(m,m) \subset H^{3m}(\Omega)$，其算子界为

$$\|L^{-1}\psi, N^{-1}L^{-1}\psi\|_{H^m\times H^{3m}} \lesssim \|\psi\|_{H^m} + \langle\|X_0, X_1\|_{H^{1+2m}\times W^{1+2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\psi\|_{L^2}. \tag{4.2.48}$$

步骤 4：插值与结论。令 $\mathfrak{E}_\Omega$ 表示 Ω 的 Stein 延拓算子（见定义 A.2），并令 $\mathfrak{R}_\Omega$ 表示将定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数限制到 Ω 所得到的算子（见例 2.16）。我们通过公式 $T = \mathfrak{E}_\Omega L^{-1}\mathfrak{R}_\Omega$ 定义一个映射 $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n); H^{2m}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}(H^m(\mathbb{R}^n); H^{3m}(\mathbb{R}^n))$。根据前面的步骤，我们知道，对于 $A = \langle\|X_0, X_1\|_{H^{1+2m}\times W^{1+2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}$，$T$ 满足以下算子界

$$\begin{cases} \|T\psi\|_{L^2} \lesssim \|\psi\|_{L^2} & \text{for all } \psi \in L^2(\mathbb{R}^n), \\ \|T\psi\|_{H^m} \lesssim \|\psi\|_{H^m} + A\|\psi\|_{L^2} & \text{for all } \psi \in H^m(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{4.2.49}$$

and

$$\begin{cases} \|T\psi\|_{H^{2m}} \lesssim N\|\psi\|_{L^2} & \text{for all } \psi \in L^2(\mathbb{R}^n), \\ \|T\psi\|_{H^{3m}} \lesssim N\|\psi\|_{H^m} + NA\|\psi\|_{L^2} & \text{for all } \psi \in H^m(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{4.2.50}$$

因此，我们可以应用命题 A.8，推出对于 $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ 有 $T \in \mathcal{L}(H^j(\mathbb{R}^n); H^{j+2m}(\mathbb{R}^n))$，并且有以下估计

$$\|T\psi, N^{-1}T\psi\|_{H^j\times H^{j+2m}} \lesssim \|\psi\|_{H^j} + A\|\psi\|_{H^{j-m}} \text{ for all } \psi \in H^j(\mathbb{R}^n). \tag{4.2.51}$$

由 ut 利用 $L^{-1}=\mathfrak{R}_\Omega T\mathfrak{E}_\Omega$，我们可以将 (4.2.51) 转化为关于 L^{-1} 的估计，即 :

$$\|L^{-1}\psi,N^{-1}L^{-1}\psi\|_{H^j\times H^{j+2m}}\lesssim\|\psi\|_{H^j}+\langle\|X_0,X_1\|_{H^{1+2m}\times W^{1+2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\psi\|_{L^2}\tag{4.2.52}$$

对所有 $\psi\in H^j(\Omega)$。

还需对 $\nabla\cdot(\Lambda_1XL^{-1}\psi)$ 作出估计。为此，我们将方程重新写为$\nabla\cdot(\Lambda_1X\varphi)=\psi-\Lambda_0\varphi-N^{-1}L_m\varphi$，对两边取 $H^j(\Omega)$ 中的范数，并应用已建立的估计 (4.2.52)。由此得到上界

$$\|\nabla\cdot(\Lambda_1X\varphi)\|_{H^j}\lesssim\|\psi\|_{H^j}+\langle\|X_0,X_1\|_{H^{1+2m}\times W^{1+2m,\infty}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\psi\|_{L^2}.\tag{4.2.53}$$

结合 (4.2.52) 和 (4.2.53)，证明即告完成。 □

5. Analysis of weak solutions to the principal part linear equations

本节研究偏微分方程的弱解

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\varrho u)+\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))=g & \text{in }\Omega,\\ -\gamma_0^2\varrho\partial_1u+\varrho\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)-\gamma_0\nabla\cdot\mathbb{S}^\varrho u=f & \text{in }\Omega,\\ -(\varrho q-\gamma_0\mathbb{S}^\varrho u)e_n-\varsigma\Delta_\parallel\eta e_n=k & \text{on }\Sigma,\\ u\cdot e_n+\partial_1\eta=0 & \text{on }\Sigma,\\ u=0 & \text{on }\Sigma_0.\end{cases}\tag{5.0.1}$$

这里，给定数据为 $g:\Omega\to\mathbb{R}$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$，以及 $k:\Sigma\to\mathbb{R}^n$，还有 $\gamma_0\in\mathbb{R}^+$ 和一个向量场 $v_{w_0}:\Omega\to\mathbb{R}^n$，该向量场由固定的三元组 $w_0=(q_0,\ u_0,\ \eta_0)$ 按照 (3.4.11) 定义（另见引理 3.19）。未知量为 $q:\Omega\to\mathbb{R}$, $u:\Omega\to\mathbb{R}^n$，以及 $\eta:\Sigma\to\mathbb{R}$。换言之，我们关注的是 $w_0,\ \gamma_0$ 弱形式主部线性算子 $\mathscr{J}$，回顾一下，它定义于 (3.5.14)。

上述系统在 Agmon、Douglis 和 Nirenberg [3] 的意义下并非椭圆。由于这一点以及导数损失带来的各种其他线性效应，我们转而考虑带参数 $\tau\in[0,1]$, $m,\ N\in\mathbb{N}^+$ 和 $m\geqslant2$ 的 (5.0.1) 的以下正则化版本:

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\varrho u)+\tau\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))+N^{-1}L_m(q+\mathfrak{g}\eta)=g & \text{in }\Omega,\\ -\gamma_0^2\varrho\partial_1u+\varrho\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)-\gamma_0\nabla\cdot\mathbb{S}^\varrho u=f & \text{in }\Omega,\\ -(\varrho q-\gamma_0\mathbb{S}^\varrho u)e_n-\varsigma\Delta_\parallel\eta e_n=k & \text{on }\Sigma,\\ u\cdot e_n+\partial_1\eta=N^{-1}(-\Delta_\parallel)^{m-1/4}\eta & \text{on }\Sigma,\\ u=0 & \text{on }\Sigma_0,\\ \partial_n^mq=\cdots=\partial_n^{2m-1}q=0 & \text{on }\partial\Omega,\end{cases}\tag{5.0.2}$$

其中，线性椭圆算子 L_m 定义于 (3.5.6)。换言之，本节还考虑$w_0,\ \gamma_0$弱形式下的正则化主部线性算子 $\mathscr{J}^\tau_{m,\ N}$，它们定义于 (3.5.16)。

策略如下。我们首先在第 5.1 节证明系统 (5.0.1) 和 (5.0.2) 的弱解的先验估计，这些估计关于背景解 N 和 τ具有适当的一致性。在第 5.2节中，我们根据先验估计和连续性方法，建立 (5.0.2) 的存在性理论，这也是引入同伦参数 τ的原因。事实证明，含有 $\tau=0$ 的问题可以通过对相似方程的解取双参数极限来求解，而这些方程则借助 Lax–Milgram 引理求解。

5.1.估计。 本小节证明 (5.0.1) 和 (5.0.2) 的弱解的先验估计。我们首先需要以下技术引理。

引理 5.1。 设 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者在定理 *3.17* 中定义，并设 $w_0 = (q_0, u_0, \eta_0)$ 如引理 *3.19 所述。* 假设 $\eta \in \mathcal{H}^0(\Sigma)$ 的傅里叶支撑包含于去心球 $B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, 1) \setminus \{0\}$ 中。则有如下估计

$$\left| \int_\Omega (\nabla \cdot v_{w_0}) \eta^2 \right| \lesssim \rho \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2, \tag{5.1.1}$$

其中隐含常数仅取决于维数、各种物理参数以及 ρ_{WD}。

证明。 首先注意，对 η 的支撑假设意味着 $\eta \in H^\infty(\Sigma)$（例如参见命题 B.1）。其次，我们计算 $\nabla \cdot v_{w_0} = \nabla \cdot (v_{w_0} - \varrho'/\mathfrak{g} e_1)$，并利用这一结果、分部积分、富比尼 - 托内利定理、微积分基本定理，以及 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(v_{w_0} \cdot e_n) = 0$ 这一事实进行改写。

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \nabla \cdot (v_{w_0} - \varrho'/\mathfrak{g} e_1) \eta^2 = \int_\Omega \nabla \cdot ((v_{w_0} - \varrho'/\mathfrak{g} e_1)\eta)\eta = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big((\nabla_\parallel, 0) \cdot \int_0^b (v_{w_0} - \varrho'/\mathfrak{g} e_1)\eta \Big) \eta. \tag{5.1.2}$$

进而，这很容易推出

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla \cdot v_{w_0}) \eta^2 \right| \leqslant \left[(\nabla_\parallel, 0) \cdot \int_0^b (v_{w_0} - \varrho'/\mathfrak{g} e_1)\eta \right]_{\dot{H}^{-1}} [\eta]_{\dot{H}^1}. \tag{5.1.3}$$

由命题 B.4，具体而言，由 (B.1.25)，$[\eta]_{\dot{H}^1} \lesssim \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}$，因此只需估计右侧的 $\dot{H}^{-1}$ 项。为此，我们使用引理 3.19 的分解 (3.4.17)，将其改写为

$$(\nabla_\parallel, 0) \cdot \int_0^b (v_{w_0} - \varrho'/\mathfrak{g} e_1)\eta = (\nabla_\parallel, 0) \cdot \int_0^b v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0} \eta + \partial_1 \Big(\eta \int_0^b v^{(2)}_{\eta_0}(\cdot, y) \cdot e_1 \, \mathrm{d}y \Big) = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2. \tag{5.1.4}$$

利用被积函数属于 $L^2(\Omega)$ 这一事实（并默认使用命题 B.1、注 B.3 以及引理 3.19 的第一项），我们对 $\mathbf{I}_1$ 进行估计：

$$[\mathbf{I}_1]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0} \eta\|_{L^2} \lesssim \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{L^2} \|\eta\|_{L^\infty} \lesssim \rho \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{5.1.5}$$

利用专门化索伯列夫空间的代数性质（见命题 B.2）以及引理 3.19 的第二项，我们对 $\mathbf{I}_2$ 进行估计：

$$[\mathbf{I}_2]_{\dot{H}^{-1}} \leqslant \Big\| \eta \Big(\int_0^b v^{(2)}_{\eta_0}(\cdot, y) \, \mathrm{d}y \Big) \Big\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim \Big\| \int_0^b v^{(2)}_{\eta_0}(\cdot, y) \, \mathrm{d}y \Big\|_{\mathcal{H}^0} \|\eta\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim \rho \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{5.1.6}$$

结合这些界即可得到 (5.1.1)。 □

有了这个引理，我们便可以研究方程 (5.0.1) 主部 q_0, u_0, η_0 的弱解估计。回顾一下，空间 $\mathbb{X}^{-1}$ 和 $\mathbb{Y}^{-1}$ 定义于方程 (3.1.3) 和 (3.1.6) 中，w_0, γ_0 而弱形式算子 $\mathscr{J}$ 定义于 (3.5.14) 中。此外，还需回顾 (1.1.7) 中提出的表面张力 ς 和黏性 μ，λ 假设。

命题 5.2（弱解的先验估计）。 设 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者由定理 *3.17* 定义；设 $w_0 = (q_0, u_0, \eta_0)$ 如引理 *3.19* 所述；再设 $\gamma_0 \in I$，其中 $I \Subset \mathbb{R}^+$ 是 q_0, u_0, η_0 某个区间。假设 $(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^{-1}$ 和 $(g, F) \in \mathbb{Y}^{-1}$ 满足方程

$$\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}}(q, u, \eta) = (g, F). \tag{5.1.7}$$

存在一个 $\rho_{\mathrm{weak}} \in \mathbb{R}^+$，使得若 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{weak}}$，则有如下先验估计

$$\|q, u, \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0 \\ \mathbb{X}^{-1}}} \lesssim \|g, F\|_{\mathbb{Y}^{-1}}. \tag{5.1.8}$$

隐式常 常数和 ρ_{weak} 取决于物理参数、维数、 ρ_{WD} 以及 I.

证明。 我们将证明分为几个步骤。

步骤 1：化归到 $g=0$。我们首先声称，只需在特殊假设 $g=0$ 下证明该结果。事实上，假设这一特殊情形已经得到证明，并且 (q,u,η),$w_0=(q_0,u_0,\eta_0)$，γ_0 和 (g,F) 满足 (5.1.7) 中的关系。借助命题 C.2 中的算子 $\mathcal{B}_0$，我们通过 $w=u-\varrho^{-1}\mathcal{B}_0 g$ 定义 $w\in {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$。由于 $\mathcal{B}_0 g\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$，我们有

因此 $\mathrm{Tr}_\Sigma(w\cdot e_n)=\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)=-\partial_1\eta$，从而 $(q,w,\eta)\in \mathbb{X}^{q_0,u_0,\eta_0}_{-1}$。回忆 $\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}$ 在 (3.5.12) 中定义，我们计算得

$$\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,w,\eta)=F-\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(0,\mathcal{B}_0 g/\varrho,0)\text{ and }\nabla\cdot(\varrho w)+\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))=0. \tag{5.1.9}$$

因此，我们可以应用这个特殊情形得到估计

$$\|q,w,\eta\|_{\mathbb{X}^{-1}}^{q_0,u_0,\eta_0}\lesssim\|F-\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(0,\mathcal{B}_0 g/\varrho,0)\|_{({}_0H^1)^*}\lesssim\|g,F\|_{\mathbb{Y}^{-1}}. \tag{5.1.10}$$

为了在这个上界中将 w 换成 u，我们使用命题 C.2 给出的估计，即$\|u\|_{H^1}\lesssim\|w\|_{H^1}+\|g\|_{\hat{H}^0}$。将此估计与前面的估计串联起来，我们便证明了一般情形下的结果，从而完成了该断言的证明。在接下来的步骤中，我们将证明 $g=0$这一特殊情形下的结果。

步骤 2：关于 u 的先验估计。我们断言，上界

$$\|u\|_{H^1}^2\lesssim\|F\|_{({}_0H^1)^*}^2+\rho(\|q\|_{L^2}^2+\|\eta\|_{\mathcal{H}^{3/2}}^2) \tag{5.1.11}$$

成立。对于 (B.1.4) 中 η 的傅里叶空间分解，我们采用以下记号简化：

$$\eta_{\kappa,\mathrm{L}}=\Pi^\kappa_{\mathrm{L}}\eta\text{ and }\eta_{\kappa,\mathrm{H}}=\Pi^\kappa_{\mathrm{H}}\eta. \tag{5.1.12}$$

根据命题 B.1，我们有 $\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\in L^2(\Sigma)$，且 $\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\in\mathcal{H}^\infty(\Sigma)$。我们对方程

$$\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta_{\kappa,\mathrm{H}})=F-\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(0,0,\eta_{\kappa,\mathrm{L}}) \tag{5.1.13}$$

乘以 u；所得恒等式的左端为

$$\begin{aligned}\langle\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta_{\kappa,\mathrm{H}}),u\rangle=\int_\Omega\gamma_0\Big(\frac{\mu(\varrho)}{2}|\mathbb{D}^0u|^2+\lambda(\varrho)(\nabla\cdot u)^2\Big)-(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})\nabla\cdot(\varrho u)\\+\langle(\mathfrak{g}\varrho-\varsigma\Delta_\parallel)\eta_{\kappa,\mathrm{H}},\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}},\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

接下来，我们旨在估计该表达式右侧的后两项。为此，我们回顾

$$\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)=-\partial_1\eta\text{ and }-\nabla\cdot(\varrho u)=\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta)). \tag{5.1.15}$$

由此我们可以计算

$$\langle(\mathfrak{g}\varrho-\varsigma\Delta_\parallel)\eta_{\kappa,\mathrm{H}},\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}=-\langle(\mathfrak{g}\varrho-\varsigma\Delta_\parallel)\eta_{\kappa,\mathrm{H}},\partial_1\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}=0 \tag{5.1.16}$$

并（运用命题 B.9 的分部积分技巧）

$$\int_\Omega-(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})\nabla\cdot(\varrho u)=\int_\Omega\frac{\nabla\cdot v_{w_0}}{2}(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})^2+\nabla\cdot(v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}})(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2. \tag{5.1.17}$$

我们首先通过展开来处理 $\mathbf{I}_1$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1=\int_\Omega\frac{\nabla\cdot v_{w_0}}{2}(q+\mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}})^2+\mathfrak{g}\int_\Omega\nabla\cdot v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}})(\eta_{\kappa,\mathrm{H}}-\eta_{1,\mathrm{H}})\\+\int_\Omega\frac{\mathfrak{g}^2\nabla\cdot v_{w_0}}{2}(\eta_{\kappa,\mathrm{H}}-\eta_{1,\mathrm{H}})^2=\mathbf{I}_{1,1}+\mathbf{I}_{1,2}+\mathbf{I}_{1,3}.\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

根据引理 3.19 的第三项和命题 B.1，我们可以进行估计

$$|\mathbf{I}_{1,1}|\leqslant\|\nabla\cdot v_{w_0}\|_{L^\infty}\|q+\mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}}\|_{L^2}^2\lesssim\rho(\|q\|_{L^2}^2+\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2) \tag{5.1.19}$$

and

$$|\mathbf{I}_{1,2}| \lesssim \|\nabla \cdot v_{w_0}\|_{L^2} \|q + \mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}}\|_{L^2} \|\eta_{\kappa,\mathrm{H}} - \eta_{1,\mathrm{H}}\|_{L^\infty} \lesssim \rho(\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2). \tag{5.1.20}$$

对于$\mathbf{I}^{1,3,}$，我们则使用引理 5.1：

$$|\mathbf{I}_{1,3}| \lesssim \rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2. \tag{5.1.21}$$

综合前面三个估计，我们推得

$$|\mathbf{I}_1| \lesssim \rho(\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2). \tag{5.1.22}$$

现在我们转而关注项 $\mathbf{I}_2$。同样，我们先将其分解为

$$\mathbf{I}_2 = \int_\Omega \nabla \cdot (v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}})(q + \mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}}) + \mathfrak{g}\int_\Omega \nabla \cdot (v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}})(\eta_{\kappa,\mathrm{H}} - \eta_{1,\mathrm{H}}) = \mathbf{I}_{2,1} + \mathbf{I}_{2,2}. \tag{5.1.23}$$

$\mathbf{I}^{2,1}$ 利用引理 3.19 的第四项处理：

$$|\mathbf{I}_{2,1}| \leqslant \|\nabla \cdot (v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}})\|_{L^2} \|q + \mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}}\|_{L^2} \lesssim \|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0}(\|q\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}). \tag{5.1.24}$$

对于$\mathbf{I}^{2,2}$，我们则进行分部积分并使用富比尼-托内利定理：

$$|\mathbf{I}_{2,2}| = \mathfrak{g}\Big| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big((\nabla_\parallel, 0) \cdot \int_0^b v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\Big)(\eta_{\kappa,\mathrm{H}} - \eta_{1,\mathrm{H}})\Big| \lesssim \Big[(\nabla_\parallel, 0) \cdot \int_0^b v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\Big]_{\dot{H}^{-1}} [\eta_{\kappa,\mathrm{H}} - \eta_{1,\mathrm{H}}]_{\dot{H}^1}. \tag{5.1.25}$$

通过分解 $v_{w_0} = \varrho'\mathfrak{g}^{-1}e_1 + v_{q_0}^{(1)}, u_0, \eta_0 + v_{\eta_0}^{(2)}$（见 (3.4.17)），并按照引理 5.1 的证明进行论证，我们得到上界

$$\Big[(\nabla_\parallel, 0) \cdot \int_0^b v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\Big]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{5.1.26}$$

因此,

$$|\mathbf{I}_2| \lesssim \|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0}(\|q\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}), \tag{5.1.27}$$

结合此结果与$\mathbf{I}_1$ 估计，我们可推出

$$\Big|\int_\Omega -(q + \mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})\nabla \cdot (\varrho u)\Big| \lesssim \rho(\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2) + \|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0}(\|q\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}). \tag{5.1.28}$$

有了 (5.1.28) 和 (5.1.16)，我们回到 (5.1.14)，得到不等式 ity

$$\int_\Omega \gamma_0\Big(\frac{\mu(\varrho)}{2}|\mathbb{D}^0 u|^2 + \lambda(\varrho)(\nabla \cdot u)^2\Big) \lesssim \|F - \mathscr{I}(0,0,\eta_{\kappa,\mathrm{L}})\|_{({}_0H^1)^*}\|u\|_{H^1} + \rho(\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2) + \|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0}(\|q\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}). \tag{5.1.29}$$

这对所有 $\kappa \in (0,1)$ 都成立，且隐含常数与 κ 无关。因此，我们可以令 $\kappa \to 0$，并利用以下事实：根据控制收敛定理以及各向异性 Sobolev 空间上范数的定义 (B.1.2)，$\|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0} \to 0$，从而得到上界

$$\gamma_0 \int_\Omega \frac{\mu(\varrho)}{2}|\mathbb{D}^0 u|^2 + \lambda(\varrho)(\nabla \cdot u)^2 \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*}\|u\|_{H^1} + \rho(\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2). \tag{5.1.30}$$

回想一下，关于 $\mu, \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ 的假设为 $\mu > 0$，且当 $n = 2$ 时 $\lambda > 0$；而当 $n \geqslant 3$ 时，$\mu > 0$ 且 $\lambda \geqslant 0$。因此，结合 (5.1.30)、包含关系 $\gamma_0 \in I \Subset \mathbb{R}^+$，以及在 $n \geqslant 3$ 情形下的命题 A.4 或在 $n = 2$ 情形下的命题 A.3，即可推出上界 (5.1.11)。

步骤 3：$\nabla_\parallel \eta$ 的先验估计。接下来，我们声称可以得到以下先验估计

$$\|\nabla_\parallel \eta\|_{H^{1/2}} \lesssim \|u\|_{H^1} + \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.1.31}$$

我们首先考虑表面张力为正的情形：$\varsigma > 0$。为证明这一点，我们将利用来自推论 C.4 的算子 $\mathcal{B}_2$。回顾上一步，对于 $\kappa \in (0, 1)$，我们有在 (5.1.12) 中定义的分解 $\eta = \eta_{\kappa,\ \mathrm{L}} + \eta_{\kappa,\ \mathrm{H}}$。我们用通过以下方式定义的 $w_\kappa \in {}_0H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 检验恒等式 (5.1.13)：

$$w_\kappa = -\varrho^{-1}\mathcal{B}_2(\varrho(b)\langle\nabla_\parallel\rangle^{-1}\Delta_\parallel \eta_{\kappa,\mathrm{H}}), \tag{5.1.32}$$

注意到 $\nabla\cdot(\varrho w_\kappa)=0$，$\mathrm{Tr}_\Sigma(w_\kappa\cdot e_n)=-\langle\nabla_\parallel\rangle^{-1}\Delta_\parallel\eta_{\kappa,\mathrm{H}}$，并且

$$\|w_\kappa\|_{H^1}\lesssim\|\langle\nabla_\parallel\rangle^{-1}\Delta_\parallel\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\|_{\dot H^{-1}\cap H^{1/2}}\asymp\|\langle\nabla_\parallel\rangle^{1/2}|\nabla_\parallel|\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\|_{L^2}\lesssim\|\nabla_\parallel\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\|_{H^{1/2}}. \tag{5.1.33}$$

结果就是恒等式

$$\begin{aligned}\langle\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta_{\kappa,\mathrm{H}}),w_\kappa\rangle=\int_\Omega\gamma_0(\gamma_0\varrho u\otimes e_1+\mathbb{S}^\varrho u):\nabla w_\kappa+\mathfrak{g}\varrho\nabla\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\cdot w_\kappa\\+\langle(\mathfrak{g}\varrho-\varsigma\Delta_\parallel)\eta_{\kappa,\mathrm{H}},-\langle\nabla_\parallel\rangle^{-1}\Delta_\parallel\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}.\end{aligned} \tag{5.1.34}$$

As

$$\|\nabla_\parallel\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\|_{H^{1/2}}^2\lesssim\langle(\mathfrak{g}\varrho-\varsigma\Delta_\parallel)\eta_{\kappa,\mathrm{H}},-\langle\nabla_\parallel\rangle^{-1}\Delta_\parallel\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}, \tag{5.1.35}$$

我们得到估计

$$\|\nabla_\parallel\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\|_{H^{1/2}}^2\lesssim(\|u\|_{H^1}+\|F\|_{({}_0H^1)^*}+\|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^{3/2}})\|w_\kappa\|_{H^1}. \tag{5.1.36}$$

于是，令 $\kappa\to0$，结合 (5.1.33) 即可由此推出 (5.1.31)；这是成立的，因为隐含常数与 κ 无关。这就证明了正表面张力情形下的结论。

现在考虑表面张力消失的情形，即 $\varsigma=0$，维数为 $n=2$。为此，我们只需考察 u 满足的边界条件，即 $\partial_1\eta=-\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)$。由于 $n=2$ and η 定义在 $\Sigma\simeq\mathbb{R}$上，我们有 $\partial_1\eta=\nabla_\parallel\eta$。因此，我们有 $\|\nabla_\parallel\eta\|_{H^{1/2}}=\|\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)\|_{H^{1/2}}\lesssim\|u\|_{H^1}$，故 (5.1.31) 成立。

步骤 4：关于 q 的先验估计。我们声称有如下先验估计

$$\|q\|_{L^2}\lesssim\|u\|_{H^1}+\|\nabla_\parallel\eta\|_{H^{1/2}}+\|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.1.37}$$

为证明这一点，我们先取 $w=\varrho^{-1}\mathcal{B}q\in{}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$，其中 $\mathcal{B}$ 是在推论 C.3 中构造的。根据构造，我们有 $\nabla\cdot(\varrho w)=q$，并且

$$\|w\|_{H^1}\lesssim\|q\|_{L^2}. \tag{5.1.38}$$

${}_{\gamma_0}$接着，我们对恒等式 $\mathscr{I}(q,\ u,\ \eta)=F$ 用 w 进行检验，得到

$$\int_\Omega\gamma_0(\gamma_0\varrho u\otimes e_1+\mathbb{S}^\varrho u):\nabla w+\mathfrak{g}\varrho\nabla\eta\cdot w-q^2-\varsigma\langle\Delta_\parallel\eta,\mathrm{Tr}_\Sigma(w\cdot e_n)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}=\langle F,w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}. \tag{5.1.39}$$

估计式 (5.1.37) 可由此、(5.1.38) 以及前述步骤中得到的估计直接推出。这就证明了该结论。

步骤 5：关于 $\partial_1\eta$ 的先验估计。接下来我们声称

$$[\partial_1\eta]_{\dot H^{-1}}\lesssim\|u\|_{L^2}+\|q\|_{L^2}+\rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{5.1.40}$$

首先注意到，利用引理 3.19 中对 v_{w_0} 的分解，连续性方程等价地可写为

$$0=\nabla\cdot(\varrho u+v_{w_0}q)+\mathfrak{g}\nabla\cdot(v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\eta)+\mathfrak{g}\partial_1(v^{(2)}_{\eta_0}\cdot e_1\eta)+\varrho'\partial_1\eta. \tag{5.1.41}$$

我们沿 n^{th} 坐标在 $(0,\ b)$ 上对其积分；回顾命题 B.10 中的恒等式 $\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)+\partial_1\eta=0$以及 (B.2.11) 后，可得等式

$$\varrho(0)\partial_1\eta=(\nabla_\parallel,0)\cdot\int_0^b(\varrho u+v_{w_0}q+\mathfrak{g}v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\eta)+\mathfrak{g}\partial_1\Big(\eta\Big(\int_0^b v^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,y)\cdot e_1\,\mathrm{d}y\Big)\Big). \tag{5.1.42}$$

因此，我们可以使用引理 3.19 中的估计、$\int_0^b v^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,y)\,\mathrm{d}y$ 具有 r_{n-1} 作为带限的这一事实、命题 B.2 中各向异性 Sobolev 空间的代数性质，以及

命题 B.10 中的估计 (B.2.12) 来给出上界

$$\varrho(0)[\partial_1\eta]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|\varrho + v_{w_0}q + \mathfrak{g}v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\eta\|_{L^2} + \mathfrak{g}\Big\|\Big(\int_0^b v^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big)\eta\Big\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim \|u\|_{L^2} + \|q\|_{L^2} + \rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{5.1.43}$$

由于 $\varrho(0) > 0$，这就证明了该断言。

步骤 6：结论。现在我们综合前面各步骤的断言，以得出结论。首先，将 (5.1.11) 中的上界代入 (5.1.31) 的右端，得到不等式

$$\|\nabla_{\|}\eta\|_{H^{1/2}} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*} + \sqrt{\rho}(\|q\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^{3/2}}). \tag{5.1.44}$$

其次，将 (5.1.44) 和 (5.1.11) 代入 (5.1.37) 的右端，得到

$$\|q\|_{L^2} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*} + \sqrt{\rho}(\|q\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^{3/2}}). \tag{5.1.45}$$

现在，注意到 (B.1.25)，我们将估计 (5.1.11)、(5.1.40)、(5.1.44) 和 (5.1.45) 相加，然后在右端使用 (5.1.11) 和 (5.1.45)；由此得到的估计为

$$\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{-1}} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*} + \sqrt{\rho}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{-1}}. \tag{5.1.46}$$

我们将 $\rho_{\mathrm{weak}} \in \mathbb{R}^+$ 选得足够小，以便在取 $\rho \leqslant \rho_{\mathrm{weak}}$ 时，可以将 $\mathbb{X}_{-1}$ 项吸收到左端，从而得到简洁的先验估计

$$\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{-1}} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.1.47}$$

只需根据数据估计 $L^2(\Omega)$-范数中的 $\nabla\cdot(v_{w_0}q)$。这很简单，因为我们可以通过 $-\nabla\cdot(v_{w_0}q) = \nabla\cdot(\varrho u) + \mathfrak{g}\nabla\cdot(v_{w_0}\eta)$ 在连续性方程中将其单独分离出来，然后注意到右端受 $\|q,\ u,\ \eta\|_{\mathbb{X}_{-1}}$ 控制（特别参见引理 3.19 的第四项）。□

在给出下一个先验估计结果之前，我们需要一个来自正则化稳态输运方程理论的引理。

引理 5.3（正则化定常输运引理）。设 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者在定理 *3.17* 中定义，$w_0 = (q_0,\ u_0,\ \eta_0)$ 如引理 *3.19* 所述，$m,\ N \in \mathbb{N}^+,\ \tau \in [0,1],\ \varphi \in H^{2m}(\Omega)$，且 $\psi \in L^2(\Omega)$。假设

$$\begin{cases} N^{-1}L_m\varphi + \tau\nabla\cdot(v_{w_0}\varphi) = \psi & \text{in } \Omega, \\ \partial_n^m\varphi = \cdots = \partial_n^{2m-1}\varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1.48}$$

其中 L_m 定义于 (3.5.6)。若 $N \gtrsim \langle\tau\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_m}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor}$，则有如下先验估计

$$\|\varphi\|_{H^{2m}} \lesssim N\|\varphi,\psi\|_{L^2\times L^2}, \tag{5.1.49}$$

其中隐含常数仅依赖于物理参数、维数、m和 ρ_{WD}。

证明。验证这一结果的大部分工作已在第 4 节中完成。我们应用命题 4.5，其中 $\Lambda = 1$ 以及分解向量场 $X = X_0 + X_1$，这里 $X = \tau v_{w_0}, X_0 = \tau v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}$和 $X_1 = \tau(v^{(2)}_{\eta_0} + \mathfrak{g}^{-1}\varrho' e_1)$，且 $v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}$和 $v^{(2)}_{\eta_0}$与引理 3.19 中的定义相同。随后，估计 (5.1.49) 可由引理 3.19 中所述向量场 v_{q_0,u_0,η_0} 的性质推出，即：对于$s \in \{1+\lfloor n/2\rfloor, m\}$，有 $\|DX_0, DX_1\|_{H^s\times W^{s,\infty}} \leqslant \|X_0,X_1\|_{H^{1+s}\times W^{1+s,\infty}} \lesssim \tau\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}\rangle$。□

接下来的结果研究正则化方程 (5.0.2) 的弱解估计。回顾一下，空间 $\mathbb{X}_m^{-1}{}_{,N}$、范数 $\|\cdot\|_{q_0,\mathbb{X}_m^{-1}{}_{,N}}^{u_0\ \eta_0}$ 以及映射 $\mathscr{J}_m^{\tau}{}_{,N}^{w_0\ \gamma_0}$ 分别定义于 (3.5.7)、(3.5.9) 和 (3.5.16) 中。

命题 *5.4*（正则化弱解的先验估计）。设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者来自定理 *3.17*，$w_0=(q_0,u_0,\eta_0)$ 如引理 *3.19* 所述，且 $\gamma_0\in I$，其中 $I\Subset\mathbb{R}^+$ 是某个区间。假设 $m,N\in\mathbb{N}^+$, $\tau\in[0,1]$, $(q,u,\eta)\in\mathbb{X}_m^{-1},_N$，并且 $(g,F)\in\mathbb{Y}^{-1}$ 满足方程 $\mathscr{J}_m^{w_0\,\gamma_0\,\tau},,_N(q,u,\eta)=(g,F)$。存在一个 $\rho_{\mathrm{weak,reg}}\in\mathbb{R}^+$，使得如果

$$0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{weak,reg}}\ \ and\ N\gtrsim\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_m}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor},\tag{5.1.50}$$

于是我们有先验估计

$$\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}_{m,N}^{-1}}}\lesssim\|g,F\|_{\mathbb{Y}^{-1}}.\tag{5.1.51}$$

隐含常数以及 $\rho_{\mathrm{weak,\ reg}}$ 取决于维数、物理参数、m、ρ_{WD}和 I。

证明。我们采用与命题 5.2 证明中大致相同的方法，分为几个步骤，其结构与那里所用论证的结构相对应。

步骤 1：化归到 $g=0$ 的情形。我们声称，只需在特殊情形 $g=0$ 下证明该结论即可。事实上，命题 5.2 第一步中所用的完全相同的论证也能证明此处的这一断言。在接下来的步骤中，我们将证明特殊情形 $g=0$ 下的结论。

步骤 2：关于 u 的先验估计。我们声称有如下先验估计

$$\|u\|_{H^1}^2\lesssim\|F\|_{({}_0H^1)^*}^2+\rho(\|q\|_{L^2}^2+\|\eta\|_{\mathcal{H}^{3/2}}^2).\tag{5.1.52}$$

为证明该结论，我们再次使用（5.1.12）的傅里叶空间分解，从而再次得到（5.1.13）。然后，我们用 u 对（5.1.13）进行检验，按照命题 5.2 的证明得到（5.1.14）。不过需要注意的是，在当前背景下，我们有如下恒等式

$$\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)=-\partial_1\eta+N^{-1}(-\Delta_\parallel)^{m-1/4}\eta\tag{5.1.53}$$

and

$$-\nabla\cdot(\varrho u)=\tau\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))+N^{-1}L_m(q+\mathfrak{g}\eta),\tag{5.1.54}$$

这些恒等式与（5.1.15）略有不同。将（5.1.53）和（5.1.54）代入（5.1.14），并进行分部积分，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\gamma_0\Big(\frac{\mu(\varrho)}{2}|\mathbb{D}^0u|^2+\lambda(\varrho)(\nabla\cdot u)^2\Big)+\frac{\tau\nabla\cdot v_{w_0}}{2}(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})^2+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^n(\partial_j^m(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}}))^2\\+\mathfrak{g}\int_\Omega(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})\Big(\tau\nabla\cdot(v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}})+\frac{1}{N}L_{m,\parallel}\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\Big)+\frac{1}{2}\|(\mathfrak{g}\varrho-\varsigma\Delta_\parallel)^{1/2}(\Delta_\parallel)^{m/2-1/8}\eta_{\kappa,\mathrm{H}}\|_{L^2}^2\\=\langle F-\mathscr{J}(0,0,\eta_{\kappa,\mathrm{L}}),u\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}.\end{aligned}\tag{5.1.55}$$

结合（5.1.55）、命题 A.4 和 A.3 中的 Korn不等式、命题 5.2 第二步的结尾，以及 $\tau\in[0,1]$ 这一事实，我们得到估计

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1}^2\lesssim\Big|\int_\Omega\frac{\nabla\cdot v_{w_0}}{2}(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})^2\Big|+\mathfrak{g}\Big|\int_\Omega(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})\Big(\tau\nabla\cdot(v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}})+\frac{1}{N}L_{m,\parallel}\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\Big)\Big|\\+(\|F\|_{({}_0H^1)^*}+\|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^{3/2}})\|u\|_{H^1}=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3.\end{aligned}\tag{5.1.56}$$

项 $\mathbf{I}_1$ 与（5.1.17）中出现的项 $\mathbf{I}_1$ 完全相同，因此我们可以采用命题 5.2 证明第二步中使用的相同论证，得到估计

$$\mathbf{I}_1\lesssim\rho(\|q\|_{L^2}^2+\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2).\tag{5.1.57}$$

对于项 $\mathbf{I}_2$，我们给出上界

$$\mathbf{I}_2\leqslant\mathfrak{g}\Big|\int_\Omega(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})\tau\nabla\cdot(v_{w_0}\eta_{\kappa,\mathrm{L}})\Big|+\frac{\mathfrak{g}}{N}\Big|\int_\Omega(q+\mathfrak{g}\eta_{\kappa,\mathrm{H}})L_{m,\parallel}\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\Big|=\mathbf{I}_{2,1}+\mathbf{I}_{2,2}.\tag{5.1.58}$$

按照 (5.1.23)–(5.1.27) 中的论证，我们得到

$$\mathbf{I}_{2,1} \lesssim \|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0}(\|q\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}). \tag{5.1.59}$$

对于剩余部分，我们利用 $\eta_{\kappa,\ \mathrm{L}}$ 与 $\eta_{\kappa,\ \mathrm{H}}$ 具有不相交的傅里叶支撑这一事实，并结合 (B.1.25) 得到

$$\mathbf{I}_{2,2} = \frac{g}{N}\Big|\int_\Omega q L_{m,\|}\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\Big| \lesssim \frac{1}{N}\|q\|_{L^2}\|L_{m,\|}\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{L^2}. \lesssim \frac{1}{N}\|q\|_{L^2}\|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{5.1.60}$$

最后，我们将 (5.1.57)、(5.1.59) 和 (5.1.60) 代入 (5.1.56)，然后对 $\mathbf{I}_3$ 使用柯西不等式，从而得到

$$\|u\|_{H^1}^2 \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*}^2 + \rho(\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}^2) + \|\eta_{\kappa,\mathrm{L}}\|_{\mathcal{H}^0}(\|q\|_{L^2} + \|\eta\|_{\mathcal{H}^0}). \tag{5.1.61}$$

隐含常数与 κ 无关，因此我们可以令 $\kappa \to 0$，由此得到 (5.1.52)。命题得证。

步骤 3：关于 $\nabla_\| \eta$ 的先验估计。我们声称有如下先验估计

$$\|\nabla_\|\eta\|_{H^{1/2}} \lesssim \|u\|_{H^1} + \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.1.62}$$

事实上，该命题的证明与命题 5.2 证明中第三步的命题完全相同。

步骤 4：q 的先验估计。我们声称可以得到如下先验估计

$$\|q\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{H^1} + \|\nabla_\|\eta\|_{H^{1/2}} + \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.1.63}$$

同样，这可用命题 5.2 证明中的第四步完全相同的方法证明。**步骤 5**：η 和 q 的高阶范数先验界。接下来我们声称可以得到如下界

$$\|\eta_{1,\mathrm{H}}\|_{H^{2m}} + \|q\|_{H^{2m}} \lesssim N(\|u\|_{H^1} + \|q\|_{L^2} + \|\nabla_\|\eta\|_{H^{1/2}} + \rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}). \tag{5.1.64}$$

为此，我们首先改写方程

$$\nabla\cdot(\varrho u) + \tau\nabla\cdot(v_{w_0}(q + \mathfrak{g}\eta)) + N^{-1}L_m(q + \mathfrak{g}\eta) = 0 \tag{5.1.65}$$

借助关于 $\kappa = 1$ 的分解 (5.1.12)：

$$N^{-1}L_m(q + \mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}}) + \tau\nabla\cdot(v_{w_0}(q + \mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}}) = -\nabla\cdot(\varrho u) - \mathfrak{g}\tau\nabla\cdot(v_{w_0}\eta_{1,\mathrm{L}}) - \mathfrak{g}N^{-1}L_{m,\|}\eta_{1,\mathrm{L}}. \tag{5.1.66}$$

由于 $\partial_n^m(q + \mathfrak{g}\eta_{1,\ \mathrm{H}}) = \cdots = \partial_n^{2m-1}(q + \mathfrak{g}\eta_{1,\ \mathrm{H}}) = 0$，我们可以应用引理 5.3，前提是 $N \gtrsim \langle\|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_m}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor}$，而这可以不失一般性地假设；由此得到如下界

$$\|q + \mathfrak{g}\eta_{1,\mathrm{H}}\|_{H^{2m}} \lesssim N(\|q\|_{L^2} + \|u\|_{H^1} + \rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0} + \|\nabla_\|\eta\|_{H^{1/2}}). \tag{5.1.67}$$

接下来，我们通过法向迹边界条件得到 $\eta_{1,\mathrm{H}}$ 在 $H^{2m}(\Sigma)$ 中的一个上界。事实上，我们用 $N^{-1}(-\Delta_\|)^{m+1/4}\eta_{1,\mathrm{H}}$ 测试方程 (5.1.53)，可得

$$N^{-2}\|(-\Delta_\|)^m\eta_{1,\mathrm{H}}\|_{L^2}^2 \leqslant N^{-1}\|\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)\|_{H^{1/2}}\|(-\Delta_\|)^{m+1/4}\eta_{1,\mathrm{H}}\|_{H^{-1/2}}, \tag{5.1.68}$$

从而

$$\|\eta_{1,\mathrm{H}}\|_{H^{2m}} \lesssim N\|u\|_{H^1}. \tag{5.1.69}$$

结合 (5.1.67) 和 (5.1.69)，即可得到 (5.1.64)。命题得证。

步骤 6：关于 $\partial_1\eta$ 的先验界。我们声称有如下先验估计

$$[\partial_1\eta]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|u\|_{L^2} + \|q\|_{L^2} + N^{-1}\|q\|_{H^{2m}} + \rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{5.1.70}$$

正如命题 5.2 证明的第五步中所做的那样，我们沿 n^{th} 坐标从 0 到 b 对方程 (5.1.54) 进行积分，然后分离出非小的 $\partial_1\eta$ 项：

$$((1-\tau)\varrho(b)+\tau\varrho(0))\partial_1\eta=(\nabla_{\|},0)\cdot\int_0^b(\varrho u+\tau v_{w_0}q+\tau\mathfrak{g}v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\eta)+\tau\mathfrak{g}\partial_1\Big(\eta\int_0^b v^{(2)}_{\eta_0}(\cdot,y)\cdot e_1\,\mathrm{d}y\Big)$$
$$+\frac{1}{N}L_{m,\|}\int_0^b(q+\mathfrak{g}\eta)+\frac{\varrho(b)}{N}(-\Delta_{\|})^{m-1/4}\eta=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3+\mathbf{I}_4. \quad (5.1.71)$$

固定 $\kappa\in(0,1)$，并令 $\eta_\kappa=(\Pi^{1/\kappa}{}_{\mathrm{L}}-\Pi^{\kappa}_{\mathrm{L}})\eta$。我们取 (5.1.71) 与 $|\nabla_{\|}|^{-2}\partial_1\eta_\kappa$ 的 L^2-内积。涉及 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的项可通过柯西-施瓦茨不等式进行估计

$$\langle\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2,|\nabla_{\|}|^{-2}\partial_1\eta_\kappa\rangle_{L^2,L^2}\lesssim[\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2]_{\dot H^{-1}}[\partial_1\eta_\kappa]_{\dot H^{-1}}, \quad (5.1.72)$$

但此时，命题 5.2 证明中第五步所用的论证表明

$$[\mathbf{I}_1]_{\dot H^{-1}}+[\mathbf{I}_2]_{\dot H^{-1}}\lesssim\|u\|_{L^2}+\|q\|_{L^2}+\rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}, \quad (5.1.73)$$

so

$$\langle\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2,|\nabla_{\|}|^{-2}\partial_1\eta_\kappa\rangle_{L^2,L^2}\lesssim(\|u\|_{L^2}+\|q\|_{L^2}+\rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0})\,[\partial_1\eta_\kappa]_{\dot H^{-1}}. \quad (5.1.74)$$

另一方面，对于涉及 $\mathbf{I}_3$ 的项，我们有

$$\langle\mathbf{I}_3,|\nabla_{\|}|^{-2}\partial_1\eta_\kappa\rangle_{L^2,L^2}=\frac{1}{N}\Big\langle|\nabla_{\|}|^{-1}L_{m,\|}\int_0^b q,|\nabla_{\|}|\partial_1\eta_\kappa\Big\rangle_{L^2,L^2}\lesssim\frac{1}{N}\|q\|_{H^{2m-1}}[\eta_\kappa]_{\dot H^{-1}}. \quad (5.1.75)$$

而对于 $\mathbf{I}_4$ 项，我们计算得 $\langle\mathbf{I}_4,|\nabla_{\|}|^{-2}\partial_1\eta_\kappa\rangle_{L^2,\,L^2}=0$。综上，这些结果结合起来表明

$$[\partial_1\eta_\kappa]_{\dot H^{-1}}\lesssim\|u\|_{L^2}+\|q\|_{L^2}+N^{-1}\|q\|_{H^{2m}}+\rho\|\eta\|_{\mathcal{H}^0}, \quad (5.1.76)$$

由于隐含常数与 κ 无关，我们可以令 $\kappa\to0$ 趋于极限，从而得到 (5.1.70)。命题得证。

第 7 步：结论。最后，结合前面各步得到的界，并令 ρ 足够小以便吸收相关项，我们便可推出所需的估计 (5.1.51)，这与命题 5.2 第六步的证明完全相同。□

5.2. **正则化问题解的存在性**。在本小节中，我们证明正则化问题 (5.0.2) 的弱解存在，并随后迅速推出定性正则性。首先给出弱解存在性的主要结果。

定理 5.5 (正则化弱解的存在性)。设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者来自定理 *3.17*，$w_0=(q_0,\ u_0,\ \eta_0)$ 如引理 *3.19* 中所述，$m,\ N\in\mathbb{N}^+$ 满足 $m\geqslant2$，$\tau\in[0,1]$，$(g,\ F)\in\mathbb{Y}^{-1}$，且 $\gamma_0\in I$ 对应某个区间 $I\Subset\mathbb{R}^+$。若满足 (5.1.50)，则存在唯一的 $(q,\ u,\ \eta)\in\mathbb{X}^{-1}_{m,\,N}$ 使得

$$\mathscr{J}^{\tau,\,w_0,\gamma_0}_{m,N}(q,u,\eta)=(g,F). \quad (5.2.1)$$

证明。从泛函分析的角度来看，我们旨在证明，对于每个 $\tau\in[0,1]$，算子 $\mathscr{J}^{\tau,\,w_0,\,\gamma_0}_{m,\,N}\in\mathcal{L}(\mathbb{X}^{-1}_{m,\,N};\mathbb{Y}^{-1})$ 都是同构；根据引理 3.23，该算子定义良好。我们将证明分为几个步骤。

步骤 1：化归为证明存在性，其中 $g=0$ 和 $\tau=0$。我们将通过连续性方法实现化归至 $\tau=0$（例如，参见 Gilbarg 和 Trudinger 中的定理 5.2 [35]）。事实上，算子 $[0,1]\ni\tau\mapsto\mathscr{J}^{\tau,\,w_0}_{m,\,N}\in\mathcal{L}(\mathbb{X}^{-1}_{m,N};\mathbb{Y}^{-1})$ 的凸同伦满足 τ-一致先验估计$_{w_0,\gamma_0}$，这得益于命题 5.4。因此，连续性方法保证$\mathscr{J}^{\tau}_{m,N}$ 是

w_0,γ_0对每个 $\tau\in[0,1]$ 都是同构，当且仅当 $\mathscr{I}^0_{m,N}$是同构，因此我们化归为证明$w_0,\gamma_0\mathscr{I}^0_{m,N}$ 是同构。

$w_0,\ \gamma_0$接下来，我们注意到命题 5.4 的先验估计保证了 $\mathscr{I}^0_{m,\ N}$ 是单射，因此借助有界逆定理，我们进一步将问题归结为证明该映射是满射。进而，我们将问题归结为证明方程 (5.2.1) 存在满足 $g=0$ 且 $\tau=0$ 的解，这可借助算子 $\mathcal{B}_0$实现，恰如命题 5.2 证明中的第一步。

我们现在已经证明，只需确立方程 (5.2.1) 存在满足 $g=0$和 $\tau=0$的解即可。因此，在证明余下部分中，我们令 $g=0$ 和 $\tau=0$。

步骤 2：二参数族近似解的存在性。我们引入逼近参数 M，$K\in\mathbb{N}^+$ 并固定数据 $F\in({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*$。接着，我们声称存在一个集合

$$\{(q_{M,K},u_{M,K},\eta_{M,K})\}_{M,K\in\mathbb{N}^+}\subset H^{2m}(\Omega)\times {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\times H^{2m}(\Sigma) \tag{5.2.2}$$

满足

$$\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q_{M,K},u_{M,K},\eta_{M,K})=F, \tag{5.2.3}$$

$$\begin{cases} N^{-1}\big(K^{-1}+L_m\big)(q_{M,K}+\mathfrak{g}\eta_{M,K})=-\nabla\cdot(\varrho u_{M,K}) & \text{在 }\Omega,\\ \partial_n^m(q_{M,K}+\mathfrak{g}\eta_{M,K})=\cdots=\partial_n^{2m-1}(q_{M,K}+\mathfrak{g}\eta_{M,K})=0 & \text{on }\partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.4}$$

and

$$\mathrm{Tr}_\Sigma(u_{M,K}\cdot e_n)+\partial_1\eta_{M,K}=N^{-1}(M^{-1}+(-\Delta_\parallel)^{m-1/4})\eta_{M,K}. \tag{5.2.5}$$

构造这些近似解的总体思路如下。首先，我们注意到，方程 (5.2.5) 将 $\eta_{M,\ K}$ 确定为 $u_{M,\ K}$ 的函数。接着，方程 (5.2.4) 将 $q_{M,\ K}$ 确定为 $u_{M,\ K}$ 和 $\eta_{M,\ K}$ 的函数。这样，我们便可将 (5.2.3) 改写为一个仅涉及 F 和 $u_{M,\ K}$ 的方程，而事实证明，利用 Lax–Milgram 引理即可求解该方程。

为证明这一断言，我们先回顾空间 ${}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 由 (1.7.3) 定义，并定义有界线性映射 $\mathrm{p}_K\colon {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\to H^{2m}(\Omega)$ 和 $\eta_M\colon {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\to H^{2m}(\Sigma)$，如下所示

$$\mathrm{p}_K(u)=-N(K^{-1}+L_m)^{-1}(\nabla\cdot(\varrho u))\text{ and }\eta_M(u)=N(M^{-1}+(-\Delta_\parallel)^{m-1/4}-N\partial_1)^{-1}\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n). \tag{5.2.6}$$

根据引理 C.9 中的符号求逆结果，映射 η_M 定义良好且有界；而根据引理 C.8，p_{K} 定义良好且有界。利用这些映射，我们可以定义双线性型 $B_{M,\ K}\colon {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\times {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$，如下

$$B_{M,K}(u,w)=\langle\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(\mathrm{p}_K(u)-\mathfrak{g}\eta_M(u),u,\eta_M(u)),w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}. \tag{5.2.7}$$

根据分部积分以及 p_K 和 η_M 的定义，我们得到等价的表述

$$\begin{aligned} B_{M,K}(u,w)&=\int_\Omega\gamma_0(\gamma_0\varrho u\otimes e_1+\mathbb{S}^\varrho u):\nabla w-\mathrm{p}_K(u)\nabla\cdot(\varrho w)\\ &\qquad+\langle(\mathfrak{g}\varrho-\varsigma\Delta_\parallel)\eta_M(u),\mathrm{Tr}_\Sigma(w\cdot e_n)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}\\ &=\int_\Omega\gamma_0(\gamma_0\varrho u\otimes e_1+\mathbb{S}^\varrho u):\nabla w+\frac{1}{N}\int_\Omega\frac{1}{K}\mathrm{p}_K(u)\mathrm{p}_K(w)+\sum_{j=1}^n\partial_j^m\mathrm{p}_K(u)\partial_j^m\mathrm{p}_K(w)\\ &\quad+\langle(\mathfrak{g}\varrho-\varsigma\Delta_\parallel)\eta_M(u),-\partial_1\eta_M(w)+N^{-1}(M^{-1}+(-\Delta_\parallel)^{m-1/4})\eta_M(w)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

$B_{M,\ K}$ 的有界性很容易验证，但它也是强制的，因为根据反对称性，我们有

$$\int_\Omega\gamma_0^2\varrho u\otimes e_1:\nabla u=0, \tag{5.2.9}$$

根据正交性，我们有

$$\int_\Omega \mathbb{S}^\varrho u : \nabla u = \int_\Omega \frac{\mu(\varrho)}{2}|\mathbb{D}^0 u|^2 + \lambda(\varrho)(\nabla\cdot u)^2, \tag{5.2.10}$$

两边平方可得

$$\frac{1}{N}\int_\Omega \frac{1}{K}\mathrm{p}_K(u)^2 + \sum_{j=1}^n (\partial_j^m \mathrm{p}_K(u))^2 \geqslant 0, \tag{5.2.11}$$

再次根据反对称性和对称性可得

$$\begin{aligned}\langle(\mathfrak{g}\varrho - \varsigma\Delta_\parallel)\eta_M(u), -\gamma\partial_1\eta_M(w) + N^{-1}(M^{-1} + (-\Delta_\parallel)^{m-1/4})\eta_M(w)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} \\ = \langle(\mathfrak{g}\varrho - \varsigma\Delta_\parallel)\eta_M(u), N^{-1}(M^{-1} + (-\Delta_\parallel)^{m-1/4})\eta_M(u)\rangle \geqslant 0,\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

结合 命题 A.4 和 A.3 中的 Korn 不等式，便可推出强制性估计 e

$$B_{M,K}(u,u) \geqslant \gamma_0 \int_\Omega \frac{\mu(\varrho)}{2}|\mathbb{D}^0 u|^2 + \lambda(\varrho)(\nabla\cdot u)^2 \gtrsim \|u\|_{H^1}^2 . \tag{5.2.13}$$

回顾一下，我们对 $\mu,\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ 的条件是：若 $n=2$，则 $\mu,\lambda>0$；若 $n\geqslant 3$，则 $\mu>0, \lambda\geqslant 0$。Lax–Milgram 引理的假设（例如参见 Lax [58] 第 6 章定理 6）均已满足，因此我们可以得到 $u_{M,K} \in {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$，并具有如下性质：

$$B_{M,K}(u_{M,K}, w) = \langle F, w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1} \text{ for all } w \in {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n). \tag{5.2.14}$$

然后我们令 $\eta_{M,K} = \eta_K(u_{M,K}) \in H^{2m}(\Sigma)$，并令 $q_{M,K} = \mathrm{p}_K(u_{M,K}) - \mathfrak{g}\eta_M(u_{M,K}) \in H^{2m}(\Omega)$。根据构造，集合 $\{(q_{M,K}, u_{M,K}, \eta_{M,K})\}_{M,K\in\mathbb{N}^+}$ 满足所声称的包含关系，并满足 (5.2.3)、(5.2.4) 和 (5.2.5)。

步骤 3：二参数近似解族的估计。我们声称，近似解 (5.2.2) 满足与 K 无关的界

$$\|q_{M,K}, u_{M,K}, \eta_{M,K}\|_{H^{2m}\times H^1\times H^{2m}} \lesssim_{m,M,N} \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.2.15}$$

为证明这一结论，我们先在 (5.2.14) 中取 $w = u_{M,K}$，然后利用强制性不等式 (5.2.13) 得到如下控制

$$\sup_{M,K\in\mathbb{N}^+} \|u_{M,K}\|_{H^1} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*}, \tag{5.2.16}$$

其中隐含常数仅依赖于物理参数。接下来，我们利用映射 η_M 的连续性得到

$$\|\eta_{M,K}\|_{H^{2m}} \lesssim_M N\|u_{M,N}\|_{H^1} \lesssim_M N\|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.2.17}$$

要获得与 K 无关的 $q_{M,K}$ 上界，稍微复杂一些。我们用 $w = \varrho^{-1}\mathcal{B}(q_{M,K} + \mathfrak{g}\eta_{M,K}) \in {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 检验弱形式 (5.2.14)，其中 $\mathcal{B}$ 是推论 C.3 中构造的散度的右逆。由于 $\nabla\cdot(\varrho w) = q_{M,K} + \mathfrak{g}\eta_{M,K} = \mathrm{p}_K(u_{M,K})$，恒等式 $B_{M,K}(u_{M,K}, w) = \langle F, w\rangle$ 以及界 (5.2.16) 和 (5.2.17) 推出

$$\|q_{M,K} + \mathfrak{g}\eta_{M,K}\|_{L^2} \lesssim \|u_{M,K}\|_{H^1} + \|\eta_{M,K}\|_{H^{3/2}} + \|F\|_{({}_0H^1)^*} \lesssim_{N,M} \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.2.18}$$

为得到高正则性估计，我们将 (5.2.4) 中的第一个方程改写为 $(1+L_m)(q_{M,K} + \mathfrak{g}\eta_{M,K}) = K_K^{-1}(q_{M,K} + \mathfrak{g}\eta_{M,K}) - N\nabla\cdot(\varrho u_{M,K})$，然后对 $\kappa = 1$ 应用引理 C.8（以及已建立的与 K 无关的界），得到估计

$$\|q_{M,K} + \mathfrak{g}\eta_{M,K}\|_{H^{2m}} \lesssim_m (1-K^{-1})\|q_{M,K} + \mathfrak{g}\eta_{M,K}\|_{L^2} + N\|u_{M,K}\|_{H^1} \lesssim_{m,M,N} \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.2.19}$$

于是，(5.2.17) 和 (5.2.19) 推得 $\|q_{M,K}\|_{H^{2m}} \lesssim_{m,M,N} \|F\|_{({}_0H^1)^*}$，然后我们将其与 (5.2.16) 和 (5.2.17) 结合起来，完成对 (5.2.15) 的验证，从而完成该断言的证明。

步骤 4：近似解单参数族的存在性。对于前面各步中固定的数据$F \in ({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*$，我们断言存在一个序列

$$\{(q_M, u_M, \eta_M)\}_{M\in\mathbb{N}^+} \subset H^{2m}(\Omega) \times {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \times H^{2m}(\Sigma) \tag{5.2.20}$$

使得

$$\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q_M, u_M, \eta_M) = F, \tag{5.2.21}$$

$$\begin{cases} N^{-1}L_m(q_M + \mathfrak{g}\eta_M) = -\nabla\cdot(\varrho u_M) & \text{在 } \Omega, \\ \partial_n^m(q_M + \mathfrak{g}\eta_M) = \cdots = \partial_n^{2m-1}(q_M + \mathfrak{g}\eta_M) = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.22}$$

and

$$\mathrm{Tr}_\Sigma(u_M \cdot e_n) + \partial_1\eta_M = N^{-1}(M^{-1} + (-\Delta_\parallel)^{m-1/4})\eta_M. \tag{5.2.23}$$

该序列的存在性可通过在我们先前构造的集合中，对 K 参数取一个弱子列极限而得出。更确切地说，对于每个固定的 $M \in \mathbb{N}^+$，我们在前一步已证明，与 K 无关的界 (5.2.15) 成立。因此，由弱紧性可知，存在 $(q_M,\ u_M,\ \eta_M) \in H^{2m}(\Omega) \times {}_0H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^n) \times H^{2m}(\Sigma)$，它们是序列 $\{(q_{M,\ K},\ u_{M,\ K},\ \eta_{M,\ K})\}_{K\in\mathbb{N}^+}$ 的弱子列极限。对恒等式 (5.2.3)、(5.2.4) 和 (5.2.5) 应用常规的弱收敛论证，即可证明 (5.2.21)、(5.2.22) 和 (5.2.23) 成立。至此，构造完成，命题也得证。

步骤 5：对近似解的单参数族进行估计。我们声称，(5.2.20) 中的近似解单参数族满足与 M 无关的界

$$\|q_M, u_M, \eta_M\|_{H^{2m}\times H^1\times\mathcal{H}^{2m}} \lesssim_{m,N} \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.2.24}$$

为证明这一点，我们首先利用范数的弱序列下半连续性和 (5.2.16)，得到估计

$$\sup_{M\in\mathbb{N}^+} \|u_M\|_{H^1} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.2.25}$$

接下来，如命题 5.2 证明的第三步所示，在 $\varsigma > 0$ 的情况下，我们用函数 $w_M = -\varrho^{-1}\mathcal{B}_2(\varrho(b)\langle\nabla_\parallel\rangle^{-1}\Delta_\parallel\eta_M) \in {}_0H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$，检验 (5.2.21)，其中 $\mathcal{B}_2$ 在推论 C.4 中定义。由此得到恒等式

$$\langle F, w_M\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1} = \int_\Omega \gamma_0(\gamma_0\varrho u_M \otimes e_1 + \mathbb{S}^\varrho u_M) : \nabla w_M + \langle(\mathfrak{g}\varrho - \varsigma\Delta_\parallel)\eta_M, -\langle\nabla_\parallel\rangle^{-1}\Delta_\parallel\eta_M\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}, \tag{5.2.26}$$

进而得到估计

$$\|\nabla_\parallel\eta_M\|_{H^{1/2}}^2 \lesssim (\|F\|_{({}_0H^1)^*} + \|u_M\|_{H^1})\|w_M\|_{H^1} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*}\|w_M\|_{H^1}. \tag{5.2.27}$$

$\mathcal{B}_2$ 的连续性表明 $\|w_M\|_{H^1} \lesssim \|\nabla_\parallel\eta_M\|_{H^{1/2}}$，因此

$$\|\nabla_\parallel\eta_M\|_{H^{1/2}} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*}. \tag{5.2.28}$$

另一方面，若 $\varsigma = 0$ 和 $n = 2$，通过用$\partial_1\langle\nabla_\parallel\rangle\eta_M = \nabla_\parallel\langle\nabla_\parallel\rangle\eta_M \in H^{-1/2}(\Sigma)$作为测试函数代入 (5.2.23)，并利用正交性、柯西-施瓦茨不等式、迹的有界性以及 (5.2.25)，即可得到估计 (5.2.28)。

现在，与命题 5.2 的第四步一样，我们将 $w_M = \varrho^{-1}\mathcal{B}q \in {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 用作 (5.2.21) 中的测试函数，其中 $\mathcal{B}$ 是推论 C.3 中构造的，从而得到

$$\langle F, w_M\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1} = \int_\Omega \gamma_0(\gamma_0\varrho u_M \otimes e_1 + \mathbb{S}^\varrho u_M) : \nabla w_M + \mathfrak{g}\varrho\nabla\eta_M \cdot w_M - \int_\Omega q_M^2 - \varsigma\langle\Delta_\parallel\eta_M, \mathrm{Tr}_\Sigma(w_M\cdot e_n)\rangle. \tag{5.2.29}$$

由此我们很容易得到上界 $\|q_M\|_{L^2}^2 \lesssim (\|F\|_{({}_0H^1)^*} + \|u_M\|_{H^1} + \|\nabla_\parallel\eta_M\|_{H^{1/2}})\|w_M\|_{H^1}$，结合已建立的界和连续性估计 $\|w_M\|_{H^1} \lesssim \|q_M\|_{L^2}$，即可得到低正则性估计 $\|q_M\|_{L^2} \lesssim \|F\|_{({}_0H^1)^*}$.

现在我们已经得到了关于 q_M 和 η_M 的低正则性估计。为了将其提升为高正则性界，我们按照命题 5.4 证明中的第五步进行。式 (5.2.22) 中的第一个恒等式等价于 $N^{-1}L_m(q_M+\mathfrak{g}\eta_M^{\mathrm{H}}) = -\nabla\cdot(\varrho u_M) - \mathfrak{g}N^{-1}L_{m,\parallel}\eta_M^{\mathrm{L}}$，其中我们将$\eta_M^{\mathrm{L}} = \Pi_{\mathrm{L}}^1\eta_M$和 $\eta_M^{\mathrm{H}} = \Pi_{\mathrm{H}}^1\eta_M$作了分解。由于 $\partial_n^m(q_M+\mathfrak{g}\eta_M^{\mathrm{H}}) = \cdots = \partial_n^{2m-1}(q_M+\mathfrak{g}\eta_M^{\mathrm{H}}) = 0$，我们可以在 $\tau = 0$ 的条件下应用引理 5.3，并利用 η_M^{L} 和 η_M^{H} 的傅里叶支撑，得到如下估计

$$\begin{aligned}\|q_M+\mathfrak{g}\eta_M^{\mathrm{H}}\|_{H^{2m}} &\lesssim N(\|u_M\|_{H^1}+\|L_{m,\parallel}\eta_M^{\mathrm{L}}\|_{L^2}+\|q_M+\mathfrak{g}\eta_M^{\mathrm{H}}\|_{L^2})\\ &\lesssim N(\|u_M\|_{H^1}+\|\nabla_\parallel\eta_M\|_{H^{1/2}}+\|q_M\|_{L^2}).\end{aligned}\tag{5.2.30}$$

现在，我们将恒等式 (5.2.23) 与 $N^{-1}(-\Delta_\parallel)^{m+1/4}\eta_M^{\mathrm{H}} \in H^{-1/2}(\Sigma)$ 作检验，并利用 η_M^{H} 的傅里叶支集以及上界 (5.2.24)，得到估计

$$\|\eta_M^{\mathrm{H}}\|_{H^{2m}} \lesssim N\|u_M\|_{H^1} \lesssim N\|F\|_{({}_0H^1)^*}.\tag{5.2.31}$$

综合 (5.2.30) 和 (5.2.31)，可得

$$\|q_M,\eta_M^{\mathrm{H}}\|_{H^{2m}\times H^{2m}} \lesssim N\|F\|_{({}_0H^1)^*}.\tag{5.2.32}$$

根据命题 B.1 和方程 (B.1.25)，只需得到关于 $[\partial_1\eta_M]_{\dot H^{-1}}$ 的 M-一致界。首先，我们在 n^{th} 坐标上对 (5.2.22) 在 (0，b) 上积分，并回顾 (5.2.23)，从而得到等式

$$\varrho(b)\partial_1\eta_M = \frac{1}{N}L_{m,\parallel}\int_0^b(q_M+\mathfrak{g}\eta_M)+\frac{\varrho(b)}{N}\Big(\frac{1}{M}+(-\Delta_\parallel)^{m-1/4}\Big)\eta_M+(\nabla_\parallel,0)\cdot\int_0^b\varrho u_M.\tag{5.2.33}$$

对于 $\kappa\in(0,\ 1)$，我们写作 $\eta_M^\kappa = (\Pi^{1/\kappa}{}_{\mathrm{L}}-\Pi_{\mathrm{L}}^\kappa)\eta_M \in H^\infty(\Sigma)$，然后将 (5.2.33) 与 $|\nabla_\parallel|^{-2}\partial_1\eta_M^\kappa \in H^\infty(\Sigma)$ 作 L^2 内积。由于 ∂_1 算子的作用，右端各项均消失，由此得到等式

$$\varrho(b)[\partial_1\eta_M^\kappa]_{\dot H^{-1}}^2 = \Big\langle\frac{|\nabla_\parallel|^{-1}}{N}L_{m,\parallel}\int_0^b q_M+|\nabla_\parallel|^{-1}(\nabla_\parallel,0)\cdot\int_0^b\varrho u_M,|\nabla_\parallel|^{-1}\partial_1\eta_M^\kappa\Big\rangle_{L^2,L^2},\tag{5.2.34}$$

由此我们很容易推出

$$[\partial_1\eta_M]_{\dot H^{-1}} = \lim_{\kappa\to0}[\partial_1\eta_M^\kappa]_{\dot H^{-1}} \lesssim_m N^{-1}\|q_M\|_{H^{2m-1}}+\|u_M\|_{L^2} \lesssim_m \|F\|_{({}_0H^1)^*}.\tag{5.2.35}$$

然后，结合 (5.2.25)、(5.2.32) 和 (5.2.35)，并回顾 (B.1.25) 中给出的 $\mathcal{H}^{2m}(\Sigma)$ 上的等价范数，即可得到 (5.2.24)。该结论得证。

步骤 6：结论。(5.2.24) 中的 M-一致界保证序列 (5.2.20) 存在一个弱收敛子序列极限，记为 $(q,u,\eta)\in H^{2m}(\Omega)\times{}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{H}^{2m}(\Sigma)$。将常规的弱收敛论证应用于恒等式 (5.2.21)、(5.2.22) 和 (5.2.23)，便可得出$\gamma_0(q,u,\eta)$ 满足 $\mathscr{I}(q,u,\eta) = F$，

$$\begin{cases}N^{-1}L_m(q+\mathfrak{g}\eta) = -\nabla\cdot(\varrho u) & \text{in }\Omega,\\ \partial_n^m(q+\mathfrak{g}\eta) = \cdots = \partial_n^{2m-1}(q+\mathfrak{g}\eta) = 0 & \text{on }\partial\Omega,\end{cases}\tag{5.2.36}$$

并且 $\mathrm{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n)+\partial_1\eta = N^{-1}(-\Delta_\parallel)^{m-1/4}\eta$。因此，$(q,u,\eta)\in\mathbb{X}_m^{-1}{}_{,N}$满足 $\overset{w_0\ \gamma_0}{\mathscr{I}_m^0}{}_{,,N}(q,u,\eta) = (0,F)$，据第一步，证明至此完成。□

作为正则化问题弱解存在性的推论，我们现在证明，与正则化的强形式相关的算子，即 $\overset{w_0\ \gamma_0}{A_m}{}_{,,N}$ 在 (3.5.10) 中定义的算子，自动构成同构。需要注意的是，目前我们无法保证这些逆映射具有与 N 无关的估计，因此在后续各节中还需进一步努力来验证这一点。

推论 5.6（正则化诱导的同构）。 设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者来自定理 *3.17*， $w_0=(q_0,\ u_0,\ \eta_0)$ 如引理 *3.19* 中所述， m， $N\in\mathbb{N}^+$ 满足 $m\geqslant 2$，并且 $\gamma_0\in I$ 对某个区间 $I\Subset\mathbb{R}^+$ 成立。假设 (5.1.50) 成立。那么对于 $\nu\in\mathbb{N}^+$，映射

$$\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N}:\mathbb{X}^{\nu}_{m,N}\to\mathbb{Y}^{\nu} \tag{5.2.37}$$

由 (3.5.11) 定义的是一个巴拿赫同构。

证明。 映射 (5.2.37) 定义良好，这是引理 3.23 的第三项所带来的结果。我们先证明单射性。设 $(q,u,\eta)\in\ker\overset{w_0\ \gamma_0}{A}_{m\ \ ,N}\subseteq\mathbb{X}^{\nu}_{m,N}$。引理 3.24 表明 w_0,γ_0 强解是弱解，因此 $\mathscr{J}^1_{m,N}(q,u,\eta)=(0,0)$。接着，通过调用命题 5.4 的先验估计，我们可推出 $(q,u,\eta)=0$。

现在我们转而证明满射性。设

$$(g,f,k)\in\mathbb{Y}^{\nu}, \tag{5.2.38}$$

并利用定理 5.5 和 (3.5.23) 中的映射，通过以下方式定义 (q,u,η)

$$(q,u,\eta)=\big(\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}^1_{m,N}}\big)^{-1}(g,\mathscr{K}(f,k))\in\mathbb{X}^{-1}_{m,N}. \tag{5.2.39}$$

我们声称存在高正则性包含关系 $(q,\ u,\ \eta)\in\mathbb{X}^{\nu}_{m,\ N}$。证明这一点后，再应用引理 3.24 可得 $\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,\ N}(q,\ u,\ \eta)=(g,\ f,\ k)$，由此得到满射性。

为证明这一论断，我们将采用有限归纳论证，逐步提高三元组 $(q,\ u,\ \eta)$ 的正则性。为此，以更便于使用的方式展开弱解的定义会很有帮助。方程 (5.2.39) 等价于：$(q,\ u,\ \eta)\in\mathbb{X}_{-1}$，

$$\begin{cases} N^{-1}L_m q=g-\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))-\nabla\cdot(\varrho u)-\mathfrak{g}N^{-1}L_{m,\|}\eta & \text{in }\Omega,\\ \partial_n^m q=\cdots=\partial_n^{2m-1}q=0 & \text{on }\partial\Omega,\end{cases} \tag{5.2.40}$$

$$N^{-1}(-\Delta_{\|})^{m-1/4}\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta=-N^{-1}(-\Delta_{\|})^{m-1/4}\Pi^1_{\mathrm{L}}\eta+\partial_1\eta+\mathrm{Tr}_{\Sigma}(u\cdot e_n),\quad \mathrm{Tr}_{\Sigma_0}(u)=0, \tag{5.2.41}$$

并且对所有 $w\in{}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$，均有

$$\int_{\Omega}\gamma_0(\gamma_0\varrho u\otimes e_1+\mathbb{S}^{\varrho}u):\nabla w=\langle\widetilde{F},w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}, \tag{5.2.42}$$

~ ~~ ~ ~其中 $F=\mathscr{K}(f,\ k)$ 对于 $f=f-\varrho\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)$ 和 $k=k+(\varrho q+\varsigma\Delta_{\|}\eta)e_n$。

恒等式 (5.2.42) 换言之，意味着 u 是椭圆边值问题的一个弱解

$$\begin{cases} -\gamma_0^2\varrho\partial_1 u-\gamma_0\nabla\cdot\mathbb{S}^{\varrho}u=\widetilde{f} & \text{in }\Omega,\\ \gamma_0\mathbb{S}^{\varrho}ue_n=\widetilde{k} & \text{on }\Sigma,\\ u=0 & \text{on }\Sigma_0.\end{cases} \tag{5.2.43}$$

由包含关系 s (5.2.38) 和 $(q,\ \eta)\in H^{2m}(\Omega)\times\mathcal{H}^{2m}(\Sigma)$ 以及范数 (B.1.25)，我们推得 t

$$\widetilde{f}\in H^{\min\{\nu,2m-1\}}(\Omega;\mathbb{R}^n)\text{ and }\widetilde{k}\in H^{\min\{1/2+\nu,2m-2\}}(\Sigma;\mathbb{R}^n), \tag{5.2.44}$$

因此，问题 (5.2.43) 的标准椭圆正则性提升（参见 Agmon、Douglis 和 Nirenberg [3]）保证了包含关系

$$u\in H^{\min\{2+\nu,2m-1/2\}}(\Omega;\mathbb{R}^n)\hookrightarrow H^2(\Omega;\mathbb{R}^n), \tag{5.2.45}$$

其中嵌入成立，因为 $m\geqslant 2$。有了 (5.2.45) 给出的改进后的 u 正则性，我们回到 (5.2.41)，可知 $\Pi^1_{\mathrm{H}}\eta\in H^{1+2m}(\Sigma)$，因此，根据命题 B.1， $\eta\in\mathcal{H}^{1+2m}(\Sigma)$。接着，我们在 (5.2.40) 中结合改进后的 u 和 η 正则性以及引理 3.19 的第四项，并利用引理 C.7 推得正则性的改进 $q\in H^{1+2m}(\Omega)$。

按有限归纳法进行 有限归纳法中，我们现在假设对于某个 $0 \leqslant \nu \leqslant \mathfrak{v}-1$，有如下包含关系

$$(q,u,\eta) \in H^{\nu+1+2m}(\Omega) \times H^{\nu+2}(\Omega;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}^{\nu+1+2m}(\Sigma). \tag{5.2.46}$$

这意味着 $\widetilde{f} \in H^{\min\{\mathfrak{v},\nu+2m\}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 和 $\widetilde{k} \in H^{\min\{1/2+\mathfrak{v},\nu-1+2m\}}(\Sigma;\mathbb{R}^n)$，因此，对 (5.2.43) 应用椭圆正则性可得 $u \in H^{\min\{2+\mathfrak{v},\nu+1/2+2m\}}(\Omega;\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\nu+3}(\Omega;\mathbb{R}^n)$。接着，我们完全按照上文的论证，利用改进的 u 正则性，将其提升至 $\eta \in \mathcal{H}^{\nu+2+2m}(\Sigma)$ 和 $q \in H^{\nu+2+2m}(\Omega)$。因此，将 ν 替换为 $\nu+1$ 后，(5.2.46) 仍然成立。通过有限归纳法，(5.2.46) 对 $\nu=\mathfrak{v}$ 也成立，因此 $(q,\ u,\ \eta) \in \mathbb{X}^{\mathfrak{v}}_{m,\ N}$，从而完成了该断言的证明。□

6. Analysis of strong solutions to the linearization

此前，我们已经为 (5.0.1) 和 (5.0.2) 的弱解建立了估计，并针对后者证明了存在性和定性正则性，见推论 5.6。本节的大部分内容致力于构建一系列工具，以便在给定充分正则的数据时，估计这些弱解的高阶正则性范数。换言之，我们需要对系统 (5.0.1) 和 (5.0.2) 的正则性有具体的定量理解；对于前者，我们将建立解的范数关于背景项 $w_0=(q_0,\ u_0,\ \eta_0)$ 和 γ_0 的温和估计；对于后者，我们将证明与逼近参数无关的高正则性界。

我们按如下安排展开。第 6.1 节分析系统 (5.0.1) 和 (5.0.2) 的解的切向导数所满足的方程。第 6.2 节通过分析所谓的正规系统，将解的正则性提升归结为对切向导数的估计。第 6.3 节结合切向导数分析和正规系统分析的结果，推导出主部方程所需的精确先验估计。最后，我们在第 6.4 节推导出 (5.0.1) 的强解的存在性，并进一步证明完整线性化系统的强解存在性。

6.1. 切向导数的分析。

为了研究 (5.0.1) 和 (5.0.2) 的解$_{w_0,\ \gamma_0}$ $_{w_0,\ \gamma_0}$ $_{w_0,\ \gamma_0}$的切向导数，我们必须首先理解算子 A , $A_{m,\ N}$， $\mathscr{J}$,$_{w_0,\ \gamma_0}$以及 $\mathscr{J}^1_{m,\ N}$与切向导数 ∂_j（其中 $j \in \{1,\dots,n-1\}$）的交换子。这些算子几乎具有切向平移不变性，因此几乎与切向导数交换；每个算子不能交换的部分，恰恰是由于其连续性方程中出现了 $\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))$。下面的定义和随后的引理刻画了这种几乎切向平移不变性。回顾一下， $H^s(\Omega)$ 空间定义于 (C.1.1) 中。

定义 *6.1*（主部交换子）。设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者定义于定理 *3.17* 中，并设 $w_0=(q_0,u_0,\eta_0)$ 如引理 *3.19* 所述。对于 $j\in\{1,\dots,n-1\}$，我们定义映射 $\overset{w_0}{\mathscr{C}}{}^j\colon H^{1+s}(\Omega)\times\mathcal{H}^{1+s}(\Sigma)\to\mathring{H}^s(\Omega)$，其定义为 $\overset{w_0}{\mathscr{C}}{}^j(q,\eta)=\nabla\cdot(\partial_j v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))$。

我们现在检验这些 $\mathscr{C}$ 映射是否定义良好，然后探讨它们的映射性质。

引理 6.2（$\mathscr{C}$的映射性质）。在定义 *6.1* 的假设下，对于 $s\in\mathbb{N}$，我们有以下估计：

$$\big\|\overset{w_0}{\mathscr{C}}{}^j(q,\eta)\big\|_{\mathring{H}^s}\lesssim\rho\|q,\eta\|_{H^{1+s}\times\mathcal{H}^{1+s}}+\begin{cases}0 & \text{if } s\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,\eta\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases} \tag{6.1.1}$$

这里的隐含 常数仅取决于 s、物理参数、维数和 ρ_{WD} .

证明。 我们首先使用引理 3.19（特别是分解式 (3.4.17)）来计算

$$\partial_j v_{w_0}=\partial_j v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}+\partial_j v^{(2)}_{\eta_0}. \tag{6.1.2}$$

然后，给定 $\mathbb{N}\ni s\geqslant 1+\lfloor n/2\rfloor$，我们使用引理 3.19 的第一项进行估计 e

$$\|\partial_j v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{H^s}\leqslant\|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{H^{1+s}}\lesssim\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}. \tag{6.1.3}$$

对于另一部分，我们可以使用引理 3.19 的第二项推得 $v_{\eta_0}^{(2)} = (v_{\eta_0}^{(2)} \cdot e_1)e_1$，并且 $v_{\eta_0}^{(2)}$ 具有 r_{n-1} 作为频带限制。结合上述引理的第二项、(B.1.25) 以及命题 B.1，我们可以进行估计

$$\|\partial_j v_{\eta_0}^{(2)}\|_{H^s} \lesssim \sup_{0\leqslant p\leqslant s}\sup_{y\in[0,b]} \|\partial_j \partial_n^p v_{\eta_0}^{(2)}(\cdot, y)\|_{H^{s-p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant \sup_{0\leqslant p\leqslant s}\sup_{y\in[0,b]} \|\partial_n^p v_{\eta_0}(\cdot, y)\cdot e_1\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim \|\Pi_{\mathrm{L}}^1 \eta_0\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{6.1.4}$$

综合 (6.1.2)、(6.1.3) 和 (6.1.4)，可得上界 $\|\partial_j v_{w_0}\|_{H^s} \lesssim \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_s}$，其中 $s \geqslant 1 + \lfloor n/2 \rfloor$。由此，证明所述估计只需直接应用推论 D.7。事实上，该推论表明，对于任意 $s \in \mathbb{N}$ 和 $(q, \eta) \in H^{1+s}(\Omega) \times \mathcal{H}^{1+s}(\Sigma)$，我们有

$$\begin{aligned}
\big\|\overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,\eta)\big\|_{H^s} &\lesssim \|\partial_j v_{w_0}(q + \mathfrak{g}\eta)\|_{H^{1+s}} \lesssim \rho\|q, \Pi_{\mathrm{H}}^1\eta, \Pi_{\mathrm{L}}^1\eta\|_{H^{1+s}\times H^{1+s}\times W^{1+s,\infty}} \\
&\quad + \begin{cases} 0 & \text{if } s < \lfloor n/2 \rfloor, \\ \|\partial_j v_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{H^{1+s}}\|q, \Pi_{\mathrm{H}}^1\eta, \Pi_{\mathrm{L}}^1\eta\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor \leqslant s, \end{cases} \\
&\lesssim \rho\|q,\eta\|_{H^{1+s}\times\mathcal{H}^{1+s}} + \begin{cases} 0 & \text{if } s < \lfloor n/2\rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,\eta\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor \leqslant s. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

此外，由于 $\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(v_{w_0}\cdot e_n) = 0$ 且 $\partial_j v_{w_0} \in (L^\infty \cap L^2)(\Omega)$，我们有如下估计

$$\Big[\int_0^b \overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,\eta)(\cdot, y)\,\mathrm{d}y\Big]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|\partial_j v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta)\|_{L^2} \lesssim \rho\|q, \Pi_{\mathrm{H}}^1\eta, \Pi_{\mathrm{L}}^1\eta\|_{L^2\times L^2\times L^\infty} \lesssim \rho\|q,\eta\|_{L^2\times\mathcal{H}^0}. \tag{6.1.6}$$

然后，结合 (6.1.5) 和 (6.1.6) 即可得到 (6.1.1)。 □

现在，我们利用 $\mathscr{C}$ 的映射性质，获得一阶切向导数的低正则性估计。

命题 6.3（切向导数的低范数估计）。在定义 *6.1* 的假设下，对于 $\gamma_0 \in I$，其中 $I \Subset \mathbb{R}^+$ 是一个区间，$(g、f、k) \in \mathbb{Y}^0$，且 $j \in \{1, \dots, n-1\}$。

(1) 若 $(q, u, \eta) \in \overset{w_0,\eta_0}{\mathbb{X}^0}$，满足 $\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta) = (g,f,k)$，则 $(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta) \in \overset{q_0}{\mathbb{X}^{-1}}$，并满足以下估计

$$\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}}(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{-1}} \lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_0} + \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^0}. \tag{6.1.7}$$

(2) 若 $m, N \in \mathbb{N}^+$ 满足 $m \geqslant 2$，且 $(q,u,\eta) \in \mathbb{X}^0_{m,N}$ 满足 $\overset{w_0\,\gamma_0}{A_m}{}_{,N}(q,u,\eta) = (g,f,k)$，则 $(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta) \in \mathbb{X}^{-1}_{m,N}$ 并满足以下估计

$$\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}^1_{m,N}}(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{-1}} \lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_0} + \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^0}. \tag{6.1.8}$$

这里的 *implicit* 常数取决于维数、物理参数、ρ_{WD} 和 I。

证明。我们只证明第一项；第二项的证明可由几乎相同的论证得出。首先，我们给出三个观察结果。

首先，回顾由 (3.5.23) 定义的有界线性映射 $\mathscr{K}\colon L^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \times H^{1/2}(\Sigma;\mathbb{R}^n) \to ({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*$。对于每个 $j \in \{1,\dots,n-1\}$，我们按如下方式构造一个相关有界线性映射 $\mathscr{K}_j\colon L^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \times H^{1/2}(\Sigma;\mathbb{R}^n) \to ({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*$。对于 $(f,k) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\times H^{1/2}(\Sigma;\mathbb{R}^n)$，我们首先通过 $\langle \mathscr{K}_j(f,k)\, w\rangle = \langle \mathscr{K}(f,k), -\partial_j w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1} = -\int_\Omega f\cdot\partial_j w - \int_\Sigma k\cdot\partial_j w$ 定义线性映射 $\mathscr{K}_j(f,k)\colon {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap H^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$。对于这样的 f、k 和 w，我们可以给出上界

$$|\langle \mathscr{K}_j(f,k), w\rangle| \leqslant \|f\|_{L^2}\|\partial_j w\|_{L^2} + \|k\|_{H^{1/2}}\|\partial_j \mathrm{Tr}_\Sigma w\|_{H^{-1/2}} \lesssim \|f,k\|_{L^2\times H^{1/2}}\|w\|_{H^1}, \tag{6.1.9}$$

由此以及 ${}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap H^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 在 ${}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性，我们推得 $\mathscr{K}_j(f,k)$ 可唯一延拓为一个元素 $\mathscr{K}_j(f,k)\in({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*$，使得

$$\langle\mathscr{K}_j(f,k),w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}=\langle\mathscr{K}(f,k),-\partial_j w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}\tag{6.1.10}$$

对所有 $w\in H^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap{}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 和 $\|\mathscr{K}_j(f,k)\|_{({}_0H^1)^*}\lesssim\|f,k\|_{L^2\times H^{1/2}_\circ}$ 特别是，后一个估计表明，诱导映射 $\mathscr{K}_j$ 是有界线性映射，其区域和陪域如上所述。

其次，我们回顾由 (3.5.12) 定义的映射 $\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}\colon\mathbb{X}_{-1}\to({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*$。假设 $(q,u,\eta)\in{}_{\gamma_0}\mathbb{X}_{0\circ}$ 对于 $j\in\{1,\dots,n-1\}$，我们有 $(\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta)\in\mathbb{X}_{-1}$，这意味着 $\mathscr{I}(\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta)$ 定义了 $({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*$ 中的一个元素。我们可以通过分部积分计算该泛函作用于任意 $w\in H^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap{}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 的结果：

$$\begin{aligned}\langle\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta),-\partial_j w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}&=-\int_\Omega-\gamma_0^2\varrho\partial_1 u\cdot\partial_j w-q\nabla\cdot(\varrho\partial_j w)+\mathfrak{g}\varrho\nabla\eta\cdot\partial_j w+\gamma_0\mathbb{S}^\varrho u:\nabla\partial_j w\\&\quad+\varsigma\langle\Delta_\parallel\eta,\operatorname{Tr}_\Sigma(\partial_j w\cdot e_n)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}=\int_\Omega-\gamma_0^2\varrho\partial_1\partial_j u\cdot w-\partial_j q\nabla\cdot(\varrho w)+\mathfrak{g}\varrho\nabla\partial_j\eta\cdot w\\&\quad+\int_\Omega\gamma_0\mathbb{S}^\varrho\partial_j u:\nabla w-\varsigma\langle\Delta_\parallel\partial_j\eta,\operatorname{Tr}_\Sigma(w\cdot e_n)\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}=\langle\mathscr{I}(\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta),w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}.\end{aligned}\tag{6.1.11}$$

对于第三个观察，假设 $q\in H^1(\Omega)$ 满足 $\nabla\cdot(v_{w_0}q)\in H^1(\Omega)$。以 $C_c^\infty(\Omega)$ 中的元素作为测试函数，并利用引理 6.2，可知对于每个 $j\in\{1,\dots,n-1\}$，都有如下分布恒等式

$$\nabla\cdot(v_{w_0}\partial_j q)=\partial_j\nabla\cdot(v_{w_0}q)-\overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,0)\in L^2(\Omega).\tag{6.1.12}$$

特别地，该恒等式表明 $\partial_j q\in H^0_{v_{w_0}}(\Omega)$，其中该空间定义于附录 B.2。

在确立这三个观察之后，我们现在可以证明第一项。假设 $(q,u,\eta)\in\overset{q_0\ u_0\ \eta_0}{,\mathbb{X}^0}$，且 $(g,f,k)\in\mathbb{Y}^0$ 满足强形式方程 ${}_{w_0,}\overset{\gamma_0}{A}(q,u,\eta)=(g,f,k)_{,w_0,\gamma_{0\circ}}$ 由于正则性达到所假设的水平，该方程等价于弱形式方程 $\mathscr{J}(q,u,\eta)=(g,\mathscr{K}(f,k))$（见引理 3.24）。进而，弱形式可展开为以下两个方程

$$\nabla\cdot(\varrho u)+\nabla\cdot(v_{w_0}(q+\mathfrak{g}\eta))=g\text{ in }L^2(\Omega)\text{ and }\mathscr{I}(q,u,\eta)=\mathscr{K}(f,k)\text{ in }({}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n))^*\cdot\tag{6.1.13}$$

令 $j\in\{1,\dots,n-1\}$。对于 (6.1.13) 中的第一个方程，我们应用 ∂_j，并利用第三条观察中的 (6.1.12)，可得

$$\nabla\cdot(\varrho\partial_j u)+\nabla\cdot(v_{w_0}\partial_j(q+\mathfrak{g}\eta))=\partial_j g-\overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,\eta).\tag{6.1.14}$$

对于 (6.1.13) 中的第二个方程，令 $w\in H^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap{}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$，以 $-\partial_j w$ 为检验函数，并利用第一条和第二条观察中的 (6.1.10) 与 (6.1.11)，可得

$$\begin{aligned}\langle\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta),w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}&=\langle\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(q,u,\eta),-\partial_j w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}\\&=\langle\mathscr{K}(f,k),-\partial_j w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}=\langle\mathscr{K}_j(f,k),w\rangle_{({}_0H^1)^*,{}_0H^1}.\end{aligned}\tag{6.1.15}$$

由于 $H^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap{}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 在 ${}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 中稠密，我们推得

$$\overset{\gamma_0}{\mathscr{I}}(\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta)=\mathscr{K}_j(f,k).\tag{6.1.16}$$

结合 (6.1.14) 和 (6.1.16)，我们可推得

$$\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}}(\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta)=(\partial_j g-\overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,\eta),\mathscr{K}_j(f,k)).\tag{6.1.17}$$

因此，对 (6.1.17) 在 $\mathbb{Y}^{-1}$ 中取范数，并应用引理 6.2 以及第一个观察中建立的 $\mathscr{K}_j$ 的有界性，即可得到 (6.1.7)。□

下一个结果是前一个结果的更高正则性版本。

命题 6.4 (切向导数的高阶范数估计)。 在定义 *6.1* 的假设下，对于 $s \in \mathbb{N}^+$，$j \in \{1, \dots, n-1\}$，$\gamma_0 \in I \Subset \mathbb{R}^+$ 当 I 为一个区间时，且 $(g, f, k) \in \mathbb{Y}^s$。

(1) 若 $(q, u, \eta) \in \overset{q_0}{,} \mathbb{X}^s \overset{u_0\,\eta_0}{,}$ 满足 $\overset{\gamma_0}{A}{}_{w_0}(q, u, \eta) = (g, f, k)$，则 $(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta) \in \overset{q_0}{,} \mathbb{X}^{s-1} \overset{u_0\,\eta_0}{,}$ 并满足如下估计

$$\begin{aligned} \left\| \overset{w_0,\gamma_0}{A}(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta) \right\|_{\mathbb{Y}^{s-1}} &\lesssim \rho \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}_s} \\ &+ \|g, f, k\|_{\mathbb{Y}^s} + \begin{cases} 0 & \text{if } s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}} \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < s. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

(2) 若 $m, N \in \mathbb{N}^+$ 满足 $m \geqslant 2$ 且 $(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^s_{m,N}$ 满足 $\overset{w_0\,\gamma_0}{A_m}{}_{,,N}(q, u, \eta) = (g, f, k)$，则 $(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta) \in \mathbb{X}^{s-1}_{m\,N}$，并满足如下估计

$$\begin{aligned} \left\| \overset{w_0}{,} A_m \overset{\gamma_0}{,}{}_N (\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta) \right\|_{\mathbb{Y}^{s-1}} &\lesssim \rho \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}_s} \\ &+ \|g, f, k\|_{\mathbb{Y}^s} + \begin{cases} 0 & \text{if } s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}} \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < s. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

这里的隐含常数取决于 s、维数、物理参数、ρ_{WD} 和 I。

证明。我们只证明第一项，因为第二项可由几乎相同的论证得出。w_0利用恒等式 $\nabla \cdot (v_{w_0} \partial_j q) = \partial_j \nabla \cdot (v_{w_0} q) - \mathscr{C}^j(q, 0)$ 和引理 6.2，显然q_0,u_0,η_0微分后的三元组 $(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta)$ 属于空间 $\mathbb{X}^{s-1}$。对 $\overset{\gamma_0}{w_0,A}(q, u, \eta) = (g, f, k)$ 中的方程应用 ∂_j 并重新整理，得到恒等式 $\overset{\gamma_0}{w_0,A}(\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta) = w_0 \left(\partial_j g - \mathscr{C}^j(q, \eta)\ \partial_j f, \partial_j k\right)$。然后对该恒等式两边取 $\mathbb{Y}^{s-1}$ 范数，并应用引理 6.2 中的估计，即可推出 (6.1.18)。□

为结束本小节，我们迭代应用命题 6.4，并结合命题 6.3，从而得到高阶切向导数的低阶范数估计。

定理 6.5 (切向导数分析的综合)。 设 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者如定理 *3.17* 所述，$w_0 = (q_0, u_0, \eta_0)$ 如引理 *3.19* 所述，$s \in \mathbb{N}$，$\gamma_0 \in I \Subset \mathbb{R}^+$ 对于区间 I，$(g, f, k) \in \mathbb{Y}^s$，且 $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ 是一个多重指标，使得 $\alpha \cdot e_n = 0$ 并且 $|\alpha| \leqslant 1 + s$。以下结论成立。

(1) If $(q, u, \eta) \in \overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^s}$ *satisfies* $\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q, u, \eta) = (g, f, k)$, *then* $(\partial^\alpha q, \partial^\alpha u, \partial^\alpha q) \in \overset{w_0,\gamma_0}{\mathbb{X}^{-1}}$ *and we have the estimate*

$$\begin{aligned} \left\| \overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{I}}(\partial^\alpha q, \partial^\alpha u, \partial^\alpha \eta) \right\|_{\mathbb{Y}^{-1}} &\lesssim \rho \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}_s} \\ &+ \|g, f, k\|_{\mathbb{Y}^s} + \begin{cases} 0 & \text{if } s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}} \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < s. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.1.20}$$

(2) 若 $m, N \in \mathbb{N}^+$ 满足 $m \geqslant 2$ 且 $(q,u,\eta)\in \mathbb{X}^s_{m,\,N}$ 满足 $\overset{w_0\,\gamma_0}{A}_{m\,,,N}(q,u,\eta) = (g,f,k)$，则 $(\partial^\alpha q, \partial^\alpha u, \partial^\alpha \eta)\in \mathbb{X}^{-1}_{m\,,\,N}$ 并且有如下估计

$$\begin{aligned}\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{I}}{}^1_{m,N}(\partial^\alpha q,\partial^\alpha u,\partial^\alpha\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{-1}} &\lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s}\\ &\quad+\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^s}+\begin{cases}0 & \text{if } s\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases}\end{aligned}\tag{6.1.21}$$

隐含常数取决于 s、维数、物理参数、 ρ_{WD} 和 I。

证明。同样，我们只证明第一项，因为第二项可由几乎相同的论证得出。q_0,u_0,η_0首先，我们断言，若 $(q,u,\eta)\in \mathbb{X}^s$ 且 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 满足 $1\leqslant|\alpha|\leqslant s$ 和 $\alpha\cdot e_n=0$，则$q_0,u_0,\eta_0(\partial^\alpha q,\partial^\alpha u,\partial^\alpha\eta)\in\mathbb{X}^{s-|\alpha|}$ 且

$$\begin{aligned}\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(\partial^\alpha q,\partial^\alpha u,\partial^\alpha\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{s-|\alpha|}} &\lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s}\\ &\quad+\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^s}+\begin{cases}0 & \text{if } s\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases}\end{aligned}\tag{6.1.22}$$

我们通过对 $|\alpha|$ 作强归纳法来证明这一点。

该断言的基例 $|\alpha|=1$ 已在命题 6.4 中证明。现在假设对于固定的 $1\leqslant\nu\leqslant s-1$，该断言对所有满足 $\alpha\cdot e_n=0$ 和 $1\leqslant|\alpha|\leqslant\nu$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 均成立。取满足 $|\alpha|=\nu+1$ 且 $\alpha\cdot e_n=0$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$。取满足 $\alpha=\beta+\gamma$ 和 $|\gamma|=1$ 的 $\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\}$。

反复应用归纳假设可得 $(\partial^\beta q,\partial^\beta u,\partial^\beta\eta)\in \mathbb{X}^{s-|\beta|}$ 进而，在$\overset{q_0,\ u_0,\ \eta_0}{}$中，$(\partial^\alpha q,\ \partial^\alpha u,\ \partial^\alpha\eta)\in\mathbb{X}^{s-|\alpha|}$。此外，归纳假设还给出了以下估计

$$\begin{aligned}\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(\partial^\alpha q,\partial^\alpha u,\partial^\alpha\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{s-|\alpha|}} &\lesssim \rho\|\partial^\beta q,\partial^\beta u,\partial^\beta\eta\|_{\mathbb{X}_{s-|\beta|}}+\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(\partial^\beta q,\partial^\beta u,\partial^\beta\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{s-|\beta|}}\\ &\quad+\begin{cases}0 & \text{if } s-|\beta|\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s-|\beta|}}\|\partial^\beta q,\partial^\beta u,\partial^\beta\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s-|\beta|,\end{cases}\\ &\lesssim \rho\big(\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s}+\|\partial^\beta q,\partial^\beta u,\partial^\beta\eta\|_{\mathbb{X}_{s-|\beta|}}\big)+\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^s}\\ &\quad+\begin{cases}0 & \text{if } s\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s,\end{cases}\\ &\quad+\begin{cases}0 & \text{if } s-|\beta|\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s-|\beta|}}\|\partial^\beta q,\partial^\beta u,\partial^\beta\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s-|\beta|.\end{cases}\end{aligned}\tag{6.1.23}$$

为将此估计转化为正确的形式，我们注意到以下两点。第一，∂^β连续性估计：$\|\partial^\beta q,\ \partial^\beta u,\ \partial^\beta\eta\|_{\mathbb{X}_{s-|\beta|}}\lesssim\|q,\ u,\ \eta\|_{\mathbb{X}_s}$ 以及 $\|\partial^\beta q,\ \partial^\beta u,\ \partial^\beta\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}}\lesssim\|q,\ u,\ \eta\|_{\mathbb{X}_{|\beta|+\lfloor n/2\rfloor}}$。第二，由于 $\mathbb{X}$ 空间中范数的对数凸性（见引理 3.25）以及杨氏不等式，若 $\lfloor n/2\rfloor<s-|\beta|$，则有

$$\begin{aligned}\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s-|\beta|}}\|\partial^\beta q,\partial^\beta u,\partial^\beta\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} &\lesssim \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s-|\beta|}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{|\beta|+\lfloor n/2\rfloor}}\\ &\lesssim\big(\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\lfloor n/2\rfloor}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s}\big)^{\frac{|\beta|}{s-\lfloor n/2\rfloor}}\big(\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}}\big)^{1-\frac{|\beta|}{s-\lfloor n/2\rfloor}}\\ &\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s}+\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}}.\end{aligned}\tag{6.1.24}$$

将这些事实与 (6.1.23) 结合起来，我们验证了 (6.1.22) 成立，从而完成了归纳步骤的证明，并由此得出结论。

现在，若 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\alpha \cdot e_n$ 和 $1 \leqslant |\alpha| \leqslant s$，那么得出的估计 (6.1.20) 由上述论断中得到的估计 (6.1.22) 以及显然的界成立

$$\big\| \overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{-1}} \lesssim \big\| \overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^0} \leqslant \big\| \overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{s-|\alpha|}}. \tag{6.1.25}$$

因此，只需证明在 $|\alpha| = s+1$ 的情况下 (6.1.20) 成立。在这种情况下，我们可以将 $\partial^\alpha = \partial_j \partial^\beta$ 写成某个 $j \in \{1,\dots,n-1\}$ 和 $|\beta| = s$ 的形式。应用命题 6.3，再结合 (6.1.22)，即可得到估计

$$\begin{aligned}\big\| \overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{J}}(\partial^\alpha q, \partial^\alpha u, \partial^\alpha \eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{-1}} &\lesssim \rho \|\partial^\beta q, \partial^\beta u, \partial^\beta \eta\|_{\mathbb{X}_0} + \| \overset{w_0,\gamma_0}{A}(\partial^\beta q, \partial^\beta u, \partial^\beta \eta)\|_{\mathbb{Y}^0} \\ &\lesssim \rho \|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_s} + \| \overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\|_{\mathbb{Y}^s} + \begin{cases} 0 & \text{if } s \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}} \|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < s, \end{cases}\end{aligned} \tag{6.1.26}$$

这就完成了 $|\alpha| = s+1$ 情况下的证明。 □

6.2. **正规系统分析**。 研究动态可压缩纳维-斯托克斯系统时，一种有用的技巧最初由 Matsumura 和 Nishida [75], 提出：将连续性方程的法向（或垂直）导数与动量方程的某些分量作线性组合，从而揭示密度法向导数所具有的微妙耗散结构。现在，我们的目标是在行波问题中实现这一技巧的一个版本。其结果本质上将给出解的各种高阶范数的一个上界，而该上界仅依赖于数据以及切向导数的范数。

我们先进行一项计算，以说明正规系统定义的动机。假设 $\overset{w_0,\gamma_0}{A^1}(q,u,\eta) = g$ 且 $A^2(q,u,\eta) = f$，其中算子 A^i 的定义见 (3.4.8) 和 (3.4.9)，并考虑如下线性组合

$$\partial_n \overset{w_0}{A^1}(q,u,\eta) + \frac{\varrho}{\gamma_0(2(1-1/n)\mu(\varrho)+\lambda(\varrho))} \overset{\gamma_0}{A^2}(q,u,\eta)\cdot e_n = \partial_n g + \frac{\varrho}{\gamma_0(2(1-1/n)\mu(\varrho)+\lambda(\varrho))} f \cdot e_n. \tag{6.2.1}$$

左边的 $\partial_n^2(u\cdot e_n)$ 项相互抵消。随后，我们可以重新整理上式，得到关于 q 的（求导后的）稳态输运方程；也就是说，(6.2.1) 等价于

$$\partial_n\Big(\frac{\varrho^2}{\gamma_0(2(1-1/n)\mu(\varrho)+\lambda(\varrho))} q + \nabla\cdot(v_{w_0} q)\Big) = \overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,g,f), \tag{6.2.2}$$

其中

$$\begin{aligned}\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,g,f) &= \Big(\frac{\varrho^2}{\gamma_0(2(1-1/n)\mu(\varrho)+\lambda(\varrho))}\Big)' q + \partial_n g \\ &\quad - \partial_n(\varrho' u\cdot e_n) - \varrho' \partial_n u \cdot e_n - (\nabla_\parallel, 0)\cdot \partial_n(\varrho u) - \mathfrak{g}\partial_n \nabla\cdot(v_{w_0}\eta) \\ &\quad + \frac{\varrho}{\gamma_0(2(1-1/n)\mu(\varrho)+\lambda(\varrho))}\big(f\cdot e_n + \gamma_0^2 \partial_1 u\cdot e_n + \gamma_0 \mu(\varrho)\Delta_\parallel u \cdot e_n \\ &\quad + \gamma_0(\mu(\varrho)(1-2/n)+\lambda(\varrho))(\nabla_\parallel,0)\cdot\partial_n u + \gamma_0\varrho'(\mu'(\varrho)\mathbb{D}^0 u e_n\cdot e_n + \gamma_0 \lambda'(\varrho)\nabla\cdot u)\big).\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

关键在于，(6.2.3) 仅依赖于 $q, u, \partial_n u, \eta$ 的切向导数，以及 $\partial_n g$ 和 f。

如果在正则化假设 $N^{-1}L_m(q+\mathfrak{g}\eta)$ 与 $\overset{w_0}{\gamma_0 A^1}(q,u,\eta) = g$ 和 $A^2(q,u,\eta) = f$ 下进行相同的运算，回忆一下，L_m 在 (3.5.6) 中定义，那么我们得到

方程

$$\partial_n\Big(\frac{\varrho^2}{\gamma_0(2(1-1/n)\mu(\varrho)+\lambda(\varrho))}q+\nabla\cdot(v_{w_0}q)+\frac{1}{N}L_mq\Big)=\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,g,f). \tag{6.2.4}$$

恒等式 (6.2.2) 和 (6.2.4) 只是正规系统的一半，因为它们只能让我们用低阶项和切向导数来控制 q 的法向导数。接下来，我们来看如何以类似方式控制法向导数 $u_\circ$ 为此，我们只需考察γ_0方程 $A^2(q,u,\eta)=f_\circ$ 若 $j\in\{1,\dots,n-1\}$，则取该方程的 j^{th} 分量 γ_0，并分离出 $\partial_n^2(u\cdot e_j)$ 项：$\partial_n^2(u\cdot e_j)=\mathscr{N}^j(q,u,\eta,f)$，其中

$$\begin{aligned}\overset{\gamma_0}{\mathscr{N}^j}(q,u,\eta,f)=\frac{1}{\gamma_0\mu(\varrho)}\big(&-\gamma_0^2\varrho\partial_1u\cdot e_j+\varrho\partial_j(q+\mathfrak{g}\eta)-\gamma_0\mu(\varrho)\Delta_\parallel u\cdot e_j\\&-\gamma_0(\mu(\varrho)(1-2/n)+\lambda(\varrho))\partial_j\nabla\cdot u-\gamma_0\mathbb{D}^0ue_n\cdot e_j(\mu(\varrho))'-f\cdot e_j\big).\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

γ_0另一方面，若取 $A^2(q,u,\eta)=f$的 n^{th}分量，并分离出 $\partial_n^2(u\cdot e_n)$ 项，则得到方程 $\partial_n^2(u\cdot e_n)=\overset{\gamma_0}{\mathscr{N}^n}(q,u,\eta,f)$，其中

$$\begin{aligned}\overset{\gamma_0}{\mathscr{N}^n}(q,u,\eta,f)=\frac{1}{\gamma_0(2(1-1/n)\mu(\varrho)+\lambda(\varrho))}\big(&-\gamma_0^2\varrho\partial_1u\cdot e_n+\varrho\partial_nq-\gamma_0\mu(\varrho)\Delta_\parallel u\cdot e_n\\&-\gamma_0(\mu(\varrho)(1-2/n)+\lambda(\varrho))(\nabla_\parallel,0)\cdot\partial_nu-\gamma_0\varrho'(\mu'(\varrho)\mathbb{D}^0ue_n\cdot e_n+\lambda'(\varrho)\nabla\cdot u)-f\cdot e_n\big).\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

我们将这些计算的结果记录在以下引理中。

引理 *6.6*（法向系统的存在性）。设 $0<\rho\leqslant\rho_{\text{WD}}$ 如定理 *3.17* 中所定义，$w_0=(q_0,u_0,\eta_0)$ 如引理 *3.19* 中所述，$\gamma_0\in I$ 对于 $I\Subset\mathbb{R}+$ 为一个区间，且 $(g,f,k)\in\mathbb{Y}^0$。令 $\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)=\gamma_0^{-1}\varrho^2(2(1-1/n)\mu(\varrho)+\lambda(\varrho))^{-1}$，则有以下结论。

(1) 若 $(q,u,\eta)\in\overset{q_0}{,}\ \mathbb{X}^0\overset{u_0\,\eta_0}{,}$ 满足 $_{w_0,}\ \overset{\gamma_0}{A}(q,u,\eta)=(g,f,k)$，则

$$\partial_n(\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)q+\nabla\cdot(v_{w_0}q))=\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,f) \tag{6.2.7}$$

and

$$\partial_n^2u=(\overset{\gamma_0}{\mathscr{N}^1},\dots,\overset{\gamma_0}{\mathscr{N}^n})(q,u,\eta,f). \tag{6.2.8}$$

(2) 若 $m,N\in\mathbb{N}^+$ 满足 $m\geqslant2$，且 $(q,u,\eta)\in\mathbb{X}^0_{m,\ N}$ 满足方程 $\overset{w_0\ \gamma_0}{A_m}{}_{,,N}(q,u,\eta)=(g,f,k)$，则

$$\partial_n(\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)q+\nabla\cdot(v_{w_0}q)+N^{-1}L_mq)=\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,f), \tag{6.2.9}$$

并且（6.2.8）成立。

接下来我们研究 $\mathscr{N}$映射的映射性质，首先从 $\mathscr{N}^0$开始。

引理 6.7（$\mathscr{N}^0$的有界性）。设 $0<\rho\leqslant\rho_{\text{WD}}$，其中后者在定理 *3.17* 中定义，$w_0=(q_0、u_0、\eta_0)$ 如引理 *3.19* 所述，$\gamma_0\in I$对于区间 $I\Subset\mathbb{R}^+$，且 $s\in\mathbb{N}$。式 *(6.2.3)* 中的线性映射$_{w_0,\ \gamma_0}\mathscr{N}^0$：$\mathbb{X}_s\times H^{1+s}(\Omega)\times H^s(\Omega;\mathbb{R}^n)\to H^s(\Omega)$ 定义良好、有界，并满足

以下估计。

$$\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,g,f)\big\|_{H^s} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q,\partial_j^\sigma u,\partial_j^\sigma \eta\|_{\mathbb{X}_{s-1}} + \|g,f\|_{H^{1+s}\times H^s} + \begin{cases} 0 & \text{if } s<\lfloor n/2\rfloor, \\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\rangle\|\eta\|_{\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor\leqslant s. \end{cases} \tag{6.2.10}$$

这里的隐含常数取决于维数、物理参数、 ρ_{WD} 和 I。

证明。 我们分解

$$\overset{w_0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,g,f) = \overset{0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,g,f) - \mathfrak{g}\partial_n\nabla\cdot((v_{w_0}-\varrho' e_1/\mathfrak{g})\eta). \tag{6.2.11}$$

显然，对于任意 $s\geqslant 0$，我们有如下估计

$$\big\|\overset{0,\gamma_0}{\mathscr{N}^0}(q,u,\eta,g,f)\big\|_{H^s} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q,\partial_j^\sigma u,\partial_j^\sigma \eta\|_{\mathbb{X}_{s-1}} + \|g,f\|_{H^{1+s}\times H^s}. \tag{6.2.12}$$

对于剩余部分，我们利用引理 3.19 的第四项来估计 e

$$\|\partial_n\nabla\cdot((v_{w_0}-\varrho' e_1/\mathfrak{g})\eta)\|_{H^s} \leqslant \|\nabla\cdot(v_{w_0}\eta)\|_{H^{1+s}} + \|\partial_1\eta\|_{H^s} \lesssim \|\eta\|_{\mathcal{H}^{2+s}} + \begin{cases} 0 & \text{if } s<\lfloor n/2\rfloor, \\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+s}}\rangle\|\eta\|_{\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor\leqslant s. \end{cases} \tag{6.2.13}$$

然后我们注意到

$$\|\eta\|_{\mathcal{H}^{5/2+s}} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma\eta\|_{\mathcal{H}^{3/2+s}}. \tag{6.2.14}$$

□

接下来，我们研究由 (6.2.5) 和 (6.2.6) 定义的 $\mathscr{N}^j$ 映射。

引理 6.8 ($\mathscr{N}^j$在 $1\leqslant j\leqslant n$上的有界性)。 假设 $\gamma_0\in I$ 在 $I\Subset\mathbb{R}^+$ 某个区间上，$\gamma_0 s\in\mathbb{N}$，且 $i\in\{1,\dots,n\}$。则线性映射 $\mathscr{N}^i\colon \mathbb{X}_s\times H^s(\Omega;\mathbb{R}^n)\to H^s(\Omega)$ 当取自 (6.2.5) 且$j<n$ 或取自 (6.2.6) 且 $j=n$ 时，定义良好、有界，并满足以下估计。若$1\leqslant i\leqslant n-1$，则

$$\|\overset{\gamma_0}{\mathscr{N}^i}(q,u,\eta,f)\|_{H^s} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q,\partial_j^\sigma u,\partial_j^\sigma\eta\|_{\mathbb{X}_{s-1}} + \|f\|_{H^s}, \tag{6.2.15}$$

若 $j=n$，则

$$\|\overset{\gamma_0}{\mathscr{N}^n}(q,u,\eta,f)\|_{H^s} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q,\partial_j^\sigma u,\partial_j^\sigma\eta\|_{\mathbb{X}_{s-1}} + \|\partial_n q\|_{H^s} + \|f\|_{H^s}. \tag{6.2.16}$$

证明。 通过观察可知，这些估计显然成立。 □

下一个结果将第 4 节中的部分分析应用于此处正态系统中出现的特定稳态输运结构。

引理 6.9 (稳态输运估计)。 设 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者在定理 *3.17* 中定义，$w_0 = (q_0,\ u_0,\ \eta_0)$ 如引理 *3.19* 所述，$\gamma_0 \in I$ 对于 $I \Subset \mathbb{R}^+$ 一个区间，且 $\nu \in \mathbb{N}$。假设 $\varphi,\ \psi \in H^\nu(\Omega)$ 满足 $\nabla\cdot(v_{w_0}\varphi) \in H^\nu(\Omega)$ 并且

$$\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)\varphi + \nabla\cdot(v_{w_0}\varphi) = \psi \quad in\ \Omega, \tag{6.2.17}$$

其中，$\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)$ 的定义与引理 *6.6* 中相同。存在一个仅依赖于物理参数、ν和维数的$\rho_{\mathrm{ST},\,\nu} \in \mathbb{R}^+$，以及 I，使得若$\rho \leqslant \rho_{\mathrm{ST},\,\nu}$，则可得估计

$$\|\varphi, \nabla\cdot(v_{w_0}\varphi)\|_{H^\nu\times H^\nu} \lesssim \|\psi\|_{H^\nu} + \begin{cases} 0 & if\ \nu \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_\nu}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & if\ 1+\lfloor n/2\rfloor < \nu. \end{cases} \tag{6.2.18}$$

隐含　　常数依赖于 ν、维数、物理参数、$\rho_{\mathrm{ST},\,\nu}$和 I。

证明。大部分工作已在第 4 节中完成，即我们尝试对分解向量场 $X = \overset{\mathfrak{g}}{\varrho'} v_{w_0} = X_0 + X_1$应用命题 4.4，其中 $X_0 = \overset{\mathfrak{g}}{\varrho'} v^{(1)}_{q_0,\ u_0,\ \eta_0}$和$X_1 = e_1 + \overset{\mathfrak{g}}{\varrho'} v^{(2)}_{\eta_0}$，它们是按照引理 3.19 中 v_{w_0} 的分解拆分的。记 $\Lambda = \mathfrak{g}\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)\not{\gamma}\varrho'$。根据假设，$\widetilde{\varphi} = \varrho'\varphi/\mathfrak{g} \in H^\nu(\Omega)$ 满足

$$\Lambda\widetilde{\varphi} + \nabla\cdot(X\widetilde{\varphi}) = \psi \text{ in } \Omega \text{ and } \nabla\cdot(X\widetilde{\varphi}) = \nabla\cdot(v_{w_0}\varphi) \in H^\nu(\Omega). \tag{6.2.19}$$

因此，我们可以运用命题 4.4 得知，存在 $\rho^{(\nu)} \in \mathbb{R}^+$（仅取决于 ν、物理参数和 I），使得若 $\|DX_0,\ DX_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\,\infty}} \leqslant \rho^{(\nu)}$，则有如下估计

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{H^\nu} \lesssim \|\psi\|_{H^\nu} + \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor, \\ \|DX_0, DX_1\|_{H^\nu\times W^{\nu,\infty}}\|\widetilde{\varphi}\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor < \nu. \end{cases} \tag{6.2.20}$$

接下来注意到，隐含常数仅取决于物理参数和 $s \in \{\nu, 1+\lfloor n/2\rfloor\}$，并且有如下估计

$$\|\varphi\|_{H^s} \asymp \|\widetilde{\varphi}\|_{H^s} \text{ and } \|DX_0, DX_1\|_{H^s\times W^{s,\infty}} \lesssim \|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}, v^{(2)}_{\eta_0}\|_{H^{1+s}\times W^{1+s,\infty}}. \tag{6.2.21}$$

利用引理 3.19 的第一项和第二项，我们还可得知

$$\|v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}, v^{(2)}_{\eta_0}\|_{H^{1+s}\times W^{1+s,\infty}} \lesssim \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_s}. \tag{6.2.22}$$

结合这些界并取$\rho_{\mathrm{ST},\,\nu}$足够小，即可得到 φ 在 $H^\nu(\Omega)$ 范数下所声称的上界。

剩下需要在同一空间中证明 $\nabla\cdot(v_{w_0}\varphi)$ 的一个上界。方程 (6.2.17) 等价于 $\nabla\cdot(v_{w_0}\varphi) = \psi - \Lambda(\rho)\varphi$，因此在 $H^\nu(\Omega)$ 中取范数，并利用已建立的关于 $\|\varphi\|_{H^\nu}$ 的界，即可完成 (6.2.18) 的证明。□

现在我们可以确定主部方程解的范数的递归估计。接下来的命题将前面的法向系统识别和有界性结果结合起来，使我们能够用数据以及切向微分后的解的一个较低阶范数来控制该解的范数。

命题 *6.10*（法向系统结果的综合，*1*）。设 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者来自定理 *3.17*，$w_0 = (q_0,u_0,\eta_0)$ 如引理 *3.19* 中所述，$\gamma_0 \in I$ 对于 $I \Subset \mathbb{R}^+$ 一个区间，且$\nu \in \mathbb{N}$。假设 $(q,u,\eta) \in \overset{q_0\ u_0\ \eta_0}{,\mathbb{X}^\nu}$，且 $(g,f,k) \in \mathbb{Y}^\nu$ 满足 $\overset{\gamma_0}{w_0,A}(q,u,\eta) = (g,f,k)$。存在一个 $\rho_{\mathrm{normal},\nu} \in \mathbb{R}^+$，其仅依赖于物理参数、维数、$\nu$和 I，使得

若 $\rho \leqslant \rho_{\text{normal},\,\nu}$ 则我们有如下估计

$$\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}^{\nu}}^{q_0,u_0,\eta_0} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\mathbb{X}^{\nu-1}}^{q_0,u_0,\eta_0} + \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^{\nu}} + \begin{cases}0 & \text{if } \nu \leqslant \lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor < \nu.\end{cases} \tag{6.2.23}$$

隐含常数依赖于 ν、$\rho_{\text{normal},\,\nu}$、维数、物理参数以及 I。

证明。首先假设 $\rho \leqslant \rho_{\text{ST},\,1+\nu}$，其中该参数来自引理 6.9。我们先证明关于 q 的所述界。记 $\psi = \Lambda_{\gamma_0}(\varrho)q + \nabla\cdot(v_{w_0}q)$，其中 $\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)$ 来自引理 6.6。根据稳态输运估计引理 6.9，我们有

$$\|q,\nabla\cdot(v_{w_0}q)\|_{H^{1+\nu}\times H^{1+\nu}} \lesssim \begin{cases}\|\psi\|_{H^{1+\nu}} & \text{if } \nu \leqslant \lfloor n/2\rfloor,\\ \|\psi\|_{H^{1+\nu}} + \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}^{1+\nu}}\rangle\|q\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor < \nu.\end{cases} \tag{6.2.24}$$

为了由此得到关于 q 的所需界，我们将通过拆分为三部分来仔细估计 $\|\psi\|_{H^{1+\nu}}$：

$$\|\psi\|_{H^{1+\nu}} \lesssim \|\psi\|_{L^2} + \|\nabla\psi\|_{H^{\nu}} \lesssim \|\psi\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j\psi\|_{H^{\nu}} + \|\partial_n\psi\|_{H^{\nu}}. \tag{6.2.25}$$

q_0, 对于 (6.2.25) 中的 L^2-范数，我们根据范数在以下空间上的定义进行估计 $\mathbb{X}^{-1}$：

$$\|\psi\|_{L^2} \lesssim \|q\|_{L^2} + \|\nabla\cdot(v_{w_0}q)\|_{L^2} \lesssim \|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}^{-1}}^{q_0,u_0,\eta_0}. \tag{6.2.26}$$

接下来，我们利用定义 6.1 中的交换子算子，处理 (6.2.25) 中的切向（$1 \leqslant j \leqslant n-1$）导数项，写作

$$\partial_j\psi = \Lambda_{\gamma_0}(\varrho)\partial_j q + \nabla\cdot(v_{w_0}\partial_j q) + \overset{w_0}{\mathscr{C}}{}^{j}(q,0). \tag{6.2.27}$$

q_0, 利用空间的定义即可轻松处理第一项和第二项 $\mathbb{X}^{\nu-1}$：

$$\|\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)\partial_j q + \nabla\cdot(v_{w_0}\partial_j q)\|_{H^{\nu}} \lesssim \|\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta\|_{\mathbb{X}^{\nu-1}}^{q_0,u_0,\eta_0}. \tag{6.2.28}$$

w_0接下来，我们对 (6.2.27) 中的 $\mathscr{C}^j(q,\,0)$ 项应用引理 6.2，再结合估计 (6.2.28)，可得

$$\|\partial_j\psi\|_{H^{\nu}} \lesssim \|\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta\|_{\mathbb{X}^{\nu-1}}^{q_0,u_0,\eta_0} + \rho\|q\|_{H^{1+\nu}} + \begin{cases}0 & \text{若 } \nu \leqslant \lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|q\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{若 } \lfloor n/2\rfloor < \nu,\end{cases} \tag{6.2.29}$$

对于所有 $1 \leqslant j \leqslant n-1$。

为了处理 (6.2.25) 中的法向（$j=n$）导数，我们利用法向$w_0,\ \gamma_0$系统的存在性，引理 6.6，该引理表明 $\partial_n\psi = \mathscr{N}^0(q,\ u,\ \eta,\ g,\ f)$。然后利用线性映射 $\mathscr{N}^0$的有界性，即命题 6.7，来给出.....的上界

$$\|\partial_n\psi\|_{H^{\nu}} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n}\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\mathbb{X}_{\nu-1}} + \|g,f\|_{H^{1+\nu}\times H^{\nu}} + \begin{cases}0 & \text{if } \nu \leqslant \lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|\eta\|_{\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor < \nu.\end{cases} \tag{6.2.30}$$

现在我们已经处理了 (6.2.25) 右侧的所有项；结合 (6.2.24)、(6.2.25)、(6.2.26)、(6.2.28)、(6.2.29) 和 (6.2.30)，可推出估计

$$\begin{aligned}&\|q,\nabla\cdot(v_{w_0}q)\|_{H^{1+\nu}\times H^{1+\nu}}\lesssim\rho\|q\|_{H^{1+\nu}}\\&+\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j q,\partial_j u,\partial_j\eta\|_{\mathbb{X}^{\nu-1}}^{q_0,u_0,\eta_0}+\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu}+\begin{cases}0 & \text{若 } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{若 } \lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases}\end{aligned}\tag{6.2.31}$$

接下来，我们关注 (6.2.23) 中 u 的估计。注意，

$$\|u\|_{H^{2+\nu}}\lesssim\|u\|_{L^2}+\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j u\|_{H^{1+\nu}}+\|\partial_n u\|_{H^{1+\nu}}.\tag{6.2.32}$$

L^2-范数以及切向（$1\leqslant j\leqslant n-1$）导数之和显然可由 (6.2.23) 的右端控制。对于法向（$j=n$）导数，我们像之前一样分解：

$$\|\partial_n u\|_{H^{1+\nu}}\leqslant\|\partial_n u\|_{L^2}+\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j\partial_n u\|_{H^\nu}+\|\partial_n^2 u\|_{H^\nu}.\tag{6.2.33}$$

(6.2.33) 中的前两项同样显然有 (6.2.23) 右端给出的上界。根据引理 6.6，$\partial_n^2 u$ 满足 (6.2.8)，因此我们可以利用引理 6.8 中证明的线性映射 $\mathscr{N}^1,\dots,\mathscr{N}^n$ 的有界性来估计

$$\|\partial_n^2 u\|_{H^\nu}\lesssim\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q,\partial_j^\sigma u,\partial_j^\sigma\eta\|_{\mathbb{X}_{\nu-1}}+\|\partial_n q\|_{H^\nu}+\|f\|_{H^\nu}.\tag{6.2.34}$$

对于右侧的 $\|\partial_n q\|_{H^\nu}$ 项，我们代入由 (6.2.31) 得到的 $\|q\|_{H^{1+\nu}}$ 的已有界。随后综合这些界，推出 (6.2.23) 中所需的 u 估计。剩下只需处理 η。然而，(6.2.23) 中关于 η 的估计可直接由 (6.2.14) 得出。□

注 6.11. 我们可以自由选择函数 $\mathbb{N}\ni\nu\mapsto\rho_{\text{normal},\,\nu}\in\mathbb{R}^+$ 使其单调不增，而不改变命题 *6.10* 的陈述或结论。

接下来，我们考虑与正则化主部算子$w_{0,\,\gamma_0}A_{m,\,N}$相对应的正规系统。我们需要以下预备结果，它与未正则化情形下的引理 6.9 类似。

引理 6.12 (正则化稳态输运估计)。 设 $0<\rho\leqslant\rho_{\text{WD}}$，其中后者定义于定理 *3.17* 中，$w_0=(q_0,u_0,\eta_0)\in B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho)\cap\mathbb{X}^\infty$, $\gamma_0\in I$对于 $I\Subset\mathbb{R}^+$某个区间，$m,N\in\mathbb{N}^+$，且 $\nu\in\{1,\dots,m\}$。假设 $\varphi\in H^{\nu+2m}(\Omega)$ 和 $\psi\in H^\nu(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases}\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)\varphi+\nabla\cdot(v_{w_0}\varphi)+N^{-1}L_m\varphi=\psi, & in\ \Omega,\\ \partial_n^m\varphi=\cdots=\partial_n^{2m-1}\varphi=0 & in\ \partial\Omega,\end{cases}\tag{6.2.35}$$

其中 $\Lambda_{\gamma_0}(\varrho)$ 和 L_m 分别定义于引理 *6.6* 和 (3.5.6) 中。存在一个 $\rho_{\text{RST},m}\in\mathbb{R}^+$，它仅依赖于物理参数、维数、$m$ 和 I，使得若 $\rho\leqslant\rho_{\text{RST},m}$ 且$N\gtrsim\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\lfloor n/2\rfloor+m}}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor}$，则我们有如下估计

$$\|\varphi,\nabla\cdot(v_{w_0}\varphi),N^{-1}\varphi\|_{H^\nu\times H^\nu\times H^{\nu+2m}}\lesssim\|\psi\|_{H^\nu}+\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{2m}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\psi\|_{L^2},\tag{6.2.36}$$

其中隐含的 常数取决于 m、维数、物理参数、$\rho_{\text{RST},m}$ 和 I。

证明。 我们再次通过应用定理 4.8，旨在调用第 4 节中的结果。为此，我们令 $\Lambda_0 = \Lambda_{\gamma_0}(\varrho)$ 和 $\Lambda_1 = \mathfrak{g}^{-1}\varrho'$，并利用引理 3.19 定义分解向量场 $X = X_0 + X_1$，其中 $X_0 = \overset{\mathfrak{g}}{\underset{\varrho'}{}} v^{(1)}_{q_0,u_0,\eta_0}$ 和 $X_1 = e_1 + \overset{\mathfrak{g}}{\underset{\varrho'}{}} v^{(2)}_{\eta_0}$。由该引理的第一项和第二项可知，

$$\|X_0, X_1\|_{H^{1+s}\times W^{1+s,\infty}} \lesssim \langle \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_s}\rangle \text{ for } \mathbb{N} \ni s \geqslant 1 + \lfloor n/2 \rfloor. \tag{6.2.37}$$

由 $\nabla\Lambda_1 = \gamma\mathfrak{g}^{-1}\varrho'' e_n$ 这一附加事实，我们可知

$$\max\{\|DX_0, DX_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}, \|X_0\cdot\nabla\Lambda_1\|_{H^{1+\lfloor n/2\rfloor}}, \|X_1\cdot\nabla\Lambda_1\|_{W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}\} \lesssim \|_{q_0,u_0,\eta_0}\|_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}} \leqslant \rho. \tag{6.2.38}$$

因此，我们可以取 $0 < \rho_{\mathrm{RST},\ m} \lesssim \mathcal{P}^{(m)}$，其中后者在定理 4.8 中定义，以得到所述结论。□

下一个结果是命题 6.10 针对 m，N-正则化主部算子的对应结果。两者有几个关键区别，其中最显著的是估计成立的范围有限，且取决于 m。另一个较次要的区别是，虽然以下估计不再是温和的（这是由于出现了 $\langle\cdot\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}$ 项），但它们仍将背景项的所有高阶范数置于解的低阶范数上。

命题 6.13 （法向系统结果的综合，2）。 设 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者由定理 *3.17* 定义，$w_0 = (q_0, u_0, \eta_0) \in B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\ \rho) \cap \mathbb{X}^\infty$，$\gamma_0 \in I$ 对于 $I \Subset \mathbb{R}^+$ 一个区间，$m, N \in \mathbb{N}^+$ 满足 $m \geqslant 2$，且 $\nu \in \{0, \dots, m-1\}$。假设 $(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^\nu_{m,\ N}$ 以及 $(g, f, k) \in \mathbb{Y}^\nu$ 满足 $\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,\ N}(q, u, \eta) = (g, f, k)$。存在 $\rho_{\mathrm{reg},\ \mathrm{normal},\ \nu,\ m} \in \mathbb{R}^+$，它们仅依赖于物理参数、维数、 ν、 m 和 I，使得若 $\rho \leqslant \rho_{\mathrm{reg},\ \mathrm{normal},\ \nu,\ m}$ 且

$$N \gtrsim \langle \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\lfloor n/2\rfloor+m}}\rangle^{4+2\lfloor n/2\rfloor}, \tag{6.2.39}$$

于是我们得到如下估计

$$\|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}^\nu_{m,N}} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1} \|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}} + \|g, f, k\|_{\mathbb{Y}^\nu} + \langle \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor} \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}^{-1}_{m,N}}. \tag{6.2.40}$$

隐含常数取决于维数、物理参数、 m $\rho_{\mathrm{reg},\ \mathrm{normal},\ \nu,\ m}$，以及 I。

证明。 证明大体上仿照命题 6.10 的证明，但由于我们必须借助正则化稳态输运方程解的估计，因此所得估计在几个关键之处有所不同。因此，我们将详细展开论证的大部分步骤，并在可能时参照命题 6.10 的证明。

首先假设 $\rho \leqslant \rho_{\mathrm{RST},\ m}$。我们先通过设定 $\psi = \Lambda_{\gamma_0}(\varrho)q + \nabla\cdot(v_{w_0}q) + N^{-1}L_m q$，来给出关于 q 的界。根据正则化稳态输运估计（引理 6.12），我们有如下上界

$$\|q, \nabla\cdot(v_{w_0}q), N^{-1}q\|_{H^{1+\nu}\times H^{1+\nu}\times H^{1+\nu+2m}} \lesssim \|\psi\|_{H^{1+\nu}} + \langle \|q_0, u_0, \eta_0\|_{\mathbb{X}_{2m}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|\psi\|_{L^2}, \tag{6.2.41}$$

为了由此推导出所需的估计，我们将其拆分为

$$\|\psi\|_{H^{1+\nu}} \leqslant \|\psi\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j\psi\|_{H^\nu} + \|\partial_n\psi\|_{H^\nu}. \tag{6.2.42}$$

对于 L^2-范数，我们按照（6.2.26）中的方式进行上界估计：

$$\|\psi\|_{L^2} \lesssim \|q, u, \eta\|_{\mathbb{X}^{-1}_{m,N}}. \tag{6.2.43}$$

我们利用恒等式研究（6.2.42）中的切向（$1 \leqslant j \leqslant n-1$）导数

$$\partial_j \psi = \Lambda_{\gamma_0}(\varrho)\partial_j q + \nabla \cdot (v_{w_0}\partial_j q) + N^{-1}L_m \partial_j q + \overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,0), \tag{6.2.44}$$

$_{w_0}$其中 $\mathscr{C}^j$ 如定义 6.1 所示，这表明

$$\|\partial_j \psi\|_{H^\nu} \lesssim \|\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0 \\ \mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}}} + \big\|\overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,0)\big\|_{H^\nu}. \tag{6.2.45}$$

根据引理 6.2 中确立的 $\mathscr{C}^j$ 有界性，我们得到估计

$$\|\overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,0)\|_{H^\nu} \lesssim \rho\|q\|_{H^{1+\nu}} + \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q\|_{H^{1+\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < \nu. \end{cases} \tag{6.2.46}$$

当 $\lfloor n/2 \rfloor < \nu$时，我们使用插值（见引理 3.25）和杨氏不等式进一步估计 $\|q_0,\ u_0,\ \eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q\|_{H^{1+\lfloor n/2 \rfloor}} \lesssim \rho\|q\|_{H^{1+\nu}} + \|q_0,\ u_0,\ \eta_0\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2 \rfloor+\nu}}\|q\|_{L^2}$。因此，对于任意 ν，我们有上界

$$\big\|\overset{w_0}{\mathscr{C}^j}(q,0)\big\|_{H^\nu} \lesssim \rho\|q\|_{H^{1+\nu}} + \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2 \rfloor+\nu}}\|q\|_{L^2} \tag{6.2.47}$$

结合（6.2.45）和（6.2.47），然后对 $1 \leqslant j \leqslant n-1$求和，我们得到切向估计

$$\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j\psi\|_{H^\nu} \lesssim \rho\|q\|_{H^{1+\nu}} + \sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j q, \partial_j u, \partial_j \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0 \\ \mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}}} + \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2 \rfloor+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{-1}}. \tag{6.2.48}$$

剩下的工作是估计 (6.2.42) 中的 $\|\partial_n\psi\|_{H^\nu}$项。为此，我们回顾正则化法向$_{w_0,\ \gamma_0}$系统的引理 6.6，该引理指出 $\partial_n\psi = \mathscr{N}^0(q,\ u,\ \eta,\ g,\ f)$。因此，我们可以利用 $\mathscr{N}^0$的连续性，引理 6.7，得到

$$\begin{aligned}\|\partial_n\psi\|_{H^\nu} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\mathbb{X}_{\nu-1}} + \|g,f\|_{H^{1+\nu}\times H^\nu} \\ + \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|\eta\|_{\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2 \rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2 \rfloor < \nu. \end{cases}\end{aligned} \tag{6.2.49}$$

同样，在 $\lfloor n/2 \rfloor < \nu$ 的后一种情形下，我们使用插值和杨氏不等式来估计

$$\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|\eta\|_{\mathcal{H}^{1+\lfloor n/2 \rfloor}} \lesssim \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor+1/2}}\rangle\|\eta\|_{\mathcal{H}^{3/2+\nu}} + \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor+1/2+\nu}}\rangle\|\eta\|_{\mathcal{H}^{3/2}}, \tag{6.2.50}$$

因此，在所有情况下

$$\|\partial_n\psi\|_{H^\nu} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\mathbb{X}_{\nu-1}} + \|g,f\|_{H^{1+\nu}\times H^\nu} + \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2 \rfloor+1/2+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{-1}}. \tag{6.2.51}$$

Upon 综合 (6.2.42)、(6.2.43)、(6.2.48) 和 (6.2.51)，我们得到边界 d

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{H^{1+\nu}} \lesssim \rho\|q\|_{H^{1+\nu}} + \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0 \\ \mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}}} \\ + \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu} + \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2 \rfloor+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0 \\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}}.\end{aligned} \tag{6.2.52}$$

现在，我们将 (6.2.43) 和 (6.2.52) 代入 (6.2.41)，并选取 $\rho_{\mathrm{reg,normal},\nu,m} \in \mathbb{R}^+$ 使得$\rho_{\mathrm{reg,normal},\nu,m} \leqslant \rho_{\mathrm{RST},m}$ 且足够小，从而可以将右侧的 $\|q\|_{H^{1+\nu}}$ 项吸收到左侧中。由此得到

$$\|q, \nabla\cdot(v_{w_0}q), N^{-1}q\|_{H^{1+\nu}\times H^{1+\nu}\times H^{1+\nu+2m}} \lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}}} + \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu} + \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}}, \tag{6.2.53}$$

这就推出了 (6.2.40) 中所述的 q 上界。

最后，对 u 和 η 的估计的证明大体上重述了命题 6.10 证明的后半部分。我们与之前完全相同地得到方程 (6.2.32)、(6.2.33) 和 (6.2.34)。然后，我们将 (6.2.53) 中 q 的新上界代入 $\|\partial_n q\|_{H^\nu}$ 项。这就得到了 (6.2.40) 中的 u 上界。η 上界仍然显然成立。□

注 6.14. 对于固定的 m，我们可以自由选择函数 $\{0,\dots,m-1\}\ni\nu\mapsto\rho_{\mathrm{reg,\ normal,\ \nu,\ m}}\in\mathbb{R}^+$ 使其为非增函数，而不改变命题 *6.13* 的陈述或结论。

本小节的最后一个结果迭代了命题 6.10 和 6.13 的结论，将估计右端的形式改为：高阶切向导数以低阶范数出现。

定理 6.15（法向系统结果的综合，3）。设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者在定理 *3.17* 中定义，$r\in\{1+\lfloor n/2\rfloor, 2+\lfloor n/2\rfloor\}$，$w_0=(q_0,\ u_0,\ \eta_0)\in B_{\mathbb{X}^r}(0,\ \rho)\cap\mathbb{X}^\infty$，$\gamma_0\in I$其中$I\Subset\mathbb{R}^+$ 为一个区间，$\nu\in\mathbb{N}$，且 $(g,\ f,\ k)\in\mathbb{Y}^\nu$。以下结论成立。

(1) 若 $r=1+\lfloor n/2\rfloor$，$\rho\leqslant\rho_{\mathrm{normal},\ \nu}$，且 $(q,u,\eta)\in{}^{q_0}_{,}\mathbb{X}^{\nu}_{,}{}^{u_0\,\eta_0}$，满足 $_{w_0,}A^{\gamma_0}(q,u,\eta)=(g,f,k)$，则有如下估计

$$\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^\nu}} \lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu} + \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1+\nu\\ \alpha\cdot e_n=0}}\|\partial^\alpha q,\partial^\alpha u,\partial^\alpha\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}}} + \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu} + \begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases} \tag{6.2.54}$$

这里的隐含常数取决于 ν、维数、物理参数、ρ_{normal}、ν 和 I。*(2)* 若 $r=2+\lfloor n/2\rfloor$、$\mathbb{N}\ni m\geqslant \max\{2, 1+\nu\}$、$N\in\mathbb{N}$ 满足 *(6.2.39)*，且 $\rho\leqslant\rho_{\mathrm{reg}}$、normal、$\nu$、$m$ 和 $(q,\ u,\ \eta)\in\mathbb{X}^\nu_{m,N}$、$N$ 满足 A_m，$N(q,\ u,\ \eta)=(g,\ f,\ k)$，则存在仅依赖于 ν、m 和维数的 χ_ν、$_m\in\mathbb{R}^+$，以及仅依赖于 $1/\rho$、ν、m 的 $C_{1/\rho}\in\mathbb{R}^+$，使得我们有如下估计

$$\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^\nu_{m,N}}} \lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^\nu_{m,N}}} + \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1+\nu\\ \alpha\cdot e_n}}\|\partial^\alpha q,\partial^\alpha u,\partial^\alpha\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}} + \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu} + C_{1/\rho}\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{\chi_{\nu,m}}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}}. \tag{6.2.55}$$

这里的隐含常数取决于 m、维数、各种物理参数、$\rho_{\mathrm{reg,normal},\nu,m}$ 和 I。

证明。我们先通过归纳论证证明第一项。要归纳证明的命题如下：若 $s\in\mathbb{N}^+$ 满足 $s\leqslant\nu+1$，其中某个 $\nu\in\mathbb{N}$、$\rho\leqslant\rho_{\mathrm{normal},\nu}$，且

$_{q_0,u_0,\eta_0}(q,u,\eta)\in\ \mathbb{X}^{\nu}$，则有如下估计

$$\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\nu}}+\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant s\\ \alpha\cdot e_n=0}}\|\partial^{\alpha}q,\partial^{\alpha}u,\partial^{\alpha}\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-s}}}$$
$$+\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu}}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases}\tag{6.2.56}$$

基例 $s=1$ 已在命题 6.10 中得到证明。现在假设 $\mathbb{N}\ni s\geqslant 2$ 满足该命题在 $s-1$ 层次成立。我们将验证该命题在 s 层次也成立。假设 $s\leqslant\nu+1_{q_0,u_0,\eta_0}$ 对某些 $\nu\in\mathbb{N}$, $\rho\leqslant\rho_{\mathrm{normal},\nu}$，且 (q,u,η) $\in\ \mathbb{X}^{\nu}$。首先，我们应用命题 6.10，得到估计

$$\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}}}\lesssim\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-1}}}$$
$$+\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu}}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases}\tag{6.2.57}$$

固定 $\sigma\in\{0,1\}$ 和 $j\in\{1,\dots,n-1\}$。为处理 (6.2.57) 中出现的 $\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{q_0,\mathbb{X}^{\nu-1}}^{u_0\ \eta_0}$ 项，我们在 $s-1$ 层次应用归纳假设（同时注意注 6.11），从而得到

$$\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-1}}}\lesssim\rho\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\mathbb{X}_{\nu-1}}+\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant s-1\\ \alpha\cdot e_n=0}}\|\partial^{\alpha}\partial_j^{\sigma}q,\partial^{\alpha}\partial_j^{\sigma}u,\partial^{\alpha}\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-s}}}$$
$$+\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu-1}}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\nu}}\rangle\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases}\tag{6.2.58}$$

我们通过 $\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\mathbb{X}_{\nu-1}}\lesssim\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\nu}}$，对右端的第一项进行平凡估计。对于涉及算子$_{w_0,}\overset{\gamma_0}{A}$ 的项，我们调用命题 6.4 的第一条（注意到$\nu>0$），从而得到上界

$$\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu-1}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\nu}}$$
$$+\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu}}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s.\end{cases}\tag{6.2.59}$$

将不等式 (6.2.57)、(6.2.58) 和 (6.2.59) 与这一事实结合 t

$$\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant 1+\lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\nu}}\rangle\|\partial_j^{\sigma}q,\partial_j^{\sigma}u,\partial_j^{\sigma}\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor n/2\rfloor<\nu,\end{cases}$$
$$\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\nu}}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<s,\end{cases}\tag{6.2.60}$$

我们为级别 s 建立 (6.2.56)，从而证明该命题在 s 级成立。根据归纳法，该命题对所有 $s\in\mathbb{N}^{+}$ 均成立。在 (6.2.56) 中取 $s=1+\nu$，即可得到 (6.2.54)，由此完成第一项的证明。

接下来，我们讨论第二项。这里的策略与第一项相同，但由于 (6.2.54) 和 (6.2.55) 之间存在差异，无法完全照搬相同的论证。我们要通过归纳法证明的新命题如下：若 $s \in \mathbb{N}^+$，则对所有 $\mathbb{N} \ni \nu \geqslant s-1$ 和 $\mathbb{N} \ni m \geqslant \max\{2, 1+\nu\}$，存在依赖于 s、m 和 ν 的 $\chi \in \mathbb{R}^+$，以及依赖于 s、$1/\rho$、ν 和 m 的 $C_{1/\rho}$，使得对所有满足 (6.2.39) 的 $N \in \mathbb{N}$，$\rho \leqslant \rho_{\text{reg, normal, } \nu, m}$，以及 $(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^{\nu}_{m, N}$，我们都有如下估计

$$\begin{aligned}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}} &\lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}} + \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant s\\ \alpha\cdot e_n=0}} \|\partial^\alpha q, \partial^\alpha u, \partial^\alpha \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-s}_{m,N}}} \\ &\quad + \big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu}} + C_{1/\rho}\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{\chi}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}}. \end{aligned} \tag{6.2.61}$$

与之前一样，基例 $s=1$ 已经建立，这次是在命题 6.13 中建立的。

现在假设 $\mathbb{N} \ni s \geqslant 2$ 使得归纳命题在层级 $s-1$ 上成立。我们现在将验证其在层级 s 上成立。假设 $\mathbb{N} \ni \nu \geqslant s-1$，$\mathbb{N} \ni m \geqslant \max\{2, 1+\nu\}$，$N \in \mathbb{N}$ 满足（6.2.39），$\rho \leqslant \rho_{\text{reg, normal, } \nu, m}$，以及 $(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^{\nu}_{m, N}$。与之前一样，我们首先调用命题 6.13，得到估计

$$\begin{aligned}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}} &\lesssim \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}}} + \big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu}} \\ &\quad + \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}}. \end{aligned} \tag{6.2.62}$$

对于 $\sigma \in \{0,1\}$ 和 $j \in \{1, \dots, n-1\}$，我们调用（$s-1$）-归纳假设，同时再次注意注 6.14，以得到上界

$$\begin{aligned}\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}}} &\lesssim \rho\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}}} + \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant s-1\\ \alpha\cdot e_n=0}} \|\partial^\alpha\partial_j^\sigma q, \partial^\alpha\partial_j^\sigma u, \partial^\alpha\partial_j^\sigma \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-s}_{m,N}}} \\ &\quad + \big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N}(\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu-1}} + C_{1/\rho}\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{\chi}\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}}. \end{aligned} \tag{6.2.63}$$

现在我们给出三个估计。首先，我们再次得到显然的估计

$$\|\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu-1}_{m,N}}} \lesssim \|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}}. \tag{6.2.64}$$

其次，利用命题 6.4 的第二项、引理 3.25 中 $\mathbb{X}$-范数的对数凸性以及杨氏不等式，我们得到以下界

$$\begin{aligned}\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N}(\partial_j^\sigma q, \partial_j^\sigma u, \partial_j^\sigma \eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu-1}} &\lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu} \\ &\quad + \big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}_{m,N}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu}} + \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \leqslant \lfloor n/2\rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor < \nu, \end{cases} \\ &\lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu} + \big\|\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^{\nu}} + \rho^{-1-\lfloor n/2\rfloor}\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{-1}}. \end{aligned} \tag{6.2.65}$$

第三，依据 t 再次利用 $\mathbb{X}$-范数的对数凸性和杨氏不等式，我们得到以下界 d

$$C_{1/\rho}\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{\chi}\|\partial_j^\sigma q,\partial_j^\sigma u,\partial_j^\sigma\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}}$$
$$+\rho^{-1/\nu}C_{1/\rho}^{(1+\nu)/\nu}\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+m+\lfloor n/2\rfloor\}}}\rangle^{\chi(1+\nu)/\nu}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}}.\quad(6.2.66)$$

现在，我们将估计 (6.2.62) 和 (6.2.63) 与三项 (6.2.64)、(6.2.65) 和 (6.2.66) 结合起来；这表明归纳命题在 s 的层次成立，因此通过归纳法对所有 $s\in\mathbb{N}^+$ 都成立。现在，在 (6.2.61) 中取 $s=1+\nu$，即可得到第二项中的估计 (6.2.55)。□

6.3. **主部的估计与存在性**。在本小节中，我们首先证明系统 (5.0.1) 和 (5.0.2) 的先验估计。随后，我们推导前者的存在性理论。

定理 6.16 (主部与正则化的先验估计)。设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者在定理 *3.17* 中定义，$r\in\{1+\lfloor n/2\rfloor,2+\lfloor n/2\rfloor\}$，$w_0=(q_0,\ u_0,\ \eta_0)\in B_{\mathbb{X}^r}(0,\ \rho)\cap\mathbb{X}^\infty$，$\gamma_0\in I$ 其中 $I\Subset\mathbb{R}^+$ 为一个区间，$\nu\in\mathbb{N}$，且 $(g,\ f,\ k)\in\mathbb{Y}^\nu$。以下结论成立。

(1) 设 $r=1+\lfloor n/2\rfloor$。存在一个 $\rho_{\mathrm{est},\ \nu}\in\mathbb{R}^+$，它仅依赖于 ν、维数、$q_0,\ u_0,\ \eta_0$各种物理参数以及 I；若 $\rho\leqslant\rho_{\mathrm{est},\ \nu}$，则对于满足 $w_0,\ \overset{\gamma_0}{A}(q,u,\eta)=(g,f,k)$ 的 $(q,u,\eta)\in\mathbb{X}^\nu$，我们有如下先验估计

$$\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}}}\lesssim\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases}\quad(6.3.1)$$

隐含的常数依赖于 ν、维数、物理参数、$\rho_{\mathrm{est},\ \nu}$ 和 I。

(2) 设 $r=2+\lfloor n/2\rfloor$ 且 $\mathbb{N}\ni m\geqslant\max\{2,1+\nu\}$。存在一个 $\rho_{\mathrm{reg},\ \nu,\ m}\in\mathbb{R}^+$，它仅依赖于 ν, m、各种物理参数以及 I；若 $\rho\leqslant\rho_{\mathrm{reg},\ \nu,\ m}$，则对于 $\underset{w_0,\gamma_0}{(q,u,\eta)}\in\mathbb{X}^\nu_{m,\ N}$ 满足 $A_{m,\ N}(q,u,\eta)=(g,f,k)$ 我们有先验估计

$$\|q,\ u,\ \eta\|_{\substack{q_0,\ u_0,\ \eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}}\lesssim\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu}+\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{\chi_{\nu,m}}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}},\quad(6.3.2)$$

其中 $\chi_{\nu,\ m}\in\mathbb{R}^+$ 来自定理 *6.15* 的第二项。这里的隐含常数取决于 ν、m、维数、物理参数、$\rho_{\mathrm{reg},\ \nu,\ m}$和 I。

证明。我们首先证明第一项。假设 $\rho\leqslant\min\{\rho_{\mathrm{weak}},\rho_{\mathrm{normal},\nu}\}$，其中这些小量参数分别来自命题 5.2 和 6.10。将命题 5.2 中弱解的先验估计与定理 6.5 第一项中的切向导数估计结合起来，我们得到

$$\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant1+\nu\\ \alpha\cdot e_n=0}}\|\partial^\alpha q,\partial^\alpha u,\partial^\alpha\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu}$$
$$+\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases}\quad(6.3.3)$$

将上界 (6.3.3) 代入定理 6.15 第一项的结论 (6.2.54)，得到估计

$$\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu}+\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu}+\begin{cases}0 & \text{if } \nu\leqslant\lfloor n/2\rfloor,\\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor<\nu.\end{cases}\quad(6.3.4)$$

因此，我们可以将 $\rho_{\mathrm{est},\nu}\in\mathbb{R}^+$ 取为充分小，使得当 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{est},\nu}$ 时，可以将右端的 $\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu}$ 项吸收到左端，从而得到 (6.3.1)。这就完成了第一项的证明。

接下来考虑第二项。论证基本相同，但多了一个步骤。假设 $0 < \rho \leqslant \min\{\rho_{\mathrm{weak,reg}}, \rho_{\mathrm{reg,normal},\nu,m}\}$，其中这些小量参数分别来自命题 5.4 和 6.13。与第一项的证明一样，我们结合命题 5.4、定理 6.5 的第二项以及定理 6.15 的第二项的结论；然而，得到的估计略有不同：

$$\begin{aligned}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}} \lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}} + \|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^{\nu}} \\ + C_{1/\rho}\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{\chi_{\nu,m}}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}} \\ + \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \leqslant \lfloor n/2\rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor < \nu. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

为得到估计 (6.3.2)，注意到引理 3.25 中 $\mathbb{X}$ 范数的对数凸性结合杨氏不等式，给出了上界

$$\begin{aligned}\begin{cases} 0 & \text{if } \nu \leqslant \lfloor n/2\rfloor, \\ \|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}} & \text{if } \lfloor n/2\rfloor < \nu, \end{cases} \lesssim \rho\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{\nu}_{m,N}}} \\ + \rho^{-1-\lfloor n/2\rfloor}\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle^{2+\lfloor n/2\rfloor}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0,\\ \mathbb{X}^{-1}_{m,N}}} \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

因此，我们可以结合估计 (6.3.5) 和 (6.3.6)，然后令 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{reg},\ \nu,\ m}$ 充分小，从而得到 (6.3.2)。□

现在，我们可以给出线性化系统 (5.0.1) 主部的存在性结果。

定理 6.17（主部的存在性）。设 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，其中后者在定理 *3.17* 中定义，并设 $w_0 = (q_0, u_0, \eta_0) \in B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0, \rho) \cap \mathbb{X}^{\infty}$，$\gamma_0 \in I$ 为一个区间。对每个 $\nu \in \mathbb{N}$，存在一个 $\rho_{\mathrm{exi},\ \nu} \in \mathbb{R}^{+}$，它依赖于 ν、物理参数和 I；若 $\rho \leqslant \rho_{\mathrm{exi},\ \nu}$，则映射

$$\overset{w_0,\gamma_0}{A} : \overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathbb{X}^{\nu}} \to \mathbb{Y}^{\nu}, \tag{6.3.7}$$

其作用由(3.4.7)给出，是一个巴拿赫同构。

证明。取 $\rho_{\mathrm{exi},\ \nu} = \min\{\rho_{\mathrm{est},\nu}, \rho_{\mathrm{reg},\nu,\max\{2,1+\nu\}}\}$，其中这些小量参数来自定理 6.16 的第一项和第二项。(6.3.7)中的映射定义良好，这是命题 3.21 第一项的推论。根据定理 6.16 第一项中的先验估计 (6.3.1)，该映射是单射。剩下的只需验证满射性。

定理 6.16 第二项的证明表明 $\rho_{\mathrm{exi},\nu} \leqslant \rho_{\mathrm{reg,weak}}$，因此我们可以$_{w_0,\gamma_0}$地应用推论 5.6。推论 5.6 告诉我们，当 $N \in \mathbb{N}$ 充分大时，映射 $A_{\max\{2,1+\nu\},N} : \mathbb{X}^{\nu}_{\max\{2,1+\nu\},N} \to \mathbb{Y}^{\nu}$是巴拿赫同构；例如，取 $N \geqslant N$。于是，给定 $(g,f,k) \in \mathbb{Y}^{\nu}$，我们可以通过 $(q_N,u_N,\eta_N)^{\intercal} = \big(\overset{w_0}{\underset{\gamma_0}{\ }}, A_{\max\{2,1+\nu\},N}\big)^{-1}(g,f,k)$ 定义序列 $\{(q_N,u_N,\eta_N)\}_{N=N}^{\infty} \subset \mathbb{X}_{\nu}$。这里我们默认使用了对任意 $m,N \in \mathbb{N}^{+}$ 都有 $\mathbb{X}^{\nu}_{m,N} \hookrightarrow \mathbb{X}_{\nu}$；事实上，这个嵌入是非扩张的。因此，应用定理 6.16 第二项中的先验估计 (6.3.2)，再应用命题 5.4 中正则化弱解的先验估计（并同时调用引理 3.24），我们得到一致的界

$$\sup_{N \geqslant N}\left(\|q_N,u_N,\eta_N\|_{\mathbb{X}_{\nu}} + \|\nabla\cdot(v_{w_0}q_N)\|_{H^{1+\nu}}\right) \lesssim \langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{\max\{2m,1+\lfloor n/2\rfloor+m\}}}\rangle^{\chi_{\nu,m}}\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^{\nu}}. \tag{6.3.8}$$

因此，我们可以提取一个弱极限 $(q,\ u,\ \eta) \in \mathbb{X}_\nu$，满足 $\nabla\cdot(v_{w_0}q) \in H^{1+\nu}(\Omega)$，使得沿着某个未标记的子序列有

$$(q_N,u_N,\eta_N) \rightharpoonup (q,u,\eta) \text{ in } \mathbb{X}_\nu \text{ and } \nabla\cdot(v_{w_0}q_N) \rightharpoonup \nabla\cdot(v_{w_0}q) \text{ in } H^{1+\nu}(\Omega). \tag{6.3.9}$$

由常规的弱收敛论证，我们很容易推得 $(q,\ u,\ \eta) \in {}^{q_0}_{,}\ {}^{u_0\ \eta_0}_{\mathbb{X}^\nu,}\ \text{以及}\ {}_{w_0,}\ {}^{\gamma_0}_{A}(q,\ u,\ \eta) =(g,\ f,\ k)$，由此完成了满射性的证明。□

6.4. 线性分析的综合。 在线性分析的最后一个小节中，我们转而研究来自 (3.3.1) 的非线性映射 Ψ 的全导数，该映射与偏微分方程 (1.4.9) 相关。换言之，我们考虑该系统的存在性与温和估计问题：

$$D\overline{\Psi}(\theta_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma) = (g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma). \tag{6.4.1}$$

通常，未知量为 $q:\Omega\to\mathbb{R}$, $u:\Omega\to\mathbb{R}^n$，以及 $\eta:\Sigma\to\mathbb{R}$；而给定数据为$g:\Omega\to\mathbb{R}$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $k:\Sigma\to\mathbb{R}^n$, $\mathcal{G},\ \mathcal{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times n}$，以及 $\gamma\in\mathbb{R}$，背景元组则为 $(\theta_0,\ \gamma_0)$。现在我们陈述线性分析的主要结果。

定理 6.18（线性化分析）。 设 $0<\rho\leqslant\rho_{\mathrm{WD}}$（回顾一下，后者在定理 *3.17* 中定义），$I\Subset\mathbb{R}^+$ 为一个区间，且

$$(\theta_0,\gamma_0) = (q_0,u_0,\eta_0,\mathcal{T}_0,\mathcal{G}_0,\mathcal{F}_0,\gamma_0) \in (B_{\mathbb{X}^{3+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho)\times B_{\mathbb{W}_{4+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho)\times I)\cap(\mathbb{X}^\infty\times\mathbb{W}_\infty\times\mathbb{R}^+). \tag{6.4.2}$$

对于每个 $\mathbb{N}\ni\nu\geqslant 3+\lfloor n/2\rfloor$，存在一个 $\rho_\nu\in\mathbb{R}^+$，它取决于 ν、物理参数和I，使得若 $0<\rho\leqslant\rho_\nu$，则以下结论成立。

(1) 映射

$$D\overline{\Psi}(\theta_0,\gamma_0) : {}^{q_0,u_0,\eta_0}_{\mathbb{X}^\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Y}^\nu\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R} \tag{6.4.3}$$

定义良好，且为巴拿赫同构。

(2) 假设 $\Xi = (g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma) \in \mathbb{Y}^\nu\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R}$ 且 $\Theta = (D\Psi(\theta_0,\gamma_0))^{-1}\Xi \in {}^{q_0}_{,}\ {}^{u_0\ \eta_0}_{\mathbb{X}^\nu}\times,\ \mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R}$。我们有如下温和估计

$$\|\Theta\|_{{}^{q_0,u_0,\eta_0}_{\mathbb{X}^\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R}} \lesssim \|\Xi\|_{\mathbb{Y}^\nu\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R}} + \langle\|\theta_0\|_{\mathbb{X}^{1+\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}}\rangle\|\Xi\|_{\mathbb{Y}^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{R}}, \tag{6.4.4}$$

where the implicit constant depends on ν*, the dimension* n*, and the physical parameter* I*.*

证明。 首先假设 $\mathbb{N}\ni\nu\geqslant 2+\lfloor n/2\rfloor$。证明的思路是证明关于某个参数一致的先验估计，并利用连续性方法。为此，对 $\tau\in[0,1]$，我们定义算子的凸同伦

$$L^\tau(\theta_0,\gamma_0) : {}^{q_0,u_0,\eta_0}_{\mathbb{X}^\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Y}^\nu\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R} \tag{6.4.5}$$

via

$$L^\tau(\theta_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma) = \begin{pmatrix} {}^{w_0,\gamma_0}_{A}(q,u,\eta) + \tau\big({}^{w_0,\gamma_0}_{P} + {}^{\theta_0}_{Q}\big)(q,u,\eta,\gamma) + {}^{q_0,u_0,\eta_0}_{\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma}R(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}) \end{pmatrix}. \tag{6.4.6}$$

注意，由 (3.4.4) 可知，$L^1(\theta_0,\ \gamma_0) = D\Psi(\theta_0,\ \gamma_0)$；而命题 3.21 和 3.22 中确立的 A、P、Q 和 R 的映射性质，保证了映射$L^\tau(\theta_0,\ \gamma_0)$的良定义性和连续性。

现在我们要证明关于 τ 一致的先验估计，该估计适用于 $\{L^\tau(\theta_0,\ \gamma_0)\}_{\tau\in[0,1]}$。假设

$$(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma) \in {}^{q_0,u_0,\eta_0}_{\mathbb{X}^\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R} \text{ and } (g,f,k)\in\mathbb{Y}^\nu \tag{6.4.7}$$

通过以下关系相联系

$$L^\tau(\theta_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma) = (g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma). \tag{6.4.8}$$

上述方程的前三个分量等价于

$$\overset{w_0,\gamma_0}{A}(q,u,\eta)=(g,f,k)-\tau\big(\overset{w_0,\gamma_0}{P}+\overset{\theta_0}{Q}\big)(q,u,\eta,\gamma)-\overset{q_0,u_0,\eta_0}{R}(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})=(\widetilde{g},\widetilde{f},\widetilde{k}). \tag{6.4.9}$$

假设 $0<\rho\leqslant\rho_{\text{est},\,\nu}$；那么我们可以调用定理 6.16 第一项中的主部估计，得到

$$\begin{aligned}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^\nu}}\lesssim\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^\nu}+\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{P}(q,u,\eta,\gamma)\big\|_{\mathbb{Y}^\nu}+\big\|\overset{\theta_0}{Q}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^\nu}\\ +\big\|\overset{q_0,u_0,\eta_0}{R}(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})\big\|_{\mathbb{Y}^\nu}+\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}}.\end{aligned} \tag{6.4.10}$$

根据命题3.21 第二项以及命题 3.22 第一项和第二项，我们有以下界

$$\big\|\overset{w_0,\gamma_0}{P}(q,u,\eta,\gamma)\big\|_{\mathbb{Y}^\nu}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu}+\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}}\|q,u,\eta,\gamma\|_{\mathbb{X}_{\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{R}}, \tag{6.4.11}$$

$$\big\|\overset{\theta_0}{Q}(q,u,\eta)\big\|_{\mathbb{Y}^\nu}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu}+\|\theta_0\|_{\mathbb{X}_\nu\times\mathbb{W}_{1+\nu}}\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}}, \tag{6.4.12}$$

and

$$\big\|\overset{q_0,u_0,\eta_0}{R}(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})\big\|_{\mathbb{Y}^\nu}\lesssim\|\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}_{1+\nu}}+\langle\|q_0,u_0,\eta_0\|_{\mathbb{X}_\nu}\rangle\|\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}}. \tag{6.4.13}$$

将 (6.4.11)、(6.4.12) 和 (6.4.13) 代入 (6.4.10) 的右端，得到估计

$$\begin{aligned}\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^\nu}}\lesssim\rho\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_\nu}+\|g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}\|_{\mathbb{Y}^\nu\times\mathbb{W}_{1+\nu}}\\ +\langle\|\theta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{R}}.\end{aligned} \tag{6.4.14}$$

现在我们取 $0<\rho\leqslant\min\{\rho_{\text{est},\nu},\rho_{\text{exi},\nu}\}$，其中后面的这些小量参数来自定理 6.16 和 6.17，并使其充分小，以便像往常一样在 (6.4.14) 中吸收，从而得到

$$\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^\nu}}\lesssim\|g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}\|_{\mathbb{Y}^\nu\times\mathbb{W}_{1+\nu}}+\langle\|\theta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}}\rangle\|q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{R}}. \tag{6.4.15}$$

我们需要处理 $(q,\ u,\ \eta)$ 在 $\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}$ 中的范数，它出现在 (6.4.15) 的右端。根据定理 6.16 第一项和 (6.4.2)，我们知道

$$\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}}\leqslant\|q,u,\eta\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}}\lesssim\|\widetilde{g},\widetilde{f},\widetilde{k}\|_{\mathbb{Y}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}, \tag{6.4.16}$$

其中后者定义于 (6.4.9) 中。再次仿照 (6.4.11)、(6.4.12) 和 (6.4.13) 的论证，但使用 (6.4.2)，可得

$$\|\widetilde{g},\widetilde{f},\widetilde{k}\|_{\mathbb{Y}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}\lesssim\rho\|q,u,\eta,\gamma\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{R}}+\|g,f,k\|_{\mathbb{Y}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}+\|\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}}. \tag{6.4.17}$$

结合 (6.4.16) 和 (6.4.17)，并在必要时取 ρ 更小，可得估计

$$\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}_{2+\lfloor n/2\rfloor}}\lesssim\|g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma\|_{\mathbb{Y}^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{R}}. \tag{6.4.18}$$

最后，将 (6.4.18) 代入 (6.4.15)，可得估计

$$\begin{aligned}\|q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma\|_{\substack{q_0,u_0,\eta_0\\ \mathbb{X}^\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R}}\lesssim\|L^\tau(\theta_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma)\|_{\mathbb{Y}^\nu\times\mathbb{W}_{1+\nu}\times\mathbb{R}}\\ +\langle\|\theta_0\|_{\mathbb{X}_{1+\nu}\times\mathbb{W}_{1+\nu}}\rangle\|L^\tau(\theta_0,\gamma_0)(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma)\|_{\mathbb{Y}^{2+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{W}_{3+\lfloor n/2\rfloor}\times\mathbb{R}}.\end{aligned} \tag{6.4.19}$$

界 (6.4.19) 建立了所需的关于 $\{L^\tau(\theta_0,\gamma_0)\}_{\tau\in[0,1]}$ 的 τ-一致先验界，只要 $\rho\leqslant\rho_\nu$ 对某个 $\rho_\nu\in\mathbb{R}^+$ 成立。因此，根据连续性方法（例如参见 Gilbarg 和 Trudinger [35] 中的定理 5.2），即可建立 $L^1(\theta_0,\gamma_0)=D\Psi(\theta_0,\gamma_0)$ 的可逆性，只要

我们知道 $L^0(\theta_0,\gamma_0)$ 可逆。后者得益于定理 6.17（以及 $\rho_{\mathrm{v}} \leqslant \rho_{\mathrm{exi,v}}$ 这一事实），因为

$$(L^0(\theta_0,\gamma_0))^{-1}(g,f,k,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma) = \big(\overset{w_0,\gamma_0}{\mathcal{A}}\big)^{-1}\big((g,f,k) - \overset{q_0,u_0,\eta_0}{\mathcal{R}}(\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F})\big),\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma\big). \quad (6.4.20)$$

至此，第一项得证。第二项由第一项以及 $\tau = 1$ 处的估计 (6.4.19) 得出。□

7. Conclusion

本节证明主要结果——定理 1。我们首先给出定理 7.1，这是 Nash-Moser 逆函数定理框架下的一个抽象构造，相关框架见第 2 节。随后，我们将该抽象构造应用于定理 7.3 中的偏微分方程形式结果。

7.1. 抽象构造。 回顾 (3.1.11) 中的巴拿赫空间尺度、(3.3.1) 中的非线性算子 Ψ，以及定理 3.17 中的参数 $\overline{\rho}_{\mathrm{WD}} \in \mathbb{R}^+$。为陈述下面的定理，我们引入以下记号。首先，令 $\beta = 9 + 2\lfloor n/2 \rfloor$。其次，对于 $\mathbb{N} \ni s \geqslant \beta$ 和 $\rho \in \mathbb{R}^+$，我们定义开集

$$E_s(\rho) = B_{\mathbb{E}^\beta}(0,\rho) \cap \mathbb{E}^s \text{ and } F_s(\rho) = B_{\mathbb{F}^\beta}(0,\rho) \cap \mathbb{F}^s, \quad (7.1.1)$$

其中 $\mathbb{E}^s$ 和 $\mathbb{F}^s$ 由 (3.1.10) 定义。最后，引入 Ψ的平移会很方便；具体而言，对于 $\Gamma \in \mathbb{R}^+$，我们设

$$\overline{\Psi}_\Gamma(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\gamma) = \overline{\Psi}(q,u,\eta,\mathcal{T},\mathcal{G},\mathcal{F},\Gamma+\gamma) - (0,0,0,0,0,0,\Gamma), \quad (7.1.2)$$

定义于 $(q,\ u,\ \eta) \in B_{\mathbb{X}^\beta}(0,\ \rho_{\mathrm{WD}})$、$(\mathcal{T},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F}) \in \mathbb{W}_{1+\beta}$以及 $\mathbb{R}^+ \ni \gamma > -\Gamma$。此定义的作用在于 $\Psi_\Gamma(0) = 0$。

定理 *7.1*（自由边界可压缩 *Navier–Stokes* 方程的行波，*1*）。假设参数 μ、λ和 ς 满足 *(1.1.7)*，且 P 满足 $P' > 0$ 和 *(1.1.9)*。令 $\Gamma \in \mathbb{R}^+$，并令 β、$E_s(\rho)$、$F_s(\rho)$和 Ψ_Γ 如上所定义。存在一个非增序列$\{\varepsilon_\nu(\Gamma)\}_{\nu=0}^\infty \subset (0, \min\{\rho_{\mathrm{WD}}, \Gamma/2\})$，以及 $\kappa(\Gamma) \in \mathbb{R}^+$，使得以下结论成立。

(1) 存在唯一性：给定 $\mathbf{f} \in F_\beta(\varepsilon_0(\Gamma))$，存在唯一的 $\mathbf{e} \in E_\beta(\kappa(\Gamma)\varepsilon_0(\Gamma))$，使得 $\Psi_\Gamma(\mathbf{e}) = \mathbf{f}$。由此得到局部逆映射

$$\overline{\Psi}_\Gamma^{-1} : F_\beta(\varepsilon_0(\Gamma)) \to \overline{\Psi}_\Gamma^{-1}(F_\beta(\varepsilon_0(\Gamma))) \subseteq E_\beta(\kappa(\Gamma)\varepsilon_0(\Gamma)). \quad (7.1.3)$$

(2) 在低范数小性条件下的更高正则性：若 $\nu \in \mathbb{N}$且 $\mathbf{f} \in F_{\beta+\nu}(\varepsilon_\nu(\Gamma))$，则 $\Psi_\Gamma^{-1}(\mathbf{f}) \in \mathbb{E}^{\beta+\nu}$，并且我们有温和估计

$$\|\overline{\Psi}_\Gamma^{-1}(\mathbf{f})\|_{\mathbb{E}^{\beta+\nu}} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{F}^{\beta+\nu}}, \quad (7.1.4)$$

其中隐含常数仅依赖于维数、物理参数、ν、ρ_{WD}和 Γ。

(3) 连续依赖性：对于每个 $\nu \in \mathbb{N}$，受限映射

$$\overline{\Psi}_\Gamma^{-1} : F_{\beta+\nu}(\varepsilon_\nu(\Gamma)) \to \mathbb{E}^{\beta+\nu} \quad (7.1.5)$$

关于 $\mathbb{F}^{\beta+\nu}$ 和 $\mathbb{E}^{\beta+\nu}$上的范数是连续的。

(4) 连续可微性：对于每个 $\nu \in \mathbb{N}$，受限映射

$$\overline{\Psi}_\Gamma^{-1} : F_{\beta+\nu}(\varepsilon_{\nu+2}(\Gamma)) \to \mathbb{E}^{\beta+\nu-1} \quad (7.1.6)$$

可微。此外，如果我们将 $D\Psi_\Gamma^{-1}$ 视为一个映射

$$D\overline{\Psi}_\Gamma^{-1} : F_{\beta+\nu}(\varepsilon_{\nu+2}(\Gamma)) \times \mathbb{F}^{\beta+\nu-1} \to \mathbb{E}^{\beta+\nu-1}, \quad (7.1.7)$$

则 $D\Psi_\Gamma^{-1}$ 是连续的。

证明。 我们的目标是证明， Ψ_Γ 满足定理 2.21 的假设，其中巴拿赫尺度 $\mathbb{E}$ 和 $\overline{\mathbb{F}}$ 定义于 (3.1.11)。根据引理 3.2，定理 2.21 假设中的条件 II 由 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{F}$满足。为验证其余假设，我们考虑三元组 $(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \Psi_\Gamma)$ 及参数 $(\mu, r, R) = (1, 3 + \lfloor n/2 \rfloor, 17 + 3\lfloor n/2 \rfloor)$，它们满足所需的不等式 $2(r+\mu) + 1 = \beta < (r+R)/2$，其中 $\beta = 9 + 2\lfloor n/2 \rfloor$。

接下来令 $\delta_r = \min\{\rho_{\mathrm{WD}}, \Gamma/2\}$。于是，定理 3.17 和注 3.18 证明定义 2.20 的第二项（C^2 和 μ驯性）成立。利用定理 6.18，其中取 $\nu = R$ 和区间 $I = [\Gamma/2, 2\Gamma]$，可知定义 2.20 的第三项（导数求逆）在 $\delta_R = \min\{\rho_\nu, \delta_r\}$ 下成立（其中 ρ_ν 由定理 6.18 给出），并且定义中的其余 LRI 映射假设也都成立。

因此，定理 2.21 的假设均已满足。由此可得一个 $\varepsilon = \varepsilon_0(\Gamma)$，使得第一项成立，并且我们有如下估计

$$\|\overline{\Psi}_\Gamma^{-1}(\mathbf{f})\|_{\mathbb{E}^\beta} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{F}^\beta} \tag{7.1.8}$$

对所有 $\mathbf{f} \in F_\beta(\varepsilon_0(\Gamma))$ 均成立。事实上，根据定理 2.21 的第二项，对所有 $s \in [\beta, R + r - \beta] \cap \mathbb{N} = [9 + \lfloor n/2 \rfloor, 11 + 3\lfloor n/2 \rfloor] \cap \mathbb{N}$，若 $\mathbf{f} \in F_\beta(\varepsilon_0(\Gamma)) \cap \mathbb{F}^s$，则$\Psi_\Gamma^{-1}(\mathbf{f}) \in \mathbb{E}^s$，且估计式 (7.1.8) 中的 β可替换为 s。因此，对于$\nu \in \{0, 1, \dots, 2 + 2\lfloor n/2 \rfloor = R + r - 2\beta\}$，我们可以令 $\varepsilon_\nu(\Gamma) = \varepsilon_0$。

现在，给定 $\mathbb{N} \ni \nu > 2 + 2\lfloor n/2 \rfloor$，我们定义 $\varepsilon_\nu(\Gamma) \in (0, \varepsilon_0]$ 为定理 2.21 在参数三元组 (μ, r, R) 下给出的一个小量参数，其中 $R = R + \nu - (2 + 2\lfloor n/2 \rfloor)$。注意，在此情形下，若取 $\delta_{\widetilde{R}} = \min\{\rho_{R+\nu-(2+2\lfloor n/2 \rfloor)}, \delta_r\}$，则 LRI 映射假设成立，其中前一个参数来自定理 6.18（取 $\nu = R + \nu - (2 + 2\lfloor n/2 \rfloor)$ 和 $I = [\Gamma/2, 2\Gamma]$）。根据 $\{\varepsilon_\nu(\Gamma)\}_{\nu=0}^\infty$ 的定义、定理 2.21 的第二项以及唯一性，第二项现已得证。最后，第三项和第四项直接由定理 2.24 得出。□

注 7.2. 作为定理 *2.24* 第三个结论的推论，定理 *7.1* 中构造的局部逆映射 Ψ_Γ^{-1} 满足某些高阶可微性结论，这些结论超出了前一定理第三项中基本的连续可微性结果。然而，由于逆映射高阶导数公式中的导数损失会不断累积，精确陈述这些结论变得十分繁琐。因此，我们选择不对其作出精确陈述。

7.2. **偏微分方程构造**。 我们利用定理 7.1 证明关于自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程（系统 (1.4.9)）的主要结果。

定理 7.3 (自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程的行波，2)。 假设参数 μ、 λ和 ς满足 (1.1.7)，且 P满足 $P' > 0$ 和 (1.1.9)。令 $\beta = 9 + 2\lfloor n/2 \rfloor$。存在一族 $\{\mathcal{V}(\gamma)\}_{\gamma \in \mathbb{R}^+}$ 开集 $\mathbb{X}^\beta$ 以及一个非增开集序列 $\{\mathcal{U}_s\}_{s=\beta}^\infty$ $\mathbb{W}_{1+\beta} \times \mathbb{R}^+$，使得以下结论成立。

(1) 非退化性：我们有 $\{0\} \times \mathbb{R}^+ \subseteq \bigcap_{s=\beta}^\infty \mathcal{U}_s$ 和 $0 \in \bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}^+} \mathcal{V}(\gamma)$。*(2)* 存在唯一性：对于所有 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \in \mathcal{U}_\beta$，存在唯一的 $(q, u, \eta) \in \mathcal{V}(\gamma)$，使得自由边界可压缩纳维–斯托克斯方程的行波表述，即系统 *(1.4.9)*，在波速为 γ、数据为 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$、解为 (q, u, η) 时经典成立。*(3)* 低范数小性条件下的更高正则性：若 $\mathbb{N} \ni s \geqslant \beta$且 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \in \mathcal{U}_s \cap (\mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R})$，则相应的解满足 $(q, u, \eta) \in \mathcal{V}(\gamma) \cap \mathbb{X}^{1+s}$。*(4)* 连续依赖性：对于任意 $\mathbb{N} \ni s \geqslant \beta$，解映射

$$\mathcal{U}_s \cap (\mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R}) \ni (\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \mapsto (q, u, \eta) \in \mathbb{X}^{1+s} \tag{7.2.1}$$

关于 $\mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{X}^{1+s}$ 范数是连续的。

(5) 无真空形成：存在正的常数 $c, C \in \mathbb{R}^+$，使得对所有 $(q, u, \eta) \in \bigcup_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \mathcal{V}(\gamma)$，都有 $c \leqslant \sigma_{q,\eta} \leqslant C$，其中 $\sigma_{q,\eta}$ 定义于 (1.4.11)。*(6)* 展平映射微分同胚：对于任意 $\mathbb{N} \ni s \geqslant \beta$ 和 $(q, u, \eta) \in \mathbb{X}^s \cap \bigcup_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \mathcal{V}(\gamma)$，由 (1.4.4) 定义的展平映射 $\mathfrak{F}_\eta$ 是从 Ω 到 $\Omega[\eta]$ 的光滑微分同胚，并可延拓为从 Ω 到 $\Omega[\eta]$的 $C^{s+2-\lfloor n/2\rfloor}$ 微分同胚。 — ——

证明。对于每个 $\Gamma \in \mathbb{R}^+$，我们可以应用定理 7.1，并得到一个非递增序列$\{\varepsilon_\nu(\Gamma)\}_{\nu=0}^{\infty} \subset (0, \min\{\rho_{\mathrm{WD}}, \Gamma/2\})$以及一个 $\kappa(\Gamma) \in \mathbb{R}^+$，使得该定理的各项结论均成立。接着，我们定义开集

$$\mathcal{U}_s = \bigcup_{\Gamma\in\mathbb{R}^+} B_{\mathbb{W}_{1+\beta}\times\mathbb{R}}((0,\Gamma), \varepsilon_{s-\beta+1}(\Gamma)/C) \text{ for } \mathbb{N} \ni s \geqslant \beta \tag{7.2.2}$$

其中 $C \geqslant 1$ 是待确定的常数（与 s 无关），并且

$$\mathcal{V}(\Gamma) = B_{\mathbb{X}^\beta}(0, \kappa(\Gamma)\varepsilon_0(\Gamma)) \text{ for } \Gamma \in \mathbb{R}^+. \tag{7.2.3}$$

第一项一目了然。

对于第二项，我们应用定理 7.1 的第一条结论。事实上，对于 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \in \mathcal{U}_\beta$，令 (q, u, η) 为元组 $\Psi_\gamma^{-1}(0, 0, 0, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, 0)$ 的前三个分量，即可得到存在性。$\mathcal{V}(\gamma)$ 中的唯一性，源于以下事实：若 $\Psi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) = \Psi(\widetilde{q}, \widetilde{u}, \widetilde{\eta}, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma)$，则$\Psi_\gamma(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, 0) = \Psi_\gamma(\widetilde{q}, \widetilde{u}, \widetilde{\eta}, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, 0)$，因而根据定理 7.1 的唯一性结论，$(q, u, \eta) = (\widetilde{q}, \widetilde{u}, \widetilde{\eta})$。

现在证明第三项。定理 7.1 第二个结论的直接推论是：若 $\mathbb{N} \ni s \geqslant \beta$ and $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \in \mathcal{U}_s \cap (\mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R})$，则相应的解满足 $(q, u, \eta) \in \mathcal{V}(\gamma) \cap \mathbb{X}^s$。事实上，该解的正则性还高一个阶。为此，回顾 (3.3.5) 中的映射Φ，并注意到方程 $\Psi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) = (0, 0, 0, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma)$ 等价于$\Psi(q, u, \eta, 0, 0, 0, \gamma) = (-\Phi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}), 0, 0, 0, \gamma)$，而后者又等价于

$$\overline{\Psi}_\gamma(q, u, \eta, 0, 0, 0, 0) = (-\Phi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}), 0, 0, 0, 0). \tag{7.2.4}$$

注意到 $\Phi(q,\ u,\ \eta,\ \mathcal{T},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F})$ 关于 $(\mathcal{T},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F})$ 是线性的；因此，命题 3.14 和 3.15（其中$m = 0$）表明

$$\|\Phi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F})\|_{\mathbb{Y}^\beta} \leqslant c\|\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}\|_{\mathbb{W}_\beta} \text{ and } \|\Phi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F})\|_{\mathbb{Y}^{1+s}} \lesssim_{\|q,u,\eta\|_{\mathbb{X}^s}} \|\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}\|_{\mathbb{W}_{1+s}} \tag{7.2.5}$$

存在一个仅依赖于维数、物理参数和 ρ_{WD} 的常数 c。假设 (7.2.2) 中的常数 $C \geqslant 1$ 满足 $C \gtrsim c$。于是利用包含关系 $(\mathcal{T},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F},\ \gamma) \in \mathcal{U}_s \cap (\mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R})$ 和 (7.2.5)，可知

$$(-\Phi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}), 0, 0, 0, \gamma) \in \mathbb{F}^{1+s} \cap \bigcup_{\Gamma\in\mathbb{R}^+} B_{\mathbb{F}^\beta\times\mathbb{R}}((0,\Gamma), \varepsilon_{s-\beta+1}(\Gamma)). \tag{7.2.6}$$

因此，我们可以应用定理 7.1 的第一和第二个结论，由 and(7.2.6) 推得第三项成立。 (7.2.4)

还需证明第四项。恒等式 (7.1.2) 和定理 7.1 的第三个结论表明，对于 $\mathbb{N} \ni s \geqslant \beta$，解映射

$$\mathcal{U}_{s-1} \cap (\mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R}) \ni (\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \mapsto (q, u, \eta) \in \mathbb{X}^s \tag{7.2.7}$$

是连续的。事实上，通过采用上述第三项证明中的论证，我们可以使目标空间拓扑的正则性再提高一个导数。确实，再次利用命题 3.14 和 3.15 以及 (7.2.7)，我们发现映射

$$\mathcal{U}_s \cap (\mathbb{W}_{1+s} \times \mathbb{R}) \ni (\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \mapsto (-\Phi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}), 0, 0, 0, \gamma) \in \mathbb{F}^{1+s} \tag{7.2.8}$$

是连续的。根据恒等式

$$\overline{\Psi}(q, u, \eta, 0, 0, 0, \gamma) = (-\Phi(q, u, \eta, \mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}), 0, 0, 0, \gamma), \tag{7.2.9}$$

定理 7.1 的第三个结论（这意味着 Ψ^{-1} 是连续的）、包含关系 (7.2.6)（这意味着 (7.2.9) 的右侧属于 Ψ^{-1} 的定义域）、映射 (7.2.8) 的连续性以及复合的连续性，我们由此完成了对第四项的验证。

第五项和第六项是命题 3.10 和定理 3.17 的首要结论的直接推论。至此，证明完成。□

我们以记录定理 7.3 的一些简单推论来结束本节。

推论 *7.4*（固定波速下的数据开集）。对于每个 $\gamma \in \mathbb{R}^+$，存在一个非空开集 $(0, 0, 0) \in \mathcal{W}(\gamma) \subset \mathbb{W}_{1+\beta}$，具有如下性质：对于所有应力-力数据组 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}) \in \mathcal{W}(\gamma)$，都存在唯一的 $(q, u, \eta) \in \mathcal{V}(\gamma)$，使得系统 *(1.4.9)* 满足解 (q, u, η)、波速 γ 以及数据 $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$。

证明。给定 $\gamma \in \mathbb{R}^+$，我们取 $\mathcal{W}(\gamma) = \{(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}) : (\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \gamma) \in \mathcal{U}_\beta\}$。 □

推论 7.5（关于欧拉描述）。 定理 *7.3* 给出的自由边界可压缩 *Navier–Stokes* 行波问题的展平扰动焓表述的每个解，即系统 (1.4.9)，都对应于该问题行波欧拉描述的一个经典解，该问题由系统 (1.2.1) 给出。

证明。 定理 7.3 的第六项验证了来自 (1.4.4) 的展平映射 $\mathfrak{F}_\eta : \Omega \to \Omega[\eta]$ 是一个光滑微分同胚，其在边界上的光滑性足够高，因此在撤销展平后仍能保持经典解的概念。该定理还通过若干超临界 Sobolev 嵌入，直接给出了 (1.4.9) 的经典解。结合这些事实，并撤销将 (1.2.1) 转换为 (1.4.9) 时对未知量所作的非线性变换，即得所述结果。□

Appendix A. Standard Sobolev space tools

A.1. **延拓算子**。 回顾分别在 (1.4.2) 和 (1.4.3) 中引入的泊松延拓算子 $\mathcal{E}_0$ 及其变体 $\mathcal{E}$。以下引理记录了若干简单的映射性质。

引理 A.1 (Mapping properties of the Poisson extensionoperator variants)。 以下结论成立.

(1) $\mathcal{E}_0 : H^{s+1/2}(\Sigma) \to {}_0H^1(\Omega) \cap H^{1+s}(\Omega)$ 对每个 $s \in \mathbb{N}$ 都是有界线性映射。*(2)* $\mathcal{E} \circ \Pi^1_{\mathrm{H}} = \mathcal{E}_0$，且 $\mathcal{E} \circ \Pi^1_{\mathrm{L}} : \mathcal{H}^0(\Sigma) \to W^{\infty,\infty}((0, b); \mathcal{H}^0_{(1)}(\mathbb{R}^{n-1}))$ 是连续线性映射，其中 $\mathcal{H}^0_{(1)}$ 由 (B.1.3) 定义。

证明。 第一项由狄利克雷问题的标准椭圆理论显然可得。第二项是直接的。□

在全文中，考虑将定义在区域上的函数映射到整个欧几里得空间上的函数、并且保持整个完整的 Sobolev尺度正则性的延拓算子，也常常很有用。对于此类算子，我们采用著名的 Stein 延拓算子；下面给出相关定义并约定记号。

定义 A.2（Stein延拓算子与区域）。 *Stein* 延拓算子的概念见 *Stein* 的第*VI*章第*3.1*节 [96]。*Stein* 延拓域是指存在 *Stein* 延拓算子的开集 $U \subset \mathbb{R}^d$，我们将该算子记作 $\mathfrak{E}_U$。对于维数为 d的有限维实向量空间的开子集，我们也将通过与 $\mathbb{R}^d$的标准同一化，更广泛地使用这一记号。

A.2. **Korn不等式**。 这里的第一个结果是一个经典结论，涉及（未归一化的）对称梯度。回顾一下，对于可微向量场 f，其定义为 $\mathbb{D}f = \nabla f + \nabla f^{\mathrm{t}}$。

命题 A.3 (对称梯度的 Korn 不等式, $n \geqslant 2$)。设 $n \geqslant 2$ 为环境维数。则存在常数 $c \in \mathbb{R}^+$，仅依赖于Ω 和 n，使得对所有$f \in {}_0H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$，不等式 $\|f\|_{H^1} \leqslant c\,\|\mathbb{D}f\|_{L^2}$成立。

证明。证明可见 Beale 中的引理 2.7 [8], ，其依据是 Fichera [34], 的定理12.II，该定理给出了任意维数立方体上的 Korn 不等式。注意， [8] 中的结果仅针对 $n = 3$陈述，但同样的论证对一般的 $n \geqslant 2$也成立。□

我们还关注涉及对称梯度的无迹部分（也称为偏差梯度）的不等式。对于可微向量场，我们将其记为 $f\ \mathbb{D}^0 f = \nabla f + \nabla f^{\mathrm{t}} - \frac{2}{n}(\nabla \cdot f)I$。在维数 $n \geqslant 3$ 下，命题 A.3 对于 $\mathbb{D}^0$ 的类似结论成立。

命题 A.4 (偏差Korn不等式, $n \geqslant 3$)。 设 $n \geqslant 3$ 为环境维数。存在一个常数 $c \in \mathbb{R}^+$，仅依赖于 Ω 和 n，使得对所有 $f \in {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 均有不等式 $\|f\|_{H^1} \leqslant c\|\mathbb{D}^0 f\|_{L^2}$。

证明。 例如，参见 Dain 中的定理 1.1，其证明了上界

$$\|f\|_{H^1(Q;\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathbb{D}^0 f\|_{L^2(Q;\mathbb{R}^{n\times n})} + \|f\|_{L^2(Q;\mathbb{R}^n)} \text{ for all } f \in H^1(Q;\mathbb{R}^n) \tag{A.2.1}$$

只要 Q 是一个立方体。通过标准的紧性论证，我们便可证明，对于所有在立方体一侧消失的 $f \in H^1(Q;\ \mathbb{R}^n)$，都有$\|f\|_{H^1(Q;\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathbb{D}^0 f\|_{L^2(Q;\mathbb{R}^{n\times n})}$，其中隐含常数取决于 Q。随后，我们像命题 A.3 中那样利用这一不等式以及 Ω 的对称性，得到所需结果。□

注 A.5 (偏差 Korn 不等式在维数 $n = 2$中失效)。 然而，对于维数 $n = 2$，命题 *A.4* 的类似结论并不成立。例如，参见 *Bauer*、*Neff*、*Pauly* 和 *Starke* 的第*6.6*节 [6], ，其中证明了存在一个 *Lipschitz*区域 $\varnothing \neq U \subset \mathbb{R}^2$ 和一条真线段$\varnothing \neq S \subset \partial U$，使得 $\|\cdot\|_{H^1} \not\lesssim \|\mathbb{D}^0(\cdot)\|_{L^2}$在 $H^1(U;\ \mathbb{R}^2)$ 的由在 S上消失的向量场组成的子空间上成立。

A.3. **索伯列夫空间的精细插值**。 本小节将推导索伯列夫空间之间线性映射的精细插值不等式；特别是，本文讨论对 K 实插值方法的改进。关于基本的 K 插值方法的更多信息，请参阅 Bergh 和 L¨ofstr¨om [9] 的《第 3 章》。首先，我们回顾 K- 泛函的定义。给定一对嵌入豪斯多夫拓扑向量空间 Z 的巴拿赫空间 X_0 和 X_1，即 $X_0,\ X_1 \hookrightarrow Z$，我们定义映射 $K(\cdot,\ \cdot; X_0,\ X_1) : \mathbb{R}^+ \times (X_0 + X_1) \to \mathbb{R}$，如下

$$K(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} \ :\ x = x_0 + x_1,\ (x_0, x_1) \in X_0 \times X_1\} \tag{A.3.1}$$

对于 $(t,\ x) \in \mathbb{R}^+ \times (X_0 + X_1)$。我们的第一个引理给出了索伯列夫空间上的 K-泛函。

引理 A.6 (索伯列夫空间 K-泛函)。 设 $s_0,\ s_1,\ s \in \mathbb{R}$，满足 $s > 0$ 且 $s_0 + s = s_1$。对 $t \in \mathbb{R}^+$，定义有界线性映射 $P_t^s\colon H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \to H^{s_0+2s}(\mathbb{R}^n)$ 如下 $P_t^s = (1 + t^2\langle\nabla\rangle^{2s})^{-1}$。对于所有 $f \in H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$，均有

$$2^{-1}K(t, f; H^{s_0}; H^{s_1})^2 \leqslant \|(I - P_t^s)f\|_{H^{s_0}}^2 + t^2\|P_t^s f\|_{H^{s_1}}^2 \leqslant K(t, f; H^{s_0}; H^{s_1})^2. \tag{A.3.2}$$

证明。定义 $\hat{}K(t, f;\ H^{s_0}, H^{s_1}) = \inf_{g\in H^{s_1}} \left(\|f - g\|_{H^{s_0}}^2 + t^2\|g\|_{H^{s_1}}^2\right)$，并注意到初等估计表明 $2^{-1}K(t, f;\ H^{s_0}, H^{s_1})^2 \leqslant \hat{}K(t, f;\ H^{s_0}, H^{s_1}) \leqslant K(t, f;\ H^{s_0}, H^{s_1})^2$。改用 $\hat{}\,K$ 的好处是，我们可以直接运用变分法中的直接法，得知 $K(t, f;\ H^{s_0}, H^{s_1})$ 定义中的下确界实际上是最小值，并由满足以下条件的 $f_\star \in H^{s_1}$ 取到（根据欧拉-拉格朗日方程）：

$$-\langle\langle\nabla\rangle^{s_0}(f - f_\star), \langle\nabla\rangle^{s_0} g\rangle_{L^2} + t^2\langle\langle\nabla\rangle^{s_0+s} f_\star, \langle\nabla\rangle^{s_0+s} g\rangle_{L^2} = 0 \text{ for every } g \in H^{s_1}(\mathbb{R}^n). \tag{A.3.3}$$

这等价于说， $f_\star$ 是椭圆伪微分方程 $(I+t^2\langle\nabla\rangle^{2s})\langle\nabla\rangle^{s_0}f_* = \langle\nabla\rangle^{s_0}f$ 的弱解，或者说， $f_\star = (I+t^2\langle\nabla\rangle^{2s})^{-1}f = P_t^s f$。因此， $\hat{}K(t,\ f;\ H^{s_0},\ H^{s_1}) = \|(I-P_t^s)f\|_{H^{s_0}}^2 + t^2\|P_t^s f\|_{H^{s_1}}^2$。□

下一个引理用 K-泛函表示索伯列夫空间中的范数。下面计算的目的是将 K-泛函范数除以适当的常数，以消除端点附近的退化现象。

引理 A.7 （范数计算）。 设 s_0， s_1， $s\in\mathbb{R}^+$ 满足 $s>0$ 且 $s_0+s=s_1$，并令 $\sigma\in(0,1)$。定义 $\mathfrak{c}(\sigma) = \int_0^\infty \frac{\tau^{1-2\sigma}}{1+\tau^2}\,\mathrm{d}\tau \in \mathbb{R}^+$。我们有范数等价关系

$$\|f\|_{H^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}} \leqslant \Big(\frac{1}{\mathfrak{c}(\sigma)}\int_0^\infty t^{-2\sigma-1}K(t,f;H^{s_0},H^{s_1})^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{H^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}}. \tag{A.3.4}$$

证明。 给定 $t\in\mathbb{R}^+$，我们可以令两者相等

$$\begin{aligned}\|(I-P_t^s)f\|_{H^{s_0}}^2 + t^2\|P_t^s f\|_{H^{s_1}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle 2\pi\xi\rangle^{2s_0}\Big(\frac{t^2\langle 2\pi\xi\rangle^{2s}}{1+t^2\langle 2\pi\xi\rangle^{2s}}\Big)^2|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n}\langle 2\pi\xi\rangle^{2(s_0+s)}\Big(\frac{t}{1+t^2\langle 2\pi\xi\rangle^{2s}}\Big)^2|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\langle 2\pi\xi\rangle^{2s_0}\frac{t^2\langle 2\pi\xi\rangle^{2s}}{1+t^2\langle 2\pi\xi\rangle^{2s}}|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{A.3.5}$$

因此，根据 Tonelli 定理和变量代换，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty t^{-2\sigma-1}(\|(I-P_t^s)f\|_{H^{s_0}}^2 + t^2\|P_t^s f\|_{H^{s_1}}^2)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad= \int_{\mathbb{R}^n}\langle 2\pi\xi\rangle^{2s_0}\int_{\mathbb{R}^+}t^{-2\sigma-1}\frac{t^2\langle 2\pi\xi\rangle^{2s}}{1+t^2\langle 2\pi\xi\rangle^{2s}}\,\mathrm{d}t\,|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &\qquad= \mathfrak{c}(\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\langle 2\pi\xi\rangle^{2(s_0+\sigma s)}|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \mathfrak{c}(\sigma)\|f\|_{H^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}}^2.\end{aligned} \tag{A.3.6}$$

结合引理 A.6 即可得到该结果。 □

现在我们来介绍本附录本小节的主要结果。

命题 A.8 (索伯列夫空间的精细插值)。 设 s_0， s_1， s， r_0， r_1， $r\in\mathbb{R}$ 满足 s， $r>0$， $s_0+s=s_1$，且 $r_0+r=r_1$。假设

$$T\in\mathcal{L}(H^{r_0}(\mathbb{R}^n);H^{s_0}(\mathbb{R}^n))\cap\mathcal{L}(H^{r_1}(\mathbb{R}^n);H^{s_1}(\mathbb{R}^n)) \tag{A.3.7}$$

满足如下条件：存在常数 C_0、 C_1、 $A\in\mathbb{R}^+$，使得以下界成立

$$\|Tf\|_{s_0}\leqslant C_0\|f\|_{r_0}\ \textit{and}\ \|Tf\|_{s_1}\leqslant C_1\|f\|_{r_1}+A\|f\|_{r_0}, \tag{A.3.8}$$

对所有适当的 f。令 $r_{-1}=r_0-r$。则对所有 $\sigma\in[0,1]$，都有如下包含关系

$$T\in\mathcal{L}(H^{(1-\sigma)r_0+\sigma r_1}(\mathbb{R}^n);H^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}(\mathbb{R}^n)) \tag{A.3.9}$$

以及如下上界

$$\frac{\|Tf\|_{H^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}}}{4C_0^{1-\sigma}C_1^\sigma}\leqslant\|f\|_{H^{(1-\sigma)r_0+\sigma r_1}}+\sigma^{1/2}\frac{A}{C_1}\|f\|_{H^{(1-\sigma)r_{-1}+\sigma r_0}} \tag{A.3.10}$$

对于所有适当的 f。

证明。给定 $t \in \mathbb{R}^+$和 $f \in H^{r_0}$，我们将 $f = (I - P^r_{C_0^{-1}C_1 t})f + P^r_{C_0^{-1}C_1 t} f$ 分解为 $(I - P^r_{C_0^{-1}C_1 t})f \in H^{r_0}$ 和 $P^r_{C_0^{-1}C_1 t} f \in H^{r_1}$。根据 K 的定义以及有界性假设，我们便可估计

$$\begin{aligned} K(t, Tf; H^{s_0}, H^{s_1}) &\leqslant \|T(I - P^r_{C_0^{-1}C_1 t})f\|_{H^{s_0}} + t\|TP^r_{C_0^{-1}C_1 t} f\|_{H^{s_1}} \\ &\leqslant C_0\big(\|(I - P^r_{C_0^{-1}C_1 t})f\|_{H^{r_0}} + C_0^{-1}C_1 t\|P^r_{C_0^{-1}C_1 t} f\|_{H^{r_1}}\big) + At\|P^r_{C_0^{-1}C_1 t} f\|_{H^{r_0}}. \end{aligned} \tag{A.3.11}$$

应用引理 A.6 可知

$$K(t, Tf; H^{s_0}, H^{s_1}) \leqslant \sqrt{2}C_0 K(C_0^{-1}C_1 t, f; H^{r_0}, H^{r_1}) + At\|P^r_{C_0^{-1}C_1 t} f\|_{H^{r_0}}. \tag{A.3.12}$$

将两边平方，乘以 $t^{-2\sigma-1}$，对 $\mathbb{R}^+$ 积分，并应用引理 A.7，可得上界

$$\begin{aligned} 4^{-1}\mathfrak{c}(\sigma)\|Tf\|^2_{H^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}} &\leqslant \mathfrak{c}(\sigma)C_0^{2(1-\sigma)}C_1^{2\sigma}\|f\|^2_{H^{(1-\sigma)r_0+\sigma r_1}} \\ &\quad + A^2(C_0^{-1}C_1)^{2(\sigma-1)}\int_0^\infty \tau^{-2\sigma+1}\|P^r_\tau f\|^2_{H^{r_0}}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{A.3.13}$$

最　上面的积分随后可利用 Tonelli 定理显式计算：

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tau^{-2\sigma+1}\|P^r_\tau f\|^2_{H^{r_0}}\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle 2\pi\xi\rangle^{2r_0}\int_0^\infty \frac{\tau^{-2\sigma+1}}{(1+\tau^2\langle 2\pi\xi\rangle^{2r})^2}\,\mathrm{d}\tau\,|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &= \mathfrak{d}(\sigma)\int_{\mathbb{R}^n}\langle 2\pi\xi\rangle^{2(r_0+(\sigma-1)r)}|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \mathfrak{d}(\sigma)\|x\|^2_{H^{(1-\sigma)r_{-1}+\sigma r_0}}, \end{aligned} \tag{A.3.14}$$

其中我们定义 $\mathfrak{d}(\sigma) = \int_0^\infty \frac{\tau^{-2\sigma+1}}{1+\tau^2}\,\mathrm{d}\tau$。综合 (A.3.13) 和 (A.3.14)，可得

$$\frac{\|Tf\|_{H^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}}}{2C_0^{1-\sigma}C_1^\sigma} \leqslant \|f\|_{H^{(1-\sigma)r_0+\sigma r_1}} + \frac{A}{C_1}\sqrt{\frac{\mathfrak{d}(\sigma)}{\mathfrak{c}(\sigma)}}\|f\|_{H^{(1-\sigma)r_{-1}+\sigma r_0}}. \tag{A.3.15}$$

注意到界 $\mathfrak{c}(\sigma) \geqslant \int_0^1 \frac{\tau^{1-2\sigma}}{2}\,\mathrm{d}\tau + \int_1^\infty \frac{\tau^{1-2\sigma}}{2\tau^2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{1-\sigma} + \frac{1}{\sigma}\big)$ 和 $\mathfrak{d}(\sigma) \leqslant \int_0^1 \tau^{-2\sigma+1}\,\mathrm{d}\tau + \int_1^\infty \tau^{-2\sigma-3}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{1-\sigma} + \frac{1}{1+\sigma}\big)$，即可完成证明；这些界意味着 $\frac{\mathfrak{d}(\sigma)}{\mathfrak{c}(\sigma)} \leqslant \frac{4\sigma}{1+\sigma} \leqslant 4\sigma$. □

Appendix B. Some nonstandard function spaces

B.1. 各向异性 Sobolev 空间。 对于 $\mathbb{R} \ni s \geqslant 0$ 和 $d \in \mathbb{N}^+$，我们定义各向异性 Sobolev 空间

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \,:\, \mathscr{F}[f] \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}),\ \|f\|_{\mathcal{H}^s} < \infty\}, \tag{B.1.1}$$

赋予范数

$$\|f\|_{\mathcal{H}^s} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\xi|^{-2}(\xi_1^2 + |\xi|^4)\mathbb{1}_{B(0,1)}(\xi) + \langle\xi\rangle^{2s}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,1)}(\xi)\big)|\mathscr{F}[f](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}. \tag{B.1.2}$$

这些空间由 Leoni 和 Tice [60], 引入，他们在命题 5.2 和定理 5.6 中证明，$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 是希尔伯特空间，且 $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^d) + C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$，当且仅当 $d = 1$ 时，第一个嵌入取等号。“各向异性”这一描述的依据，既包括 (B.1.1) 中的低频乘子，也包括 [60],中的定理 5.2；该定理表明，当 $d \geqslant 2$ 时，$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 在与旋转复合下并不封闭。

我们作如　下列带限子空间采用如下记号。给定 $\kappa \in \mathbb{R}^+$，我们定义空间

$$\mathcal{H}^0_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d) \subseteq \bigcap_{s\geqslant 0}\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) \text{ via } \mathcal{H}^0_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{H}^0(\mathbb{R}^d) \,:\, \mathrm{supp}\mathscr{F}[f] \subseteq \overline{B(0,\kappa)}\}. \tag{B.1.3}$$

对于任意 $0 \leqslant s \in \mathbb{R}$，我们有时也将 $\mathcal{H}^s_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}^0_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$ 记作.....

现在我们来列举与本文相关的这些空间的性质。首先，我们讨论高低频分解，并约定以下记号。对于 $\kappa \in \mathbb{R}^+$，我们定义 $\Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa}$ 和 $\Pi_{\mathrm{H}}^{\kappa}$ 为 $f \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ 的子空间上的线性算子，使得 $\mathscr{F}[f]$ 局部可积，其定义如下：

$$\Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa} f = \mathscr{F}^{-1}[\mathbb{1}_{B(0,\kappa)}\mathscr{F}[f]] \text{ and } \Pi_{\mathrm{H}}^{\kappa} f = (I - \Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa}) f. \tag{B.1.4}$$

命题 B.1 （各向异性索伯列夫空间的频率分割）。 以下结论对$0 \leqslant s \in \mathbb{R}$， $f \in \mathcal{H}^s$（$\mathbb{R}^d$）以及 $\kappa \in \mathbb{R}^+$成立。

(1) 我们有等价关系 $\|f\|_{\mathcal{H}^s} \asymp_{s,\kappa} \sqrt{\|\Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa} f\|_{\mathcal{H}^0}^2 + \|\Pi_{\mathrm{H}}^{\kappa} f\|_{H^s}^2}$。*(2)* 我们有

t $\Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa} f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$，并且有估计 $\|\Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa} f\|_{W^{k,\infty}} \lesssim_{k,\kappa} \|\Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa} f\|_{\mathcal{H}^0}$对每个 $k \in \mathbb{N}$.

证明。 这是 Leoni 和 Tice [60] 中的定理 5.5。 □

以下各向异性 Sobolev 空间的代数性质在我们的非线性分析中极其重要。

命题 B.2 (各向异性 Sobolev 空间的代数性质)。 设 f_1， $f_2 \in \mathcal{H}^0_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$其中 $\kappa \in \mathbb{R}^+$。以下结论成立。

(1) 逐点乘积 $f_1 f_2$ 属于 $\mathcal{H}^0_{(2\kappa)}(\mathbb{R}^d)$，并满足估计 $\|f_1 f_2\|_{\mathcal{H}^0} \lesssim_{\kappa} \|f_1\|_{\mathcal{H}^0}\|f_2\|_{\mathcal{H}^0}$。*(2)* 令

$$r_d = \begin{cases} 1 + \lfloor \frac{d+1}{d-1} \rfloor, & \text{if } d > 1, \\ 1 & \text{if } d = 1. \end{cases} \tag{B.1.5}$$

另外假设 $f_3, \ldots, f_{r_d} \in \mathcal{H}^0_{(\kappa)}(\mathbb{R}^d)$。那么逐点乘积 $\prod_{j=1}^{r_d} f_j$ 属于 $(L^2 \cap \mathcal{H}^0_{(r_d \cdot \kappa)})(\mathbb{R}^d)$，并满足

$$\Big\| \prod_{j=1}^{r_d} f_j \Big\|_{L^2} \lesssim_{\kappa,d} \prod_{j=1}^{r_d} \|f_j\|_{\mathcal{H}^0}. \tag{B.1.6}$$

(3) 若 $g \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$，则逐点乘积 $f_1 g$ 属于 $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$，并满足

$$\|f_1 g\|_{\mathcal{H}^s} \lesssim_{\kappa,s} \|f_1\|_{\mathcal{H}^0}\|g\|_{\mathcal{H}^s}. \tag{B.1.7}$$

证明。 第一项已在 Koganemaru 和 Tice [57] 的第 2.2 节中证明。

现在我们证明满足 $\kappa = 1$ 和 $d \geqslant 2$时的第二项。 $d \geqslant 2$的一般情形可用类似方法处理，而 $d = 1$ 的情形则显然成立。我们定义函数 $\mu : B(0,1) \to \mathbb{R}$，通过 $\mu(\xi) = |\xi|^{-2}(\xi_1^2 + |\xi|^4)$ 给出，并注意到 μ 是编码 $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^d)$ 中低频控制的乘子。我们将计算对于哪些 $q \in [1,\infty)$，有 $1/\mu \in L^q(B(0,1))$。考虑分解 $B(0,1) = E_0 \sqcup E_1$

$$E_0 = \{\xi = (\xi_1, \xi^*) \in B(0,1) : |\xi_1 \pm 1/2|^2 + |\xi^*|^2 < 1/4\}, \quad E_1 = B(0,1) \setminus E_0. \tag{B.1.8}$$

初等计算表明，对于 $\xi \in B(0,1)$，我们有

$$\xi \in E_0 \Leftrightarrow |\xi|^4 < |\xi_1|^2 \quad \text{and} \quad \xi \in E_1 \Leftrightarrow |\xi_1|^2 \leqslant |\xi|^4. \tag{B.1.9}$$

进而，这些结果表明

$$\begin{cases} \xi_1^2/|\xi|^2 \leqslant \mu(\xi) \leqslant 2\xi_1^2/|\xi|^2 & \text{for } \xi \in E_0 \\ |\xi|^2 \leqslant \mu(\xi) \leqslant 2|\xi|^2 & \text{for } \xi \in E_1. \end{cases} \tag{B.1.10}$$

对于 $1 \leqslant q < \infty$，我们于是得到等价关系

$$\int_{B(0,1)} \mu^{-q} \asymp \int_{E_0} \xi_1^{-2q} |\xi|^{2q} \, \mathrm{d}\xi + \int_{E_1} |\xi|^{-2q} \, \mathrm{d}\xi. \tag{B.1.11}$$

我们可以在 $\xi^* \in \mathbb{R}^{d-1}$ 变量中使用球坐标，从而得到

$$\int_{E_1} |\xi|^{-2q} \, \mathrm{d}\xi < \infty \tag{B.1.12}$$

当且仅当

$$\int_0^{1/2} r^{d-2} \int_0^{1/2-\sqrt{1/4-r^2}} \frac{\mathrm{d}x_1}{(x_1^2+r^2)^q} \, \mathrm{d}r < \infty, \tag{B.1.13}$$

但对于后者，我们可以给出上界

$$\int_0^{1/2} r^{d-2} \int_0^{1/2-\sqrt{1/4-r^2}} \frac{dx_1}{(x_1^2+r^2)^q} \, \mathrm{d}r \leqslant \int_0^{1/2} r^{d-2-2q} \Big(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}-r^2}\Big) \, \mathrm{d}r, \tag{B.1.14}$$

并且由于括号中的项在 r^2 时表现为 $r \sim 0$ ，因此当且仅当$d-2-2q+2 > -1 \Leftrightarrow q < (d+1)/2$时，该项有限。综合以上结果可知，若 $q < (d+1)/2$，则积分 (B.1.12) 确实有限。接下来，我们考虑 E_0 积分，再次在 ξ^* 中使用球坐标。我们有

$$\int_{E_0} \xi_1^{-2q} \, |\xi|^{2q} \, \mathrm{d}\xi < \infty \tag{B.1.15}$$

当且仅当

$$\int_0^{1/2} r^{d-2} \int_{1/2-\sqrt{1/4-r^2}}^{1/2} \Big(1 + \frac{r^2}{x_1^2}\Big)^q \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}r < \infty, \tag{B.1.16}$$

我们知道，只要知道以下条件成立，该积分就是有限的

$$\int_0^{1/2} r^{d-2} \int_{1/2-\sqrt{1/4-r^2}}^{1/2} \Big(\frac{r^2}{x_1^2}\Big)^q \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}r < \infty. \tag{B.1.17}$$

对于后一个积分，我们计算得

$$\int_0^{1/2} r^{d-2} \int_{1/2-\sqrt{1/4-r^2}}^{1/2} \Big(\frac{r^2}{x_1^2}\Big)^q \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}r \leqslant \frac{1}{2q-1} \int_0^{1/2} r^{d-2+2q} \Big(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}-r^2}\Big)^{1-2q} \, \mathrm{d}r, \tag{B.1.18}$$

当且仅当 $d-2+2q+2(1-2q) > -1 \Leftrightarrow q < \frac{d+1}{2}$ 时，该积分有限。因此，我们再次得出：当 $q < (d+1)/2$ 时，积分 (B.1.15) 有限。因此，对于相同范围的 q，(B.1.11) 有限。

现在假设 $f \in \mathcal{H}^0_{(1)}(\mathbb{R}^d)$。由于 $\|f\|_{\mathcal{H}^0} \asymp \|\sqrt{\mu}(\nabla/2\pi\mathrm{i})f\|_{L^2}$，由 H¨older 不等式可知，对于 $1 \leqslant p < 2$ ，有

$$\|\mathscr{F}[f]\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}^0} \Big(\int_{B(0,1)} (1/\mu)^{p/(2-p)} \Big)^{1/p-1/2}. \tag{B.1.19}$$

上述分析表明，右端积分所给出的系数有限，当且仅当 $p/(2-p) < (d+1)/2$。这等价于 $p < \frac{2(d+1)}{d+3}$，因此对于 $1 \leqslant p < \frac{2(d+1)}{d+3}$ ，有 $\mathscr{F}[f] \in L^p(\mathbb{R}^d)$。进而，由于豪斯多夫–杨不等式，我们有

$$\|f\|_{L^q} \lesssim_q \|f\|_{\mathcal{H}^0} \text{ for } \frac{2(d+1)}{d-1} < q \leqslant \infty. \tag{B.1.20}$$

因此，根据 H¨older 不等式，对于任意 $k \in \mathbb{N}$ with $k \leqslant \frac{2}{d-1}$ ，我们有

$$\|f^k\|_{L^q} \lesssim_{q,k} \|f\|^k_{\mathcal{H}^0} \text{ for } \frac{2(d+1)}{k(d-1)} < q \leqslant \infty. \tag{B.1.21}$$

定义 $r_d = \min\left\{k \in \mathbb{N} : \frac{2}{(d+1)\,k(d-1)} < 2\right\}$。注意到最小值存在，因为 $2 < \frac{2}{(d+1)(d-1)} \leqslant 6$。事实上，容易看出

$$r_d = 1 + \left\lfloor \frac{d+1}{d-1} \right\rfloor = \begin{cases} 4 & \text{if } d = 2, \\ 3 & \text{if } d = 3, \\ 2 & \text{if } d > 3, \end{cases} \tag{B.1.22}$$

并且 $\|f^{r_d}\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}^0}^{r_d}$。第二项随后再应用一次 Hölder 不等式即可得出。

最后，我们证明第三项。由命题 B.1 和第一项，我们可以估计

$$\begin{aligned} \|f_1 g\|_{\mathcal{H}^s} &\leqslant \|f_1 \Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa} g\|_{\mathcal{H}^s} + \|f_1 \Pi_{\mathrm{H}}^{\kappa} g\|_{\mathcal{H}^s} \lesssim \|f_1\|_{\mathcal{H}^0} \|\Pi_{\mathrm{L}}^{\kappa} g\|_{\mathcal{H}^0} + \|f_1 \Pi_{\mathrm{H}}^{\kappa} g\|_{H^s} \\ &\lesssim \|f_1\|_{\mathcal{H}^0} \|g\|_{\mathcal{H}^s} + \|f_1\|_{W^{s,\infty}} \|\Pi_{\mathrm{H}}^{\kappa} g\|_{H^s} \lesssim \|f_1\|_{\mathcal{H}^0} \|g\|_{\mathcal{H}^s}, \end{aligned} \tag{B.1.23}$$

这就完成了第三项的证明。 □

注 *B.3*。由命题 *B.2* 的证明，具体而言由 *(B.1.20)*，以及命题 *B.1*，我们推得，对于 $\mathbb{R} \ni s \geqslant 0$，$2(d+1)/(d-1) < q \leqslant \infty$ 和 $f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$，低模部分 $\Pi_{\mathrm{L}}^1 f$ 属于 $L^q(\mathbb{R}^d)$，而高模部分 $\Pi_{\mathrm{H}}^1 f$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^d)$。事实上，所诱导的嵌入 $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow (L^q + L^2)(\mathbb{R}^d)$ 是连续的。

我们现在给出这些特定索伯列夫空间的空间刻画，这在使用这些空间进行先验估计时会很有用。回顾一下，齐次空间 $\dot{H}^{-1}$ 定义于 (1.7.4) 中。

命题 B.4（各向异性 Sobolev 空间的刻画）。以下结论对 $\mathbb{R} \ni s \geqslant 0$ 成立。

(1) 若 $f \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R})$ 满足 $\nabla f \in H^{s-1}(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}^d)$ 且 $\partial_1 f \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)$，则存在常数 $c \in \mathbb{R}$，使得 $f - c \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$。*(2)* 假设 $d \geqslant 2$，并记 $p_d = \frac{2(d+1)}{d-1} > 2$。于是有等式

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) + \bigcup_{p_d < p < \infty} L^p(\mathbb{R}^d) \ :\ \nabla f \in H^{s-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \text{ and } \partial_1 f \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d) \right\}, \tag{B.1.24}$$

其中范数等价

$$\|f\|_{\mathcal{H}^s} \asymp \sqrt{\|\nabla f\|_{H^{s-1}}^2 + [\partial_1 f]_{\dot{H}^{-1}}^2}, \tag{B.1.25}$$

其中隐含常数仅依赖于 d 和 s。

证明。我们先证明第一项。设 $f \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ 满足 $\nabla f \in H^{s-1}(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}^d)$ 和 $\partial_1 f \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)$，并设 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足：在 $B(0,1/2)$ 上 $\varphi = 1$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 1$，且 $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B(0,1)$。给定 $\delta \in (0,1)$，记 $\varphi_\delta(\xi) = \varphi(\xi/\delta)$ 为 $\xi \in \mathbb{R}^d$。对于 $\delta \in (0,1)$，通过 $\mathscr{F}[f_\delta] = (1-\varphi_\delta)\mathscr{F}[f]$ 定义 $f_\delta \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R})$，并注意到 $\operatorname{supp}(\mathscr{F}[f_\delta]) \subseteq \mathbb{R}^d \backslash B(0,\delta/2)$，且 $\mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[f_\delta]$ 在 $\mathbb{R}^d \backslash B(0,\delta)$ 中。由于 $\nabla f \in H^{s-1}(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}^d)$，我们有 $\mathscr{F}[f_\delta]$ 是一个局部可积函数，其表达式为

$$\mathscr{F}[f_\delta](\xi) = -(1-\varphi_\delta(\xi))\mathrm{i}\xi(2\pi|\xi|^2)^{-1} \cdot \mathscr{F}[\nabla f](\xi). \tag{B.1.26}$$

这一事实以及等价关系

$$|\xi|^{-2}\xi_1^2 + |\xi|^2\langle\xi\rangle^{2(s-1)} \asymp |\xi|^{-2}(\xi_1^2 + |\xi|^4)\mathbb{1}_{B(0,1)}(\xi) + \langle\xi\rangle^{2s}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\backslash B(0,1)}(\xi) \text{ for } \xi \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}, \tag{B.1.27}$$

其中隐含常数仅依赖于 d 和 s，从而得出该估计

$$\begin{aligned} \|f_\delta\|_{\mathcal{H}^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\xi|^{-2}(\xi_1^2 + |\xi|^4)\mathbb{1}_{B(0,1)} + \langle\xi\rangle^{2s}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\backslash B(0,1)}\right)|\mathscr{F}[f_\delta](\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \\ &\asymp \int_{\mathbb{R}^d\backslash B(0,\delta/2)} (|\xi|^{-2}\xi_1^2 + |\xi|^2\langle\xi\rangle^{2(s-1)})|1-\varphi_\delta(\xi)|^2|\mathscr{F}[f](\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \lesssim [\partial_1 f]_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|\nabla f\|_{H^{s-1}}^2, \end{aligned} \tag{B.1.28}$$

这表明 $\{f_\delta\}_{\delta\in(0,1)}\subset\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$。类似的论证表明，$\{f_\delta\}_{\delta\in(0,1)}$ 在$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$中是柯西列。由于 $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 是完备的，因此当 $\delta\to 0$ 时，$f_\delta\to g\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$。另一方面，由于$\mathscr{F}[f]=\mathscr{F}[f_\delta]$属于 $\mathbb{R}^d\backslash B(0,\delta)$，我们很容易推得 $\mathscr{F}[f]=\mathscr{F}[g]$在 $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$上成立，进而 $\operatorname{supp}(\mathscr{F}[f-g])\subseteq\{0\}$。支撑于一点的温和分布仅由狄拉克质量及其导数的线性组合构成；因此，存在一个多项式 P，使得 $f-g=P$。Leoni 和 Tice 的定理 5.6 [60] 表明，包含关系 $g\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 蕴含$\nabla g\in H^{s-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$（其中的证明针对 $s\geqslant 1$给出，但同样的论证也适用于$0\leqslant s<1$）。因此，$\nabla P=\nabla(f-g)\in H^{s-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$，这要求 P为常数。至此，第一项的证明完成。

现在转而证明第二项。将 (B.1.24) 中的第二个空间记为 $\mathcal{H}^s_{\mathrm{II}}(\mathbb{R}^d)$。[60] 中的定理 5.5 和 5.6 表明，若 $f\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$，则 $\nabla f\in H^{s-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ 和 $\partial_1 f\in\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)$；结合这些包含关系与注 B.3 中的观察可知，$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)\subseteq\mathcal{H}^s_{\mathrm{II}}(\mathbb{R}^d)$。

为证明反向包含关系，我们首先注意到 $L^2(\mathbb{R}^d)+\bigcup_{p_d<p<\infty}L^p(\mathbb{R}^d)\subseteq\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$。因此，第一项表明，若 $f\in\mathcal{H}^s_{\mathrm{II}}(\mathbb{R}^d)$，则对于某个 $c\in\mathbb{R}$，有 $f-c\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$。另一方面，根据定义，我们可以选取 $p_d<q<\infty$，使得 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)+L^q(\mathbb{R}^d)$，于是再次应用注 B.3 可得 $c=f-(f-c)\in L^2(\mathbb{R}^d)+L^q(\mathbb{R}^d)$，这意味着 $c=0$。因此，$f\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$，由此可推出 $\mathcal{H}^s_{\mathrm{II}}(\mathbb{R}^d)\subseteq\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$。

现在我们知道 $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)=\mathcal{H}^s_{\mathrm{II}}(\mathbb{R}^d)$，因此只需验证 (B.1.25)。由 (B.1.27) 以及以下额外的等价关系可得

$$\|\nabla f\|_{H^{s-1}}\asymp\||\nabla|\langle\nabla\rangle^{s-1}f\|_{L^2}\text{ and }[\partial_1 f]_{\dot{H}^{-1}}\asymp\||\nabla|^{-1}\partial_1 f\|_{L^2}\text{ for }f\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d),\tag{B.1.29}$$

其中，隐含常数仍仅依赖于 s 和 d。□

我们需要的特化索伯列夫空间的下一个性质是一个简单的插值性质。

引理 B.5 (各向异性 Sobolev 空间中范数的对数凸性)。 设 s_0，$s_1\in\mathbb{R}$ 满足s_0，$s_1\geqslant 0$，并设 $\sigma\in[0,1]$。对于所有 $f\in(\mathcal{H}^{s_0}\cap\mathcal{H}^{s_1})(\mathbb{R}^d)$，有 $f\in\mathcal{H}^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}(\mathbb{R}^d)$ 且满足上界

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{(1-\sigma)s_0+\sigma s_1}}\lesssim\|f\|^{1-\sigma}_{\mathcal{H}^{s_0}}\|f\|^{\sigma}_{\mathcal{H}^{s_1}}.\tag{B.1.30}$$

证明。 我们定义一个辅助函数

$$\chi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\text{ via }\chi(\xi)=(|\xi\cdot e_1||\xi|^{-1}+|\xi|)\mathbb{1}_{B(0,1)}(\xi)+\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\backslash B(0,1)}(\xi).\tag{B.1.31}$$

根据 $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 上范数的定义可知，若 η 属于该空间，则 $\chi(\nabla/2\pi\mathrm{i})\eta\in H^s(\mathbb{R}^d)$，并且有以下等价关系

$$\|\eta\|_{\mathcal{H}^s}\asymp\|\chi(\nabla/2\pi\mathrm{i})\eta\|_{H^s}.\tag{B.1.32}$$

由 (B.1.32) 可立即看出，$\mathcal{H}^s$ 空间的对数凸性源于基于 L^2 的索伯列夫空间通常的对数凸性。□

现在我们研究各向异性 Sobolev 空间尺度上的平滑算子。

引理 B.6 (Littlewood–Paley 可平滑性)。 巴拿赫尺度 $\{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)\}_{s\in\mathbb{N}}$ 按照定义 *2.11* 的意义是 *LP*-可光滑化的。

证明。 对于平滑算子，我们作出显然的选择 $S_j\eta=\mathbb{1}_{B(0,2^j)}(\nabla/2\pi\mathrm{i})\eta$，其中 $j\in\mathbb{N}^+$。S_j 的连续性：$\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{H}^\infty(\mathbb{R}^d)$ 显然。此外，Littlewood–Paley 条件 (2.1.22) 显然由 $A=1$ 满足。因此，只需验证定义 (2.11) 第一项中的平滑不等式。我们再次考虑 (B.1.31) 中的辅助函数 χ。由于平滑算子 $\{S_j\}_{j=0}^\infty$ 与傅里叶乘法算子 $\chi(\nabla/2\pi\mathrm{i})$ 可交换，故 (2.1.17)–(2.1.20) 中的平滑不等式可直接由 $\{H^s(\mathbb{R}^d)\}_{s\in\mathbb{N}}$ 的 Littlewood–Paley 可平滑性（见例 2.13）及 (B.1.32) 得出。□

B.2. **适配　　索伯列夫空间。** 给定 $X \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$，我们定义适配索伯列夫空间

$$H^0_X(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) \ : \ \nabla\cdot(X\varphi) \in L^2(\Omega)\}, \tag{B.2.1}$$

其中散度按分布的意义理解，并赋予其显然的范数$\|\varphi\|_{H^0_X} = \sqrt{\|\varphi\|^2_{L^2} + \|\nabla\cdot(X\varphi)\|^2_{L^2}}$及相应的内积。

引理 B.7 ($H^0_X(\Omega)$)**（基本性质）** 设 $X \in L^\infty(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$。则有以下结论。

(1) $H^0_X(\Omega)$ 是一个希尔伯特空间。*(2)* 若 $\psi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ 且 $\varphi \in H^0_X(\Omega)$，则有包含关系 $\varphi\psi \in H^0_X(\Omega)$ 以及估计 $\|\varphi\psi\|_{H^0_X} \lesssim \langle \|X\|_{L^\infty}\rangle \|\psi\|_{W^{1,\infty}} \|\varphi\|_{H^0_X}$。*(3)* 空间 $\{\varphi \in H^0_X(\Omega)$: supp$(\varphi)$ 有界$\}$ 且在 $H^0_X(\Omega)$中稠密。

证明。 假设 $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \subseteq H^0_X(\Omega)$ 是柯西序列。那么，序列 $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ 和 $\{\zeta_k\}_{k=0}^\infty$ 在 L^2 中是柯西序列，其中 $\zeta_k = \nabla\cdot(\varphi_k X)$。因此，存在 $\varphi,\zeta \in L^2(\Omega)$，使得 $\varphi_k \to \varphi$ 且 $\zeta_k \to \zeta$ 在 L^2 中。然而，对于 $\chi \in C^\infty_c(\Omega)$，

$$\int_\Omega \zeta\chi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \zeta_k\chi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega -\varphi_k X\cdot\nabla\chi = \int_\Omega -\varphi X\cdot\nabla\chi, \tag{B.2.2}$$

因此 $\zeta = \nabla\cdot(\varphi X)$ 在分布意义下成立，由此可得 $H^0_X(\Omega)$ 是完备的，因而是希尔伯特空间。第一项得证。

现在证明第二项。设 $\varphi \in H^0_X(\Omega)$，且 $\psi \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$。我们首先断言

$$\nabla\cdot(X\psi\varphi) = \psi\nabla\cdot(X\varphi) + X\varphi\cdot\nabla\psi. \tag{B.2.3}$$

断言得证后，包含关系 $\varphi\psi \in H^0_X(\Omega)$ 以及所述估计即可立即推出。为证明该断言，设 $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ 是一个序列，使得当 $\ell\to\infty$ 时，$\varphi_\ell \to \varphi$ 在 $L^2(\Omega)$ 中。由乘积法则可得恒等式

$$\nabla\cdot(X\psi\varphi_\ell) = \psi\nabla\cdot(X\varphi_\ell) + X\varphi_\ell\cdot\nabla\psi \text{ for every } \ell\in\mathbb{N}, \tag{B.2.4}$$

或者更准确地说，对于任意 $\chi \in C^\infty_c(\Omega)$，我们有

$$-\int_\Omega X\psi\varphi_\ell\cdot\nabla\chi = -\int_\Omega \nabla(\psi\chi)\cdot X\varphi_\ell + \int_\Omega \chi X\varphi_\ell\cdot\nabla\psi. \tag{B.2.5}$$

现在令 $\ell\to\infty$，并利用 $L^2(\Omega)$ 中的收敛性以及包含关系 $\nabla\cdot(X\varphi) \in L^2(\Omega)$，可推出

$$-\int_\Omega X\psi\varphi\cdot\nabla\chi = \int_\Omega (\psi\nabla\cdot(X\varphi) + X\varphi\cdot\nabla\psi)\chi, \tag{B.2.6}$$

这就是 (B.2.3)。至此，命题的证明及第二项均已完成。

最后，我们证明密度断言。固定满足 $\psi = 1$ in $B(0,1)$ 的 $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$。通过 $\psi_N = \psi(N^{-1}\cdot)$ 定义 $\{\psi_N\}_{N\in\mathbb{N}^+} \subset H^1(\Omega)$。取 $\varphi \in H^0_X(\Omega)$，并记为 $\varphi_N = \psi_N\varphi$。只要证明当 $N\to\infty$ 在 $H^0_X(\Omega)$ 范数下趋于 $\varphi_N \to \varphi$ 时，证明便告完成。控制收敛定理表明，当 $N\to\infty$ 时，$\varphi_N \to \varphi$ 在 L^2 中收敛。另一方面，公式 (B.2.3) 意味着 $\nabla\cdot(X\psi_N\varphi) = \psi_N\nabla\cdot(X\varphi) + N^{-1}X\varphi(\nabla\psi)(N^{-1}\cdot)$。由于 $\nabla\cdot(X\varphi) \in L^2(\Omega)$，当 $N\to\infty$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛时，我们有 $\psi_N\nabla\cdot(X\varphi) \to \nabla\cdot(X\varphi)$。由于 $\nabla\psi$ 有界，我们有$N^{-1}X\varphi(\nabla\psi)(N^{-1}\cdot)$ 当 $N\to\infty$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛时趋于 $\to 0$。综合这些收敛性可得，当 $N\to\infty$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛时，$\nabla\cdot(X\varphi_N) \to \nabla\cdot(X\varphi)$。因此，我们证明了当 $N\to\infty$ 在 $H^0_X(\Omega)$ 范数下趋于 $\varphi_N\to\varphi$，第三项得证。□

接下来我们证明一个稠密性结果。

引理 B.8 (适配 Sobolev 空间中光滑函数的稠密性)。 对于 $X \in W^{1,\infty}(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$，空间 $C^\infty_c(\Omega)$ 在 $H^0_X(\Omega)$中稠密。

证明。 首先注意到，包含关系 $C_c^\infty(\Omega) \subseteq H_X^0(\Omega)$ 是由额外假设 $X \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 以及拉德马赫定理得出的。为证明稠密性，我们尝试应用 Boyer 和 Fabrie [11]中的命题 III.2.8 和定理 III.2.2.10。这些结果表明，给定一个有界利普希茨区域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$，使得 $U \subseteq B(0, R)$，存在磨光算子 $\{\mathcal{S}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$，满足：若 $f \in L^2(U)$ 且 $\alpha \in W^{1,\infty}(U;\mathbb{R}^n)$ 满足 $\nabla\cdot(\alpha f) \in L^2(U)$，则有 $\{\mathcal{S}_\varepsilon f\}_{\varepsilon>0} \subseteq C_c^\infty(U)$，其中 $\operatorname{supp}(\mathcal{S}_\varepsilon f) \subseteq R+1$，$\mathcal{S}_\varepsilon f \overset{\varepsilon\to 0}{\to} f$ 属于 $L^2(U)$，且 $\nabla\cdot(\alpha\mathcal{S}_\varepsilon f) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \nabla\cdot(\alpha f)$ 属于 $L^2(U)$。

注意，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 没有紧边界，因此我们无法直接应用这一结果。不过，借助引理 B.7，我们可以归结为这种情形。设 $\varphi \in H_X^0(\Omega)$，并令 $\kappa \in \mathbb{R}^+$。借助上述引理，存在一个有界支撑的 $\widetilde{\varphi} \in H_X^0(\Omega)$，使得 $\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{H_X^0} \leqslant \kappa/2$。对于某个 $3 \leqslant R \in \mathbb{R}^+$，我们进而有 $\operatorname{supp}(\widetilde{\varphi}) \subseteq U_R = B_{\mathbb{R}^n}(0, R) \cap \Omega$。集合 U_{2R} 是一个具有紧边界的 Lipschitz区域，因此它存在如上所述的平滑算子 $\{\mathcal{S}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$。根据 $\widetilde{\varphi}$ 的支撑条件以及这些平滑算子的性质，存在一个 $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$，使得对所有 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，都有 $\operatorname{supp}(\mathcal{S}_\varepsilon\widetilde{\varphi}) \subseteq U_{3R/2}$ 且

$$\sqrt{\|\mathcal{S}_\varepsilon\widetilde{\varphi}-\widetilde{\varphi}\|_{L^2(U_{2R})}^2 + \|\nabla\cdot(X\mathcal{S}_\varepsilon\widetilde{\varphi}) - \nabla\cdot(X\widetilde{\varphi})\|_{L^2(U_{2R})}^2} \leqslant \kappa/2. \tag{B.2.7}$$

设 $\overline{\varphi} = \mathcal{S}_{\varepsilon_0}\widetilde{\varphi}$。根据 $\widetilde{\varphi}$ 和 φ的支撑情况可知，实际上 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，且

$$\begin{cases} \|\overline{\varphi}-\widetilde{\varphi}\|_{L^2(U_{2R})} = \|\overline{\varphi}-\widetilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|\nabla\cdot(X\overline{\varphi}) - \nabla\cdot(X\widetilde{\varphi})\|_{L^2(U_{2R})} = \|\nabla\cdot(X(\overline{\varphi}-\widetilde{\varphi}))\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \tag{B.2.8}$$

因此，由前两个方程可得 $\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{H_X^0} \leqslant \kappa/2$。现在利用三角不等式即可得到估计 $\|\overline{\varphi}-\varphi\|_{H_X^0} \leqslant \kappa$，从而证明了稠密性。□

下面的结果列出了一些分部积分公式。

命题 B.9 (一些分部积分公式)。 设 $X \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足 $\operatorname{Tr}_{\partial\Omega}(X\cdot e_n) = 0$。以下结论成立。

(1) 若 $\varphi \in H_X^0(\Omega)$，则

$$\int_\Omega \frac{\nabla\cdot X}{2}\varphi^2 = \int_\Omega \varphi\nabla\cdot(\varphi X). \tag{B.2.9}$$

(2) 若 $\varphi \in H_X^0(\Omega)$ 且 $\psi \in H^1(\Omega)$，则 $\int_\Omega \nabla\cdot(\varphi X)\psi = -\int_\Omega \varphi X\cdot\nabla\psi$。

证明。 我们先证明第一项。首先假设 $\varphi \in H^1(\Omega)$。利用乘积法则的两种形式，我们计算得

$$2^{-1}\nabla\cdot(\varphi^2 X) = \nabla\cdot(\varphi^2 X) - 2^{-1}\nabla\cdot(\varphi^2 X) = \varphi\nabla\cdot(\varphi X) - 2^{-1}(\nabla\cdot X)\varphi^2. \tag{B.2.10}$$

然后对 Ω 上的该式积分，应用散度定理，并利用条件 $\operatorname{Tr}_{\partial\Omega}(X\cdot e_n) = 0$，得到 (B.2.9)。一般情形 $\varphi \in H_X^0(\Omega)$ 可由引理 B.8 通过稠密性论证得出。第二项通过类似的稠密性论证证明。□

接下来我们证明一个有用的估计。

命题 B.10 (精细散度相容性估计)。 设 $X \in W^{1,\infty}(\Omega)$ 且 $\varphi \in H_X^0(\Omega)$。则函数 $\int_0^b \nabla\cdot(X\varphi)(\cdot, y)\,\mathrm{d}y : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 属于 $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})$，并满足等式

$$\int_0^b \nabla\cdot(X\varphi)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y = (\nabla_\parallel, 0)\cdot\int_0^b (X\varphi)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y, \tag{B.2.11}$$

并满足以下估计

$$\left[\int_0^b \nabla\cdot(X\varphi)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\right]_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|X\varphi\|_{L^2} \tag{B.2.12}$$

其中隐含常数仅依赖于 b 和维数。

证明。令 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，并通过平凡延拓 $\psi(\overline{x}, y) = \psi(x)$ 将 $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ 视为定义在 $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, b)$ 上的函数。由命题 B.9 的第二项和富比尼定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_0^b \nabla \cdot (X\varphi)(\cdot, y)\, \mathrm{d}y \Big) \psi = \int_\Omega \nabla \cdot (X\varphi)\psi = -\int_\Omega \varphi X \cdot \nabla \psi$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_0^b (\varphi X)(\cdot, y); \mathrm{d}y \Big) \cdot (\nabla_\parallel \psi, 0). \quad \text{(B.2.13)}$$

由于 ψ 是任意的，恒等式 (B.2.11) 得证。由 (B.2.11) 及 $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ 上范数的定义，估计 (B.2.12) 可直接推出。□

Appendix C. A selection of PDE tools

C.1. 散度边值问题。 本小节着重于在各种空间中构造散度算子的右逆。首先引入如下记号：对于 $s \in [0, \infty)$，我们定义函数空间

$$\hat{H}^s(\Omega) = \Big\{ \phi \in H^s(\Omega) \ : \ \int_0^b \phi(\cdot, y)\, \mathrm{d}y \in \dot{H}^{-1}(\Sigma) \Big\}, \tag{C.1.1}$$

其中，齐次空间 $\dot{H}^{-1}$ 定义见 (1.7.4)。在范数 $\|\phi\|_{\hat{H}^s} = \big(\|\phi\|_{H^s}^2 + \big[\int_0^b \phi(\cdot, y)\, \mathrm{d}y \big]_{\dot{H}^{-1}}^2 \big)^{1/2}$ 下，该空间是希尔伯特空间。

现在我们给出一个关于散度与法向迹的实用相容性估计。

命题 C.1 (散度-法向迹相容条件)。 若 $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$，则

$$\Big[\mathrm{Tr}_\Sigma u \cdot e_n - \mathrm{Tr}_{\Sigma_0} u \cdot e_n - \int_0^b (\nabla \cdot u)(\cdot, y)\, \mathrm{d}y \Big]_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim \|u\|_{L^2}. \tag{C.1.2}$$

证明。根据微积分基本定理，我们有

$$\mathrm{Tr}_\Sigma u \cdot e_n - \mathrm{Tr}_{\Sigma_0} u \cdot e_n - \int_0^b (\nabla \cdot u)(\cdot, y)\, \mathrm{d}y = -(\nabla_\parallel, 0) \cdot \int_0^b u(\cdot, y)\, \mathrm{d}y. \tag{C.1.3}$$

根据 $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ 上范数的定义，估计式 (C.1.2) 随即得出（见 (1.7.4)）。□

本小节余下部分将致力于构造散度边值问题的解算子。

命题 C.2 (散度边值问题的解算子)。 存在有界线性算子 $\mathcal{B}_0$ 和 $\mathcal{B}_1$ 使得对于 $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}_0 : \hat{H}^k(\Omega) \to H^{1+k}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \tag{C.1.4}$$

and

$$\mathcal{B}_1 : \{ \varphi \in H^{1/2+k}(\Sigma; \mathbb{R}^n) \ : \ \varphi \cdot e_n \in \dot{H}^{-1}(\Sigma) \} \to H^{1+k}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap {}_0H^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \tag{C.1.5}$$

具有以下性质

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathcal{B}_0 \psi = \psi & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}_0 \psi = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathcal{B}_1 \varphi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}_1 \varphi = \varphi & \text{on } \Sigma, \\ \mathcal{B}_1 \varphi = 0 & \text{on } \Sigma_0. \end{cases} \tag{C.1.6}$$

证明。我们从构造 $\mathcal{B}_0$ 开始。固定 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\psi \in \hat{}H^k(\Omega)$。根据 Tonelli 定理和 Parseval定理，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{j=0}^{k} \int_0^b \langle \xi \rangle^{2(k-j)} \left| \partial_n^j \mathscr{F}[\psi](\xi, y) \right|^2 \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\xi \asymp \|\psi\|_{H^k}^2 , \tag{C.1.7}$$

特别是，这意味着对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$，我们有

$$\sum_{j=0}^{k} \int_0^b \langle \xi \rangle^{2(k-j)} \left| \partial_n^j \mathscr{F}[\psi](\xi, y) \right|^2 \mathrm{d}y < \infty. \tag{C.1.8}$$

不失一般性，我们可以假设这个量对每个 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ 都是有限的。于是定义可测函数 $\zeta : \Omega \to \mathbb{C}$，使其满足

$$\begin{aligned} \zeta(\xi, y) = \frac{\cosh(2\pi |\xi| y)}{2\pi |\xi| \sinh(2\pi |\xi| b)} \int_0^b \mathscr{F}[\psi](\xi, t) \cosh(2\pi |\xi| (b - t)) \, \mathrm{d}t \\ - \int_0^y \mathscr{F}[\psi](\xi, t) \frac{\sinh(2\pi |\xi| (y - t))}{2\pi |\xi|} \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{C.1.9}$$

容易验证，对每个 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$，都有包含关系 $\zeta(\xi, \cdot) \in H^2((0, b); \mathbb{C})$，并且

$$\begin{cases} -\partial_n^2 \zeta(\xi, \cdot) + 4\pi^2 |\xi|^2 \zeta(\xi, \cdot) = \mathscr{F}[\psi](\xi, \cdot) & \text{in } (0, b) \\ \partial_n \zeta(\xi, t) = 0 & \text{for } t \in \{0, b\}. \end{cases} \tag{C.1.10}$$

将 ζ 所满足的常微分方程两边乘以 $\bar{\zeta}$ 并在 $(0, b)$ 上分部积分，可得

$$\begin{aligned} \int_0^b \left(|\partial_n \zeta(\xi, y)|^2 + 4\pi^2 |\xi|^2 |\zeta(\xi, y)|^2 \right) \mathrm{d}y &= \int_0^b \mathscr{F}[\psi](\xi, y) \overline{\zeta(\xi, y)} \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^b \mathscr{F}[\psi](\xi, y) (\overline{\zeta(\xi, y)} - \overline{\langle \zeta(\xi, \cdot) \rangle_{(0,b)}}) \, \mathrm{d}y + \overline{\langle \zeta(\xi, \cdot) \rangle_{(0,b)}} \int_0^b \mathscr{F}[\psi](\xi) \, \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{C.1.11}$$

上文中，我们用 $\langle \cdot \rangle_{(0,b)}$ 表示 $(0, b)$ 上的积分平均值。由庞加莱不等式、柯西-施瓦茨不等式和柯西不等式，我们可以得到上界

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^b \mathscr{F}[\psi](\xi, y) \overline{\zeta(\xi, y)} \, \mathrm{d}y \Big| \leqslant \frac{1}{2} \int_0^b \left(|\partial_n \zeta(\xi, y)|^2 + 4\pi^2 |\xi|^2 |\zeta(\xi, y)|^2 \right) \mathrm{d}y \\ + C \int_0^b |\mathscr{F}[\psi](\xi, y)|^2 \, \mathrm{d}y + C \Big| \int_0^b \frac{\mathscr{F}[\psi](\xi, y)}{|\xi|} \, \mathrm{d}y \Big|^2 \end{aligned} \tag{C.1.12}$$

对于一个常数 $C > 0$ 仅取决于 b。另一方面，类似的论证表明 t

$$\begin{aligned} \int_0^b \left(|\xi|^{2(k+1)} |\partial_n \zeta(\xi, y)|^2 + 4\pi^2 |\xi|^{2(k+2)} |\zeta(\xi, y)|^2 \right) \mathrm{d}y &= \int_0^b |\xi|^k \mathscr{F}[\psi](\xi, y) \, |\xi|^{k+2} \overline{\zeta(\xi, y)} \, \mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_0^b 4\pi^2 |\xi|^{2(k+2)} |\zeta(\xi, y)|^2 \, \mathrm{d}y + C \int_0^b |\xi|^{2k} |\mathscr{F}[\psi](\xi, y)|^2 \, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{C.1.13}$$

其中常数 $C > 0$ 仅取决于 b。综合这些界，我们推得 $\zeta(\xi, \cdot)$ 满足估计

$$\langle \xi \rangle^{2(k+1)} \int_0^b \left(|\partial_n \zeta(\xi, y)|^2 + 4\pi^2 |\xi|^2 |\zeta(\xi, y)|^2 \right) \mathrm{d}y \lesssim \langle \xi \rangle^{2k} \int_0^b |\mathscr{F}[\psi](\xi, y)|^2 \, \mathrm{d}y + \Big| \int_0^b \frac{\mathscr{F}[\psi](\xi, y)}{|\xi|} \, \mathrm{d}y \Big|^2. \tag{C.1.14}$$

回到 (C.1.10)，并利用 (C.1.8) 及一个简单的有限归纳论证，我们推得 $\zeta(\xi,\ \cdot\ ) \in H^{2+k}((0,\ b);\mathbb{C})$，并且对于 $0 \leqslant j \leqslant k$，有如下界

$$\langle\xi\rangle^{2(k-j)} \int_0^b |\partial_n^{2+j}\zeta(\xi,y)|^2 \,\mathrm{d}y \lesssim \langle\xi\rangle^{2(k-j)} \int_0^b |\partial_n^j \mathscr{F}[\psi](\xi,y)|^2 \,\mathrm{d}y + \langle\xi\rangle^{2(k-j+1)} 4\pi^2|\xi|^2 \int_0^b |\partial_n^j\zeta(\xi,y)|^2 \,\mathrm{d}y. \quad \text{(C.1.15)}$$

随后，我们可以对这些估计（适用于 $0 \leqslant j \leqslant k$）以及 (C.1.14) 作适当的线性组合，从而推出上界

$$\langle\xi\rangle^{2(k+1)} \int_0^b 4\pi^2\,|\xi|^2\,|\zeta(\xi,y)|^2 \,\mathrm{d}y + \sum_{j=1}^{2+k} \langle\xi\rangle^{2(k+2-j)} \int_0^b |\partial_n^j\zeta(\xi,y)|^2 \,\mathrm{d}y \lesssim \sum_{j=0}^{k} \int_0^b \langle\xi\rangle^{2(k-j)}\,|\partial_n^j\mathscr{F}[\psi](\xi,y)|^2 \,\mathrm{d}y + \Big|\int_0^b \frac{\mathscr{F}[\psi](\xi,y)}{|\xi|} \,\mathrm{d}y\Big|^2. \quad \text{(C.1.16)}$$

接下来，我们通过 $\Xi(\xi,y) = (-2\pi i\xi\zeta(\xi,y)\ -\partial_n\zeta(\xi,y))$ 定义向量场 $\Xi\colon \Omega \to \mathbb{C}^n$。由于 ψ 为实值函数，我们知道，对于 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ 和 $y \in (0,b)$，有 $\mathscr{F}[\psi](\xi,y) = \mathscr{F}[\psi](-\xi,y)$，这立即意味着 $\Xi(\xi,y) = \Xi(-\xi,y)$ 也成立。将上界 (C.1.16) 在 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ 上积分，便得到 $\Xi \in L^2(\Omega;\ \mathbb{C}^n)$，因此我们可以通过 $X = \mathscr{F}^{-1}[\Xi]$ 定义 $X \in L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$。进而，(C.1.16) 和 (C.1.7) 还意味着 $X \in H^{1+k}(\Omega;\mathbb{R}^n)$，并且

$$\|X\|_{H^{1+k}} \lesssim \Big(\ \|\psi\|_{H^k}^2 + \Big[\int_0^b \psi(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big]_{\dot{H}^{-1}}^2\Big)^{1/2} = \|\psi\|_{\mathring{H}^k}. \quad \text{(C.1.17)}$$

我们使用 (C.1.10) 计算 $\mathscr{F}[\nabla\cdot X](\xi,\ y) = (2\pi i\xi,\ 0)\cdot\Xi(\xi,\ y) + \partial_n\Xi\cdot e_n(\xi,\ y) = -\partial_n^2\zeta(\xi,\ y) + 4\pi^2\,|\xi|^2\,\zeta(\xi,\ y) = \mathscr{F}[\psi](\xi,\ y)$ 以及 $\mathscr{F}[X](\xi,\ t) = \Xi\cdot e_n(\xi,\ t) = 0$ for $t \in \{0,b\}$。因此，X 满足

$$\begin{cases} \nabla\cdot X = \psi & \text{in } \Omega, \\ X\cdot e_n = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad \text{(C.1.18)}$$

接下来我们回顾一下标准的索博列夫迹理论（例如参见 Adams 和 Fournier 的第 7 章 [2] 或 Leoni 的第 18 章 [59]），该理论表明迹映射

$$H^{2+k}(\Omega) \ni f \mapsto (\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}[f], \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}[\partial_n f]) \in H^{3/2+k}(\partial\Omega) \times H^{1/2+k}(\partial\Omega) \quad \text{(C.1.19)}$$

是有界线性的，且存在一个有界右逆 $\mathcal{R}$。因此，我们可以通过 $\omega = (\mathcal{R}(0,\ -X\cdot e_1)\ldots,\mathcal{R}(0,\ -X\cdot e_{n-1}))$ 定义 $\omega \in H^{k+2}(\Omega;\ \mathbb{R}^{n-1})$。最后，这使我们能够通过 $\mathcal{B}_0\psi = X + (\partial_n\omega,\ \nabla_\parallel\cdot\omega)$ 定义 $\mathcal{B}_0\psi \in H^{1+k}(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$。由 (C.1.18) 及 ω 的构造可知，$\nabla\cdot\mathcal{B}_0\psi = \nabla\cdot X + \nabla_\parallel\cdot\partial_n\omega - \partial_n\nabla_\parallel\cdot\omega = \psi$ 在 Ω，中成立；而在 Ω 的 ∂ 上，对于 $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ $(\mathcal{B}_0\psi)$，有 $\cdot\, e_j = X\cdot e_j + \partial_n\omega\cdot e_j = X\cdot e_j - X\cdot e_j = 0$。此外，我们还有 $(\mathcal{B}_0\psi)\cdot e_n = X\cdot e_n - \nabla_\parallel\cdot\omega = X\cdot e_n = 0$。因此，$\mathcal{B}_0\psi$ 满足 (C.1.6) 中所述的性质。此外，$\mathcal{B}_0\psi$ 的构造表明，所得映射 $\psi \mapsto \mathcal{B}_0\psi$ 是线性的，且满足 $\|\mathcal{B}_0\psi\|_{H^{k+1}} \lesssim \|\psi\|_{\mathring{H}^k}$。至此，有界线性映射 $\mathcal{B}_0$ 的构造完成。

现在我们构造 $\mathcal{B}_1$。为此，我们将 L 记为迹映射的一个有界右逆

$$H^{1+k}(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \mathrm{Tr}_\Sigma(u) \in H^{1/2+k}(\Sigma;\mathbb{R}^n), \quad \text{(C.1.20)}$$

根据标准迹理论，该函数再次存在。注意，若 $\varphi \in H^{1/2+k}(\Sigma;\mathbb{R}^n)$ 且 $\varphi\cdot e_n \in \dot{H}^{-1}(\Sigma;\ \mathbb{R}^n)$，则

$$\int_0^b \nabla\cdot(L\varphi)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y = (\nabla_\parallel, 0)\cdot\int_0^b (L\varphi)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y + \varphi\cdot e_n(\cdot), \quad \text{(C.1.21)}$$

由此可立即推出

$$\Big[\int_0^b \nabla\cdot(L\varphi)(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big]_{\dot H^{-1}} \lesssim \|L\varphi\|_{L^2}+[\varphi\cdot e_n]_{\dot H^{-1}} \lesssim \|\varphi\|_{H^{1/2+k}}+[\varphi\cdot e_n]_{\dot H^{-1}}. \tag{C.1.22}$$

因此，我们可以通过 $\mathcal{B}_1\varphi = L\varphi - \mathcal{B}_0\nabla\cdot L\varphi$ 定义线性映射 $\mathcal{B}_1$。接下来只需简单验证 $\mathcal{B}_1$ 有界，且 $\mathcal{B}_1\varphi$ 满足 (C.1.6) 中所述的条件。至此，$\mathcal{B}_1$ 的构造完成。□

接下来我们记录几个推论。第一个推论构造了一个作用于 $H^k(\Omega)$ 上的算子 .

推论 C.3 (散度的右逆)。 存在一个有界线性算子，使得对于 $k\in\mathbb{N}$，$\mathcal{B}\colon H^k(\Omega)\to H^{1+k}(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 满足 $\nabla\cdot\mathcal{B}\psi=\psi$ 对所有 $\psi\in H^k(\Omega)$。

证明。 若对于 $p\in\mathbb{N}$，我们定义 $A_p\psi\colon\Omega\to\mathbb{R}$，其定义方式为 $A_p\psi(x,y)=\fint_b^p\int_0^b\psi(x,t)\,\mathrm{d}t$，则 $A_p\psi\in H^k(\Omega)$ 且 $\|A_p\psi\|_{H^k}\lesssim_p\|\psi\|_{H^k}$。换言之，$A_p\in\mathcal{L}(\overline{H}^k(\Omega))$。

注意，对于 $\psi\in H^k(\Omega)$，我们有 $\int_0^b(\psi(\cdot,y)-A_0\psi(\cdot,y))\,\mathrm{d}y=\int_0^b\psi(\cdot,y)\,\mathrm{d}y-\int_0^b\psi(\cdot,y)\,\mathrm{d}y=0$。因此，我们可以利用命题 C.2 中的算子$\mathcal{B}_0$ 构造 $\mathcal{B}_0(\psi-A_0\psi)\in H^{1+k}(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$。接着，我们通过 $\mathcal{B}\psi=\mathcal{B}_0(\psi-A_0\psi)+(A_1\psi)e_n$定义 $\mathcal{B}\colon H^k(\Omega)\to H^{1+k}(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$。随后很容易验证，该映射有界且线性，并且对所有 $\psi\in H^k(\Omega)$ 都满足 $\nabla\cdot\mathcal{B}\psi=\psi$。□

命题 C.2 的第二个推论在 $H^{1/2+k}(\Sigma)\cap\dot H^{-1}(\Sigma)$ 上构造了一个算子。

推论 C.4 (无散延拓算子)。 存在一个有界线性算子，使得对于 $k\in\mathbb{N}$，$\mathcal{B}_2\colon H^{1/2+k}(\Sigma)\cap\dot H^{-1}(\Sigma)\to {}_0H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 且满足 $\nabla\cdot\mathcal{B}_2\chi=0$，$\mathrm{Tr}_\Sigma(\mathcal{B}_2\chi\cdot e_n)=\chi$，并且$(I-e_n\otimes e_n)\mathrm{Tr}_\Sigma(\mathcal{B}_2\chi)=0$。

证明。 令 $\mathcal{B}_1$ 如命题 C.2 中所述，并通过 $\mathcal{B}_2\chi=\mathcal{B}_1(\chi e_n)$ 定义 $\mathcal{B}_2$。 □

C.2. 椭圆理论工具。 我们先在本小节中记录关于式 (4.1.1) 中双线性型 B_m 的一些结果。尽管 B_m 不是强制的，下一个结果表明它满足 G˚arding 不等式。

引理 C.5 (B_m G˚arding 不等式)。 设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\Lambda\in W^{\infty,\infty}(\Omega)$ 满足 $\Lambda>0$ 且 $1/\Lambda\in L^\infty(\Omega)$。存在常数 c，$C\in\mathbb{R}^+$，它们仅依赖于 Λ、维数、Ω和 m，使得$c\|\varphi\|^2_{H^m}\leqslant B_m(\Lambda\varphi,\varphi)+C\|\varphi\|^2_{L^2}$ 对所有 $\varphi\in H^m(\Omega)$均成立。

*Pr*证明。 先考虑 $\Lambda=1$ 的情形。我们将 $B_m=B_{m,\|}+B_{m,n}$ 分解，其中 re

$$B_{m,\|}(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{j=1}^{n-1}\int_\Omega\partial_j^m\varphi_0\partial_j^m\varphi_1 \text{ and } B_{m,n}(\varphi_0,\varphi_1)=\int_\Omega\partial_n^m\varphi_0\partial_n^m\varphi_1. \tag{C.2.1}$$

对于$B_{m,\|}$，我们先使用富比尼定理，再使用帕塞瓦尔定理进行估计

$$\begin{aligned}B_{m,\|}(\varphi,\varphi)&=\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^b\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|(2\pi\mathrm{i}\xi_j)^m\mathscr{F}[\varphi(\cdot,y)](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^b\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\sum_{j=1}^{n-1}|(2\pi\mathrm{i}\xi_j)^m|^2}{\sum_{|\alpha|=m}|(2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha|^2}\sum_{|\alpha|=m}|(2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathscr{F}[\varphi(\cdot,y)](\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y\\&\gtrsim_m\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n-1}\\|\beta|=m}}\|\partial^{(\beta,0)}\varphi\|^2_{L^2}=\|\varphi\|^2_{\dot H^m(\mathbb{R}^{n-1};L^2(0,b))}.\end{aligned} \tag{C.2.2}$$

因此，根据 $\dot{H}^m \cap L^2 = H^m$ 这一事实，我们得到

$$B_{m,\parallel}(\varphi,\varphi) + \|\varphi\|_{L^2}^2 \gtrsim_m \|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^{n-1};L^2(0,b))}^2. \tag{C.2.3}$$

另一方面，对于 $B_{m,n}$ 部分，我们看到

$$B_{m,n}(\varphi,\varphi) = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1};\dot{H}^m(0,b))}^2. \tag{C.2.4}$$

因此，再次利用 $\dot{H}^m \cap L^2 = H^m$，我们得到上界

$$B_{m,n}(\varphi,\varphi) + \|\varphi\|_{L^2}^2 \gtrsim_{\Omega,m} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1};H^m(0,b))}^2. \tag{C.2.5}$$

结合 (C.2.3) 和 (C.2.5)，我们得到估计

$$B_m(\varphi,\varphi) + \|\varphi\|_{L^2}^2 \gtrsim_{m,\Omega} \|\varphi\|_{H^m L^2 \cap L^2 H^m}^2. \tag{C.2.6}$$

只需注意到切片刻画，$\Lambda = 1$ 情形下的证明便告完成

$$H^m(\Omega) = H^m(\mathbb{R}^{n-1};L^2(0,b)) \cap L^2(\mathbb{R}^{n-1};H^m(0,b)), \tag{C.2.7}$$

以及范数等价，这可按如下方式证明。将 $\mathbb{R}^n$ 替换为 Ω 的切片刻画由 Leoni 和 Tice [60] 的引理 A.6 证明。随后，我们借助 Stein 延拓算子 $\mathfrak{E}_\Omega$（见定义 A.2），将 (C.2.7) 化归到这一情形；该算子可连续地将 $H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ 和 $H^m(\mathbb{R}^{n-1};L^2(0,b)) \cap L^2(\mathbb{R}^n;H^m(0,b)) \to H^m(\mathbb{R}^{n-1};L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(\mathbb{R}^n;H^m(\mathbb{R}))$ 映射到相应空间。

接下来，我们考虑满足所述假设的一般 Λ 情形。我们如下引入交换子：

$$B_m(\Lambda\varphi,\varphi) = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \Lambda(\partial_j^m\varphi)^2 + [\Lambda,\partial_j^m]\varphi\partial_j^m\varphi. \tag{C.2.8}$$

因此，我们得到如下估计：

$$cB_m(\varphi,\varphi) \leqslant B_m(\Lambda\varphi,\varphi) + \sqrt{B_m(\varphi,\varphi)}\sqrt{\sum_{j=1}^n \|[\Lambda,\partial_j^m]\varphi\|_{L^2}^2}. \tag{C.2.9}$$

由柯西不等式以及交换子算子的有界性（见推论 D.8），

$$cB_m(\varphi,\varphi) \leqslant B_m(\Lambda\varphi,\varphi) + C\|\varphi\|_{H^{m-1}}^2. \tag{C.2.10}$$

运用 $\Lambda = 1$ 的特殊情形可得

$$c\|\varphi\|_{H^m}^2 \leqslant C\|\varphi\|_{L^2}^2 + B_m(\Lambda\varphi,\varphi) + C\|\varphi\|_{H^{m-1}}^2. \tag{C.2.11}$$

对于上式中的最后一项，我们利用范数的对数凸性和杨氏不等式：对 $\kappa \in (0,1)$，我们估计 $\|\varphi\|_{H^{m-1}} \lesssim \kappa^{-m}\|\varphi\|_{L^2} + \kappa\|\varphi\|_{H^m}$，然后选取充分小的 κ，使右端的 $\|\varphi\|_{H^m}$ 项可由左端吸收。□

下一个引理涉及分部积分。

引理 C.6 (B_m 分部积分)。 设 $\psi \in H^{2m}(\Omega)$ 且 $\phi \in H^m(\Omega)$。则

$$B_m(\phi,\psi) = \int_\Omega \phi L_m\psi + \sum_{j=0}^{m-1}\Big(\int_\Sigma - \int_{\Sigma_0}\Big)(-1)^{m-1-j}\partial_n^j\phi\partial_n^{2m-j-1}\psi, \tag{C.2.12}$$

其中 L_m 是式(3.5.6)中定义的线性椭圆算子。

证明。 这是一个简单的分部积分练习。 □

现在，我们证明与算子L_m相关的自然诺伊曼问题的先验估计。

引理 C.7（关于 L_m的先验估计）。设 $m \in \mathbb{N}^+$， $k \in \mathbb{N}$， $\psi \in H^k(\Omega)$，以及$\varphi \in H^{k+2m}(\Omega)$ 通过以下方程

$$\begin{cases} L_m\varphi = \psi & in\ \Omega, \\ \partial_n^m\varphi = \cdots = \partial_n^{2m-1}\varphi = 0 & on\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{C.2.13}$$

于是我们得到先验估计

$$\|\varphi\|_{H^{k+2m}} \lesssim \|\varphi\|_{L^2} + \|\psi\|_{H^k}, \tag{C.2.14}$$

其中，隐含常数仅取决于 k、 m 和 Ω。

证明。 我们先证明 $k = 0$ 的情形。将方程与 φ 作 L^2-内积，并利用引理 C.6，得到

$$B_m(\varphi, \varphi) = \int_\Omega \psi\varphi. \tag{C.2.15}$$

对于右端，我们使用柯西-施瓦茨不等式；对于左端，我们使用引理 C.5 中的 G˚arding 不等式。由此得到不等式

$$\|\varphi\|_{H^{2m}} \lesssim \|\varphi, \psi\|_{L^2\times L^2}. \tag{C.2.16}$$

现在对 $k \in \mathbb{N}$ 作归纳。我们已经证明了基例 $k = 0$。假设 $k \in \mathbb{N}$，并且对于满足以下关系的任意 $\varphi \in H^{k+2m}(\Omega)$ 和 $\psi \in H^k(\Omega)$，我们都有先验估计：它们通过方程 (C.2.13) 关联

$$\|\varphi\|_{H^{k+2m}} \lesssim \|\varphi, \psi\|_{H^k\times H^k}. \tag{C.2.17}$$

现在我们证明上述结论对 $k + 1$ 也必然成立。假设 $\varphi \in H^{1+k+2m}(\Omega)$ 和 $\psi \in H^{1+k}(\Omega)$ 满足 (C.2.13)。令 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$，并将 ∂_j 应用于这些方程。于是可得

$$\begin{cases} L_m\partial_j\varphi = \partial_j\psi & \text{in } \Omega, \\ \partial_n^m\partial_j\varphi = \cdots = \partial_n^{2m-1}\partial_j\varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{C.2.18}$$

因此，我们可以应用归纳假设，并对 j 求和，从而得到以下界

$$\sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j\varphi\|_{H^{k+2m}} \lesssim \sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j\varphi, \partial_j\psi\|_{H^k\times H^k} \leqslant \|\varphi, \psi\|_{H^{1+k}\times H^{1+k}}. \tag{C.2.19}$$

另一方面，我们可以重新整理 φ 和 ψ 所满足的偏微分方程，得到 $(-1)^m\partial_n^{2m}\varphi = \psi - (-1)^m\sum_{j=1}^{n-1}\partial_j^{2m}\varphi$。因此，

$$\|\partial_n^{2m}\varphi\|_{H^{1+k}} \leqslant \|\psi\|_{H^{1+k}} + \sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j^{2m}\varphi\|_{H^{1+k}} \leqslant \|\varphi\|_{H^{1+k}} + \sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j\varphi\|_{H^{k+2m}}. \tag{C.2.20}$$

结合 (C.2.19) 和 (C.2.20) 可得

$$\sqrt{B_{1+k+2m}(\varphi, \varphi)} \leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\|\partial_j\varphi\|_{H^{k+2m}} + \|\partial_n^{2m}\varphi\|_{H^{1+k}} \lesssim \|\varphi, \psi\|_{H^{1+k}\times H^{1+k}}. \tag{C.2.21}$$

最后，我们利用 G˚arding 不等式（引理 C.5），得到

$$\|\varphi\|_{H^{1+k+2m}} \lesssim \|\varphi, \psi\|_{H^{1+k}\times H^{1+k}}. \tag{C.2.22}$$

至此，归纳论证完成。

根据归纳法，我们知道（C.2.14）的一个较弱版本成立，即同样的估计，但将 $\|\varphi\|_{L^2}$ 替换为 $\|\varphi\|_{H^k}$。不过，利用插值、杨氏不等式以及吸收，我们可以很容易地从这个较弱的估计推导出所需的上界：对于 $\kappa \in \mathbb{R}^+$，我们有

$$\|\varphi\|_{H^k} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}^{\frac{2m}{k+2m}}\|\varphi\|_{H^{k+2m}}^{\frac{k}{k+2m}} \lesssim \kappa\|\varphi\|_{H^{k+2m}} + \kappa^{-\frac{k}{2m}}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{C.2.23}$$

□

如果我们在 L_m 中加入一个 0th 项，就可以得到存在性理论。

Le引理 C.8 （ L_m的存在性理论）。 设 $m \in \mathbb{N}^+$ 和 $\kappa \in \mathbb{R}^+$。算子

$$\kappa + L_m : \{\varphi \in H^{2m}(\Omega) \ : \ \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^m \varphi) = \cdots = \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(\partial_n^{2m-1}\varphi) = 0\} \to L^2(\Omega) \tag{C.2.24}$$

是一个巴拿赫同构。

证明。 引理 C.5 的证明结合 B_m的半正定性，表明对称双线性映射

$$H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \ni (\varphi_0, \varphi_1) \mapsto \int_\Omega \kappa\varphi_0\varphi_1 + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \partial_j^m \varphi_0 \partial_j^m \varphi_1 \in \mathbb{R} \tag{C.2.25}$$

有界且强制，因此在 $H^m(\Omega)$ 上定义了一个内积。随后，里斯表示定理保证了唯一弱解的存在；而标准的椭圆正则性论证（在 Ω 中是初等的，因为无需使用截断函数即可采用水平差商）可以将弱解的正则性提升至 $H^{2m}(\Omega)$，前提是数据属于$L^2(\Omega)$。接着，通过分部积分，我们验证此类弱解满足边界条件。由此可直接推出，该算子是所述空间之间的同构。□

接下来我们记录一个关于求逆某个特定伪微分算子的结果。

引理 C.9 (简单符号求逆)。 取 s， $\sigma \in \mathbb{R}$ 满足 $\sigma \geqslant 0$ 且 M， $N \in \mathbb{N}^+$。假设$\psi \in H^s(\mathbb{R}^d)$。存在唯一的 $\varphi \in H^{s+\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$(N^{-1}(M^{-1} + (-\Delta)^{\sigma/2}) - \partial_1)\varphi = \psi. \tag{C.2.26}$$

此外，我们有如下估计

$$\|(NM)^{-1}\varphi, N^{-1}|\nabla|^\sigma \varphi\|_{H^s \times H^s} \lesssim \|\psi\|_{H^s} \tag{C.2.27}$$

其中隐含常数仅依赖于 σ。

证明。 (C.2.26) 中伪微分算子的符号为

$$\mathbb{R}^d \ni \xi \mapsto a(\xi) = (MN)^{-1}\langle 2\pi\sqrt{M|\xi|^\sigma}\rangle^2 - 2\pi \mathrm{i}\xi \cdot e_1 \in \mathbb{C}. \tag{C.2.28}$$

所述估计可由以下初等估计直接推出

$$\frac{1}{|a(\xi)|} \leqslant \frac{MN}{\langle 2\pi\sqrt{M|\xi|^\sigma}\rangle^2} \leqslant \frac{N}{2\pi}\min\left\{M, |\xi|^{-\sigma}\right\} \text{ for } \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{C.2.29}$$

□

C.3. 行波可压缩纳维–斯托克斯方程的耗散计算。 本小节探讨外力在行波问题 (1.4.9) 中的作用。我们需要以下稠密性结果。

引理 C.10 (有界支撑光滑函数的稠密性)。 对于任意 $s \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{R}^+$，子空间

$$\{(q, u, \eta) \in C_c^\infty(\overline{\Omega}) \times C_c^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \ : \ \mathrm{Tr}_{\Sigma_0} u = 0, \ \textit{and} \ \mathrm{Tr}_\Sigma u \cdot e_n + \partial_1 \eta = 0\} \tag{C.3.1}$$

在 $\mathbb{X}^s$ 中稠密，定义见 (3.1.3)。

证明。 首先，我们注意到，Leoni 和 Tice 的定理 5.2 以及定理 5.6 的第二项 [60]表明，对于 $r \geqslant 0$， $H^r(\mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathcal{H}^r(\mathbb{R}^{n-1})$ 是连续稠密嵌入。另一方面， $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 在 $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ 中稠密。结合这些事实可得， $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 在$\mathcal{H}^r(\mathbb{R}^{n-1})$ 中稠密。进而，我们推出

$$C_c^\infty(\overline{\Omega}) \times C_c^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathbb{X}_s \tag{C.3.2}$$

是一个稠密的包含关系，其中后一个空间由 (3.1.1) 定义。

还需处理定义子空间 $\mathbb{X}^s \subset \mathbb{X}_s$ 的边界条件。为此，我们将修改引理 3.2 中的映射 $\rho_{\mathbb{X}}$。设 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $0 \leqslant \psi \leqslant 1$， $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq (-2,\ 2)$，且 $\psi = 1$ 在 $(-1,\ 1)$ 上。对于 $1 \leqslant \nu \in \mathbb{R}$，我们通过 $\psi_\nu(x,\ y) = \psi(|x/\nu|^2)$，对 $(x,\ y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\ b)$ 定义 $\psi_\nu \in C_c^\infty(\Omega)$。接下来，我们定义 $\Pi_\nu \colon \mathbb{X}_s \to \mathbb{X}_s$，其定义为

$$\Pi_\nu(q,u,\eta) = (q, u - \psi_\nu \mathcal{E}_1(\operatorname{Tr}_{\Sigma_0} u, \operatorname{Tr}_\Sigma(u\cdot e_n) + \partial_1\eta), \eta), \tag{C.3.3}$$

其中 $\mathcal{E}_1$ 是在引理 3.2 的证明中定义的映射。除了线性且有界（$\sup_{\nu\geqslant 1}\|\Pi_\nu\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X}_s)} < \infty$）之外， Π_ν 还具有如下性质：若 $(q,\ u,\ \eta) \in \mathbb{X}_s$ 光滑且支撑于半径为 ν 的球内（对元组中的每个元素作相应解释），则 $\Pi_\nu(q,\ u,\ \eta)$ 属于 $\mathbb{X}^s$，并且仍然光滑且支撑于半径为 2ν 的球内。

固定 $(q,u,\eta) \in \mathbb{X}^s$。由稠密包含关系 (C.3.2)，可知存在一个序列$\{(\widetilde{q}_N,\widetilde{u}_N,\widetilde{\eta}_N)\}_{N=1}^\infty \subset C_c^\infty(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega;\ \mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，其 N^{th}项由支撑于半径为 $1 \leqslant R_N \in \mathbb{R}^+$ 的球内的函数构成，并且还满足性质：当 $N\to\infty$时，$(\widetilde{q}_N,\widetilde{u}_N,\widetilde{\eta}_N) \to (q,u,\eta)$ 在 $\mathbb{X}_s$中。令 $(q_N,u_N,\eta_N) = \Pi_{R_N}(\widetilde{q}_N,\widetilde{u}_N,\widetilde{\eta}_N)$。由 Π_{R_N} 的上述性质可知， $\{(q_N,u_N,\eta_N)\}_{N=1}^\infty \subset \mathbb{X}^s$，且该序列由具有紧支撑的光滑函数构成。

利用包含关系 $(q,\ u,\ \eta) \in \mathbb{X}^s$ 所隐含的边界条件，我们现在验证

$$\begin{aligned}(q,u,\eta) - (q_N,u_N,\eta_N) = (q-\widetilde{q}_N, u-\widetilde{u}_N, \eta-\widetilde{\eta}_N)\\ - (0, \psi_{R_N}\mathcal{E}_1(\operatorname{Tr}_{\Sigma_0}(\widetilde{u}_N - u), \operatorname{Tr}_\Sigma(\widetilde{u}_N-u)\cdot e_n + \partial_1(\widetilde{\eta}_N - \eta)), 0).\end{aligned} \tag{C.3.4}$$

然后，鉴于 $\{(\widetilde{q}_N,\ \widetilde{u}_N,\ \widetilde{\eta}_N)\}_{N=1}^\infty$ 收敛到 $(q,\ u,\ \eta)$，由 (C.3.4) 可得 $(q_N,\ u_N,\ \eta_N) \to (q,\ u,\ \eta)$ 在 $\mathbb{X}^s$ 中当 $N\to\infty$ 时成立。□

现在我们记录一个重要的计算。

定理 C.11 （行波可压缩纳维–斯托克斯方程的耗散功率平衡）。 假设$\gamma \in \mathbb{R}^+$， $\mathbb{N} \ni s \geqslant 1 + \lfloor n/2 \rfloor$， $(g,\ f,\ k) \in \mathbb{Y}^s$，并且 $(q,\ u,\ \eta) \in B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\ \rho_{\text{prin}}) \cap \mathbb{X}^{1+s}$，其中 ρ_{prin} 在定理 *3.13* 中定义。进一步假设

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\sigma_{q,\eta}(u - M_\eta e_1)) = g & \text{in } \Omega,\\ \gamma^2\sigma_{q,\eta}M_\eta^{-\mathrm{t}}(((u-M_\eta e_1)\cdot\nabla)(M_\eta^{-1}u)) + \sigma_{q,\eta}\nabla(q+\mathfrak{g}\eta) & \\ \quad -\gamma M_\eta^{-\mathrm{t}}\nabla\cdot(\mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{\sigma_{q,\eta}}(M_\eta^{-1}u)M_\eta^{\mathrm{t}}) = f & \text{in } \Omega,\\ -((P-P_{\text{ext}})\circ\sigma_{q,\eta} - \gamma\mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{\sigma_{q,\eta}}(M_\eta^{-1}u))M_\eta^{\mathrm{t}}e_n - \varsigma\mathscr{H}(\eta)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n = k & \text{in } \Sigma,\\ u\cdot e_n + \partial_1\eta = 0 & \text{on } \Sigma,\\ u = 0 & \text{on } \Sigma_0. \end{cases} \tag{C.3.5}$$

在其他 其他词， $\Psi(q,u,\eta,\gamma) = (g,f,k)$，其中 Ψ 是式(3.3.4)中给出的算子。该 en

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\gamma}{J_\eta}\Big(\frac{\mu(\sigma_{q,\eta})}{2}|\mathbb{D}^0_{M_\eta^{\mathrm{t}}}(M_\eta^{-1}u)|^2 + \lambda(\sigma_{q,\eta})|\nabla\cdot u|^2\Big) = \int_\Omega f\cdot u + g(\gamma^2|M_\eta^{-1}u|^2/2 + q)\\ + \mathfrak{g}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(|\nabla_\parallel|^{-1}\int_0^b g(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big)|\nabla_\parallel|\eta + \int_\Sigma k\cdot M_\eta^{-1}u,\end{aligned} \tag{C.3.6}$$

其中，对于 $w:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 可微且 $M:\Omega\to\mathbb{R}^{n\times n}$，我们记

$$\mathbb{D}^0_M w=\nabla w M^{\mathrm{t}}+M\nabla w^{\mathrm{t}}-\frac{2}{n}(M\nabla)\cdot wI. \tag{C.3.7}$$

证明。首先，我们声称，只需在附加假设（q、u、η）属于（C.3.1）中的空间的条件下证明（C.3.6）。事实上，假设恒等式在这一特殊情形下成立，并令（q、u、η）$\in B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{prin}})\cap\mathbb{X}^{1+s}$ 为任意的。根据引理 C.10，存在一个序列 $\{(q_N,u_N,\eta_N)\}_{N=1}^{\infty}$，属于（C.3.1）中的空间，使得（$q_N$、$u_N$、$\eta_N$）$\to(q,u,\eta)$ 在 $\mathbb{X}^{1+s}$ 中当 $N\to\infty$时成立。由于这一收敛性，不妨设该序列包含于 $B_{\mathbb{X}^{1+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{prin}})$ 中。于是，我们将恒等式 $\Psi(q,u,\eta,\gamma)=(g,f,k)$ 改写为 $\Psi(q_N,u_N,\eta_N,\gamma)=(g_N,f_N,k_N)$，其中 $g_N=g+(\Psi_1(q_N,u_N,\eta_N)-\Psi_1(q,u,\eta))$、$f_N=f+(\Psi_2(q_N,u_N,\eta_N,\gamma)-\Psi_2(q,u,\eta,\gamma))$，以及 $k_N=k+(\Psi_3(q_N,u_N,\eta_N,\gamma)-\Psi_3(q,u,\eta,\gamma))$。根据定理 3.13 中所建立的映射 Ψ 的连续性，我们有（g_N、f_N、k_N）$\to(g,f,k)$ 在空间 $\mathbb{Y}^s$ 中当 $N\to\infty$时成立。利用这一特殊情形，我们得到恒等式

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{\gamma}{J_{\eta_N}}\Big(\frac{\mu(\sigma_{q_N,\eta_N})}{2}|\mathbb{D}^0_{M^{\mathrm{t}}_{\eta_N}}(M^{-1}_{\eta_N}u_N)|^2+\lambda(\sigma_{q_N,\eta_N})|\nabla\cdot u_N|^2\Big)&=\int_\Omega f_N\cdot u_N+g_N(\gamma^2|M^{-1}_{\eta_N}u_N|^2/2+q_N)\\&\quad+\int_\Sigma k_N\cdot M^{-1}_{\eta_N}u_N+\mathfrak{g}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(|\nabla_\parallel|^{-1}\int_0^b g_N(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big)|\nabla_\parallel|\eta_N\end{aligned} \tag{C.3.8}$$

对每个 N 均成立。由于 $(q_N,\ u_N,\ \eta_N)\to(q,\ u,\ \eta)$ 属于 $\mathbb{X}^{1+s}$，且 $(g_N,\ f_N,\ k_N)\to(g,\ f,\ k)$ 属于 $\mathbb{Y}^s$，如 $N\to\infty$ 和 $s\geqslant 1+\lfloor n/2\rfloor$ 所示，只需将 (C.3.8) 中的 $N\to\infty$ 取极限，即可得到所需的等式 (C.3.6)。至此，命题得证。

现在我们证明特殊情形下的 (C.3.6)。首先，将 (C.3.5) 中的第二个方程与 u 在 $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 中取内积。由于向量场 $\sigma_{q,\ \eta}(u-M_\eta e_1)$ 的散度为 g，且法向迹为零，对流导数的贡献为

$$\begin{aligned}\int_\Omega\sigma_{q,\eta}M_\eta^{-\mathrm{t}}(((u-M_\eta e_1)\cdot\nabla)(M_\eta^{-1}u))\cdot u&=-\int_\Omega\frac{1}{2}\nabla\cdot(\sigma_{q,\eta}(u-M_\eta e_1))|M_\eta^{-1}u|^2\\&\quad+\int_\Sigma\frac{1}{2}\sigma_{q,\eta}(u-M_\eta e_1)\cdot e_n|M_\eta^{-1}u|^2=-\frac{1}{2}\int_\Omega g|M_\eta^{-1}u|^2.\end{aligned} \tag{C.3.9}$$

黏性应力项的贡献为

$$\begin{aligned}\int_\Omega M_\eta^{-\mathrm{t}}\nabla\cdot(\mathbb{S}^{\sigma_{q,\eta}}_{\mathcal{A}_\eta}(M_\eta^{-1}u)M_\eta^{\mathrm{t}})\cdot u&=\int_\Sigma\mathbb{S}^{\sigma_{q,\eta}}_{\mathcal{A}_\eta}(M_\eta^{-1}u)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n\cdot M_\eta^{-1}u\\&\quad-\int_\Omega\mathbb{S}^{\sigma_{q,\eta}}_{\mathcal{A}_\eta}(M_\eta^{-1}u)M_\eta^{\mathrm{t}}:\nabla(M_\eta^{-1}u)=\int_\Sigma\mathbb{S}^{\sigma_{q,\eta}}_{\mathcal{A}_\eta}(M_\eta^{-1}u)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n\cdot M_\eta^{-1}u\\&\quad-\int_\Omega\frac{1}{J_\eta}\Big(\frac{\mu(\sigma_{q,\eta})}{2}|\mathbb{D}^0_{M_\eta^{\mathrm{t}}}(M_\eta^{-1}u)|^2+\lambda(\sigma_{q,\eta})|\nabla\cdot u|^2\Big),\end{aligned} \tag{C.3.10}$$

其中，在最后一个恒等式中，我们利用了 $\nabla\cdot(J_\eta\mathcal{A}_\eta)=0$ 这一事实。对于压力贡献，我们先写成 $\sigma_{q,\ \eta}u=\sigma_{q,\ \eta}(u-M_\eta e_1)+\sigma_{q,\ \eta}M_\eta e_1$，然后分部积分可得

$$\int_\Omega\sigma_{q,\eta}\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)\cdot u=-\int_\Omega g(q+\mathfrak{g}\eta)+\int_\Omega\sigma_{q,\eta}M_\eta e_1\cdot\nabla(q+\mathfrak{g}\eta). \tag{C.3.11}$$

为了处理上面的最后一项 我们使用出现在 (1.4.11) 中的 $\sigma_{q,\eta}$ 的定义来表示 s

$$q+\mathfrak{g}\eta=H\circ\sigma_{q,\eta}-H\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n). \tag{C.3.12}$$

由于 $\nabla(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n)=J_\eta M_\eta^{-\mathrm{t}}e_n$，因此可得 $M_\eta e_1\cdot\nabla(H\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n))=M_\eta e_1\cdot\nabla(P\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n))=0$。于是我们可以改写为

$$\int_\Omega\sigma_{q,\eta}M_\eta e_1\cdot\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)=\int_\Omega M_\eta e_1\cdot\nabla(P(\sigma_{q,\eta})-P\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n)). \tag{C.3.13}$$

由于 $\nabla\cdot(M_\eta e_1)=0$ 且 $P(\sigma_{q,\eta})-P\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n)\in C_c^\infty(\Omega)$，我们可以再次进行分部积分，从而得到

$$\int_\Omega M_\eta e_1\cdot\nabla(P(\sigma_{q,\eta})-P\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n))=-\int_\Sigma(P-P_{\mathrm{ext}})(\sigma_{q,\eta})\partial_1\eta+\int_\Sigma(P\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n)-P_{\mathrm{ext}})\partial_1\eta. \tag{C.3.14}$$

由于下式，以上最后一项为零

$$\int_\Sigma(P\circ\varrho(\mathfrak{F}_\eta\cdot e_n)-P_{\mathrm{ext}})\partial_1\eta=\int_\Sigma\partial_1\Big(\int_0^\eta(P\circ\varrho(b+s))-P_{\mathrm{ext}})\,\mathrm{d}s\Big)=0. \tag{C.3.15}$$

综合以上结果，我们推得压力项在动量方程中的贡献为

$$\int_\Omega\sigma_{q,\eta}\nabla(q+\mathfrak{g}\eta)\cdot u=\int_\Sigma(P-P_{\mathrm{ext}})(\sigma_{q,\eta})u\cdot e_n-\int_\Omega g(q+\mathfrak{g}\eta). \tag{C.3.16}$$

综合这些计算，我们得出

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\cdot u+g(\gamma^2|M_\eta^{-1}u|^2/2+q+\mathfrak{g}\eta)&\\ -\int_\Sigma((P-P_{\mathrm{ext}})(\sigma_{q,\eta})-\gamma\mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{\sigma_{q,\eta}}(M_\eta^{-1}u))M_\eta^{\mathrm{t}}e_n\cdot M_\eta^{-1}u&\\ =\int_\Omega\frac{\gamma}{J_\eta}\Big(\frac{\mu(\sigma_{q,\eta})}{2}|\mathbb{D}^0_{M_\eta^{\mathrm{t}}}(M_\eta^{-1}u)|^2+\lambda(\sigma_{q,\eta})|\nabla\cdot u|^2\Big).&\end{aligned} \tag{C.3.17}$$

利用动态边界条件，我们将其改写为

$$\begin{aligned}&-\int_\Sigma((P-P_{\mathrm{ext}})(\sigma_{q,\eta})-\gamma\mathbb{S}_{\mathcal{A}_\eta}^{\sigma_{q,\eta}}(M_\eta^{-1}u))M_\eta^{\mathrm{t}}e_n\cdot M_\eta^{-1}u\\ &=\int_\Sigma(k+\varsigma\mathscr{H}(\eta)M_\eta^{\mathrm{t}}e_n)\cdot M_\eta^{-1}u=\int_\Sigma k\cdot M_\eta^{-1}u+\varsigma\int_\Sigma\partial_1(\langle\nabla_\parallel\eta\rangle-1)=\int_\Sigma k\cdot M_\eta^{-1}u.\end{aligned} \tag{C.3.18}$$

最后，根据帕塞瓦尔定理，我们有恒等式

$$\int_\Omega g\eta=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(|\nabla_\parallel|^{-1}\int_0^b g(\cdot,y)\,\mathrm{d}y\Big)|\nabla_\parallel|\eta. \tag{C.3.19}$$

于是，通过结合 (C.3.17)、(C.3.18) 和 (C.3.19) 可得 (C.3.6)。 □

定理 C.11 立即导出下一个结果。

推论 C.12。 设 $\mathbb{N}\ni s\geqslant 2+\lfloor n/2\rfloor$，$(q,\ u,\ \eta)\in\mathbb{X}^{1+s}\cap B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\ \rho_{\mathrm{WD}})$，且 $(\mathcal{T},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F})\in\mathbb{W}_s$ 满足 (1.4.9)。则

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{\gamma}{J_\eta}\Big(\frac{\mu(\sigma_{q,\eta})}{2}|\mathbb{D}^0_{M_\eta^{\mathrm{t}}}(M_\eta^{-1}u)|^2+\lambda(\sigma_{q,\eta})|\nabla\cdot u|^2\Big)&=\int_\Sigma\mathcal{T}\circ\mathfrak{F}_\eta M_\eta^{\mathrm{t}}e_n\cdot M_\eta^{-1}u\\ &+\int_\Omega J_\eta(\sigma_{q,\eta}\mathcal{G}\circ\mathfrak{F}_\eta+\mathcal{F}\circ\mathfrak{F}_\eta)\cdot M_\eta^{-1}u.\end{aligned} \tag{C.3.20}$$

现在将这一结果与 Korn 型估计相结合，以推导出一个有用的唯一性结果。回忆一下，ρ_{WD} 来自定理 3.17。

推论 *C.13*。存在一个 $\rho\in(0,\rho_{\mathrm{WD}}]$，它取决于 b、$\mathfrak{g}$、P、μ、λ 和 n，使得如果 $(q,u,\eta)\in\mathbb{X}^{3+\lfloor n/2\rfloor}\cap B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho)$ 满足 *(1.4.9)*，其中 $\mathcal{T}=0$、$\mathcal{G}=0$ 和 $\mathcal{F}=0$，则 $q=0$、$u=0$ 和 $\eta=0$。

证明。我们 先从一些一般性考虑开始。命题 3.10 和 3.11 表明 if

$$(q,u,\eta)\in B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\rho_{\mathrm{WD}}), \tag{C.3.21}$$

那么，对于某些常数，且，这尤其意味着可逆。假设 (C.3.21) 成立。于是我们可以定义

$$\mathfrak{D}_\eta = \int_\Omega \Big(\frac{\mu(\varrho)}{2} |\mathbb{D}^0_{M_\eta^t}(M_\eta^{-1}u)|^2 + \lambda(\varrho)|\nabla \cdot u|^2 \Big). \tag{C.3.22}$$

不难验证

$$\mathfrak{D}_0 \lesssim \mathfrak{D}_\eta + g(\|\eta\|_{H^{9/2+\lfloor n/2 \rfloor}}) \|u\|_{H^1}^2 \tag{C.3.23}$$

对于一个连续且递增的函数 $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，满足 $g(0) = 0$。结合 g 的性质以及命题 A.3 和 A.4 中的 Korn不等式，我们可以选取 $0 < \rho \leqslant \rho_{\mathrm{WD}}$，使得若 $\|\eta\|_{H^{9/2+\lfloor n/2 \rfloor}} < \rho$，则项 $g(\|\eta\|_{H^{9/2+\lfloor n/2 \rfloor}}) \|u\|_{H^1}^2$ 可以吸收到 (C.3.23) 的左侧，从而得到上界

$$\mathfrak{D}_0 \lesssim \mathfrak{D}_\eta. \tag{C.3.24}$$

现在假设 $(q,\ u,\ \eta) \in \mathbb{X}^{3+\lfloor n/2 \rfloor} \cap B_{\mathbb{X}^{2+\lfloor n/2 \rfloor}}(0,\ \rho)$ 满足 (1.4.9)，其中 $\mathcal{T} = 0$ 和 $\mathcal{G} = \mathcal{F} = 0$成立。推论 C.12 以及上述关于 $\sigma_{q,\ \eta}$ 和 J_η 的界，进而推出 $\mathfrak{D}_\eta = 0$。接着，由 (C.3.24) 可知 $\mathfrak{D}_0 = 0$，因此我们可以再次利用 Korn不等式，得到 $u = 0$。随后，(1.4.9) 中的第四个方程意味着 $\eta = 0$，但第二个和第三个方程又要求 $q = 0$。□

Appendix D. Fine tools for nonlinear analysis

D.1. 叠加非线性的光滑性。 本小节讨论涉及复合非线性的索伯列夫空间之间的算子。

引理 D.1. 设 $k = 2 + \lfloor n/2 \rfloor$。假设 $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个双 *Lipschitz* 同胚和一个 C^1 微分同胚。那么存在一个 $\delta > 0$，它依赖于 n 和 *Lipschitz* 半范数$[\Phi]_{C^{0,1}}$，使得若 $g \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 和 $h \in H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\max\{\|g\|_{W^{k,\infty}}, \|h\|_{H^k}\} < \delta, \tag{D.1.1}$$

那么 $\Phi + g + h$ 是一个 *al* 因此也是一个双 *Lipschitz* 同胚和 C^1 微分同胚，并满足上界 *s*

$$\|D(\Phi+g+h)\|_{C^0_b} < 3\cdot 2^{-1}\|D\Phi\|_{C^0_b} \text{ and } \|D(\Phi+g+h)^{-1}\|_{C^0_b} < 2\|D\Phi^{-1}\|_{C^0_b}. \tag{D.1.2}$$

证明。 首先注意到，巴拿赫不动点定理意味着，若 $\Xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是满足上界 $[\Xi]_{C^{0,1}} < [\Phi^{-1}]^{-1}_{C^0}{}_{,1}$ 的 Lipschitz 映射，则 $\Phi + \Xi$ 也是一个双 Lipschitz 同胚。标准的 Sobolev 嵌入给出一个常数 $C > 0$，它依赖于 n，使得 $[g+h]_{C^{0,1}} \leqslant \|g+h\|_{C^1_b} \leqslant C(\|g\|_{W^{k,\infty}} + \|h\|_{H^k})$。因此，若设 $\delta = (4C[\Phi^{-1}]_{C^{0,1}})^{-1}$，则由上界 (D.1.1) 可知 $[g+h]_{C^{0,1}} < \frac{1}{2}[\Phi^{-1}]^{-1}_{C^0}{}_{,1}$，于是 $\Phi + g + h$ 是一个双 Lipschitz 同胚。另一方面，$[\Phi^{-1}]_{C^{0,1}} = \|D\Phi^{-1}\|_{C^0_b}$ 且 $[g+h]_{C^{0,1}} = \|Dg + Dh\|_{C^0_b}$，所以连续映射 $D(\Phi+g+h)$处处可逆，因而根据反函数定理，$\Phi + g + h$ 是一个 C^1 微分同胚。

剩下的任务是证明上界 (D.1.2)。为此，首先注意到 $\|D(g+h)(D\Phi)^{-1}\|_{C^0_b} \leqslant [\Phi^{-1}]_{C^0}{}_{,1}[g+h]_{C^0}{}_{,1} < 2^{-1}$ 由此我们可得

$$\|D(\Phi+g+h)\|_{C^0_b} \leqslant \|D\Phi\|_{C^0_b} \|1 + D(g+h)(D\Phi)^{-1}\|_{C^0_b} \leqslant 3\cdot 2^{-1} \|D\Phi\|_{C^0_b} \tag{D.1.3}$$

and

$$\begin{aligned} \|D(\Phi+g+h)^{-1}\|_{C^0_b} &= \|(D\Phi)^{-1}(1 + D(g+h)(D\Phi)^{-1})^{-1}\|_{C^0_b} \\ &\leqslant \|D\Phi^{-1}\|_{C^0_b} \sum_{m=0}^\infty \|((D(g+h)(D\Phi)^{-1})^{-1})^m\|_{C^0_b} < \|D\Phi^{-1}\|_{C^0_b} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{2^m} = 2\|D\Phi^{-1}\|_{C^0_b}. \end{aligned} \tag{D.1.4}$$

这些结论证明了 (D.1.2)。 □

如下 对 Inci、Kappeler 和 Topalov [46中所述主要论证的一种修改].

定理 D.2. 设 $\mathbb{N} \ni k \geqslant 2 + \lfloor n/2 \rfloor$ 和 $m \in \mathbb{N}$。假设 $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个双 *Lipschitz* 同胚和一个 C^1 微分同胚，且满足 $D\Phi \in W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n\times n})$。令 $\delta > 0$ 由 n 和 Φ 按照引理 *D.1* 确定。定义映射

$$\Lambda : H^{m+k}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d) \times (B_{W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}(0,\delta) \cap W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)) \times (B_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\delta) \cap H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)) \to H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d) \quad \text{(D.1.5)}$$

通过 $\Lambda(f,g,h) = f(\Phi + g + h)$。则有以下结论。

(1) Λ 定义良好且连续。*(2)* 若 $m = 1$，则 Λ 是 C^1，并满足

$$D\Lambda(f,g,h)(f_1,g_1,h_1) = Df(\Phi+g+h)(g_1+h_1) + f_1(\Phi+g+h). \quad \text{(D.1.6)}$$

(3) 若 $m \geqslant 2$，则 Λ 是 C^m，并满足

$$D^m\Lambda(f,g,h)[(f_1,g_1,h_1),\dots,(f_m,g_m,h_m)] = D^m f(\Phi+g+h)(g_i+h_i)_{i=1}^m + \sum_{\ell=1}^m D^{m-1} f_\ell(\Phi+g+h)(g_i+h_i)_{i\neq\ell}. \quad \text{(D.1.7)}$$

证明。我们将证明分为几个步骤。

步骤 1：初步观察。对于 f、g 和 h 在 Λ 的区域内的任意取值，我们有 $\max\{\|g\|_{W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}, \|h\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}\} < \delta$。因此，引理 D.1 蕴含 $\Phi + g + h$ 是一个 C^1微分同胚，并且

$$\|D(\Phi+g+h)\|_{C_b^0} + \|D(\Phi+g+h)^{-1}\|_{C_b^0} \leqslant A_0, \quad \text{(D.1.8)}$$

其中 $A_0 > 0$ 是一个取决于 Φ的常数。在证明的其余部分中，当我们写下 $\lesssim$ 时，我们允许隐含常数取决于 A_0，因而也取决于 Φ。

步骤 2：良定义性与连续性。现在我们旨在证明 Λ 实际上是定义良好的，即其取值属于 $H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$，并且是一个连续映射。只需在 $m = 0$时证明这一点，因为情形 $m \in \{1,2\}$ 可由该情形推出。为此，我们对 $0 \leqslant j \leqslant k$进行有限归纳。对于这样的 j，令 $\mathbb{P}_j$ 表示命题

$$\Lambda : H^{m+j}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d) \times (B_{W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}(0,\delta) \cap W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)) \times (B_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}(0,\delta) \cap H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)) \to H^j(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d) \quad \text{(D.1.9)}$$

定义良好、连续，并满足估计

$$\|\Lambda(f,g,h)\|_{H^j} \lesssim \langle \|g\|_{W^{k,\infty}}, \|h\|_{H^k}\rangle^j \|f\|_{H^j}. \quad \text{(D.1.10)}$$

考虑基　　本情形，$j = 0$。通过变量代换和上界 (D.1.8)，我们可以估计

$$\|\Lambda(f,g,h)\|_{H^0} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f\circ(\Phi+g+h)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \|\det\nabla(\Phi+g+h)^{-1}\|_{L^\infty}^{1/2}\|f\|_{H^0} \lesssim \|f\|_{H^0}. \quad \text{(D.1.11)}$$

这表明 Λ 定义良好，并在 $j = 0$ 时证明了 (D.1.10)。接下来我们对.....作上界估计

$$\|\Lambda(f,g,h) - \Lambda(\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h})\|_{H^0} \leqslant \|\Lambda(f,g,h) - \Lambda(f,\widetilde{g},\widetilde{h})\|_{H^0} + \|\Lambda(f-\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h})\|_{H^0}. \quad \text{(D.1.12)}$$

~ ~对于后一个项，我们利用 (D.1.11) 得出 $\lim_{(\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h})\to(f,g,h)}\|\Lambda(f-\widetilde{f},\widetilde{g},h)\|_{H^0} = 0$；对于前一个项，我们利用 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$ 在 $H^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$ 中的稠密性，以及如下事实：若 $(\widetilde{g},\widetilde{h}) \to (g,h)$ ~ ~则 $\Phi+\widetilde{g}+h \to \Phi+g+h$一致地收敛，从而得出 $\lim_{(\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h})\to(f,g,h)}\|\Lambda(f,g,h) - \Lambda(f,\widetilde{g},h)\|_{H^0} = 0$。因此，当 $j = 0$时，Λ 是连续的，并且我们发现 $\mathbb{P}_0$ 成立。

通过归纳，我们现在假设对所有 $0 \leqslant \ell \leqslant j \leqslant k-1$， $\mathbb{P}_\ell$ 均成立，并考虑 $j+1 \leqslant k$ 的情形。设 $(f,\ g,\ h)$ 属于此情形下 Λ 的定义域。对于任意 $1 \leqslant a \leqslant n$，我们计算

$$\partial_a \Lambda(f,g,h) = \sum_{b=1}^{n} \partial_b f \circ (\Phi + g + h)\partial_a(\Phi+g+h)_b = \sum_{b=1}^{n} \Lambda(\partial_b f, g, h)\partial_a(\Phi+g+h)_b \tag{D.1.13}$$

为了利用归纳假设和乘积估计（见推论 D.7）来给出.....的上界

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda(f,g,h)\|_{H^{j+1}} \lesssim \|\Lambda(f,g,h)\|_{H^0} + \sum_{a=1}^{n} \|\partial_a \Lambda(f,g,h)\|_{H^j} \\
&\lesssim \|f\|_{H^0} + \sum_{a,b=1}^{n} \|\Lambda(\partial_b f, g, h)\partial_a(\Phi+g+h)_b\|_{H^j} \lesssim \|f\|_{H^0} + \langle \|g\|_{W^{k,\infty}}, \|h\|_{H^k}\rangle \sum_{b=1}^{n} \|\Lambda(\partial_b f, g, h)\|_{H^j} \\
&\lesssim \|f\|_{H^0} + \langle \|g\|_{W^{k,\infty}}, \|h\|_{H^k}\rangle \langle \|g\|_{W^{k,\infty}}, \|h\|_{H^k}\rangle^j \|f\|_{H^{j+1}} \lesssim \langle \|g\|_{W^{k,\infty}}, \|h\|_{H^k}\rangle^{j+1} \|f\|_{H^{j+1}},
\end{aligned} \tag{D.1.14}$$

这表明 $j+1$ 定义良好，并满足上界 (D.1.10)。

接下来，我们证明 $\mathbb{P}_{j+1}$ 的连续性断言。首先计算

$$\begin{aligned}
\partial_a(\Lambda(f,g,h) - \Lambda(\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h})) = &\sum_{b=1}^{n} (\Lambda(\partial_b f, g, h) - \Lambda(\partial_b \widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}))\partial_a(\Phi+g+h)_b \\
&+ \sum_{b=1}^{n} \Lambda(\partial_b \widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h})\partial_a(g-\widetilde{g}+h-\widetilde{h})_b.
\end{aligned} \tag{D.1.15}$$

再次利用基本乘积估计（见推论 D.7），我们可以由此推得

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda(f,g,h) - \Lambda(\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h})\|_{H^{j+1}} \lesssim \|\Lambda(f,g,h) - \Lambda(\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h})\|_{H^0} + \sum_{a=1}^{n} \|\partial_a \Lambda(f,g,h) - \partial_a \Lambda(\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h})\|_{H^j} \lesssim \\
&\langle \|g,h\|_{W^{k,\infty}\times H^k}\rangle \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|\Lambda(\partial^\alpha f, g, h) - \Lambda(\partial^\alpha \widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h})\|_{H^j} + \|g-\widetilde{g}, h-\widetilde{h}\|_{W^{k,\infty}\times H^k} \sum_{b=1}^{n} \|\Lambda(\partial_b \widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h})\|_{H^j},
\end{aligned} \tag{D.1.16}$$

这个上界和归纳假设即可得出 $\mathbb{P}_{j+1}$. 的连续性断言。因此，$\mathbb{P}_{j+1}$ 成立，归纳论证完成。

步骤 3：当 $m = 1$时的连续可微性。接下来，我们旨在证明当 $m = 1$时， Λ 是 C^1。为此，固定（$f,\ g,\ h$），使其属于 Λ 的区域，并选取 $r > 0$，使得 $r + \max\{\|g\|_{W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}, \|h\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}\} < \delta$。于是，对于每个 $t \in [-1,1]$，且对于满足 $\max\{\|g_1\|_{W^{2+\lfloor n/2\rfloor,\infty}}, \|h_1\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}\} < r$的 $f_1 \in H^{2+k}(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^d)$ 、 $g_1 \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$ 和 $h_1 \in H^k(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$ ，（$f,\ g,\ h$）$+ t$（$f_1,\ g_1,\ h_1$）都属于 Λ的区域。利用微积分基本定理，我们可以计算

$$\Lambda(f+f_1, g+g_1, h+h_1) - \Lambda(f,g,h) - \Lambda(f_1,g,h) - \sum_{b=1}^{n} \Lambda(\partial_b f, g, h)(g_1+h_1)_b = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \tag{D.1.17}$$

对于余项

$$\mathcal{R}_1 = \sum_{b=1}^{n} (g_1+h_1)_b \int_0^1 (\Lambda(\partial_b f, g+tg_1, h+th_1) - \Lambda(\partial_b f, g, h))\, dt \tag{D.1.18}$$

and

$$\mathcal{R}_2 = \sum_{b=1}^{n} (g_1 + h_1)_b \int_0^1 \Lambda(\partial_b f_1, g + tg_1, h + th_1) dt. \tag{D.1.19}$$

利用 根据上一步的结果，我们可以从这些表达式中直接推导出

$$\frac{\|\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2\|_{H^k}}{\|f_1\|_{H^{1+k}} + \|g_1\|_{W^{k,\infty}} + \|h_1\|_{H^k}} \to 0 \text{ as } (f_1, g_1, h_1) \to 0. \tag{D.1.20}$$

因此， Λ 在其区域上可微，并且

$$D\Lambda(f, g, h)(f_1, g_1, h_1) = \Lambda(f_1, g, h) + \sum_{b=1}^{n} \Lambda(\partial_b f, g, h)(g_1 + h_1)_b, \tag{D.1.21}$$

这可以改写为 (D.1.6)。另一方面，根据 Λ 可得 $D\Lambda(f,\ g,\ h)$ 的表达式，这表明当 $m = 1$ 时， $D\Lambda$ 在其区域上连续，因此在这种情况下， Λ 实际上是 C^1 。

第 4 步：当 $m \geqslant 2$ 时的 m^{th} 阶连续可微性。现在假设 $m \geqslant 2$。在这种情况下，第三步的结果仍表明 Λ 在其区域上是 C^1 ，其表达式与 (D.1.21) 中给出的 $D\Lambda$ 相同。然而，由于 $D\Lambda$ 可以表示为标准乘积和 Λ 的形式，我们可以迭代推得：当 $m = 2$ 时， Λ 实际上是 C^2 ；当 $m = 3$ 时， C^3 ；依此类推；并且公式 (D.1.7) 对任何这样的 m 都成立。□

我们还需要定理 D.2 的一个变体，其中外层复合映射是某个 C_b^k–型空间中的固定元素，并且我们考虑的是到 Sobolev乘子空间的映射的光滑性。后一个空间定义如下。对于 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ 开集和 $s \in \mathbb{N}$，我们将 Sobolev 乘子空间 $\mathcal{M}(H^s(W))$ 定义为有界线性映射 $L \in \mathcal{L}(H^s(W))$ 的集合，其中存在 $m \in L^1_{\text{loc}}(W)$，使得 $Lf = mf$对所有 $f \in H^s(W)$ 均成立。我们在此空间上赋予自然的算子范数：$\|m\|_{\mathcal{M}(H^s)} = \sup_{\|f\|_{H^s} \leqslant 1} \|mf\|_{H^s}$。事实证明， $\mathcal{M}(H^s(W))$ 是 $\mathcal{L}(H^s(W))$ 的闭子空间，因而是完备的，并且 $\mathcal{M}(H^s(W)) \subset H^s_{\text{loc}}(W)$。关于这些事实的证明以及 Sobolev 乘子空间的更多信息，请读者参阅 Maz'ya 和 Shaposhnikova 的著作 [77]。

定理 *D.3.* 设 $\mathbb{N} \ni k \geqslant 2 + \lfloor n/2 \rfloor$、 $\varnothing \neq V \subseteq \mathbb{R}^d$ 为开集，且 $\varnothing \neq O \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 *Stein* 延拓区域（见定义 *A.2*）。假设 $\varnothing \neq U \subseteq W^{k,\infty}(O; \mathbb{R}^d) \times H^k(O; \mathbb{R}^d)$ 是一个开集，并具有如下性质：若 $(g, h) \in U$，则 $(g + h)(O) \subseteq V$。对任意 $f \in C_b^k(V)$，定义函数 $\Theta(f; g, h) : O \to \mathbb{R}$，使其满足 $\Theta(f; g, h) = f(g + h)$。则对每个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $f \in C_b^{m+k}(V)$，以下结论成立。

(1) 对每个 $(g, h) \in U$，函数 $\Theta(f; g, h)$ 定义了 $\mathcal{M}(H^k(O))$ 的一个元素。此外，诱导映射 $\Theta(f; \cdot) : U \to \mathcal{M}(H^k(O))$ 是 C^m。*(2)* 若 $m \geqslant 1$，则诱导映射 $\Theta(f; \cdot) : U \to \mathcal{M}(H^k(O))$ 满足

$$D^m \Theta(f; g, h)[(g_1, h_1), \ldots, (g_m, h_m)] = D^m f(g + h)[(g_1, h_1), \ldots, (g_m, h_m)]. \tag{D.1.22}$$

证明。 我们将证明分为三个步骤。

步骤 1：当 $m = 0$ 时的良定义性与连续性。假设 $m = 0$。对于 $0 \leqslant j \leqslant k$ ，令 $\mathbb{P}_j$ 表示如下命题：若 $f \in C_b^j(V)$，则 $\Theta(f;\ \cdot) : U \to \mathcal{M}(H^j(O))$ 定义良好、连续，并满足估计

$$\|\Theta(f; g, h)\|_{\mathcal{M}(H^j)} \lesssim \|f\|_{C_b^j} \langle \|g\|_{W^{k,\infty}}, \|h\|_{H^k} \rangle^{j-1}. \tag{D.1.23}$$

我们将采用有限归纳法证明 $\mathbb{P}_j$ 对所有 $0 \leqslant j \leqslant k$ 均成立，由此即可证明当 $m = 0$ 时的第一项。

考虑基例， $j = 0$。那么对于 $\varphi \in H^0(O)$，我们可以直接给出 $\|\Theta(f;\ g,\ h)\varphi\|_{H^0} \leqslant \|f\|_{C_b^0} \|\varphi\|_{H^0}$的上界，从而可知 $\Theta(f;\ g,\ h) \in \mathcal{M}(H^0(O))$，且 $\|\Theta(f;\ g,\ h)\|_{\mathcal{M}(H^0)} \leqslant \|f\|_{C_b^0}$。因此，$\Theta(f;\ \cdot)$定义良好，并且当 $j = 0$ 时满足上界 (D.1.23)。为证明连续性，我们注意到

对于 (g,h)、(g,h)，$\overline{\ }\in U$我们可以如上所述给出 $\|\Theta(f;\,g,h)\,-\,\Theta(f;\,g,h)\|_{\mathcal{M}(H^0)}\leqslant\|f(g\overline{+}\overline{h})\,-f(g+h)\|_{C_b^0}$的上界；但由于$\overline{\ }\,k>n/2$，在 $W^{k,\infty}\times H^k$ 中收敛蕴含一致收敛，因此我们推得 $\lim_{(g,h)\to(g,h)}\|\Theta(f;\,g,h)\,-\Theta(f;\,g,h)\|_{\mathcal{M}(H^0)}=0$。这就证明了 $\Theta(f;\,\cdot)$ 关于 $\overline{U}$ 的连续性，从而证明了 $\mathbb{P}_0$。

现在假设对于所有 $0\leqslant\ell\leqslant j\leqslant k-1$， $\mathbb{P}_\ell$ 都成立，并假设 $f\in C_b^{j+1}$（V）。那么对于 $\varphi\in H^{j+1}$（O）和（$g,\ h$）$\in U$，我们有

$$\begin{aligned}\|\Theta(f;g,h)\varphi\|_{H^{j+1}}&\lesssim\|\Theta(f;g,h)\varphi\|_{H^0}+\sum_{a=1}^n\|\partial_a[\Theta(f;g,h)\varphi]\|_{H^{j+1}}\\&\lesssim\|\Theta(f;g,h)\varphi\|_{H^0}+\sum_{a=1}^n\|\partial_a[\Theta(f;g,h)]\varphi\|_{H^j}+\sum_{a=1}^n\|\Theta(f;g,h)\partial_a\varphi\|_{H^j}.\end{aligned}\tag{D.1.24}$$

根据归纳假设，我们得到界 $\|\Theta$（$f;$ $g,$ h）$\varphi\|_{H^0}\leqslant\|\Theta$（$f;$ $g,$ h）$\|_{\mathcal{M}(H^0)}$ $\|\varphi\|_{H^0}$以及$\sum_{a=1}^n\|\Theta$（$f;$ $g,$ h）$\partial_a\varphi\|_{H^j}\lesssim\|\Theta$（$f;$ $g,$ h）$\|_{\mathcal{M}(H^j)}$ $\|\varphi\|_{H^{j+1}}$。另一方面，

$$\partial_a[\Theta(f;g,h)]=\sum_{b=1}^n\partial_bf(g+h)\partial_a(g+h)_b=\sum_{b=1}^n\Theta(\partial_bf,g,h)\partial_a(g+h)_b,\tag{D.1.25}$$

因此我们可以再次利用归纳假设给出上界

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^n\|\partial_a[\Theta(f;g,h)]\varphi\|_{H^j}&\lesssim\sum_{a,b=1}^n\|\Theta(\partial_bf,g,h)\|_{\mathcal{M}(H^j)}\|\partial_a(g+h)_b\varphi\|_{H^j}\\&\lesssim\sum_{b=1}^n\|\Theta(\partial_bf,g,h)\|_{\mathcal{M}(H^j)}\left(\|g\|_{W^{k,\infty}}+\|h\|_{H^k}\right)\|\varphi\|_{H^j}.\end{aligned}\tag{D.1.26}$$

结合这些界并再次利用归纳假设，我们得到 $\Theta(f;\,g,h)\in\mathcal{M}(H^{j+1}(O))$，其中

$$\begin{aligned}\|\Theta(f;g,h)\|_{\mathcal{M}(H^j)}&\lesssim\|\Theta(f;g,h)\|_{\mathcal{M}(H^0)}+\|\Theta(f;g,h)\|_{\mathcal{M}(H^j)}\\&\quad+\sum_{b=1}^n\|\Theta(\partial_bf,g,h)\|_{\mathcal{M}(H^j)}\left(\|g\|_{W^{k,\infty}}+\|h\|_{H^k}\right)\lesssim\|f\|_{C_b^j}\left\langle\|g\|_{W^{k,\infty}},\|h\|_{H^k}\right\rangle^{j-1}\\&\quad+\sum_{b=1}^n\|\partial_bf\|_{C_b^j}\left\langle\|g\|_{W^{k,\infty}}+\|h\|_{H^k}\right\rangle^j\lesssim\|f\|_{C_b^{j+1}}\left\langle\|g\|_{W^{k,\infty}},\|h\|_{H^k}\right\rangle^{(j+1)-1}.\end{aligned}\tag{D.1.27}$$

这表明 $\Theta(f;\,\cdot)$ 在 U 上定义良好，并且在 $j+1$ 的情况下满足 (D.1.23)。

要证明 $\mathbb{P}_{j+1}$，只需证明连续性。对于 (g,h)，$(g,h)\in U$ 和 $\varphi\in H^{j+1}(\mathbb{R}^n)$，$\overline{\ }$我们按照上述方法给出上界

$$\begin{aligned}\|[\Theta(f;g,h)-\Theta(f;\overline{g},\overline{h})]\varphi\|_{H^{j+1}}&\lesssim\|\Theta(f;g,h)-\Theta(f;\overline{g},\overline{h})\|_{\mathcal{M}(H^0)}\|\varphi\|_{H^0}\\&\quad+\sum_{a=1}^n\|\Theta(f;g,h)-\Theta(f;\overline{g},\overline{h})\|_{\mathcal{M}(H^j)}\|\partial_a\varphi\|_{H^j}+\sum_{a=1}^n\|\partial_a[\Theta(f;g,h)-\Theta(f;\overline{g},\overline{h})]\varphi\|_{H^j}.\end{aligned}\tag{D.1.28}$$

前两项容易处理，但我们必须改写第三项：$\overline{\ }\ \partial_a[\Theta(f;\,g,h)\ -\Theta(f;\,g,h)]=\sum_{b=1}^n[\Theta(\partial_bf;\,g,\underline{h})\ -\Theta(\partial_bf;\,\overline{g},\overline{h})]\partial_a(g+h)_b+\sum_{b=1}^n\Theta(\partial_bf,g,h)\partial_a(g+h-g-h)_b$，这

从而使我们能够给出.....的上界

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{n}\|\partial_a[\Theta(f;g,h)-\Theta(f;\overline{g},\overline{h})]\varphi\|_{H^j} &\lesssim \sum_{a,b=1}^{n}\|\Theta(\partial_b f;g,h)-\Theta(\partial_b f;\overline{g},\overline{h})\|_{\mathcal{M}(H^j)}\|\partial_a(g+h)_b\varphi\|_{H^j}\\ &\quad+\sum_{a,b=1}^{n}\|\Theta(\partial_b f;\overline{g},\overline{h})\|_{\mathcal{M}(H^j)}\|\partial_a(g+h-\overline{g}-\overline{h})_b\varphi\|_{H^j}\\ &\lesssim \sum_{b=1}^{n}\|\Theta(\partial_b f;g,h)-\Theta(\partial_b f;\overline{g},\overline{h})\|_{\mathcal{M}(H^j)}\left(\|g\|_{W^{k,\infty}}+\|h\|_{H^k}\right)\|\varphi\|_{H^j}\\ &\quad+\sum_{b=1}^{n}\left\|\Theta(\partial_b f;\overline{g},\overline{h})\right\|_{\mathcal{M}(H^j)}\left(\|g-\overline{g}\|_{W^{k,\infty}}+\left\|h-\overline{h}\right\|_{H^k}\right)\|\varphi\|_{H^j}. \quad \text{(D.1.29)}\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\left\|[\Theta(f;g,h)-\Theta(f;\overline{g},\overline{h})]\right\|_{\mathcal{M}(H^{j+1})}\lesssim\left\|\Theta(f;g,h)-\Theta(f;\overline{g},\overline{h})\right\|_{\mathcal{M}(H^0)}\\ &+\left\|\Theta(f;g,h)-\Theta(f;\overline{g},\overline{h})\right\|_{\mathcal{M}(H^j)}+(\|g\|_{W^{k,\infty}}+\|h\|_{H^k})\sum_{b=1}^{n}\left\|\Theta(\partial_b f;g,h)-\Theta(\partial_b f;\overline{g},\overline{h})\right\|_{\mathcal{M}(H^j)}\\ &+\left(\|g-\overline{g}\|_{W^{k,\infty}}+\left\|h-\overline{h}\right\|_{H^k}\right)\sum_{b=1}^{n}\left\|\Theta(\partial_b f;\overline{g},\overline{h})\right\|_{\mathcal{M}(H^j)}, \quad \text{(D.1.30)}\end{aligned}$$

由此上界和归纳假设，我们很容易推得，当 $f\in C_b^{j+1}(V)$ 时， $\Theta(f;\cdot)$ 在 U 上连续。因此， $\mathbb{P}_{j+1}$ 成立，有限归纳论证至此完成。

步骤 2：当 $f\in C_b^{1+k}(V)$ 时， C^1。现在假设 $m=1$ 且 $f\in C_b^{1+k}(V)$。对于 $(g,h)\in U$ 和 $(g_1,h_1)\in W^{k,\infty}(O;\mathbb{R}^d)\times H^k(O;\mathbb{R}^d)$ 足够小，使得对于所有 $t\in[0,1]$, $(g+tg_1,h+th_1)\in U$，我们有恒等式

$$\begin{aligned}&\Theta(f;g+g_1,h+h_1)-\Theta(f;g,h)-\sum_{b=1}^{n}\Theta(\partial_b f;g,h)(g_1+h_1)_b\\ &\qquad=\sum_{b=1}^{n}(g_1+h_1)_b\int_0^1\left[\Theta(\partial_b f;g+tg_1,h+th_1)-\Theta(\partial_b f,g,h)\right]dt. \quad \text{(D.1.31)}\end{aligned}$$

利用这一点以及步骤 1 的结果，我们可以仿照定理 D.2 证明中的步骤 3 进行论证，由此推得 $\Theta(f;\cdot)$ 在 U 上可微，并满足 $D\Theta(f;g,h)(g_1,h_1)=\sum_{b=1}^{n}\Theta(\partial_b f;g,h)(g_1+h_1)_b$；当 $m=1$ 时，该式可改写为 (D.1.22)。进而，该公式和前一步的结果表明， $\Theta(f;\cdot)$ 是 C^1。

步骤 3： C^m 当 $f\in C_b^{m+k}(V)$ 时。既然已证明 $m=1$ 情形，并且已得到公式 (D.1.22)，我们便可采用一个简单的归纳论证（为简洁起见，此处略去），从而得出：若 $f\in C_b^{m+k}(V)$ 对于 $m\geqslant 2$ 成立，则 $\Theta(f;\cdot)$ 在 U 上是 C^m，且公式 (D.1.22) 对所有 $m\geqslant 1$ 均成立。□

D.2. **温和估计工具**。本小节记录一些有用的温和估计，它们构成了第 3.2 节以及我们分析中许多其他部分的基础。我们首先回顾两种被称为 Gagliardo-Nirenberg 插值的对数凸性结果。第一种适用于 $\mathbb{R}^n$ 上的函数。

定理 D.4（全空间中的 Gagliardo-Nirenberg 插值）。设 V 为有限维实向量空间，$1 \leqslant t,\ p,\ q \leqslant \infty$ 且 $s,\ r \in \mathbb{N}^+$ 满足 $1 \leqslant r < s$ 以及

$$\frac{r}{s}\frac{1}{p} + \Big(1 - \frac{r}{s}\Big)\frac{1}{q} = \frac{1}{t}. \tag{D.2.1}$$

对所有 $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n;\ V) \cap \dot{W}^{s,\ p}(\mathbb{R}^n;\ V)$，都有估计 $\|D^r\varphi\|_{L^t} \lesssim \|\varphi\|_{L^q}^{1-r/s}\|D^s\varphi\|_{L^p}^{s/r}$，其中隐含常数仅依赖于维数、$r$、$s$、$p$ 和 q。

证明。例如，参见 Leoni [59] 中的定理 12.85，其中证明了 $V = \mathbb{R}$ 的情形。一般的 V 情形可通过选取一组基并逐分量处理得到。□

Gagliardo-Nirenberg 插值的第二种形式适用于某些区域上的函数。

推论 D.5 (区域上的 Gagliardo-Nirenberg 插值)。假设 V 是有限维实向量空间，$U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*）。设 $1 \leqslant p,\ q,\ t \leqslant \infty$ 以及 $s,\ r \in \mathbb{N}^+$ 满足 $1 \leqslant r < s$，且条件 (D.2.1) 成立。对所有 $\varphi \in (L^q \cap W^{s,\ p})(U;\ V)$，都有估计 $\|\varphi\|_{W^{r,\ t}} \lesssim \|\varphi\|_{L^q}^{1-r/s}\|\varphi\|_{W^{s,\ p}}^{s/r}$，其中隐含常数依赖于维数、$r$、$s$、$p$、$q$ 和 U。

证明。令 $\mathfrak{E}_U$ 表示区域 U 的 Stein 延拓算子。给定满足假设的 φ，我们先应用定理 D.4，再利用 Lebesgue 空间上范数的对数凸性，得到所需的上界：

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{W^{r,t}(U;V)} &\leqslant \|\mathfrak{E}_U\varphi\|_{W^{r,t}(\mathbb{R}^n;V)} \lesssim \|\mathfrak{E}_U\varphi\|_{L^t(\mathbb{R}^n;V)} + \|D^r\mathfrak{E}_U\varphi\|_{L^t(\mathbb{R}^n;V)} \lesssim \|\varphi\|_{L^t(U;V)} \\ &\quad + \|\varphi\|_{L^q(U;V)}^{1-r/s}\|\varphi\|_{W^{s,p}(U;V)}^{s/r} \leqslant \|\varphi\|_{L^q(U;V)}^{1-r/s}\|\varphi\|_{L^p(U;V)}^{r/s} + \|\varphi\|_{L^q(U;V)}^{1-r/s}\|\varphi\|_{W^{s,p}(U;V)}^{s/r} \\ &\lesssim \|\varphi\|_{L^q(U;V)}^{1-r/s}\|\varphi\|_{W^{s,p}(U;V)}^{s/r}. \end{aligned} \tag{D.2.2}$$

□

有了插值定理，我们现在可以证明一系列有用的温和估计。我们先研究乘积。下面的主要结果陈述较长，是许多实用且简洁的推论的来源。

定理 *D.6*（乘积上的温和估计）。设 $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*），并且 ℓ、m、k、α、$\beta \in \mathbb{N}$ 和 α_1、……、α_ℓ、β_1、……、$\beta_m \in \mathbb{N}^d$ 满足 $\sum_{i=1}^{\ell}|\alpha_i| = \alpha$、$\sum_{j=1}^{m}|\beta_j| = \beta$ 和 $\alpha+\beta = k$。假设 r、s、t、p_1、……、p_ℓ、q_1、……、q_ℓ、a_1、……、a_m、b_1、……、$b_m \in [1,\infty]$ 满足 $1/r = 1/s + 1/t$，并且

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} = \frac{k}{\alpha}\Big(\frac{1}{s} - \sum_{\lambda=1}^{\ell}\frac{1}{q_\lambda}\Big) \text{ for } i \in \{1,\dots,\ell\} \text{ and } \frac{1}{a_j} - \frac{1}{b_j} = \frac{k}{\beta}\Big(\frac{1}{t} - \sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{b_\mu}\Big) \text{ for } j \in \{1,\dots,m\}. \tag{D.2.3}$$

此外，假设

$$u_i \in (W^{k,p_i} \cap L^{q_i})(U) \text{ for } i \in \{1,\dots,\ell\} \text{ and } w_j \in (W^{k,a_j} \cap L^{b_j})(U) \text{ for } j \in \{1,\dots,m\}. \tag{D.2.4}$$

那么我们有如下乘积估计

$$\Big\|\Big(\prod_{i=1}^{\ell}\partial^{\alpha_i}u_i\Big)\Big(\prod_{j=1}^{m}\partial^{\beta_j}w_j\Big)\Big\|_{L^r} \lesssim \sum_{n=1}^{m+\ell}\|v_n\|_{W^{k,c_n}}\prod_{\nu\neq n}\|v_\nu\|_{L^{d_n}}, \tag{D.2.5}$$

其中

$$v_n = \begin{cases} u_n & \text{if } n \leqslant \ell, \\ w_{n-\ell} & \text{if } \ell < n, \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} p_n & \text{if } n \leqslant \ell, \\ a_{n-\ell} & \text{if } \ell < n, \end{cases} \text{ and } d_n = \begin{cases} q_n & \text{if } n \leqslant \ell, \\ b_{n-\ell} & \text{if } \ell < n. \end{cases} \tag{D.2.6}$$

证明。 对于 $i\in\{1,\dots,\ell\}$ 和 $j\in\{1,\dots,m\}$，我们通过以下方式定义 $s_i,t_j\in[1,\infty]$

$$\frac{1}{s_i}=\frac{|\alpha_i|/k}{p_i}+\frac{1-|\alpha_i|/k}{q_i}\ \text{and}\ \frac{1}{t_j}=\frac{|\beta_j|/k}{a_j}+\frac{1-|\beta_j|/k}{b_j}. \tag{D.2.7}$$

我们首先断言， $\sum_{i=1}^{\ell}1/s_i=1/s$ 和 $\sum_{j=1}^{m}1/t_j=1/t$。事实上，通过调用（D.2.3），我们看到方程（D.2.7）等价于

$$\frac{1}{s_i}-\frac{1}{q_i}=\frac{|\alpha_i|}{k}\cdot\frac{k}{\alpha}\Big(\frac{1}{s}-\sum_{\lambda=1}^{\ell}\frac{1}{q_\lambda}\Big)\ \text{and}\ \frac{1}{t_j}-\frac{1}{b_j}=\frac{|\beta_j|}{k}\cdot\frac{k}{\beta}\Big(\frac{1}{t}-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{b_\mu}\Big) \tag{D.2.8}$$

对于 $i\in\{1,\dots,\ell\}$ 和 $j\in\{1,\dots,m\}$。现在我们对这些范围内的 i 和 j 求和，并利用 α 和 β 的定义，得到

$$\sum_{i=1}^{\ell}\Big(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{q_i}\Big)=\frac{1}{s}-\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{q_i}\ \text{and}\ \sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{1}{t_j}-\frac{1}{b_j}\Big)=\frac{1}{t}-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{b_j}, \tag{D.2.9}$$

由此立即得到该断言。

接下来注意到，根据假设 $1/r=1/s+1/t$，因此该断言使我们能够通过应用 H¨lder 不等式来开始乘积估计：

$$\Big\|\Big(\prod_{i=1}^{\ell}\partial^{\alpha_i}u_i\Big)\Big(\prod_{j=1}^{m}\partial^{\beta_j}w_j\Big)\Big\|_{L^r}\leqslant\Big(\prod_{i=1}^{\ell}\|u_i\|_{W^{|\alpha_i|,s_i}}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{m}\|w_j\|_{W^{|\beta_j|,t_j}}\Big). \tag{D.2.10}$$

然后我们使用（D.2.7），并应用 Gagliardo-Nirenberg 插值和推论 D.5，得到上界

$$\|u_i\|_{W^{|\alpha_i|,s_i}}\lesssim\|u_i\|_{W^{k,p_i}}^{|\alpha_i|/k}\|u_i\|_{L^{q_i}}^{1-|\alpha_i|,k}\ \text{and}\ \|w_j\|_{W^{|\alpha_j|,s_j}}\lesssim\|w_j\|_{W^{k,a_j}}^{|\beta_j|/k}\|w_j\|_{L^{b_j}}^{1-|\beta_i|/k}. \tag{D.2.11}$$

我们令 $\gamma_n=\alpha_n$ 若 $n\leqslant\ell$，并令 $\gamma_n=\beta_{n-\ell}$ 若 $n>\ell$，并注意到 $\sum_{n=1}^{m+\ell}|\gamma_n|/k=(\alpha+\beta)/k=1$。后一个恒等式表明，若 $\{B_n\}_{n=1}^{m+\ell}\subseteq[0,\infty)$，则

$$\prod_{n=1}^{m+\ell}B_n^{1-|\gamma_n|/k}=\prod_{n=1}^{m+\ell}B_n^{\sum_{\nu\neq n}|\gamma_\nu|/k}=\prod_{n=1}^{m+\ell}\prod_{\nu\neq n}B_n^{|\gamma_\nu|/k}=\prod_{n=1}^{m+\ell}\prod_{\nu\neq n}B_\nu^{|\gamma_n|/k}. \tag{D.2.12}$$

接着，我们结合估计 (D.2.10) 和 (D.2.11)，并使用 (D.2.6) 中的记号以及恒等式 (D.2.12)，得到估计

$$\Big\|\Big(\prod_{i=1}^{\ell}\partial^{\alpha_i}u_i\Big)\prod_{j=1}^{m}\partial^{\beta_j}w_j\Big\|_{L^r}\lesssim\prod_{n=1}^{m+\ell}\|v_n\|_{W^{k,c_n}}^{|\gamma_n|/k}\|v_n\|_{L^{d_n}}^{1-|\gamma_n|/k}=\prod_{n=1}^{m+\ell}\Big(\|v_n\|_{W^{k,c_n}}\prod_{\nu\neq n}\|v_\nu\|_{L^{d_n}}\Big)^{|\gamma_n|/k}. \tag{D.2.13}$$

然后，通过应用杨氏不等式即可由此得到 (D.2.5)。 □

现在我们可以推导出更为常见的高低型乘积估计。

推论 D.7 (简单乘子的温和估计)。 设 $U\subseteq\mathbb{R}^d$ 为 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*），$k\in\mathbb{N}$，且 $\varphi\in H^k(U)$。以下结论成立。

(1) 假设 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d$ 满足 $|\alpha|+|\beta|=k$ 和 $\psi\in H^{\max\{1+\lfloor d/2\rfloor,k\}}(U)$。则乘积 $\partial^\alpha\psi\partial^\beta\varphi$ 属于 $L^2(U)$，并满足上界

$$\|\partial^\alpha\psi\partial^\beta\varphi\|_{L^2}\lesssim\|\psi\|_{H^{1+\lfloor d/2\rfloor}}\|\psi\|_{H^k}+\begin{cases}0 & \text{if } k\leqslant\lfloor d/2\rfloor,\\ \|\psi\|_{H^k}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor d/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor d/2\rfloor<k.\end{cases} \tag{D.2.14}$$

(2) 假设 $\psi \in H^{\max\{1+\lfloor d/2\rfloor, k\}}(U)$。则乘积 $\psi\varphi$ 属于 $H^k(U)$，并满足上界

$$\|\psi\varphi\|_{H^k} \lesssim \|\psi\|_{H^{1+\lfloor d/2\rfloor}}\|\psi\|_{H^k} + \begin{cases} 0 & \text{if } k \leqslant 1+\lfloor d/2\rfloor, \\ \|\psi\|_{H^k}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor d/2\rfloor}} & \text{if } 1+\lfloor d/2\rfloor < k. \end{cases} \tag{D.2.15}$$

(3) 假设 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ 满足 $|\alpha| + |\beta| = k$ 和 $\psi \in W^{k,\infty}(U)$。则乘积$\partial^\alpha\psi\partial^\beta\varphi$ 属于 $L^2(U)$，并满足上界

$$\|\partial^\alpha\psi\partial^\beta\varphi\|_{L^2} \lesssim \|\psi\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{H^k} + \|\psi\|_{W^{k,\infty}}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{D.2.16}$$

(4) 假设 $\psi \in W^{k,\infty}(U)$。则乘积 $\psi\varphi$属于 $H^k(U)$，并满足上界

$$\|\psi\varphi\|_{H^k} \lesssim \|\psi\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{H^k} + \|\psi\|_{W^{k,\infty}}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{D.2.17}$$

证明。第二项和第四项分别可直接由莱布尼茨法则以及第一项和第三项推出。第三项可直接应用定理 D.6 得出，适用于 $\ell = 2$, $m = 0$, $r = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$, $q_1 = 2$, $q_2 = \infty$ 的情形。还需证明第一项。当 $1 + \lfloor d/2\rfloor < k$ 时，第一项的估计同样由定理 D.6 得出，该定理应用于$\ell = 2$, $m = 0$, $r = 2$, $p_1 = p_2 = 2$, $q_1 = q_2 = \infty$，并结合超临界 Sobolev 嵌入$H^{1+\lfloor d/2\rfloor}(U) \hookrightarrow L^\infty(U)$。

现在考虑剩下的情形，$k \leqslant \lfloor d/2\rfloor$。我们先考察 $k < d/2$ 时的情况。在这种情况下，我们可以应用次临界 Sobole夫嵌入 $H^k(U) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2k}}(U)$，得到$\varphi \in (W^{k,p_1} \cap L^{q_1})(U)$，其中 $p_1 = 2$ 且 $q_1 = \frac{2d}{d-2k}$。另一方面，超临界 Sobolev 嵌入、推论 D.5 以及估计 $1+\lfloor d/2\rfloor > d/2 > k$ 表明，我们有如下嵌入

$$H^{1+\lfloor d/2\rfloor}(U) \hookrightarrow H^{1+\lfloor d/2\rfloor}(U) \cap L^\infty(U) \hookrightarrow W^{k,2(1+\lfloor d/2\rfloor)/k}(U) \hookrightarrow W^{k,d/k}(U). \tag{D.2.18}$$

这意味着 $\psi \in (L^\infty \cap H^{1+\lfloor d/2\rfloor})(U)$。令 $p_2 = d/k$ 且 $q_2 = \infty$，并注意到定理 D.6 的假设再次满足，其中 $r = 2$、$\ell = 2$ 和 $m = 0$；于是，当 $k < d/2$ 时，界 (D.2.14) 可由该定理给出的乘积估计推出。

最后，我们考虑 $k = d/2$ 的情形。再次利用推论 D.5，我们得到 $\psi \in H^{1+d/2}(U) \hookrightarrow W^{k,(4+2d)/d}(U)$，这促使我们令 $p_2 = \frac{4+2d}{d}$和 $q_2 = \infty$。临界 Sobole夫嵌入意味着 $\varphi \in H^k(U) \hookrightarrow L^{2+d}(U)$，因此我们应取 $p_1 = 2$、$q_1 = 2 + d$ 和$r = 2$。利用这些参数，我们再次应用定理 D.6，在 $k = d/2$ 时得到 (D.2.14)，从而完成第一项的证明。□

接下来，我们考虑交换子表达式的温和界。

推论 D.8 (交换子的温和估计)。 设 $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 为 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*），k，$m \in \mathbb{N}$满足 $m \geqslant 1$，$j \in \{1, \ldots, d\}$，且 $\varphi \in H^{k+m-1}(U)$。则下列结论成立。

(1) 假设 $\psi \in H^{\max\{2+\lfloor d/2\rfloor, k+m\}}{}_{\mathrm{loc}}(U)$ 满足 $\partial_j\psi \in H^{\max\{1+\lfloor d/2\rfloor, k+m-1\}}(U)$。则交换子 $[\partial_j^m, \psi]\varphi$ 属于 $H^k(U)$，并满足上界

$$\|[\partial_j^m, \psi]\varphi\|_{H^k} \lesssim \|\partial_j\psi\|_{H^{1+\lfloor d/2\rfloor}}\|\varphi\|_{H^{k+m-1}} + \begin{cases} 0 & \text{if } k+m \leqslant 2+\lfloor d/2\rfloor, \\ \|\partial_j\psi\|_{H^{k+m-1}}\|\varphi\|_{H^{1+\lfloor d/2\rfloor}} & \text{if } 2+\lfloor d/2\rfloor < k+m. \end{cases} \tag{D.2.19}$$

(2) 假设 $\psi \in W^{k+m,\infty}{}_{\mathrm{loc}}(U)$ 满足 $\partial_j\psi \in W^{k+m-1,\infty}(U)$。那么交换子$[\partial_j^m, \psi]\varphi$ 属于 $H^k(U)$，并满足如下上界

$$\|[\partial_j^m, \psi]\varphi\|_{H^k} \lesssim \|\partial_j\psi\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{H^{k+m-1}} + \|\partial_j\psi\|_{W^{k+m-1,\infty}}\|\varphi\|_{L^2}. \tag{D.2.20}$$

证明。 取定满足 $|\alpha| \leqslant k$ 的 $\alpha \in \mathbb{N}^d$。由莱布尼茨法则可得

$$\partial^\alpha([\partial_j^m, \psi]\varphi) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{\beta \leqslant \alpha} c_{\ell,m,\beta,\alpha} \partial^\beta \partial_j^\ell \partial_j \psi \partial^{\alpha-\beta} \partial_j^{m-1-\ell} \varphi, \tag{D.2.21}$$

因此

$$\|[\partial_j^m, \psi]\varphi\|_{H^k} \lesssim \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \|\partial^\beta \partial_j^\ell \partial_j \psi \partial^{\alpha-\beta} \partial_j^{m-1-\ell} \varphi\|_{L^2}. \tag{D.2.22}$$

为证明第一项，我们现在应用推论 D.7 的第一个结论，并利用 $|\alpha| \leqslant k$。为证明第二项，我们改用上述推论的第三个结论，以及这些和中的 $\ell \leqslant m-1$。□

现在我们推导叠加乘子的温和界。

推论 *D.9*（叠加乘子的温和估计）。设 $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 是 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*），$k \in \mathbb{N}^+$，且 V 是有限维实向量空间。假设 $f \in W^{k,\infty}(V)$，$g \in W^{k,\infty}_{\mathrm{loc}}(U; V)$ 满足 $Dg \in W^{k-1,\infty}(U; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; V))$，并且 $\psi \in H^k_{\mathrm{loc}}(U; V)$ 满足 $D\psi \in (L^\infty \cap H^{k-1})(U; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; V))$。令 $R \in \mathbb{R}^+$ 和 $S \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ 满足

$$\langle \|f\|_{W^{1,\infty}}, \|Dg\|_{L^\infty}, \|D\psi\|_{L^2 \cap L^\infty} \rangle \leqslant R \text{ and } \langle \|f\|_{W^{2+\lfloor d/2 \rfloor,\infty}}, \|Dg\|_{W^{1+\lfloor d/2 \rfloor,\infty}}, \|D\psi\|_{H^{1+\lfloor d/2 \rfloor}} \rangle \leqslant S. \tag{D.2.23}$$

则有以下结论。

(1) 若 $\varphi \in (L^\infty \cap H^k)(U)$，则乘积 $f(g+\psi)\varphi$ 属于 $H^k(U)$，并满足估计 e

$$\|f(g+\psi)\varphi\|_{H^k} \lesssim R^{k+1}\|\varphi\|_{H^k} + R^k \|f, Dg, D\psi\|_{W^{k,\infty} \times W^{k-1,\infty} \times H^{k-1}} \|\varphi\|_{L^2 \cap L^\infty}. \tag{D.2.24}$$

(2) 若 $\varphi \in H^k(U)$，并且额外假设 $S < \infty$，则乘积 $f(g+\psi)\varphi$ 属于 $H^k(U)$，并满足估计

$$\|f(g+\psi)\varphi\|_{H^k} \lesssim S^{k+1}\|\varphi\|_{H^k} + S^k \begin{cases} 0 & \text{if } k \leqslant 1 + \lfloor d/2 \rfloor, \\ \|f, Dg, D\psi\|_{W^{k,\infty} \times W^{k-1,\infty} \times H^{k-1}} \|\varphi\|_{H^{1+\lfloor d/2 \rfloor}} & \text{若 } 1 + \lfloor d/2 \rfloor < k. \end{cases} \tag{D.2.25}$$

(3) 设 $\varphi \in H^k(U)$、$S < \infty$，且存在一个 *Stein* 延拓域 $O \subseteq V$ 使得 $f \in W^{k,\infty}(O)$。若 $g+\psi$ 的像是 O 的子集，则第二项中的包含关系和估计成立。

证明。 我们先证明第一项。首先估计

$$\|f(g+\psi)\varphi\|_{H^k} \lesssim \|f(g+\psi)\varphi\|_{L^2} + \|D^k[f(g+\psi)\varphi]\|_{L^2} \tag{D.2.26}$$

以及 $\|f(g+\psi)\varphi\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2}$。对于 (D.2.26) 中的第二项，我们需要更仔细地处理。根据乘积和复合的求导法则，我们有

$$D^k[f(g+\psi)\varphi] = f(g+\psi)D^k\varphi + \mathrm{sym} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\ell=1}^{j+1} \sum_{j_1+\cdots+j_\ell=j+1} c_{j+1,k,\ell,j_1,\ldots,j_\ell} \cdot D^\ell f(g+\psi)\{D^{j_1}(g+\psi), \ldots, D^{j_\ell}(g+\psi)\} \otimes D^{k-1-j}\varphi = \mathbf{I} + \mathbf{II}, \tag{D.2.27}$$

其中，sym 表示多重线性映射的对称化。我们将分别估计 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{II}$ 的 L^2 范数。对 $\mathbf{I}$ 的处理很简单：

$$\|\mathbf{I}\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{H^k}. \tag{D.2.28}$$

对于**II**，我们使用三角不等式，并研究级数中的每一项：

$$\|\mathbf{II}\|_{L^2} \lesssim \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{\ell=1}^{j+1}\sum_{j_1+\cdots+j_\ell=j+1} \|D^\ell f(g+\psi)\{D^{j_1}(g+\psi),\dots,D^{j_\ell}(g+\psi)\}\otimes D^{k-1-j}\varphi\|_{L^2}. \quad \text{(D.2.29)}$$

根据 ℓ -多重线性和对称性考虑，我们有如下上界

$$\|\mathbf{II}\|_{L^2} \lesssim \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{\ell=1}^{j+1}\sum_{j_1+\cdots+j_\ell=j+1}\sum_{\nu=0}^{\ell}\|D^\ell f(g+\psi)\{D^{j_1}\psi,\dots,D^{j_\nu}\psi, D^{j_{\nu+1}}g,\dots,D^{j_\ell}g\}\otimes D^{k-1-j}\varphi\|_{L^2}. \quad \text{(D.2.30)}$$

我们希望将定理 D.6 应用于此表达式中的被加项，但由于出现了 $D^\ell f(g+\psi)$ 项，我们无法验证该定理的假设。因此，我们对证明该定理所用的论证进行修改。给定 $j\in\{0,\dots,k-1\}$、$\ell\in\{1,\dots,j+1\}$、$j_1+\cdots+j_\ell=j+1$ 和 $\nu\in\{0,\dots,\ell\}$，我们令 $\alpha=k-1-j+\sum_{\nu=1}^{\nu}(j_\nu-1)$、$\beta=\ell-1+\sum_{\nu=\nu+1}^{\ell}(j_\nu-1)$、$\alpha+\beta=k-1$、$r=s=2$、$t=a_1=b_1=\cdots=a_{\ell-\nu+1}=b_{\ell-\nu+1}=\infty$、$p_1=\cdots=p_{\nu+1}=2$、$q_1=\cdots=q_{\nu+1}=2^{\frac{(k-1)(\nu+1)-\alpha}{k-1-\alpha}}$、$u_1=\cdots=u_\nu=D\psi$、$u_{\nu+1}=\varphi$、$w_1=Df$ 和 $w_2=\cdots=w_{\ell-\nu+1}=Dg$。由于平凡上界 $\|D^\ell f(g+\psi)\|_{L^\infty}\leqslant\|D^\ell f\|_{L^\infty}$，用于证明定理 D.6 的论证也适用于带有这些参数的 (D.2.30) 中的被加项；由此得到估计

$$\begin{aligned}\|\mathbf{II}\|_{L^2} \lesssim \langle\|Dg,D\psi\|_{L^\infty\times(L^2\cap L^\infty)}\rangle^{k-1}\big(&\|Df\|_{L^\infty}\|Dg,D\psi\|_{L^\infty\times(L^2\cap L^\infty)}\|\varphi\|_{H^{k-1}}\\ &+\|Df\|_{L^\infty}\|Dg,D\psi\|_{W^{k-1,\infty}\times H^{k-1}}\|\varphi\|_{L^2\cap L^\infty}+\|Df\|_{W^{k-1,\infty}}\|Dg,D\psi\|_{L^\infty\times(L^2\cap L^\infty)}\|\varphi\|_{L^2\cap L^\infty}\big).\end{aligned} \quad \text{(D.2.31)}$$

结合估计 (D.2.26)、(D.2.28) 和 (D.2.31)，我们得到第一项所需的结论，即估计 (D.2.24)。

当 $1+\lfloor d/2\rfloor\leqslant k$ 时，第二项由第一项的估计 (D.2.24)、$1\leqslant R\lesssim S$ 这一事实以及超临界 Sobolev 嵌入 $H^{1+\lfloor d/2\rfloor}\hookrightarrow L^2\cap L^\infty$ 得出。另一方面，我们有平凡估计

$$\|f(g+\psi)\varphi\|_{L^2}\leqslant\|f\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2}\leqslant S\|\varphi\|_{L^2}. \quad \text{(D.2.32)}$$

这表明，线性映射 $\varphi\mapsto f(g+\psi)\varphi$ 的 $\mathcal{L}(H^{1+\lfloor d/2\rfloor}(U))$ 算子范数上界为 $S^{2+\lfloor d/2\rfloor}$，而其 $\mathcal{L}(L^2(U))$ 算子范数上界为 S。利用算子插值（例如参见 Bergh 和 L¨ofstr¨om [9]）以及这些界，我们在 $k\leqslant 1+\lfloor d/2\rfloor$ 的情形下得到 (D.2.25)，从而完成了第二项的证明。

第三项由将第二项应用于把 f 替换为 $\mathfrak{E}_O f$ 的情形得到，其中 $\mathfrak{E}_O$ 是 O 的 Stein 延拓算子；此外，注意到关于 $g+\psi$ 的像假设可确保 $(\mathfrak{E}_O f)(g+\psi)=f(g+\psi)$。□

现在我们单独考虑叠加，而不将其视为乘子。

推论 D.10 (叠加的温和估计)。 设 $\mathbb{N}\ni k\geqslant 2+\lfloor n/2\rfloor$。以下结论成立。

(1) 设 V、W 为有限维实向量空间，$O\subseteq V$ 为包含 *0* 且相对于 *0* 星形的 *Stein* 延拓域（见定义 *A.2*），$U\subseteq\mathbb{R}^n$ 为 *Stein* 延拓域。若 $f\in W^{k,\infty}_{\text{loc}}(O;W)$ 满足 $f(0)=0$ 且 $Df\in W^{k-1,\infty}(O;\mathcal{L}(V;W))$，并且 $\varphi\in H^k(U;V)$ 满足 $\varphi(U)\subseteq O$，那么叠加 $f(\varphi)$ 属于 $H^k(U;W)$，且满足以下估计

$$\|f(\varphi)\|_{H^k}\lesssim S^k\|\varphi\|_{H^k}, \quad \text{(D.2.33)}$$

对于满足 $\langle\|Df\|_{W^{k-1,\infty}},\|\varphi\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}\rangle\leqslant S$ 的任意 $S\in\mathbb{R}^+$。

(2) 假设 $f \in H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$ 以及 g、$\psi \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 满足 $Dg \in W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})$、$D\psi \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})$，且 $g+\psi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的双 *Lipschitz* 且 C^1-微分同胚。叠加 $f(g+\psi)$ 属于 $H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)$，并满足估计

$$\|f(g+\psi)\|_{H^k} \lesssim S^{k+1}\|f\|_{H^k} + S^k\|Dg, D\varphi\|_{W^{k-1,\infty}\times H^{k-1}}\|f\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}, \tag{D.2.34}$$

对于任意满足条件的 $S \in \mathbb{R}^+$

$$\langle \|\det D(g+\psi)^{-1}\|_{L^\infty}, \|Dg, D\psi\|_{W^{1+\lfloor n/2\rfloor,\infty}\times H^{1+\lfloor n/2\rfloor}}\rangle \leqslant S. \tag{D.2.35}$$

证明。我们先证明第一项。由于 $f(0)=0$ 且 O 相对于 V的原点是星形的，我们可以利用微积分基本定理得到等式 $f(\varphi) = \int_0^1 Df(t\varphi)[\varphi]\,\mathrm{d}t$，由此推出 $\|f(\varphi)\|_{L^2} \leqslant \|Df\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2}$。接下来，我们对叠加的导数建立一个$H^{k-1}$上界：$D(f(\varphi)) = Df(\varphi)D\varphi$。为此，我们利用推论 D.9 的第三项，得到上界 $\|D(f(\varphi))\|_{H^{k-1}} \lesssim S^k\|D\varphi\|_{H^{k-1}}$。综合这些估计，可得第一项的结论。

接下来证明第二项，首先注意到

$$\|f(g+\psi)\|_{H^k} \lesssim \|f(g+\psi)\|_{L^2} + \|D^k[f(g+\psi)]\|_{L^2}. \tag{D.2.36}$$

对于第一个 L^2-范数，我们利用 $(g+\psi)$ 是双 Lipschitz 微分同胚这一点来估计

$$\|f(g+\psi)\|_{L^2} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 |\det D(g+\psi)^{-1}|\Big)^{1/2} \leqslant S^{1/2}\|f\|_{L^2}. \tag{D.2.37}$$

对于 (D.2.36) 的后一项，我们希望使用定理 D.6，但和推论 D.9 的证明一样，我们无法完全照此进行。因此，我们使用复合求导法则，并采用与推论 D.9 中第一项的证明类似的方法。事实上，我们有如下公式

$$D^k[f(g+\psi)] = \operatorname{sym}\sum_{\ell=1}^{k}\sum_{j_1+\cdots+j_\ell=k} c_{\ell,k,j_1,\dots,j_\ell} D^\ell f(g+\psi)\{D^{j_1}(g+\psi),\dots,D^{j_\ell}(g+\psi)\}, \tag{D.2.38}$$

其中 sym 表示多重线性映射的对称化算子。根据多重线性和对称性，我们进而得到如下上界

$$\|D^k[f(g+\psi)]\|_{L^2} \lesssim \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{j_1+\cdots+j_\ell=k}\sum_{\nu=0}^{\ell}\|D^\ell f(g+\psi)\{D^{j_1}\psi,\dots D^{j_\nu}\psi, D^{j_{\nu+1}}g,\dots,D^{j_\ell}g\}\|_{L^2}. \tag{D.2.39}$$

对于上面右端的每一项，我们如下运用定理 D.6 证明中的论证。给定 $\ell \in \{1,\dots,k\}$、$j_1+\cdots+j_\ell = k$ 和 $\nu \in \{0,1,\dots,\ell\}$，我们定义 $\alpha = \ell - 1 + \sum_{\nu=1}^{\nu}(j_\nu - 1)$、$\beta = \sum_{\nu=\nu+1}^{\ell}(j_\nu - 1)$、$\alpha+\beta = k-1$、$r = s = 2$、$t = a_1 = b_1 = \cdots = a_{\ell-\nu} = b_{\ell-\nu} = \infty$、$p_1 = \cdots = p_{\nu+1} = 2$、$q_1 = \cdots = q_{\nu+1} = 2^{(k-1)(\nu+1)_{k-1-\alpha}}{}^{-\alpha}$、$\overline{u_1 = Df}$、$u_2 = \cdots = u_{\nu+1} = D\psi$ 和 $w_1 = \cdots = w_{\ell-\nu} = Dg$。只要多带一个因子 S，定理中的论证就仍然成立，这得益于以下各界

$$\|D^\ell f(g+\psi)\|_{L^\chi} \leqslant S^{1/\chi}\|D^\ell f\|_{L^\chi} \leqslant S\|D^\ell f\|_{L^\chi} \text{ for all } \chi \in [1,\infty]. \tag{D.2.40}$$

因此，我们得出如下估计

$$\begin{aligned}&\|D^\ell f(g+\psi)\{D^{j_1}\psi,\dots D^{j_\nu}\psi, D^{j_{\nu+1}}g,\dots,D^{j_\ell}g\}\|_{L^2}\\ &\qquad\lesssim S\langle\|Dg, D\psi\|_{L^\infty\times(L^2\cap L^\infty)}\rangle^{\ell-1}\big(\|Df\|_{H^{k-1}}\|Dg, D\psi\|_{L^\infty\times(L^2\cap L^\infty)}\\ &\quad+\|Df\|_{L^2\cap L^\infty}\|Dg, D\psi\|_{W^{k-1,\infty}\times H^{k-1}}\big) \lesssim S^{\ell+1}\|f\|_{H^k} + S^\ell\|Dg, D\psi\|_{W^{k-1,\infty}\times H^{k-1}}\|f\|_{H^{2+\lfloor n/2\rfloor}}.\end{aligned} \tag{D.2.41}$$

结合（D .2.36)、(D.2.37)、(D.2.39) 和 (D.2.41)，由此得到所需的上界 (D.2.34).

□

流体力学 terms

$\Omega[\eta]$, 3 Ω, 3
$\Sigma[\eta]$, 3Σ, 3Σ_0, 3P,
3P_{ext}, 4$\mathscr{H}$, 4$\mathfrak{g}$, 4ς,
4$\mathbb{S}^{\tau}$, 4$\mathbb{S}^{\tau}_{\mathcal{A}}$, 10$\mathbb{D}$,
123$\mathbb{D}^0$, 123H, 5
$H_{\min}$, $H_{\max}$, 5ϱ, 5
函数空间$\mathbb{X}_s$, 51$\mathbb{X}^s$,
51$_{q_0,u_0,\eta_0}\mathbb{X}^s$, 66
$\mathbb{X}^s_{m,N}$, 71$\mathbb{Y}_s$, 51$\mathbb{Y}^s$,
52$\mathbb{W}_s$, 52$\mathbb{E}^s$, 52$\mathbb{F}^s$,
52$T^k_{\mu,r}(U$, E; F),
24$_{\mathrm{s}}T^k_{\mu,r}(U$, E; F),
24 $\hat{}H^s$, 132$_0H^1$,
22$\dot{H}^{-1}$, 22$\mathcal{H}^s$, 125
$\mathcal{H}^0_{(\kappa)}$, 125$\mathbb{X}$, 52$\mathbb{Y}$,
52$\mathbb{E}$, 52$\mathbb{W}$, 52$\mathbb{F}$,
52 H, 53 H, 53
W, 53 H$^{(\kappa)}$, 53
WH$^{(\kappa)}$, 53H^∞, 22
$W^{\infty,\infty}$, 22C^k_b, 22
C^k_0, 22C^∞_b,
22C^∞_0, 22 线性映
射$\mathfrak{E}_U$, 122$\mathcal{E}_0$, 10$\mathcal{E}$,
10$M[\eta]$, 64$\Pi^{\kappa}_{\mathrm{L}}$,
126$\Pi^{\kappa}_{\mathrm{H}}$, 126$L_m$,
71$_{w_0,\gamma_0}A$, 63$_{w_0,\gamma_0}$
$A_{m,N}$, 71$_{w_0,\gamma_0}P$,
63$_{\theta_0}Q$, 69$_{q_0,u_0,\eta_0}$
R , 69$_{\gamma_0}\mathscr{I}$, 72
$_{w_0\gamma_0}\mathscr{J}$, 72$_{w_0\gamma_0}$
$\mathscr{J}^{\tau}_{m,N}$, 72$\mathscr{K}$, 73S_j,
28Δ_j, 28 其他$\langle\cdot\rangle$,
21$\nabla_{\shortparallel}$, 4$[\![N]\!]$, 23
ρ_{WD}, 62 非线性映
射Ψ, 58B_m, 74Ψ,
58Φ, 58$\mathcal{N}_\phi$, 56
$\mathcal{N}^{(1)}_\phi$, 56$\mathcal{N}^{(2)}_\phi$,
56$\mathcal{M}_\phi$, 58$\mathcal{M}^{(1)}_\phi$,
57$e_1\cdot\mathcal{M}^{(2)}_\phi$, 58$\mathfrak{F}_\eta$,
10$\mathcal{A}_\eta$, 10J_η, 10$\mathcal{N}_\eta$,
10M_η, 11$\sigma_{q,\eta}$, 11
v_{w_0}, 64

—

References

[1] R. Abraham、J. E. Marsden 和 T. Ratiu。 *Manifolds tensor analysis and applications* 75 *Applied* , , , 第 *Mathematical Sciences* 1988 卷。Springer-Verlag，纽约，第 2 版，。[2] R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier。 *Sobolev spaces*，第 140 卷，*Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*。Elsevier/Academic Press，阿姆斯特丹，第 2 版，2003年。[3] S. Agmon、A. Douglis 和 L. Nirenberg。满足一般边界条件的椭圆偏微分方程解的边界附近估计。第二部分。 *Comm. Pure Appl. Math.*，17：35–92，1964年。[4] J. F. G. Auchmuty 和 R. Beals。若干非线性自由边界问题的变分解。 *Arch. Rational* , ：–。[5] *Mech. Anal.* 43 255 271, 1971 P. Baldi 和 E. Haus。一个带有应用于偏微分方程控制和柯西问题的 Nash-Moser-H¨ormander 隐函数定理。*J. Funct. Anal.*，273(12)：3875–3900，2017年。[6] Bauer、Sebastian、Neff、Patrizio、Pauly、Dirk 和 Starke、Gerhard。带混合边界条件的不相容方张量场的 dev-div 和 devsym-devcurl 不等式。 *ESAIM: COCV*，22(1)：112–133，2016年。[7] J. T. Beale。孤立水波的存在性。 *Comm. Pure Appl. Math.*，30(4)：373–389，1977年。[8] J. T. Beale。具有自由表面的纳维–斯托克斯方程初值问题。 *Comm. Pure Appl.* , ( )：–。 *Math.* 34 3 359 392, 1981 [9] J. Bergh 和 J. L¨ofstr¨om。 *Interpolation spaces. An introduction*。数学科学基础丛书，第223号。Springer-Verlag，柏林-纽约，1976年。[10] M. Berti、P. Bolle 和 M. Procesi。一个带参数的抽象 Nash-Moser定理及其在偏微分方程中的应用。 *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire* 27(1): 377–399, 2010年。[11] F. Boyer 和 P. Fabrie。 *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models* 183 *Applied Mathematical Sciences* 2013 ，第 卷。 Springer，纽约，。[12] B. Buffoni 和 E. Wahl´en。稳态三维旋转流：通过两个流函数和 Nash-Moser迭代进行研究。*Anal. PDE*，12(5)：1225–1258，2019年。[13] J. Burczak、Y. Shibata 和 W. M. Zaj¸aczkowski。通过能量方法研究平衡态附近可压缩纳维-斯托克斯方程的局部解和整体解。载于 *Handbook of mathematical analysis in mechanics of viscous fluids* 1751 1841 2018 ，第–页。 Springer，查姆，。[14] S. Chandrasekhar。 *An introduction to the study of stellar structure*。Dover Publications, Inc.，纽约，纽约州，1957年。[15] G.-Q. Chen 和 Y.-G. Wang。三维磁流体力学中可压缩电流-涡片的存在性与稳定性。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，187(3)：369–408，2008年。[16] G.-Q. G. Chen、P. Secchi 和 T. Wang。三维闵可夫斯基时空中相对论涡片的非线性稳定性。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，232(2)：591–695，2019年。[17] R. M. Chen、J. Hu、D. Wang、T. Wang 和 D. Yuan。二维弹性动力学中可压缩涡片的非线性稳定性与存在性。 *J. Differential Equations*，269(9)：6899–6940，2020年。[18] Y. Cho、J. D. Diorio、T. R. Akylas 和 J. H. Duncan。深水上共振强迫的重力-毛细孤立波团。第二部分：理论模型。 *J. Math. Fluid Mech.*，672：288–306，2011年。[19] D. Coutand、J. Hole 和 S. Shkoller。具有表面张力的自由边界可压缩三维欧拉方程的适定性及零表面张力极限。 *SIAM J. Math. Anal.*，45(6)：3690–3767，2013年。[20] D. Coutand 和 S. Shkoller。物理真空中移动边界一维可压缩欧拉方程在光滑函数空间中的适定性。*Comm. Pure Appl. Math.*，64(3)：328–366，2011年。[21] D. Coutand 和 S. Shkoller。物理真空中移动边界三维可压缩欧拉方程在光滑函数空间中的适定性。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，206(2)：515–616，2012年。[22] S. Dain。广义Korn不等式与共形Killing向量。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，25 4 535 540，2006 ( )：–。[23] I. V. Denisova。由闭合自由表面分隔的两种可压缩流体的运动问题。 *Zap.* , *Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 243 (Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funktsi˘ı. 28)：61–86，338–339，1997年。[24] I. V. Denisova。由闭合界面分隔的可压缩与不可压缩流体的演化。 *Interfaces Free Bound.* 2 3 283 312, 2000 , ( )：–。

[25] I. V. Denisova。两个可压缩流体演化问题在加权 H¨older 空间中的可解性。*Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*，295(Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funkts. 33)：57–89，244–245，2003年。[26] I. V. Denisova 和 V. A. Solonnikov。平衡态附近可压缩纳维-斯托克斯方程自由边界问题的局部与整体可解性。载于 *Handbook of mathematical analysis in mechanics of viscous fluids*，第1947–2035页。Springer，查姆，2018年。[27] J. D. Diorio、Y. Cho、J. H. Duncan 和 T. R. Akylas。深水上共振强迫的重力-毛细孤立波团。第一部分：实验。 *J. Math. Fluid Mech.*，672：268–287，2011年。

[28] M. M. Disconzi 和 I. Kukavica. 液体情形下带表面张力的三维可压缩自由边界欧拉方程的先验估计. *Evol. Equ. Control Theory*, 8(3):503–542, 2019年. [29] M. M. Disconzi 和 C. Luo. 关于液体情形下带表面张力的可压缩自由边界欧拉方程的不可压缩极限. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 237(2):829–897, 2020年. [30] I. Ekeland. Fr´echet 空间中的反函数定理. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 28 1 91 105, 2011 ( ): – . [31] I. Ekeland 和 E. S ´ ´ *J. Eur.* éré. 带奇 *Math. Soc. (JEMS)* 23 10 3323 3349, 2021
异摄动和导数损失的映射的满射定理. , ( ): – . [32] Y. Enomoto、L. von Below 和 Y. Shibata. 关于可压缩斜压黏性流体流动的若干自由边界问题. *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, 60(1):55–89, 2014年. [33] E. Feireisl. *Dynamics of viscous compressible fluids* 26 *Oxford Lecture Series in Mathematics and its* , 第 卷 . 牛 *Applications* 2004
津大学出版社，牛津，. [34] G. Fichera. *Existence Theorems in Elasticity*, 第347–389页. Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，1973年。[35] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. 数学经典. Springer-Verlag，柏林，2001年。1998年版重印。[36] D. Ginsberg、H. Lindblad 和 C. Luo. 带自由表面边界的可压缩自引力液体运动的局部适定性. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 236(2):603–733, 2020年. [37] M. D. Groves. 定常水波. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 11(4):435–460, 2004年. [38] M. E. Gurtin、E. Fried 和 L. Anand. *The mechanics and thermodynamics of continua*. 剑桥大学出版社，剑桥，2010年. [39] M. Had˘zi´c 和 J. J. Jang. 一类欧拉-泊松系统的整体解. *Comm. Math. Phys.*, 370 2 475 505, 2019 ( ): – . [40] R. S. Hamilton. Nash 和 Moser 的反函数定理. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7 222, 1982 1 65( ): – .[41] S. V. Haziot、V. M. Hur、W. A. Strauss、J. F. Toland、E. Wahl´én、S. Walsh 和 M. H. Wheeler. 行进水波——两个世纪的潮起潮落. *Quart. Appl. Math.*, 80(2):317–401, 2022年. [42] L. H¨ormander. 物理大地测量的边界问题. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 62(1):1–52, 1976年. [43] L. H ¨ 10 255 259, 1985
örmander. 关于纳什-莫泽隐函数定理. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, : – .[44] L. H¨ormander. 纳什-莫泽定理与拟微分算子. 载于 *Analysis, et cetera*, 第429–449页. 学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1990年. [45] Y. Huang 和 T. Luo. 无表面张力的可压缩黏性导热表面波. *J. Math.* , ( ):论文编 *Phys.* 62 6 061501, 30, 2021
号 . [46] H. Inci、T. Kappeler 和 P. Topalov. 关于微分同胚复合的正则性. *Mem. Amer.* , ( ):vi , . *Math. Soc.* 226 1062 +60 2013
[47] J. Jang. 黏性气态恒星动力学的局部适定性. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 195 863, 2010 3 797( ): – .[48] J. Jang 和 T. Makino. 关于欧拉-泊松方程的缓慢旋转轴对称解. *Arch. Ration.* , ( ): – . *Mech. Anal.* 225 2 873 900, 2017
[49] J. Jang 和 N. Masmoudi. 具有物理真空奇异性的可压缩欧拉方程的适定性. *Comm. Pure Appl. Math.*, 62(10):1327–1385, 2009年. [50] J. Jang 和 N. Masmoudi. 物理真空中可压缩欧拉方程的适定性. *Comm. Pure* , ( ): – . *Appl. Math.* 68 1 61 111, 2015
[51] J. Jang、I. Tice 和 Y. Wang. 可压缩黏性表面内波问题：局部适定性. *SIAM J. Math. Anal.*, 48(4):2602–2673, 2016年. [52] J. Jang、I. Tice 和 Y. Wang. 可压缩黏性表面内波问题：稳定性与表面张力消失极限. *Comm. Math. Phys.*, 343(3):1039–1113, 2016年. [53] B. J. Jin. 通过伽辽金方法，运动区域中带自由上表面的黏性可压缩斜压流的存在性. *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, 49:43–71, 2003年. [54] B. J. Jin 和 M. Padula. 在带自由上表面的水平层中. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 1 415, 2002 3 379( ): – .[55] B. J. Jin 和 M. Padula. 刚性容器中带上部自由边界的可压缩流体定常流. *Math.* , ( ): – *Ann.* 329 4 723 770, 2004
. [56] U. Kadri. 重质可压缩流体中的波动：再探 . *Eur. J. Mech. B Fluids*, 49(part A):50–57, 2015 年 . [57] J. Kogane maru 和 I. Tice. 倾斜或周期自由边界不可压缩纳维-斯托克斯方程的行波解. *Preprint, arXiv:2207.07702*, 2022年. [58] P. D. Lax. *Functional analysis*. 纯粹与应用数学（纽约）. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 纽约，2002年。

[59] G. Leoni. *A first course in Sobolev spaces*, *Graduate Studies in Mathematics*第181卷. 美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，第二版，2017年. [60] G. Leoni 和 I. Tice. 自由边界不可压缩纳维-斯托克斯方程的行波解. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2022年. [61] Y. Y. Li. 关于均匀旋转恒星. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 115(4):367–393, 1991年. [62] H. Lindblad. 带自由表面边界的可压缩液体线性化运动的适定性.

Comm. , ( ): – .

Math. Phys. 236 2 281 310, 2003

[63] H. Lindblad. 带自由表面边界的可压缩液体运动的适定性.

Comm. Math. , ( ): – .

Phys. 260 2 319 392, 2005

[64] H. Lindblad. 带自由表面边界的不可压缩液体运动的适定性.

Ann. of , ( ): – .

Math. (2) 162 1 109 194, 2005

[65] H. Lindblad 和 C. Luo. 带自由表面边界的液体可压缩欧拉方程的先验估计及不可压缩极限. *Comm. Pure Appl. Math.*, 71(7):1273–1333, 2018年. [66] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1,* 第

3 *Oxford Lecture Series in Mathematics* 卷，. 克拉

and its Applications 1996

伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，. 不可压缩模型，牛津科学出版物。[67] R. Long 和 J. Morton. 可压缩分层流体中的孤立波. *Tellus*, 18(1):79–85, 1966年. [68] M. S. Longuet-Higgins. 微震起源理论. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 243 35, 1950 1: – .[69] C. Luo 和 J. Zhang. 带涡量的可压缩重力水波运动的局部适定性.

J. , : – . [70]

Differential Equations 332 333 403, 2022

T. Luo、Z. Xin 和 H. Zeng. 三维可压缩欧拉方程物理真空运动的适定性：有无自引力. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 213(3):763–831, 2014年. [71] T. Makino. 关于气态恒星演化方程局部存在定理. 载于 *Patterns and waves*, 第18卷, *Stud. Math. Appl.*, 第459–479页. 北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1986年. [72] T. Makino. 关于由可压缩欧拉方程支配的行星周围大气球对称运动. *Funkcial. Ekvac.*, 58(1):43–85, 2015年. [73] T. Makino. 纳什-莫泽定理在气态恒星真空边界问题中的应用.

J. , ( ): – .

Differential Equations 262 2 803 843, 2017

[74] N. Masnadi 和 J. H. Duncan. 由移动压力源产生跨临界速度重力–毛细孤立波. *J. Fluid Mech.*, 810:448–474, 2017年. [75] A. Matsumura 和 T. Nishida. 可压缩黏性导热流体运动方程的初边值问题. *Comm. Math. Phys.*, 89(4):445–464, 1983年. [76] v. Matuˇsu-Neˇcasov´a、M. Okada 和 T. Makino. 黏性气体球对称运动方程的自由边界问题. II. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12(2):195–203, 1995年. [77] V. G. Maz'ya 和 T. O. Shaposhnikova.

Theory of Sobolev multipliers 337 *Grundlehren der mathe-* , 第 卷 .

matischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 2009

Springer-Verlag，柏林，. 及其在微分算子和积分算子中的应用。[78] R. Miesen、L. Kamp 和 F. Sluijter. 可压缩浅层流体中的长孤立波.

Physics of Fluids A -

Fluid Dynamics 2 3 359 370, 1990 , ( ): –

MAR . [79] R. Miesen、L. Kamp 和 F. Sluijter. 可压缩深层流体中的孤立波.

Physics of fluids A - Fluid

Dynamics 2 8 1404 1411, 1990 , ( ): –

AUG . [80] J. Moser. 快速收敛迭代法与非线性偏微分方程. I.

Ann. Scuola , : – . [81]

Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) 20 265 315, 1966

J. Nash. 黎曼流形的嵌入问题. *Ann. of Math. (2)*, 63:20–63, 1956年. [82] H. Nguyen 和 I. Tice. 单相 muskat 问题的行波解：存在性与稳定性. *Preprint*, *arXiv:2211.06286*, 2022年. [83] A. Novotn

´ *Introduction to the mathematical theory of compressible flow* 27 *Oxford* y 和 I.

Lecture Series in Mathematics and its Applications 2004

Straˇskraba. , 第 卷 . 牛津大学出版社，牛津，. [84] M. Okada 和 T. Makino. 黏性气体球对称运动方程的自由边界问题. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 10(2):219–235, 1993年. [85] B. Park 和 Y. Cho. 对移动抽气装置产生的重力–毛细孤立波的实验观测. *J. Math. Fluid Mech.*, 808:168–188, 2016年. [86] B. Park 和 Y. Cho. 深水中的二维重力–毛细孤立波：生成与横向不稳定性. *J. Math. Fluid Mech.*, 834:92–124, 2018年. [87] K. Pileckas 和 W. M. Zaj.aczkowski. 关于定常可压缩纳维–斯托克斯方程的自由边界问题. *Comm. Math. Phys.*, 129(1):169–204, 1990年. [88] P. Plotnikov 和 J. Soko

´ *Compressible Navier-Stokes equations* 73 *Instytut Matematyczny* lowski. ,

Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series) [Mathematics Institute of the Polish Academy 第 卷

of Sciences. Mathematical Monographs (New Series)]. Birkh¨auser/Springer 巴塞尔股份公司，巴塞尔，2012年。理论与形状优化。[89] P. I. Plotnikov 和 J. F. Toland。驻定水波的 Nash-Moser 理论。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，159 1 1 83，2001年（）：–。[90] J. Schwartz。论 Nash 隐函数定理。 *Comm. Pure Appl. Math.*，13：509–530，1960年。[91] J. T. Schwartz。 *Nonlinear functional analysis*。数学及其应用札记。Gordon and Breach 科学出版社，纽约-伦敦-巴黎，1969年。H. Fattorini、R. Nirenberg 和 H. Porta 的笔记，另附 Hermann Karcher 撰写的一章。[92] P. Secchi 和 A. Valli。可压缩黏性流体的自由边界问题。 *J. Reine Angew. Math.*，341 31，1983年 1：–。[93] F. Sergeraert。某些 Fr´echet 空间上的隐函数定理及若干应用。 *Ann.Sci. École Norm. Sup. (4)*，5：599–660，1972年。[94] Y. Shibata。可压缩斜压黏性流体流动的某些自由边界问题的整体适定性。载于 *Recent advances in partial differential equations and applications*，第666卷， *Contemp. Math.*，第341–356页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2016年。[95] V. A. Solonnikov 和 A. Tani。黏性可压缩斜压液体运动方程的演化自由边界问题。载于 *The Navier-Stokes equations II—theory and numerical methods (Oberwolfach, 1991)*，第1530卷，*Lecture Notes in Math.*，第30–55页。Springer，柏林，1992年。[96] E. M. Stein。*Singular integrals and differentiability properties of functions*。普林斯顿数学丛书，第30号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年。[97] N. Stevenson 和 I. Tice。多层自由边界不可压缩纳维-斯托克斯方程的行波解。*SIAM J. Math. Anal.*，53(6)：6370–6423，2021年。[98] W. A. Strauss。定常水波。 *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*，47(4)：671–694，2010年。[99] W. A. Strauss 和 Y. Wu。快速旋转恒星。 *Comm. Math. Phys.*，368(2)：701–721，2019年。[100] N. Tanaka 和 A. Tani。可压缩黏性流体的表面波。 *J. Math. Fluid Mech.*，5(4)：303–363，2003年。[101] J. F. Toland。Stokes 波。 *Topol. Methods Nonlinear Anal.*，7(1)：1–48，1996年。[102] Y. Trakhinin。具有真空边界条件的非相对论与相对论可压缩欧拉方程自由边界问题的局部存在性。 *Comm. Pure Appl. Math.*，62(11)：1551–1594，2009年。[103] Y. Trakhinin 和 T. Wang。具有表面张力的自由边界理想可压缩磁流体力学方程的适定性。*Math. Ann.*，383(1-2)：761–808，2022年。[104] J. V. Wehausen 和 E. V. Laitone。 *Surface waves*。《物理学手册》，第9卷，第3部分。Springer-Verlag，柏林，1960年。

Department of Mathematics Princeton University Princeton NJ 08544 USA , , , , , N.
Email address
Stevenson: stevenson@princeton.edu

Department of Mathematical Sciences Carnegie Mellon University Pittsburgh PA 15213 USA , , , , , I. Tice:
Email address
iantice@andrew.cmu.edu