arXiv:2301.00780v2 [math-ph] 4 Dec 2023

# 湍流级联与分数阶场的线性随机模型

GABRIEL B. APOLIN´ARIO、Geoffrey Beck、Laurent Chevillard、Isabelle Gallagher 和 Ricardo Grande

Abstract. 湍流级联描述了随机力在大尺度注入的能量向小尺度传递的过程。在流体湍流中，当雷诺数较大时，流体的速度场会变得不规则，即使流体黏度趋于零，能量耗散率仍有正的下界。自柯尔莫哥洛夫对流体湍流以及扎哈罗夫对波湍流开展开创性研究以来，湍流级联的数学描述一直是非常活跃的研究课题。在这两种情形下，湍流级联机制都会使功率谱密度等若干统计量呈现幂律行为。长期以来，人们认为这些级联与非线性相互作用有关，但近期研究表明，受零阶伪微分算子支配的动力学也能产生这种现象。受此启发，我们构造了一个线性方程：当外力为统计齐次平稳随机过程时，该方程能够模拟能量级联的现象。在傅里叶变量下，这个方程可视为线性输运方程；它在物理空间中对应一个零阶算子。我们的结果完整刻画了解：解在任意有限时间内都光滑，并且在无穷时间极限下，除去低阶修正项后，收敛于一个分数阶高斯场。

## 1. Introduction

**1.1. 背景与动机。** 本研究主要受到三维均匀各向同性流体湍流现象学若干重要方面的启发 [35, 42, 20], ；在各种弱相互作用情形下，波也呈现出其中若干方面，并且这些方面已得到观察和形式化 [43]。正如在地球物理和实验室流动以及不可压缩纳维–斯托克斯方程的数值模拟中反复观察到的那样，受统计平稳随机力 $f(t,\ x)$驱动的流体（假设该随机力在空间上光滑）最终会达到统计平稳态，此时速度方差有限。为了如此高效地耗散持续注入系统的全部能量，该流体的速度场会形成复杂的多尺度结构，并产生很大的速度梯度，使得黏度能够轻易地将机械能转化为热。换言之，流体将外力在大尺度注入的能量传递至小尺度，在那里黏性扩散能高效发挥作用。这种图景称为能量级联过程。

本文旨在将这种能量沿不同尺度级联传递的现象建模并再现出来。我们提出一个偏微分方程，它当然比非线性纳维–斯托克斯方程简单得多，并受到加性随机力 $f(t,x)$ 的随机驱动。我们假设该随机力在空间上光滑，并在一个典型的大尺度长度上具有相关性（湍流文献中称为积分尺度）；随着时间推移，该方程的解会逐渐变得粗糙。更确切地说，我们的目标是通过动力演化，以光滑的外力生成粗糙的分数阶高斯 H¨older 连续随机场，其参数为 $H$ （例如参见教科书 [16]）；这一过程可视为对柯尔莫哥洛夫 [25] 主要发展的现象学的一种简单随机表述。

如前所述，三维湍流运动的一个显著特征是，它能够有效耗散以统计平稳且均匀的方式注入大尺度的能量。更确切地说，考虑不可压缩纳维–斯托克斯方程的一个解，即一个满足周期边界条件的无散速度场 $u(t,x) \in \mathbb{R}^3$。该动力学由无散向量强迫项 $f(t,x)$ 驱动；我们假设该强迫项在时间上为 $\delta$ 相关、在空间上光滑，例如取零均值高斯形式，其协方差为

$$\mathbb{E}\left[f(t,x) \otimes f(s,y)\right] = \delta_{t-s} C_f(x-y),$$

其中 $\otimes$ 表示矩阵乘积，而矩阵 $C_f(x)$由矩阵 $x \otimes x$ 与单位矩阵的线性组合构成，其乘法系数仅取决于 $|x|$；也就是说，它是统计齐次且各向同性向量场 [6, 36]的典型协方差矩阵。此外，我们要求这些关于 $|x|$ 的标量函数光滑且具有紧支撑，其范围尺度与前述大尺度相当，以此模拟在所谓积分长度尺度上的能量注入。随着时间推移，人们反复观察到，速度场$u$ 会达到一个统计平稳态，而且该状态统计齐次、具有有限方差，并具有一个显著特性：当 $\nu$ 趋于零时，它变得与黏度 $\nu$无关，即

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[|u(t,x)|^2\right] < +\infty \quad \text{for all } x. \tag{1.1}$$

速度方差的上述渐近行为清楚地说明了湍流流体如何以高效率耗散能量。例如，在相同设置下，但将纳维–斯托克斯方程替换为热方程，也会在 $t \to \infty$ 达到统计平稳状态。然而，此时解的方差与黏度 $\nu$ 成反比，见 [14]。相反，湍流运动以一种最终使速度方差独立于黏度的方式耗散能量，这是一种高效得多的能量耗散方式。为了确保上述方差不依赖于黏度，即满足（1.1），流体在小尺度上呈现出 H¨older 型的粗糙行为，使得速度增量的方差渐近地表现如下：

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[|u(t,x+\ell) - u(t,x)|^2\right] \underset{|\ell| \to 0}{\propto} |\ell|^{2H} \quad \text{for all } x, \tag{1.2}$$

其中，幂律指数由柯尔莫哥洛夫预测 $H \approx 1/3$ [20]确定。除了方差（1.2）之外，还可以对增量的分布进行更精确的刻画，例如通过其高阶矩来量化其非高斯、偏斜和间歇特性 [20]。在本文中，我们将专注于对这些涨落进行二阶建模，即（1.1）和（1.2）；更细致的描述留待未来研究。

级联现象的第一个精确形式化，可以通过对速度场分解的系数施加特定的动力学关系来构建，例如连续小波变换，或在一棵树上进行离散（二进）分解 [18]。相关研究已在文献中展开 [5, 4, 13]，并对 H¨older 正则性及其与系数标度行为之间的关系作出了精确论述。尽管人们在理解此类模型及其形式化方面已取得长足进展，而这类形式化通常利用相邻系数之间典型的二次相互作用，但这些方法往往回避了一个重要问题，即这些系数在空间中的关系。这一点对于设计出能够产生统计齐次速度场的模型是必要的，因为自然界和数值模拟中都观察到了这种速度场。尽管如此，这些模型仍可被视为所谓壳层模型[1]的精细化。在这一思路下，我们认为 [33], 是迈出的重要一步，其中作者研究了一种简单的线性

[1]例如参见 [10, 9] ，其做法是沿树分解的单个分支探索壳层之间的二次相互作用。这些相互作用与速度傅里叶模态和小波系数具有某些相似行为，但因此缺少对系数之间空间关系的讨论。

壳层之间的关系，并证明这种关系能够将能量从大尺度传递到小尺度。还需提及 [31] ，其中提出了一些从这些壳层模型构建偏微分方程的思路。

从流体力学中一个略有不同的角度来看，更关注整体旋转 [40, 39] 或密度场分层 [30, 41] 对流动的影响，人们已经发现了波聚焦到吸引子这一现象，其精确形状由边界决定。基于流体方程的线性化，这一现象被解释为一种跨尺度级联过程。随后，一系列近期文章 [17, 19], 从数学角度对这些观点进行了形式化并严格研究，凸显了零次齐次算子作为一种确定性机制的重要性；这种机制能够跨尺度传递能量。

**1.2. 主要结果**。湍流速度场 $u(t,\ x)$ 的粗糙、无序特性已在实验室和数值流动中反复观察到，也见于地球物理情形 [42, 20]。以这一信号为基础，例如将速度矢量场的一个分量视为空间的函数，可以根据实验条件和流动的大尺度几何结构构建能谱 $|k| \mapsto \mathbb{E}|\widehat{u}(t,\ k)|^2$ 其中 $\widehat{u}$ 表示空间傅里叶变换。根据流体湍流的标准现象学理论（该理论已在多种迥异情形下得到观测的反复证实），能谱类似于一条曲线 [42, 20] ，可示意性地分解如下：

- （注入区间）对于较小的 $|k|$ ，其量级与能量注入的特征波长相当，能谱主要由外力及流动的大尺度几何结构决定，
- （惯性区间）对于中等 $|k|$，能谱呈现幂律行为，其指数具有普适性，即与黏度和流动的性质无关；这一现象可解释为：流体的内部运动将能量从小波数传递到大波数，从而产生小尺度，
- （耗散区间）对于较大的 $|k|$，能谱受耗散过程支配，这些过程会有效地耗散所有来自大尺度的能量，使空间速度剖面变得光滑。

在湍流文献中称为惯性区间的中间尺度范围 [42, 20]„ 正是这种能量输运机制发生的区域。普遍观测到的能谱幂律指数可写为 $-(2H+d)$，即 $\mathbb{E}|\widehat{u}(t,\ k)|^2 \sim |k|^{-(2H+d)}$。为使表述具有一般性，我们引入了空间维数 $d$，以及参数 $H$；从统计平均的意义上说，该参数最终将被解释为赫斯特指数，或 H¨older 指数。在实际情形中，对于 $d=3$，确实观测到 $H \approx 1/3$，这与主要归因于柯尔莫哥洛夫 [25, 28]的量纲分析预测一致。

本文的主要目标是提出一族偏微分方程，使得当其受到统计平稳、空间均匀且空间光滑的强迫项作用时，其解 $u(t,\ x)$ 在长时间后达到一种统计平稳态，并呈现出上述典型的谱行为。我们将通过以下傅里叶空间中的输运方程来实现这一目标：

$$
\begin{cases}
\partial_t \widehat{u}(t,k) + \operatorname{div}_k\left(\frac{ck}{|k|}\,\widehat{u}(t,k)\right) + c\dfrac{H+\frac{1}{2}}{|k|}\,\widehat{u}(t,k) = \widehat{f}(t,k) & t>0, k\in\mathbb{R}^d, |k|>\kappa>0,\\
\widehat{u}(t,k) = 0 & t>0, k\in\mathbb{R}^d, |k|\le\kappa,\\
\widehat{u}(0,k) = 0.
\end{cases} \tag{1.3}
$$

这里，$c,\ \kappa>0$ 和 $H\in\mathbb{R}$ 均为固定值，且源 $f$ 满足

$$\mathbb{E}[f(t,x)f(s,y)] = \delta_{t-s}\,C_f(x-y),$$

其中 $C_f$ 光滑，并满足下文详述的一些附加假设。我们的主要结果如下：

**定理 1.1**。 设 $H \in (0,1)$，且外力 $f$ 为

$$f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d_y} \varphi(x-y)\, dW(t,y), \tag{1.4}$$

其中 $dW$ 是时空高斯实白噪声， $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ 是径向函数，使得 $\widehat{\varphi}(k) = 0$ 对所有 $|k| < \kappa$ 均成立。

*(i)* 波数空间中的输运方程 (1.3) 及其源 (1.4)，可以在物理空间中严格表述为一个几乎必然适定的偏微分方程。此外，对任意 $t > 0$，解 $u(t,x)$具有有限方差，且关于 $x$ 几乎必然具有光滑样本路径。

*(ii)* 当 $t \to \infty$ 时， $u(t,x)$ 依分布收敛于零均值高斯场 $u_\infty(x)$，该场几乎必然具有 $\alpha$-*H¨older* 连续样本路径，对任意 $0 < \alpha < H$ 均成立。

（*iii*）相关函数由下式给出

$$\mathbb{E}[u_\infty(x_1)u_\infty(x_2)] = C(d,H)\,\mathcal{K}_H(x_1-x_2) - (\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)(x_1-x_2),$$

其中

$$\mathcal{K}_H := \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{|k|>\kappa}|k|^{-(2H+d)}\right],$$

而 $C$（$d$， $H$）是一个显式常数，函数 $\mathcal{J}_H \in \mathcal{S}$（$\mathbb{R}^d_x$）显式依赖于 $\varphi$中的 （1.4）。

该结果的更详细版本见第 23 页的定理 4.4。

**注 1.2**。 参数 $\kappa$ 可以取为外力的傅里叶变换支撑集中的最小非零波数。按照引言中所述与纳维–斯托克斯方程的类比， $\kappa$ 可以理解为一个与积分尺度[2], 的倒数相关的量，即外力相关函数的典型尺度。我们的外力作用于较大但有限的尺度这一事实意味着， $\kappa$ 很小但非零。核 $\mathcal{K}_H$ 在 $H \in$（0，1）且 $\kappa > 0$ 时是一个函数。然而，当 $\kappa = 0$ 时，我们有如下算子：

$$\mathcal{K}_H \underset{\kappa\to 0}{\longrightarrow} (-\Delta)^{-\left(H+\frac{d}{2}\right)}.$$

**注 1.3**。 注意，极限高斯场 $u_\infty$ 与统计齐次分数高斯场 [16, 29] 具有某些相同的统计性质，例如粗糙性，后者定义为

$$(-\Delta)^{-\frac{H+\frac{d}{2}}{2}} dW,$$

这些是在湍流文献中经典遇到的情形 [26, 12, 15]。事实上，对于 $H \in (0,1)$ 二者几乎必然具有 $\alpha$-*H¨older* 连续路径，对任意 $0 < \alpha < H$ 均成立，并且可以证明

$$u_\infty \underset{(in\ law)}{=} C(d,H)\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{|k|>\kappa}\right] * (-\Delta)^{-\frac{H+\frac{d}{2}}{2}} dW - u_{\mathrm{reg}}. \tag{1.5}$$

此处，$u_{\mathrm{reg}}$ 是一个光滑零均值高斯场，其相关函数为

$$\mathbb{E}[u_{\mathrm{reg}}(x_1)u_{\mathrm{reg}}(x_2)] = (\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)(x_1-x_2),$$

即使 $H \le 0$，它也是关于 $(x_1-x_2)$ 的光滑函数。 $H \in [-d/2, 0]$ 的情形将在第*4*节讨论。

[2]如果 $L_f$ 是积分尺度，那么存在两个正实数 $a < b$，使得 $\widehat{f}$的支撑集包含于内半径为 $\frac{a}{L_f}$、外半径为 $\frac{b}{L_f}$的环域中。因此可以设 $\kappa = \frac{a}{L_f}$.

**注1.4**。 当 $H \in [-d/2, 0]$ 时，随着 $t \to \infty$， $u(t)$ 仍收敛于一个零均值高斯场$u_\infty$，但该场不一定仍关于 $x$ 满足 ***H¨older*** 连续性。在这种情况下，可以将 $u_\infty$ 视为定义在适当测试函数空间 $\mathcal{T}$的对偶空间上的一个分布，更多细节参见定理 ***4.5***。极限高斯测度的相关结构为：

$$\mathbb{E}[\langle u_\infty, g_1\rangle\langle u_\infty, g_2\rangle] = \int_{\mathbb{R}^d_k} \chi_{|k|>\kappa}\, |k|^{-(2H+d)} \left(C(d,H) - \widehat{\mathcal{J}}_H(k)\right) \widehat{g_1}(k)\, \overline{\widehat{g_2}(k)}\, dk \tag{1.6}$$

对任意测试函数 $g_1, g_2 \in \mathcal{T}$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathcal{T}$中的对偶配对。在定理 ***4.5*** 中，我们证明，对于 $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^x_d)$中的任意测试函数，$(1.6)$ 给出的收敛速率与$(ct)^{-(2H+d+2n)}$ 成正比，其中 $n$ 可以任意大。表达式$(1.6)$ 对应于上文描述的能谱图景。事实上， $|k|^{-(2H+d)}$ 恰好对应于前面描述的惯性区间，而 $\mathcal{J}_H(k)$ 则体现了外力的贡献，这是注入区间中的一种修正。实际上，若源的谱支撑集位于较小的波数范围内，则 $\mathcal{J}_H(k)$在惯性区间内消失。

最后，我们来强调解在有限时间和无限时间下的性质差异。在有限时间下，解关于 $x$是光滑的；而在无限时间下，解至多是 H¨older 连续的（如果 $H \leq 0$，甚至会更粗糙，详见注**1.4**）。这种无限时间下的正则性丧失正是线性湍流中预期会出现的现象。湍流通常与非线性方程相关。例如，在波湍流的情形中，非线性会产生波相互作用，从而使能量向越来越大的波数传递。这类能量传递通常会导致正则性丧失。然而，非线性或许并非导致正则性丧失的唯一途径。事实上，Y. Colin de Verdi`ere 和 L. Saint-Raymond [17]证明，在内波背景下，即使是含有零次齐次算子的线性方程，也可能发生正则性丧失。只要在双曲系统中引入色散扰动，含零次齐次算子的线性方程也很常见。在这类情形中，这些零次齐次算子用于模拟强色散效应下的波传播，并会产生记忆效应。例如，在波能量背景下，第二作者和 D. Lannes 表明，移动浮体产生的波在线性状态下由一个零次齐次的非局部输运方程所支配，见 [8]。在电路领域，某些情况下，沿同轴电缆传播的电磁波的一维模型由零次齐次算子所支配，例如见 [7, 第 5]章。

我们模型的一个问题是，它只有一个 H¨older 指数。具体湍流流体的速度场包含许多 H¨older 指数，也就是说，速度场 $u(t,\ x)$ 的 H¨older 正则性 $x \in \mathbb{R}^d$ 取决于点本身。这被称为多重分形形式体系 [14, 16]。多重分形一词指的是，具有相同正则性的点集往往是分形的。此外，我们的模型无法捕捉速度场增量分布的更精细描述（超出方差的描述）。这些描述应当量化其非高斯性和间歇性 [15], ，因此我们的线性模型并不足够。已知可以利用高斯乘性混沌理论 [38], 构造多重分形且间歇的场；然而，我们真正的目标是动态地获得多重分形且间歇的场，即将其作为一个由时间白噪声驱动的非线性方程的解，同时又能进行严谨的数学处理。我们还可以考虑时间相关函数由振荡函数给出的非时间白噪声外力，以便与 [17, 21, 1] 和 [11]进行比较。最后，我们可以研究其他级联线性模型，例如 [32]中所述的紧算子加上零次齐次势的情形。这些问题将在未来的论文中探讨。

1.3. **概要**。本文组织如下。第2节中，我们介绍一个简单的输运方程，它收敛到复白噪声（相差低阶项）。对该模型稍作调整，即可构造出产生实白噪声的模型。第3节中，我们说明如何将后一模型推广到高维，并给出本文主要结果的启发式证明。第4节中，我们对模型进行严格的数学研究：引入恰当的函数空间框架，建立整体适定性理论，并完整描述解的渐近行为及其性质。这构成了定理 1.1 的证明。最后，第5节中，我们提出一种数值方法，并在维数为 1、2 和 3 的情形下进行数值模拟，以验证我们的模型。

1.4. **致谢**。 我们感谢 Oliver B¨uhler 提出的有趣建议：在 (2.1) 中用 $\mathrm{sign}(k)\partial_k$ 替换纯输运项 $\partial_k$，以纠正解在物理上不理想的行为。我们感谢 Charles-Edouard Br´ehier 和审稿人认真阅读了本文前一版本并提出修改意见。五位作者均获西蒙斯波湍流合作基金资助，西蒙斯奖编号：651475和651675。

1.5. **记号**。 对于可积函数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$，我们用 $\widehat{f}$ 表示其**傅里叶变换**，即

$$\forall k\in\mathbb{R}^d_k,\qquad \widehat{f}(k):=\mathcal{F}f(k):=\int_{\mathbb{R}^d_x}e^{-2\pi ix\cdot k}\,f(x)\,dx.$$

在有定义时，傅里叶逆变换为

$$\forall x\in\mathbb{R}^d_x,\qquad f(x)=\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^d_k}e^{2\pi ix\cdot k}\,\widehat{f}(k)\,dk.$$

众所周知，傅里叶变换是从 $L^2(\mathbb{R}^d_x)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^d_k)$、从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_k)$ 的等距映射，其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ 表示**施瓦茨函数** 空间（即导数快速衰减的光滑函数空间）；傅里叶变换也是从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_x)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_k)$ 的等距映射，其中 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_x)$ 表示缓增分布空间（即 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ 的对偶空间）。我们用 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示 $\mathcal{S}'$ 与 $\mathcal{S}$ 之间的对偶配对。

我们还需要一些空间，以更精确地量化函数的正则性。对于固定整数 $n$，$n$ 阶**索o6列夫空间** 定义为

$$H^n(\mathbb{R}^d):=\{u\in L^2(\mathbb{R}^d)\,|\,\partial^j_{x_i}u\in L^2(\mathbb{R}^d)\ \text{ with } 1\le i\le d\ \text{ and } 0\le j\le n\},$$

其对偶空间记为 $H^{-n}(\mathbb{R}^d)$。我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-n},H^n}$ 表示 $H^n$ 与 $H^{-n}$之间的对偶配对。对于 $\alpha\in(0,1)$，**H¨older 空间** $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$定义为

$$C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d):=\{u\text{ continuous and bounded}\,|\,\exists C>0,\forall x,\ell\in\mathbb{R}^d,|\ell|\le1,|\delta_\ell u(x)|\le C|\ell|^\alpha\},$$

其中 $\delta_\ell$ 表示如下定义的**增量**

$$\delta_\ell u(x):=u(x+\ell)-u(x)\quad\text{for } x,\ell\in\mathbb{R}^d.$$

我们用 $\chi_A$ 表示集合 $A$的**特征函数**[3] 。

设 $(\Omega,\sigma(\Omega),\mathbb{P})$ 是一个概率空间。高斯场 $u:\mathbb{R}^d\to L^2(\Omega)$ 是一种场，对于所有 $n\ge1$ 以及所有 $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^d)^n$，随机向量 $(u(x_1)\ u(x_2)\dots,\ u(x_n))$ 都是高斯随机向量。当 $d=1$ 时，一维高斯场通常称为高斯过程。作用于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 的高斯随机测度 $\mu$ 是一个随机缓增分布，并且对于每个 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，随机变量 $\langle\mu,\ g\rangle$ 都服从中心高斯分布。白噪声

[3]这意味着，如果满足 $k\in A$，则 $\chi_A(k)=1$；如果满足 $k\notin A$，则 $\chi_A(k)=0$。

$dW(x)$ 是作用于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的高斯随机测度，对于任意函数$f$，$g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，它满足以下性质

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dW(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dW(x)\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx.$$

由于我们总是将确定性函数与 $dW(x)$ 积分，因此 Itˆo 积分与 Stratonovich 积分之间的选择并不重要，因为维纳积分已足够（例如参见 [22]）。

## 2. One-dimensional transport in wavenumber space

**2.1. 构造一维白噪声：实数与复数**。为了模拟能量从大尺度向小尺度的输运，[3, 2] 中的作者提出了一个简单的傅里叶空间输运方程。为介绍这些思想，我们首先考虑速度场 $u(t, x)$ 的一维模型，其空间傅里叶变换旨在满足线性演化方程

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t,k) + c\,\partial_k \widehat{u}(t,k) = \widehat{f}(t,k), \quad (t,k) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ \widehat{u}(t,k)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

这里 $c > 0$ 是固定的，可视为波数空间中的输运率。在 (2.1) 的右$\widehat{}$侧，我们加入了一个加性项 $f$，它是空间强迫$\widehat{}$项的傅里叶变换。$f$ 的支撑集局限于小波数范围，这与物理空间中的强迫项作用于大尺度的假设一致。

正如我们所见，式 (2.1) 中提出的动力演化是一个真正的输运方程，只有外力的存在才使它变成非齐次方程。采用这样的设定，立即意味着物理空间中的速度场具有复数性质；形式上对式 (2.1) 作傅里叶逆变换并得到以下物理空间中的演化方程时，这一点便显而易见：

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - 2\pi i c x\, u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(t,x)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

注意，式 (2.2) 中的算子对应于乘以空间变量 $2\pi i c x$。在 [3]，中，文中证明，当外力 $f$ 在时间上为白噪声、在空间上统计齐次时，式 (2.2) 的解 $u$：$(0, \infty)_t \times \mathbb{R}_x \longrightarrow \mathbb{C}$，会在 [4] 收敛到空间中的复数白噪声。换言之，所提出的演化在傅里叶空间中表现为输运方程 (2.1)，在物理空间中则表现为包含零阶算子（乘以 $-2\pi i c x$）的方程 (2.2)，能够在不同尺度之间传递能量。此外，解在任意时刻都是统计齐次的，并且随着时间推移，其正则性会逐渐呈现白噪声的特征（严格来说，是在 $t = \infty$ 处正则性骤降）。为了完成湍流现象学所提出的方案，再加入分数阶算子的线性作用，便可在类似的设定下生成渐近正则性为参数 $H \in$ 的 H¨尔德型解 (0，1)，而非具有白噪声正则性的解，详见 [3]。

如果外力在负波长处引入了一些能量 $k < 0$，输运方程 (2.1) 会将其移动到更小的负波数，经过 $k = 0$，然后到达无限大的正波数 $k \to \infty$。为了避免这种病态行为，可以将 $\partial_k$ 替换为 $\partial_{|k|} =$sign$(k)\partial_k$，这样输运方向就会变为 $|k|$，而不是 $k$。不过请注意，sign$(k)\partial_k$ 在 $k = 0$处没有明确定义，因此提出一个适定数学问题时需要谨慎。基于此，本文的核心

[4]忽略低阶项，完整的渐近展开请参见定理 2.4。

将是对以下形式演化方程进行理论和数值研究：

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t,k) + c\,\partial_{|k|}\widehat{u}(t,k) = \widehat{f}(t,k), \quad (t,k) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ \widehat{u}(t,k)|_{t=0} = 0, \\ \widehat{u}(t,k)|_{|k|=0} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

注意，在负波数与正波数之间引入传输条件是必要的。在 (2.3) 中，我们决定加入边界条件 $\widehat{u}(t,k)|_{|k|=0} = 0$，以将负波数与正波数解耦，从而使能量不会穿过 $k=0$。特别是，这意味着 $u$ 在空间上的积分在所有时刻都为零。在物理空间中形式上应用傅里叶逆变换后，(2.3) 中提出的这一新动力学可写为：

$$\begin{cases} \partial_t u + 2\pi c\, x\mathcal{H}(u) = f, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}_x} u\,dx = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中，$\mathcal{H}$ 表示按通常方式定义的希尔伯特变换：

$$\mathcal{H}f(x) := \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}_y}\frac{f(y)}{x-y}\,dy = -\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\,dy. \tag{2.5}$$

注意，我们利用了 $u(t,x)$ 在空间上的积分为零这一事实，得到了 (2.4) 的表达式。还请注意，尽管谱演化 (2.1) 和 (2.3)（其在物理空间中的等价表达式分别见 (2.2) 和 (2.4)）看起来非常相似，但新动力学 (2.4) 的解现在是实值的。等价地，傅里叶空间中的动力学 (2.3) 保持适当初始条件的厄米对称性，此处假设该初始条件为零。此外，可以证明，(2.4) 的解 $u : (0,\infty)_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ 渐近收敛为空间中的实白噪声。正如我们将在下文中解释的那样，分数阶算子的额外线性作用将使得光滑外力能够生成实分数阶高斯场。

最后，人们很容易想到，通过将 $\partial_{|k|}$ 替换为 $\frac{k}{|k|}\cdot\nabla_k$，把 (2.3) 推广到高维。正如我们将在第4节中展开的那样，这最终会生成一个统计齐次且各向同性的解，它将收敛到一个实 $d$维高斯随机测度；只要 $d>1$，该测度在空间上就比白噪声更粗糙。正如我们将在下文解释的那样，分数阶算子的额外线性作用将使我们能够生成一个实 $d$维高斯随机测度，并具有所需的 H¨lder 正则性。有趣的是，如何将 (2.1) 推广到空间维数为 $d \geq 1$，从而在物理空间中生成类似的统计齐次且各向同性的解，并不显而易见。本节末尾将对此问题作进一步讨论。

不过，目前我们着重于深入理解一维情形。对于 (2.4)，有如下结果：

**定理 2.1**。设(2.4) 中的外力 $f$ 为

$$f(t,x) = \int_{\mathbb{R}_y}\varphi(x-y)\,dW(t,y), \tag{2.6}$$

其中 $dW$ 是时空高斯实白噪声，且 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是一个非负、非恒等为零的偶函数，且其均值为零。于是：

*(i)* 方程 (2.4) 存在一个全局（关于时间的）解 $u(t,x)$，它是一个高斯过程，在 $x$ 中几乎处处具有光滑样本路径，并且在 $t$ 中对任意 $0<\alpha<1/2$ 都具有 $\alpha$-*H¨older* 连续的样本路径。

*(ii)* 当 $t \to \infty$ 时，解 $u(t)$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 中收敛到一个作用于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的零均值随机高斯测度 $u_\infty$，即对每个 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，$\langle u(t)\ g\rangle$ 依分布收敛于一个复高斯随机变量 $\langle u_\infty, g\rangle$，其具有 $\mathbb{E}[\langle u_\infty, g\rangle] = 0$。

（*iii*）我们具有以下渐近行为：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle u_\infty, g_1\rangle\langle u_\infty, g_2\rangle] &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\langle u(t), g_1\rangle\langle u(t), g_2\rangle] \\ &= C\int_{\mathbb{R}_x} g_1(x)\, g_2(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y} \mathcal{I}(x-y)\, g_1(x)\, g_2(y)\, dx\, dy.\end{aligned} \tag{2.7}$$

对于任意 $g_1$、$g_2 \in \mathcal{S}$（$\mathbb{R}$）。其中，$C > 0$ 是一个常数，而 $\mathcal{I}$ 是一个取决于 <|*OPENAI*|*a3b6f44346df403192ca726a1b8374ed*|*MATH*|>（*2.6*）中的 $\varphi$ 的显式连续偶函数。

该结果的更详细版本见定理 4.5，另请参见第 4.4 节。注意，（2.7）右端的第一项对应于狄拉克 δ 函数，而由 $\mathcal{I}$ 给出的第二项是一个光滑的低阶项。

**注 2.2**。在（2.6）中引入的外力确实是时间上的高斯白噪声，并且在空间上统计均匀，即

$$\mathbb{E}[f(s,x)f(t,y)] = C_f(x-y)\,\delta_{s-t}\,, \tag{2.8}$$

其中，空间相关函数 $C_f = \varphi * \varphi$ 是一个卷积。鉴于 $\varphi \in \mathcal{S}$（$\mathbb{R}$），$C_f \in \mathcal{S}$（$\mathbb{R}$）。式（2.7）中的常数 $C$ 恰好是

$$C = \frac{C_f(0)}{2c} = \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}_x} |\varphi(x)|^2\, dx > 0.$$

**注 2.3.** 随机偏微分方程 (2.4) 的解是一个显式的高斯 *Itˆo* 过程。第*4*节将给出一个精确公式。尽管该解在时间和空间上连续，但在 $t = +\infty$ 处可能会失去正则性，这就是为什么需要将(2.7)左边的 $u_\infty$ 视为分布。

本定理的证明推迟到下一节，届时将讨论一个更一般的情形，即多维白噪声。在介绍证明定理 2.1 所需的技巧之前，理解复数情形下 (2.2) 的解的渐近行为很重要；这种情形技术上较简单，但很有启发性。

在这种情形下，我们有如下结果：

**定理 2.4.** 设 *(2.2)* 中的外力 $f$ 为

$$f(t,x) = \int_{\mathbb{R}_y} \varphi(x-y)\, dW(t,y), \tag{2.9}$$

其中 $dW$ 是时空复高斯白噪声，而 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是一个非恒零的偶复函数。于是：

*(i)* 方程(2.2) 存在一个全局（时间上）的解 $u(t,x)$，它是一个高斯过程，其路径几乎必然在时间和空间上连续。

*(ii)* 当 $t \to \infty$ 时，解 $u(t)$（在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 中）收敛到一个作用于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上的随机高斯测度 $u_\infty$；也就是说，对每个 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，$\langle u(t)\ g\rangle$ 依分布收敛到 $\langle u_\infty,\ g\rangle$ 其中 $u_\infty$ 是一个具有 $\mathbb{E}[\langle u_\infty, g\rangle] = 0$ 的随机高斯测度。

*(iii)* 我们有以下渐近行为（在分布的意义下）。对于任意 $g_1$， $g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle u_\infty, g_1\rangle\overline{\langle u_\infty, g_2\rangle}] &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\langle u(t), g_1\rangle\overline{\langle u(t), g_2\rangle}] \\ &= \frac{1}{2c}\, C_f(0) \int_{\mathbb{R}_z} g_1(z) g_2(z) dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i c}\, p.v. \int_{\mathbb{R}_z} \frac{C_f(z)}{z} \left( \int_{\mathbb{R}_y} g_1(z+y) g_2(y) dy \right) dz\ .\end{aligned} \tag{2.10}$$

函数 $C_f = \varphi * \varphi$ 是由下式给出的空间相关函数

$$\mathbb{E}[f(s,x)\overline{f(t,y)}] = \delta_{s-t}\, C_f(x-y), \tag{2.11}$$

并且 ***p.v.*** $^{C_f\ (z)\ z}$ 是分布 $C_f$（$z$）$/z$ 的柯西主值。也就是说，对于任意测试函数$g \in \mathcal{S}$（$\mathbb{R}$），

$$\left\langle p.v. \frac{C_f(z)}{z}, g \right\rangle := p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{C_f(z) g(z)}{z}\, dz = \int_0^\infty C_f(z)\, \frac{g(z) - g(-z)}{z}\, dz. \tag{2.12}$$

正如我们在注 2.2 中提到的，式 (2.9) 中的外力在时间上是复高斯白噪声，在空间上是统计齐次的。此外，该解具有显式表达式：

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_y} e^{2\pi i c x (t-s)}\, \varphi(x-y)\, dW(s,y). \tag{2.13}$$

注 2.3 中的相同论述在此情形下同样适用。

**注 2.5**。 当用具有有限阶导数的函数进行测试时，渐近展开 (2.10) 仍然成立。事实上，式 (2.10) 中的 $u_\infty$ 也可以解释为 $H^{-n}$（$\mathbb{R}$）上的高斯随机测度，其中 $n \geq 2$ 为任意整数。更准确地说，我们将证明，对于任意测试函数$g_1$、 $g_2 \in H^n$（$\mathbb{R}$），有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle u(t), g_1\rangle_{H^{-n},H^n}\overline{\langle u(t), g_2\rangle_{H^{-n},H^n}}] &\underset{t\to\infty}{\sim} \frac{C_f(0)}{2c} \int_{\mathbb{R}} g_1(z) g_2(z)\, dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i c}\, p.v. \int_{\mathbb{R}_z} \frac{C_f(z)}{z} \left( \int_{\mathbb{R}_y} g_1(z+y) g_2(y) dy \right) dz \\ &+ \mathrm{d}(n)\ \|g_1\|_{H^n}\ \|g_2\|_{H^n} \left(\frac{1}{ct}\right)^{n-1}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中$\mathrm{d}(n)$ 仅取决于 $n$。这刻画了收敛速率。

**注 2.6.** 对(2.7)（分别对(2.10)）的一种解释是，相关函数（分别是其实部）渐近地表现得像白噪声。然而，该定理给出了一个低阶修正，也就是说，该修正的正则性高于白噪声的正则性。在(2.7)中，这种正则修正由施瓦茨函数给出；而在(2.10)中，正则修正是一个在零点处没有奇点的纯虚柯西主值：根据(2.12)，在零点附近，该主值受 $C_f'(0)$ “控制”。需要注意的是，在这两种情形下，正则修正都快速衰减。

**注 2.7.** 注意，我们恢复了命题 *2.1* 中的结果，也就是说，在 [3]，即

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[u(t,x)\overline{u(t,y)}] = \frac{1}{2c}\, C_f(0)\delta_{x-y} \tag{2.15}$$

只要我们仅针对变量 $x-y$ 的偶函数进行检验即可，这从 (2.12) 的右侧很容易看出。

要得到类似于 [3] 中对所有测试函数都成立的结果，一种方法是定义函数 $v(t,x) = e^{-\pi i c t x} u(t,x)$。现在该函数满足

$$\mathbb{E}[v(t,x)\overline{v(t,y)}] = t\ \mathrm{sinc}\,(ct(x-y))\ C_f(x-y)$$

其中 $\mathrm{sinc}(x) := \sin(\pi x)/\pi x$ 表示归一化的 *sinc* 函数。由此立即可得

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[v(t,x)\overline{v(t,y)}] = \frac{C_f(0)}{c}\,\delta_{x-y}. \tag{2.16}$$

然而，从物理角度看，$u$ 的这种变换是否是一个有意义的对象尚不明确。假设可以进行傅里叶变换，则 (2.16) 可在波数空间中改写为

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\widehat{v}(t,k)\overline{\widehat{v}(t,k')}] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\widehat{u}\,(t,k+\pi ct)\,\overline{\widehat{u}\,(t,k'+\pi ct)}\right] = \delta_{k-k'}\,C_f(0). \tag{2.17}$$

$v$ 所给出的变换因此等价于计算 $k+\pi ct$ 与 $k'+\pi ct$ 傅里叶模态之间的相关性，即 $t\to\infty$。

2.2.**定理 2.4 的证明**。首先注意，得益于杜哈梅尔公式，方程 (2.2) 有显式解 (2.13)。

**步骤 1：** 解 $u$ 是一个定义良好的高斯场，其在 $t\to\infty$ 处的极限是一个高斯随机测度。

显然，$u(t,x)$是一个定义良好的伊藤过程，其均值为零，方差为

$$\mathbb{E}[|u(t,x)|^2] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_y} |\varphi(x-y)|^2\,dyds = t\,\|\varphi\|_{L^2}^2\,. \tag{2.18}$$

对于任意测试函数 $g$（我们很快会看到，实际上 $g\in H^1(\mathbb{R})$ 就足够了），有一个 ts

$$\langle u(t), g\rangle = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_y} \left(\int_{\mathbb{R}_x} e^{2\pi i c x(t-s)}\,\varphi(x-y)\,g(x)\,dx\right) dW(s,y).$$

对于固定的 $t$，这个随机变量的分布与以下变量相同：

$$\langle v(t), g\rangle := \int_0^t \int_{\mathbb{R}_y} \left(\int_{\mathbb{R}_x} e^{-2\pi i c x s}\,\varphi(x-y)\,g(x)\,dx\right) dW(s,y). \tag{2.19}$$

当 $t\to\infty$ 时，具有均方收敛性质

$$\lim_{t\to\infty} \langle v(t), g\rangle = \langle v_\infty, g\rangle = \int_0^\infty G(s,y)\,dW(s,y) \tag{2.20}$$

其中

$$G(s,y) = \int_{\mathbb{R}_x} e^{-2\pi i c x s}\,\varphi(x-y)\,g(x)\,dx.$$

为了证明上述收敛结果，只需假设 $G\in L^2(\mathbb{R}_s^+\times\mathbb{R}_y)$，这正是我们接下来要证明的。首先，由杨卷积不等式可立即得到

$$\|G\|_{L^2([0,1]_s\times\mathbb{R}_y)} \le \|\varphi\|_{L^1}\,\|g\|_{L^2}\,.$$

接下来，为了处理 $|s|\ge 1$ 的情形，我们假设 $g\in H^1(\mathbb{R})$，并进行分部积分：

$$2\pi i c s\,G(s,y) = -\int_{\mathbb{R}_x} e^{-2\pi i c x s}\,\partial_x\big(\varphi(x-y)\,g(x)\big)\,dx.$$

根据杨卷积不等式,

$$\|2\pi ics G(s,y)\|_{L^2_y} \le \left\|g'\right\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^1} + \|g\|_{L^2} \left\|\varphi'\right\|_{L^1}.$$

由此可轻易得到:

$$\|G(s,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^+_s\times\mathbb{R}_y)} \lesssim \frac{1}{c}\|g\|_{H^1}\|\varphi\|_{W^{1,1}},$$

这就证明了 (2.20)。

由于 $\{\langle v(t)\ g\rangle\}_{t>0}$ 的均值和方差收敛，且对每个固定的 $t$，它们分别与 $\{\langle u(t)\ g\rangle\}_{t>0}$ 的均值和方差相同，因此我们推得 $\langle u(t)\ g\rangle$ 依分布收敛到一个高斯随机变量

$$\langle u_\infty, g\rangle \underset{\text{law}}{=} \int_0^\infty G(s,y)\,dW(s,y). \tag{2.21}$$

此外，$\{\langle u(t)\ g\rangle\}_{t>0}$ 的所有矩都收敛到 $\langle u_\infty, g\rangle$ 的相应矩。

**步骤 2：** 我们希望证明

$$\mathbb{E}[\langle u_\infty, g_1\rangle\overline{\langle u_\infty, g_2\rangle}] = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\langle u(t), g_1\rangle\overline{\langle u(t), g_2\rangle}]. \tag{2.22}$$

由 (2.20) 和 (2.21),

$$\mathbb{E}[\langle u_\infty, g_1\rangle\overline{\langle u_\infty, g_2\rangle}] = \mathbb{E}[\langle v_\infty, g_1\rangle\overline{\langle v_\infty, g_2\rangle}]$$

其中 $v$ 定义于 (2.19)。

由于对于每个固定的 $t$，$\mathbb{E}[\langle v(t)\ g_1\rangle\overline{\langle v(t)\ g_2\rangle}] = \mathbb{E}[\langle u(t)\ g_1\rangle\overline{\langle u(t)\ g_2\rangle}]$，我们的目标 (2.22) 可由恒等式推出

$$\mathbb{E}[\langle v_\infty, g_1\rangle\overline{\langle v_\infty, g_2\rangle}] = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\langle v(t), g_1\rangle\overline{\langle v(t), g_2\rangle}]. \tag{2.23}$$

为证明 (2.23)，我们只需利用 $\langle v(t)\ g\rangle$ 均方收敛到 $\langle v_\infty,\ g\rangle$（对任意 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$），再结合下列“极化”恒等式:

$$\begin{aligned}\langle v(t), g_1\rangle\overline{\langle v(t), g_2\rangle} = {}& \frac{1}{4}\left(|\langle v(t), g_1+g_2\rangle|^2 - |\langle v(t), g_1-g_2\rangle|^2\right)\\ &+\frac{i}{4}\left(|\langle v(t), g_1+ig_2\rangle|^2 - |\langle v(t), g_1-ig_2\rangle|^2\right).\end{aligned}$$

**步骤 3：** 计算 $t\to\infty$ 的相关函数。

我们首先计算有限时间 $t>0$ 下的相关函数。

$$\mathbb{E}[u(t,x_1)\overline{u(t,x_2)}] = \int_0^t e^{2\pi ic(x_1-x_2)s}C_f(x_1-x_2)\,ds = \frac{e^{2\pi ict(x_1-x_2)}-1}{2\pi ic(x_1-x_2)}C_f(x_1-x_2).$$

对于每个有限的 $t$，这是一个定义良好的函数，但若要取极限 $t\to\infty$，就必须将其视为分布。为此，我们用某个 $g_1,\ g_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 来检验它:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle u(t), g_1\rangle\overline{\langle u(t), g_2\rangle}] &= \int_{\mathbb{R}_{x_1}\times\mathbb{R}_{x_2}}\mathbb{E}[u(t,x_1)\overline{u(t,x_2)}]g_1(x_1)g_2(x_2)\,dx_1dx_2\\ &= \int_{\mathbb{R}_z}\frac{e^{2\pi ictz}-1}{2\pi icz}\psi(z)\,dz\end{aligned} \tag{2.24}$$

其中 $\psi(z) = C_f(z)\int_{\mathbb{R}_y} g_1(z+y)g_2(y)dy$，$z = x_1-x_2$ 且 $y = x_2$。我们的目标是研究当 $t\to\infty$ 时最后一个积分的情况。

我们从一个简单的恒等式开始，它为我们提供了一种对函数 $(e^{2\pi ictz}-1)/(2\pi icz)$ 积分的方法。请注意，该函数在 $\mathbb{R}$ 中并非绝对可积。不过，它的积分确实收敛

但只是条件收敛，也就是说，最终结果可能取决于我们如何对其积分。更准确地说，我们回顾一下，对于所有 $t>0$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itz}-1}{iz}\,dz := \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{itz}-1}{iz}\,dz = \pi. \tag{2.25}$$

由（2.25）可得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi ictz}-1}{2\pi icz}\psi(z)dz - \frac{\psi(0)}{2c} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi ictz}-1}{2\pi icz}[\psi(z)-\psi(0)]\,dz.$$

鉴于

$$\psi(0) = C_f(0)\int_{\mathbb{R}_y} g_1(y)g_2(y)dy,$$

为了得到（2.10），只需证明以下结论：

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi ictz}-1}{2\pi icz}[\psi(z)-\psi(0)]\,dzdy &= \frac{1}{2\pi c}\int_0^\infty \frac{\psi(z)-\psi(-z)}{iz}\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi ic}\,\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}_z}\frac{\psi(z)}{z}dz.\end{aligned} \tag{2.26}$$

为证明（2.26），我们将左边改写如下：

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi ictz}-1}{2\pi c}\frac{\psi(z)-\psi(0)}{iz}\,dz = \frac{1}{2\pi ic}\Big(&\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-2\pi ictz}\,\frac{\psi(z)-\psi(0)}{z}\,dz\\ &-\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\psi(z)-\psi(0)}{z}\,dz\Big)\end{aligned} \tag{2.27}$$

注意，利用这一事实，最后一项给出了所需的极限：

$$\int_{-R}^{R}\frac{\psi(z)-\psi(0)}{z}\,dz = \int_0^R\frac{\psi(z)-\psi(-z)}{z}\,dz$$

并取 $R\to\infty$。

最后一步是证明，当 $t\to\infty$ 时，(2.27) 右侧的第一项趋于零。注意，

$$F(z) := \frac{\psi(z)-\psi(0)}{z}$$

在 $\mathbb{R}_z$ 中不可积。不过，下面的引理表明，它的导数具有更好的性质。其证明将推迟到定理 2.4 证明的末尾。回想一下，$\psi$ 是在 (2.24) 之后紧接着根据 $g_1, g_2$ 定义的。

**引理 2.8**。设 $n\ge 1$。若 $g_1\in H^{n+1}(\mathbb{R})$ 且 $g_2\in L^2(\mathbb{R})$，则 $F\in W^{n,1}(\mathbb{R}_z)$ 且

$$\lim_{|z|\to\infty}(\partial_z^m F)(z) = 0,\ \textit{for any } 0\le m\le n, \tag{2.28}$$

$$\|\partial_z^m F\|_{L^1(\mathbb{R}_z)} \lesssim \|g_1\|_{H^{m+1}}\,\|g_2\|_{L^2}\ \textit{for any } 1\le m\le n. \tag{2.29}$$

我们对右侧第一项（2.27）进行分部积分

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} e^{-ictz}\,\frac{\psi(z)-\psi(0)}{z}\,dz &= -\int_{-R}^{R}\frac{1}{ict}\,\partial_z e^{-ictz}\,F(z)dz\\ &= -\frac{1}{ict}\,e^{-ictz}\,F(z)\Big|_{z=-R}^{R} + \frac{1}{ict}\int_{-R}^{R} e^{-ictz}\partial_z F(z)\,dz.\end{aligned}$$

利用引理 2.8，我们可以取极限 $R \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ictz} \frac{\psi(z)-\psi(0)}{z}\, dz = \frac{1}{ict} \int_{\mathbb{R}_z} e^{-ictz} \partial_z F(z)\, dz.$$

接下来，我们使用 (2.28) 继续分部积分（这消去了边界项）

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ictz} \frac{\psi(z)-\psi(0)}{z}\, dz = \left(\frac{1}{ict}\right)^n \int_{\mathbb{R}_z} e^{-ictz} \partial_z^n F(z)\, dz,$$

因此我们有

$$\left| \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ictz} \frac{\psi(z)-\psi(0)}{z}\, dz \right| \leq \left(\frac{1}{ct}\right)^n \left\|\partial_z^n F\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

我们使用 (2.29 ) 完成定理 2.4 的证明。现在，我们需要证明技术性引理 2 .8.

引理 *2.8* 的证明。首先，我们很容易证明

$$\partial_z^n F(z) = \int_0^1 s^n \partial_z^{n+1} \psi(zs) ds \tag{2.30}$$

$$= \int_0^z \frac{s^n}{z^{n+1}} \partial_z^{n+1} \psi(s) ds. \tag{2.31}$$

然后我们证明，对于所有 $0 \leq m \leq n+1$ 和所有 $p \in [1,\infty]$

$$\left\|\partial_z^m \psi\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim ||C_f||_{W^{m,p}(\mathbb{R}_z)} \left\|g_1\right\|_{H^m} \left\|g_2\right\|_{L^2}. \tag{2.32}$$

事实上，由莱布尼茨法则可得

$$\partial_z^m \psi(z) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \partial_z^j C_f(z) \int_{\mathbb{R}_y} \partial_z^{m-j} g_1(y+z) g_2(y) dy.$$

根据柯西-施瓦茨不等式,

$$|\partial_z^m \psi(z)| \leq \left( \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |\partial_z^j C_f(z)| \right) \|g_1\|_{H^m} \|g_2\|_{L^2}$$

因此可得（2.32）。

然后我们证明，对于所有 $0 \leq m \leq n$,

$$\lim_{|z|\to\infty} \partial_z^m F(z) = 0.$$

事实上，根据柯西-施瓦茨不等式、（2.31）和（2.32），

$$|\partial_z^m F(z)| \leq \left\|\partial_z^{m+1}\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R}_z)} \left( \int_0^{|z|} \frac{s^{2m}}{|z|^{2(m+1)}} ds \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left\|\partial_z^{m+1}\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R}_z)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

最后，对所有 $1 \leq m \leq n$，由 (2.30) 可得

$$\left\|\partial_z^m F(z)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \int_0^1 s^m \left\|\partial_z^{m+1}\psi(zs)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} ds \leq \left\|\partial_z^{m+1}\psi\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \left( \int_0^1 s^{m-1} ds \right)$$

因此，我们得出式 (2.32)。 □

将式 (2.1)–(2.2)中的动力学自然推广到高维，有两种方式。首先，可以将输运方程 (2.1) 中的乘积 $c\,\partial_k \widehat{u}$ 推广为给定单位向量 $e \in \mathbb{R}^d$ 与梯度 $\nabla_k \widehat{u}(t,\ k)$ 的标量积。遗憾的是，这会过度强调常向量 $e$，从而在物理空间中导致明显的统计各向异性。对于湍流应用，我们必须要求统计规律不仅在平移下保持不变，也在旋转下保持不变（即统计各向同性）；实验室和数值实验中普遍观测到这一点，从物理角度来看也理应如此。另一种方案是将物理空间表述式 (2.2) 中乘以 $ix$ 改为乘以 $i|x|$，其中 $|x|$ 是 $x \in \mathbb{R}^d$的模。再一次，这会在系统中引入各向异性；更重要的是，即使在维数为 $d = 1$时，也会破坏统计齐次性。利用精确解 (2.2)，可以直接检验这些说法：在给定时刻 $t$，计算任意两个位置 $x,\ y$ 处的协方差函数（详情见 [3] ）。事实上，该协方差函数最终取决于差值 $|x| - |y|$，而不是理想情况下应有的 $x - y$。除此之外，这些命题都无法确保给定的实值初始条件 $u(0,\ x) \in \mathbb{R}$ 在所有未来时刻都产生实值解 $u(t,\ x) \in \mathbb{R}$。换言之，要在物理空间中构造实值解，就需要提出一种能够保持傅里叶变换 $\widehat{u}(t,\ k)$ 的厄米对称性的动力学图景，正如式 (2.3) 中的动力学所做到的那样。

## 3. Higher dimensional real fractional gaussian fields: heuristic

上一节中，我们严格证明了动态复白噪声的构造。该证明是在物理空间中完成的。另一方面，对于式（2.3）中的动态实白噪声，采用其波数表述会更方便。然而，即使对于动态复白噪声，解 $u(t,\ x)$ 对任何$1 \le p < \infty$ 都不属于 $L^p(\mathbb{R}_x)$（见式（2.18）），因此其傅里叶变换无法逐点定义。总之，很难在波数空间中理解方程（2.1）。不过，本节中我们不考虑这些困难，而是假设方程（2.1）的解可以逐点定义；严格分析见第4节。正如我们稍后将看到的，在波数空间中工作能很方便地形式化地说明式（2.3）构造出了动态实白噪声，并将这一构造推广到 $d$ 维分数阶高斯场。

**3.1. 波数空间中的输运方程。**我们提出以下初值问题，作为 (2.3) 的推广

$$
(3.1)\qquad \begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t,k) + \operatorname{div}_k\left(\frac{ck}{|k|}\,\widehat{u}(t,k)\right) + c\dfrac{H+\frac{1}{2}}{|k|}\,\widehat{u}(t,k) = \widehat{f}(t,k) & t>0, k\in\mathbb{R}^d, |k|>\kappa>0,\\ \widehat{u}(t,k) = 0 & t>0, k\in\mathbb{R}^d, |k|\le\kappa,\\ \widehat{u}(0,k) = 0. \end{cases}
$$

其中 $c, \kappa > 0$ 为固定值，$H$ 为实常数（最终将与解的 H¨older 指数相关联），$\operatorname{div}_k$ 表示波数空间中通常的散度算子。利用几个向量微积分恒等式可以很容易地验证，

$$
(3.2)\quad \operatorname{div}_k\left(\frac{ck}{|k|}\,\widehat{u}(k)\right) + c\,\frac{H+\frac{1}{2}}{|k|}\,\widehat{u}(k) = c\,\partial_{|k|}\,\widehat{u}(k) + c\,\frac{H+d-\frac{1}{2}}{|k|}\,\widehat{u}(k) \quad \text{with} \quad \partial_{|k|} := \frac{k}{|k|}\cdot\nabla_k.
$$

当 $d = 1$ 和 $H = -1/2$ 时，可由上式恢复 (2.3)。初值问题 (3.1)$\widehat{\ }$ 可视为波数空间中的守恒律，其源项为 $f(t,k)$，阻尼项为 $(H + 1/2)\ \widehat{u}(t,k)/|k|$，并在球面 $|k| = \kappa$ 上满足狄利克雷边界条件。

$\widehat{\ }$当 $f(t,\ k)$ 足够光滑时，方程（3.1）已得到深入研究（参见 [27], [34]），但$\widehat{\ }$在我们的情形中，$f(t,\ k)$ 过于粗糙，无法应用这类经典结果。特别是，我们将

假设强迫项 $f$ 满足

$$\mathbb{E}[\widehat{f}(t,k_1)\overline{\widehat{f}(s,k_2)}] = \widehat{C_f}(k_1)\,\delta_{t-s}\,\delta_{k_1-k_2}, \tag{3.3}$$

其中 $C_f(k)$ 在球 $|k|<\kappa$ 内是径向的且为零。条件 (3.3) 可形式上由考虑满足以下条件的时间白噪声的傅里叶变换得到

$$\mathbb{E}[f(t,x)f(s,y)] = \delta_{t-s}\,C_f(x-y). \tag{3.4}$$

**注 3.1**。 方程 (3.1) 的一部分包含以下技术条件

$$\widehat{u}(t,k)=0 \qquad t>0, \quad k\in\mathbb{R}^d, \quad |k|\le\kappa, \tag{3.5}$$

对于 $\kappa>0$。事实上，若 $|k|=0$，则 散度$_k\left(\frac{k}{|k|}\cdot\right)$ 和 $\overline{\phantom{x}}^{H+\frac{1}{2}}_{|k|}$ 均未定义。该条件 (3.5) 特别意味着，只要 $\mathcal{F}^{-1}\widehat{u}$ 有定义，其空间平均值就为零。或许可以通过适当修改条件 (3.5)，并施加$\frown f(t$、$k=0)=0$ 以及在 $k=0$ 附近适当的行为，来使问题 (3.1) 对 $\kappa=0$ 有意义，但这超出了本文的范围。

3.2. **渐近行为：幂律**。本节中，我们将证明，方程 (3.1) 的解的二点相关函数呈现幂律行为。在第一个结果（定理 3.2）中，在对外力 $f$ 作出相当温和的假设时，我们得到这一渐近行为 $t\to\infty$。在对 $f$ 作出更强的假设后，我们推导出第二个结果（命题 3.5），证明这种幂律行为会在有限时间内出现。除其他意义外，这类幂律十分重要，因为其指数决定了解在物理空间中的 H¨older 正则性（前提是能够进行傅里叶逆变换）。对我们希望得到的结果进行启发式证明，其核心思路是通过变量替换，将方程 (3.1) 改写为关于 $|k|$ 的一维输运方程，并以“角变量” $\frac{k}{|k|}$ 为参数。这类方程有显式解，我们将加以利用。我们将在第4节进一步讨论这些结论。

**定理 3.2** （启发式版本）。 设外力 $\widehat{f}$ 满足(3.3)，且 $\widehat{C_f}(k)=\psi(|k|)$ 是径向的、非负的且不恒为零，并且 $s^{2H+d}\,\psi(s)\in L^1(\mathbb{R}^+_s)$。此外，我们假设当 $|k|<\kappa$ 时， $\psi$ 为零。那么，(3.1) 存在一个解，其渐近行为如下

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\widehat{u}(t,k)\overline{\widehat{u}(t,k')}] = |k|^{-(2H+d)}\,(C(d,H)-\Psi_{d,H}(|k|))\,\delta_{k-k'}$$

其中

$$\Psi_{d,H}(|k|) := \frac{1}{c}\int_{|k|}^{\infty} s^{2H+d}\,\psi(s)\,ds. \tag{3.6}$$

是一个正的、非递增的绝对连续函数，并且

$$C(d,H) := \Psi_{d,H}(0) > 0. \tag{3.7}$$

正如我们在注 2.6 中已经指出的，与狄拉克分布相比，函数 $\Psi_{d,H}$ 可视为低阶修正。此外，如果我们假设 $\psi$ 快速衰减，那么 $\Psi_{d,H}$ 也将快速衰减。

启发式证明。 为了求得（3.1）的形式解，我们令

$$\widehat{v}(t,k) := |k|^{H+d-\frac{1}{2}}\widehat{u}(t,k), \quad \widehat{g}(t,k) := |k|^{H+d-\frac{1}{2}}\widehat{f}(t,k).$$

接下来，我们用 $\widehat{v}$ 重写（3.1），即

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{v}(t,k) + c\,\partial_{|k|}\widehat{v}(t,k) = \widehat{g}(t,k) & t>0, |k|>\kappa, \\ \widehat{v}(t,k) = 0 & t>0, |k|\le\kappa, \\ \widehat{v}(0,k) = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

其中我们利用了这一事实： $\partial_{|k|} = \frac{k}{|k|}\cdot\nabla_k$。

方程 (3.8) 可以视为关于 $|k|$ 的一维输运方程，并以“角变量” $k/|k|$ 为参数。因此，容易得到一个显式解：

$$\widehat{v}(t,k) = \int_{\left(t-\frac{|k|-\kappa}{c}\right)_+}^{t} \widehat{g}\left(s, (|k|-ct+cs)\,\frac{k}{|k|}\right) ds. \tag{3.9}$$

接下来，我们利用 $f$ 的相关函数来计算 $\widehat{v}(t)$ 的相关函数。我们有

$$\mathbb{E}[\widehat{v}(t,k_1)\overline{\widehat{v}(t,k_2)}] = \int_{\left(t-\frac{|k_1|-\kappa}{c}\right)_+}^{t}\int_{\left(t-\frac{|k_2|-\kappa}{c}\right)_+}^{t} \delta_{cs_1-cs_2}\delta_{\frac{|k_1|-ct+cs_1}{|k_1|}\,k_1-\frac{|k_2|-ct+cs_2}{|k_2|}\,k_2}\,\widehat{C_g}\left(\frac{|k_1|-ct+cs_1}{|k_1|}\,k_1\right) ds_1 ds_2.$$

我们假设可以写成

$$\delta_{cs_1-cs_2}\delta_{\frac{|k_1|-ct+cs_1}{|k_1|}\,k_1-\frac{|k_2|-ct+cs_2}{|k_2|}\,k_2} = \delta_{cs_1-cs_2}\delta_{\frac{|k_1|-ct+cs_1}{|k_1|}\,k_1-\frac{|k_2|-ct+cs_1}{|k_2|}\,k_2}$$

尽管这在数学上并不严谨。此外，通过从笛卡尔坐标到极坐标的变量替换

$$\delta_{\frac{|k_1|-ct+cs}{|k_1|}\,k_1-\frac{|k_2|-ct+cs}{|k_2|}\,k_2} = \left(\frac{|k_1|-ct+cs}{|k_1|}\right)^{-(d-1)}\delta_{k_1-k_2}.$$

这是可行的，因为根据 $\kappa>0$，雅可比行列式 $\left(\frac{|k_1|-ct+cs}{|k_1|}\right)^{-(d-1)}$ 在积分区域内没有奇点。因此，得到

$$\mathbb{E}[\widehat{v}(t,k)\overline{\widehat{v}(t,k')}] = \left(\int_{\left(t-\frac{|k|-\kappa}{c}\right)_+}^{t}\left(\frac{|k|-ct+cs}{|k|}\right)^{-(d-1)}\widehat{C_g}\left(\frac{|k|-ct+cs}{|k|}\,k\right) ds\right)\delta_{k-k'}.$$

这立即意味着

$$\mathbb{E}[\widehat{u}(t,k)\overline{\widehat{u}(t,k')}] = |k|^{-(2H+d)}\left(\int_{\left(t-\frac{|k|-\kappa}{c}\right)_+}^{t}(|k|-ct+cs)^{2H+d}\,\widehat{C_f}\left(\frac{|k|-ct+cs}{|k|}\,k\right) ds\right)\delta_{k-k'}.$$

变量替换 $s\mapsto |k_1|-ct+cs$ 得出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widehat{u}(t,k)\overline{\widehat{u}(t,k')}] = {}& |k|^{-(2H+d)}\left(\chi_{|k|>ct+\kappa}\int_{|k|-ct}^{|k|} s^{2H+d}\,\widehat{C_f}\left(\frac{s}{|k|}\,k\right)\frac{ds}{c}\right)\delta_{k-k'} \\ & + |k|^{-(2H+d)}\left(\chi_{|k|\le ct+\kappa}\int_{\kappa}^{|k|} s^{2H+d}\,\widehat{C_f}\left(\frac{s}{|k|}\,k\right)\frac{ds}{c}\right)\delta_{k-k'}\end{aligned}$$

其中 $\chi_A$ 表示集合 $A$的特征函数。请记住，由于 $C_f$是径向的， $\psi(|k|) := \widehat{C_f}(k)$。利用 (3.6)，我们可以改写为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widehat{u}(t,k)\overline{\widehat{u}(t,k')}] = |k|^{-(2H+d)}\big(&\chi_{|k|>ct+\kappa}\,[\Psi_{d,H}(|k|-ct)-\Psi_{d,H}(|k|)] \\ &+ \chi_{|k|\le ct+\kappa}\,[\Psi_{d,H}(\kappa)-\Psi_{d,H}(|k|)]\big)\,\delta_{k-k_2}\ .\end{aligned} \tag{3.10}$$

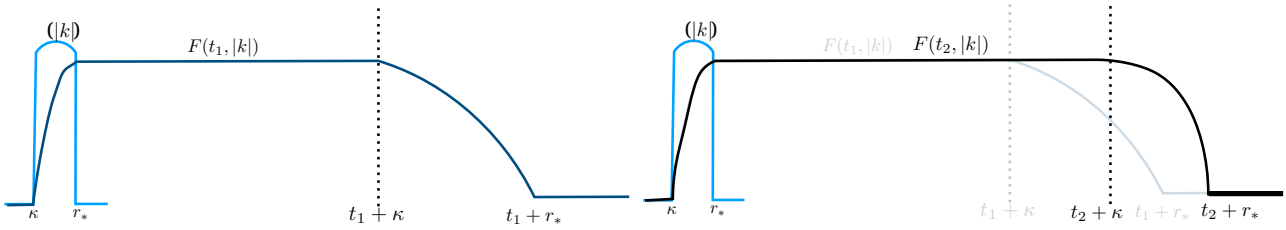



FIGURE 1. 函数 $|k| \mapsto F(t_1, |k|)$ 和 $|k| \mapsto F(t_2, |k|)$，其中 $t_1 < t_2$ 和 $\psi$支撑在 $[\kappa, r_*]$.

最后，取极限 $t \to \infty$，并注意到 $\Psi_{d,H}(\kappa) = \Psi_{d,H}(0)$。 □

**注 3.3.** 在前面的证明中，我们已经表明（见 (3.10)），对任意固定的 $t > 0$

$$\mathbb{E}[\widehat{u}(t,k)\overline{\widehat{u}(t,k')}] = |k|^{-(2H+d)}\, F(t,|k|)\, \delta_{k-k'}$$

其中 $F$ 是 $t$ 中的非负绝对连续函数，并且 $|k|$ 具有如下表达式

$$F(t,|k|) = \begin{cases} \Psi_{d,H}(\kappa) - \Psi_{d,H}(|k|), & |k| < ct + \kappa, \\ \Psi_{d,H}(|k| - ct) - \Psi_{d,H}(|k|), & |k| > ct + \kappa. \end{cases} \tag{3.11}$$

特别地，对任意时刻 $t_1 \le t_2$，对所有 $|k| \le ct_1 + \kappa$， $F(t_1, |k|)$ 和 $= F(t_2, |k|)$。随着 $t$ 增大，$|k|$ 的窗口也随之增大，在该窗口内 $F(t, |k|)$ 处于平稳状态（并呈现幂律行为）（见图*1*）。因此，无需等到 $t = \infty$ 便可观察到幂律。这对进行数值模拟很有帮助。

**注 3.4.** $t \to \infty$ 与 $|k| \to \infty$ 的极限在(3.11) 中不可交换。事实上，可以得到

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\widehat{u}(t,k)\overline{\widehat{u}(t,k')}] \underset{|k|\to\infty}{\sim} |k|^{-(2H+d)}\, C(d,H)\, \delta_{k-k'},$$

而对于任意固定的时间 $t > 0$

$$\lim_{|k|\to\infty} \mathbb{E}[\widehat{u}(t,k)\overline{\widehat{u}(t,k')}] = 0.$$

在模拟中，通常会寻找大 $|k|$时的幂律。但正如前一条注所指出的，如果等待时间不够长，就什么也看不到。下一个命题表明，如果源的二点相关函数在频谱上位于球 $|k| \le r_*$ 内，那么只需等待到 $t \ge r_*$，就能观察到所需的幂律。

**命题 3.5.** 设 $\psi$ 在 $[\kappa, r_*]$ 中支撑于 $r_* > \kappa > 0$。对于任意固定的 $t > r_*$，注 *3.3* 中给出的函数 $F$ 满足

$$F\ (t,|k|)\ = \begin{cases} 0 & |k| \in \\ t & |k| \quad |k| \in \\ & |k| \in \ (0,\ \kappa)\ \text{在中为平稳且非递减，在}\ (\kappa, r_*)\ \text{中为} \\ t & |k| \quad |k| \in \end{cases}$$

常数，在 $(r_*, ct + \kappa)$ 中为非递减且在 $(ct + \kappa, ct + r_*)$ 中为非递增
$0$ $|k| \in \ ct + r_* \ \infty\ .$ $(,\ )$

**注3.6**。由于 $\psi$ 在球 $|k|<\kappa$中消失，

$$\Psi(0)=\Psi(\kappa)=\Psi(|k|-ct) \quad for \quad ct\le|k|\le ct+\kappa,$$

因此，该表达式

$$F(t,|k|)=\begin{cases}\Psi_{d,H}(0)-\Psi_{d,H}(|k|), & |k|<ct,\\ \Psi_{d,H}(|k|-ct)-\Psi_{d,H}(|k|), & |k|>ct.\end{cases}$$

与 $\kappa$ 无关。关于这一点，参见注 *3.1*。

为了使方程 (3.12) 的解更接近实验能谱图景（见第 1.2 节开头），可以在方程中加入一些黏度。更确切地说，可以考虑 $f-\nu\Delta u$，而不是仅有强迫项 $f$。

**定理 3.7**（启发式版本）。设 $\nu\ge 0$，且强迫 $f$ 满足 (3.3)，使得 $C_f(k)=\psi(|k|)$ 是径向的、非负的、非恒为零的，并且 $s^{2H+d}e^{\frac{8\pi^2\nu}{3c}s^3}\psi(s)\in L^1(\mathbb{R}_s^+)$，且 $\psi$ 在球 $|k|<\kappa$ 内为零。那么

(3.12)
$$\begin{cases}\partial_t\widehat{u}_\nu(t,k)+\mathrm{div}_k\left(\frac{ck}{|k|}\,\widehat{u}_\nu(t,k)\right)+\left(c\dfrac{H+\frac12}{|k|}+\nu|2\pi k|^2\right)\widehat{u}_\nu(t,k)=\widehat{f}(t,k) & t>0,k\in\mathbb{R}^d,|k|>\kappa>0,\\ \widehat{u}_\nu(t,k)=0 & t>0,k\in\mathbb{R}^d,|k|\le\kappa,\\ \widehat{u}_\nu(0,k)=0\end{cases}$$

存在一个解，对任意固定的 $t>0$，该解满足

$$\mathbb{E}[\widehat{u}_\nu(t,k)\overline{\widehat{u}_\nu(t,k')}]=|k|^{-(2H+d)}e^{-\frac{8\pi^2\nu}{3c}|k|^3}\,F_\nu(t,|k|)\,\delta_{k-k'}$$

其中 $F_\nu$ 是定义在 $t$ 和 $|k|$ 上的非负绝对连续函数，并且具有以下表达式

$$F_\nu(t,|k|)=\begin{cases}\Psi_{d,H,\nu}(\kappa)-\Psi_{d,H,\nu}(|k|), & |k|<ct+\kappa,\\ \Psi_{d,H,\nu}(|k|-ct)-\Psi_{d,H,\nu}(|k|), & |k|>ct+\kappa.\end{cases}\tag{3.13}$$

并且

$$\Psi_{d,H,\nu}(|k|):=\frac1c\int_{|k|}^\infty s^{2H+d}e^{\frac{8\pi^2\nu}{3c}s^3}\,\psi(s)\,ds.\tag{3.14}$$

是一个正的非增绝对连续函数。

证明。为了求得 (3.12) 的形式解，我们令

$$\widehat{v}(t,k):=|k|^{H+d-\frac12}e^{\frac{4\pi^2\nu}{3c}|k|^3}\widehat{u}(t,k),\quad \widehat{g}(t,k):=|k|^{H+d-\frac12}e^{\frac{4\pi^2\nu}{3c}|k|^3}\widehat{f}(t,k)$$

并将 (3.12) 改写为关于 $\widehat{v}$ 的方程，我们发现 $\widehat{v}$ 是 (3.8) 的解。因此，证明与定理 3.2 的证明类似。□

请注意，在存在黏度的情况下，极限 $\nu\to0$ 和 $t\to\infty$ 可交换。

**3.3. 启发式证明的主要问题。** 本章节中的计算为我们提供了宝贵的直觉，帮助我们构造一个其解呈现幂律行为的方程，并确定其中涉及的恰当参数。然而，从严格的数学角度来看，我们的计算中有若干步骤难以论证（如果可能的话）。具体而言：

(1) 傅里叶变换。 正如我们已经提到的，非递减粗糙源的傅里叶变换（因此，方程(3.1)的解）不太可能能够逐点定义。

(2) 波数空间中的输运方程。 我们从未证明(3.1)是适定的。即使它在某种弱意义下适定，也不清楚能否定义解在边界 $|k| = \kappa$ 处的迹，或定义算子 $\mathrm{div}_k \left(\frac{k}{|k|}\cdot\right)$的定义域。

(3)随机输运方程的解。 在最简单的情形下，(3.1)变为（对于 $H = \frac{1}{2} - d$），其解已在 (3.8)
(3.9)中给出，即

$$\widehat{u}(t,k) = \int_{(ct-(|k|-\kappa))_+}^{t} \widehat{f}\left(s, (|k| - ct + cs)\,\frac{k}{|k|}\right) ds. \tag{3.15}$$

当 $f$ 是具有形式 (2.6) 的时间白噪声时（用 $\mathbb{R}^d$ 代替 $\mathbb{R}$），(3.15) 右端的积分不是黎曼积分。更糟的是，人们还需要定义对象 $f(t,\ k)$，并沿输运方程的特征线对其进行求值。总之，需要使这个“随机积分”有意义：

$$\int_{(t-(|k|-\kappa))_+}^{t} \widehat{\varphi}\left((|k| - ct + cs)\,\frac{k}{|k|}\right) \widehat{dW}\left(s, (|k| - ct + cs)\,\frac{k}{|k|}\right).$$

此外，如果没有严谨的函数空间框架，就很难研究解的唯一性这一重要问题。事实上，尚不清楚解 (3.15) 是否唯一。

(4) 二点相关函数。即使我们能够在弱意义下（例如作为缓增分布）使 (3.1) 有意义，二点相关函数也未必有定义。事实上，它涉及分布的乘积，而这些分布的奇异支集可能相交。

(5) 狄拉克分布中的坐标混合。在证明中，我们使用以下恒等式 ty

$$\delta_{s_1-s_2}\delta_{\frac{|k_1|-ct+cs_1}{|k_1|}k_1-\frac{|k_2|-ct+cs_2}{|k_2|}k_2} = \delta_{s_1-s_2}\delta_{\frac{|k_1|-ct+cs_1}{|k_1|}k_1-\frac{|k_2|-ct+cs_1}{|k_2|}k_2}.$$

换句话说，我们首先将 $\delta_{s_1-s_2}$ 应用于 $\delta_{\frac{|k_1|-ct+cs_1}{|k_1|}k_1-\frac{|k_2|-ct+cs_2}{|k_2|}k_2}$。这能否得到证明?

如果内层的狄拉克 δ 函数是一个函数，这当然是可行的，但事实并非如此。稍后在证明中，我们进行坐标变换，得到

$$\delta_{s_1-s_2}\delta_{\frac{|k_1|-ct+cs_1}{|k_1|}k_1-\frac{|k_2|-ct+cs_2}{|k_2|}k_2} = \left(\frac{|k_1| - ct + cs_1}{|k_1|}\right)^{-(d-1)} \delta_{s_1-s_2}\delta_{k_1-k_2}.$$

如果我们交换左边各狄拉克 δ 函数的作用顺序，最终结果是否仍然相同?

最终，我们还希望在物理空间中写出方程（3.1），并解释物理空间中的幂律。一个初步想法是对（3.1）进行傅里叶逆变换，但上述困难使这一过程变得复杂。

## 4. Higher dimensional real fractional gaussian fields: results

如上一小节所述，要论证粗糙源项（例如我们所关注的源项）的傅里叶变换存在是困难的。同样，这类问题（3.1）的解也未必存在傅里叶变换。因此，我们的目标是尝试对（3.1）表述一种较弱的概念，使其完全在物理空间中给出，从而避免这类问题。为此，我们首先引入希尔伯特空间

$$X := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d_x) \,|\, \hat{u}(k) = 0 \text{ for all } |k| < \kappa\} \tag{4.1}$$

以及内积

$$(u, v) := \int_{\mathbb{R}^d_k \setminus B(0,\kappa)} \widehat{u}(k)\, \overline{\widehat{v}(k)} dk.$$

接下来，我们引入无界算子

$$A : u \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left[c \operatorname{div}_k \left(\frac{k}{|k|}\,\widehat{u}\right) + c\,\frac{H+\frac{1}{2}}{|k|}\,\widehat{u}\right] \tag{4.2}$$

其定义域为

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{u \in X \,|\, Au \in X \text{ and } \widehat{u}|_{|k|=\kappa} = 0\} \\ &= \{u \in X \,|\, \partial_{|k|}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d_k \setminus B(0,\kappa)) \text{ and } \widehat{u}|_{|k|=\kappa} = 0\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

对于任意满足 $u \in X$ 且 $\partial_{|k|}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d_k \setminus B(0,\kappa))$ 的函数，得益于索伯列夫嵌入定理，傅里叶空间中的迹 $\widehat{u}|_{|k|=\kappa}$ 是有定义的。这使我们能够施加条件 $\widehat{u}|_{|k|=\kappa} = 0$。因此，在形式上应用傅里叶逆变换后，波数空间中的输运方程（3.1）可以写成物理空间中的形式：

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{for } t > 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

在此阶段，注意到对于任意足够规则的外力 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,+\infty)_t, X)$，问题 (4.4) 有严格定义。其温和解为：

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds \tag{4.5}$$

其中 $e^{-tA} : X \to X$ 定义为

$$e^{-tA}u_0 := \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{|k|>ct+\kappa}\left(\frac{|k|-ct}{|k|}\right)^{H+d-\frac{1}{2}} \widehat{u_0}\left(\frac{|k|-ct}{|k|}k\right)\right]. \tag{4.6}$$

事实上，很容易验证 (4.5) 是 (4.4) 的解。此外，也很容易验证，若 $u_0 \in X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$，则 $e^{-tA}u_0 \in X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$。

遗憾的是，我们的源 $f$ 是时间白噪声（空间上则是有色噪声），因此上述考量并不适用。严格来说，$f$ 是作用于 $L^2((0,+\infty)_t)$ 上的高斯随机测度，即

$$\langle f, g\rangle(x) := \int_{(0,+\infty)_t \times \mathbb{R}^d_y} \tau_y\varphi(x)\, g(t) dW(t,y), \tag{4.7}$$

对于所有测试函数 $g \in L^2((0,+\infty)_t)$，其中 $dW$ 是时空高斯实白噪声，$\tau_y$ 是由 $y$ 给出的平移（即 $\tau_y g(x) = g(x-y)$），且 $\varphi \in X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ 是实值、非恒为零的径向函数。

为了赋予粗糙源项下方程 (4.4) 的解以意义，我们需要一种弱形式。要提出这种形式，首先需要引入 $A$ 的伴随算子。

**命题 4.1.** $A$ 在(4.2) 中的伴随算子定义为

$$A^* : u \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left[-c\,\mathrm{div}_k\left(\frac{k}{|k|}\,\widehat{u}\right) + c\frac{H+d-\frac{1}{2}}{|k|}\,\widehat{u}\right] \tag{4.8}$$

其定义域为

$$D(A^*) := \{u \in X \,|\partial_{|k|}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d_k \setminus B(0,\kappa))\,\} \supsetneq D(A).$$

证明。设 $u \in D(A)$ 且 $v \in X$。利用 (3.2)，可得

$$c^{-1}(Au,v)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d_k\setminus B(0,\kappa)} \partial_{|k|}\widehat{u}(k)\,\overline{\widehat{v}}(k)\,dk + \int_{\mathbb{R}^d_k\setminus B(0,\kappa)} \frac{H+d-\frac{1}{2}}{|k|}\,\widehat{u}(k)\,\overline{\widehat{v}}(k)\,dk.$$

我们在波数空间中从笛卡尔坐标变换为极坐标:

$$\int_{\mathbb{R}^d_k} \partial_{|k|}\widehat{u}(k)\,\overline{\widehat{v}(k)}\,dk = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{S}_\theta} \partial_{|k|}\widehat{u}(k)\,\overline{\widehat{v}(k)}\,|k|^{d-1}d\sigma_\theta d|k|.$$

现在假设 $\partial_{|k|}\widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}^d_k \setminus B(0,\kappa))$，以便我们可以对变量 $|k|$ 分部积分，并立即返回笛卡尔坐标:

$$\int_{\mathbb{R}^d_k} \partial_{|k|}\widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\,dk = -\int_{\mathbb{R}^d_k} \widehat{u}\,\partial_{|k|}\overline{\widehat{v}}\,dk - \int_{\mathbb{R}^d_k} \frac{(d-1)}{|k|}\widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}dk - \int_{\mathbb{S}_\theta} \kappa^{d-1}\,\widehat{u}|_{|k|=\kappa}\,\overline{\widehat{v}}|_{|k|=\kappa}d\sigma_\theta.$$

由于 $\widehat{u}|_{|k|=\kappa} = 0$，前一个等式可得

$$c^{-1}(Au,v)_{L^2} = -\int_{\mathbb{R}^d_k} \widehat{u}\,\partial_{|k|}\overline{\widehat{v}} + \int_{\mathbb{R}^d_k} \frac{H+\frac{1}{2}}{|k|}\widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\,dk.$$

再次使用 (3.2)，便可轻易得到

$$c^{-1}(Au,v)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d_k\setminus B(0,\kappa)} \widehat{u}(k)\left[-\mathrm{div}_k\left(\frac{k}{|k|}\overline{\widehat{v}}(k)\right) + \frac{H+d-\frac{1}{2}}{|k|}\overline{\widehat{v}}(k)\right]dk$$

对所有满足 $\partial_{|k|}\widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}^d_k \setminus B(0,\kappa))$ 的 $u \in D(A)$ 和 $v \in X$ 均成立。

注意，无须施加 $\widehat{v}|_{|k|=\kappa} = 0$，因此 $D(A^*)$ 严格大于 $D(A)$。□

**注 4.2.** 在 $D(A)$ 的定义中，条件 $\widehat{u}|_{|k|=\kappa} = 0$ 可解释为波数空间中的边界条件。在 $D(A^*)$ 中，这个边界条件不再成立；后者严格大于 $D(A)$。或许可以通过适当地将 $\widehat{u}|_{|k|=\kappa} = 0$ 替换为 $\widehat{u}(t, k = 0) = 0$，并在 $k = 0$ 附近施加适当的行为条件，从而取 $\kappa = 0$；但这超出了本文的讨论范围。

现在我们可以给出 (4.4) 的弱形式。

**定义 4.3.** 如果随机过程 $u$ 是满足 (4.4) 的弱解，其中 $f$ 由 (4.7) 给出，且 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty)_t \times \mathbb{R}^d)$ 几乎必然成立，并且

$$\int_{\mathbb{R}^d_x} u(t,x)g(t,x)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_x} u(s,x)(-\partial_s + A^*)g(s,x)dsdx \tag{4.9}$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_y} \left( \int_{\mathbb{R}^d_x} \varphi(x-y) g(s,x) dx \right) dW(s,y)$$

对所有 $g \in C^\infty((0,\infty) D(A^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$，并且满足

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_x} u(s,x) g(s,x) ds dx = 0 \tag{4.10}$$

对于所有 $g \in C^\infty((0,\infty) \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$，满足 $\widehat{g}(t,k) = 0$ 对于所有 $|k| > \kappa$。

注意，对于测试函数 $g \in X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$， $g \in D(A^*)$ 和 $A^* g \in D(A^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$，因此 (4.9) 左边的各项都有定义。

我们现在可以给出本文关于正 $H \in (0,1)$ 的主要结果。

**定理 4.4**。设 $H \in (0,1)$，并设 *(4.4)* 中的外力 $f$ 为

$$f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d_y} \tau_y \varphi(x)\, dW(t,y), \tag{4.11}$$

其中 $dW$ 是时空高斯实白噪声，$\tau_y$ 是通过 $y$ 的平移（即 $\tau_y g(x) = g(x-y)$），而 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ 是一个实值、非恒为零的径向函数，满足 $\widehat{\varphi}(k) = 0$ 对所有 $|k| < \kappa$ 均成立。于是：

*(i)* 方程 (4.4) 存在唯一的全局（时间上）弱解 $u(t,x)$，其定义于 $C((0,\infty), (X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))')$，且由下式给出

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_y} e^{-(t-s)A} [\tau_y \varphi](x)\, dW(s,y) \tag{4.12}$$

其中 $e^{-tA} : X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x) \to X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ 定义见 (4.6)。

*(ii)* 对每个固定的 $t > 0$， $u(t,x)$ 都是一个高斯过程，几乎必然具有 $x$ 中的光滑样本路径，并且在 $t$ 中具有 $\alpha$-*Hölder* 连续样本路径，对任意 $0 < \alpha < 1/2$ 均成立。

*(iii)* 当 $t \to \infty$ 时，解 $u(t,x)$ 依分布收敛到零均值高斯场 $u_\infty(x)$，其在 $x$ 中具有$\alpha$-*Hölder* 连续样本路径，对任意 $0 < \alpha < H$ 均成立。

*(iv)* 极限过程 $u_\infty(x)$ 由以下相关函数刻画：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_\infty(x_1) u_\infty(x_2)] &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[u(t,x_1) u(t,x_2)] \\ &= C(d,H)\, \mathcal{K}_H(x_1 - x_2) - (\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)(x_1 - x_2), \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中

$$\mathcal{K}_H := \mathcal{F}^{-1}\left[ \chi_{|k|>\kappa} |k|^{-(2H+d)} \right] \quad and \quad \mathcal{J}_H := \mathcal{F}^{-1}\left[ \chi_{|k|>\kappa}\, \Psi_{d,H}(|k|) \right]$$

其中， $C$（$d$、 $H$）以及 $\Psi_{d,\ H}$ 已在定理 *3.2* 中给出。

当 $H$ 为非正数时，需要更加谨慎，因为解会收敛到一个非常粗糙的对象。关于这一点，我们有如下结果：

**定理 4.5**。 设 $H \in [-d/2, 0]$，并令外力 $f$ 如 （4.11） 中所示。则定理 *4.4* 中的 *(i)* 和 *(ii)* 仍然成立。此外，我们还有：

*(iii)* 当 $t \to \infty$ 时，解 $u(t)$ 依分布收敛于一个作用在 $X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ 上的零均值随机高斯测度 $u_\infty$，即对于任意 $g \in X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$， $\langle u(t)\ g \rangle$ 依分布收敛于一个高斯随机变量 $\langle u_\infty, g \rangle$，其均值为 $\mathbb{E}[\langle u_\infty, g \rangle] = 0$。

*(iv)* 我们有以下渐近行为：

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\langle u(t),g_1\rangle\langle u(t),g_2\rangle] &= \mathbb{E}[\lim_{t\to\infty}\langle u(t),g_1\rangle\langle u(t),g_2\rangle]\\ &= C(d,H)\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\Psi_{d,H}(|k|)\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk.\end{aligned}\tag{4.14}$$

对于任意 $g_1, g_2 \in X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，其中 $\Psi_{d,H}$ 见定理 *3.2*。

在证明这些定理之前，我们最后再说明一下算子 $A$。如以下命题所示，该算子可视为一个零阶算子加上一个阶数为 $-1$ 的有界算子。

**命题 4.6**。对于所有 $u \in D(A)$ 和 $v \in D(A^*)$，以下等式成立：

$$Au(x)=\int_{\mathbb{R}^d_k/B_\kappa}a(x,k)e^{ik\cdot x}\,\widehat{u}(k)\,dk \quad and \quad A^*v(x)=\int_{\mathbb{R}^d_k/B_\kappa}a^*(x,k)e^{ik\cdot x}\,\widehat{v}(k)dk.\tag{4.15}$$

其中

$$a(x,k):=-i\frac{k}{|k|}\cdot x+\frac{H+\frac12}{|k|} \quad and \quad a^*(x,k):=i\frac{k}{|k|}\cdot x+\frac{H+d-\frac12}{|k|}.$$

对于任意满足 $\alpha \geq 1$ 的多重指标 $\alpha, \beta$，有

$$|x||k|^{-|\beta|}\lesssim|\partial_k^\beta a(x,k)|+|\partial_k^\beta a^*(x,k)|\lesssim|x||k|^{-|\beta|}+|k|^{-1-|\beta|}$$

*and*

$$|\partial_x^\alpha\partial_k^\beta a(x,k)|+|\partial_x^\alpha\partial_k^\beta a^*(x,k)|\lesssim|k|^{-|\beta|},$$

*for* 任意 $(x,k) \in \mathbb{R}^{2d}$ 满足 $|k| \geq \kappa$。隐含常数不依赖于 $\kappa$、$x$ 或 $k$.

证明。令 $u \in D(A)$。利用向量微积分恒等式 (3.2)，可得

$$Au=\int_{\mathbb{R}^d_k/B_\kappa}\left[\frac{k}{|k|}\cdot\nabla_k\widehat{u}+\frac{H+d-\frac12}{|k|}\widehat{u}\right]e^{ik\cdot x}dk.$$

分部积分后

$$Au=-\int_{\mathbb{R}^d_k/B_\kappa}\mathrm{div}_k\left(\frac{k}{|k|}e^{ik\cdot x}\right)\widehat{u}+\int_{\mathbb{R}^d_k/B_\kappa}\frac{H+d-\frac12}{|k|}\widehat{u}e^{ik\cdot x}dk.$$

利用几个向量微积分恒等式即可轻松验证

$$\mathrm{div}_k\left(\frac{k}{|k|}e^{ik\cdot x}\right)=\frac{ik\cdot x+(d-1)}{|k|}e^{ik\cdot x}\tag{4.16}$$

使得

$$Au=-\int_{\mathbb{R}^d_k/B_\kappa}\frac{ik\cdot x+(d-1)}{|k|}\widehat{u}e^{ik\cdot x}dk+\int_{\mathbb{R}^d_k/B_\kappa}\frac{H+d-\frac12}{|k|}\widehat{u}e^{ik\cdot x}dk$$

由此得到 (4.15) 中的表达式。对 $A^*$ 也有类似的计算。 □

近期的多项研究 [17, 11, 21] 表明，涉及零次齐次算子的线性方程，或可用于展示与湍流相关的行为，例如长时间演化后出现正则性丧失。 [17], Yves Colin de Verdi`ere 和 Laure Saint-Raymond 在 [17] 中考虑了一个方程$\partial_t u + iAu = f$，其中 $f$是一个 $L^2$确定性的单色外力，而 $A$是一个满足某些技术性（但一般性）假设的零次齐次自伴算子。作者

表明，当 $t \to \infty$时，解越来越接近算子 $A$的广义特征函数，而这些函数不具有 $L^2$ 有限能量。 $A$ 是零阶算子这一点至关重要，它确保其广义特征函数属于一个类似于 $H^{-\frac{1}{2}-}$的空间，其正则性低于 $L^2$。R. Carles 和 C. Cheverry 在 [11] 中也在核磁共振的背景下引入了一个零次齐次算子。更确切地说，他们证明，对于某种高度振荡源，在长时间（即衍射时间）下，解会产生相长与相消干涉，并将其解释为湍流效应。

因此，将我们的模型与现有文献进行比较是很有意义的。首先，这些其他研究都是在确定性情形下展开的。不过，即使考虑具有单色确定性源的模型，也很难采用 [17] 中类似的技术。首先，因为我们的算子满足 $D(A) \subsetneq D(A^*)$，因此它既不是自伴算子，也不是反自伴算子。因此，无法像 [17] 中那样运用 Mourre 对易子理论来证明极限振幅原理，从而在无限时间下获得解的良好谱表示。其次，我们算子的主符号 $A$ （见（4.15））随 $x$ 增长。这不是一个零阶标准伪微分算子[5] 。因此，深入研究这一特殊算子（4.2）是很有意义的，将留待后续工作展开。不过，当方程（4.4）中的源为零且考虑初始数据时，可以指出一些守恒量：

- 对所有 $H$，体积守恒，即
$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^d_x} u(t,x)\,dx = 0,$$
- 对 $H = -d/2$， $L^2$-范数守恒，即
$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^d_x} |\widehat{u}(t,x)|^2\,dx = 0,$$
- 原点处迹守恒 $H = -1/2$，即
$$\partial_t u|_{x=0} = 0.$$

4.1. **适定性**。

**4.1.1. 唯一性。** 假设我们有两个解，它们几乎必然属于 $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty)_t \times \mathbb{R}^d)$，并满足 (4.9)。对傅里叶变换支撑集包含于 $B(0,\kappa)$ 的测试函数进行测试时，两个解均为零，因此二者相等。对 $g \in C^\infty((0,\infty)\ D(A^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$ 进行测试时，它们的差 $v$ 几乎必然满足

$$\int_{\mathbb{R}^d_x} v(t,x)g(t,x)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_x} v(s,x)(-\partial_s + A^*)g(s,x)dsdx = 0 \qquad \text{for all } t > 0. \tag{4.17}$$

若 $g_0 \in D(A^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$，则

$$g_t(s,\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\left[|k|^{-H-\frac{1}{2}}\widehat{g_0}\left(\frac{|k| - c(s-t)}{|k|}k\right)\right] \in C^\infty((0,\infty), D(A^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$$

满足

$$(-\partial_s + A^*)g_t = 0 \quad \text{and} \quad g_t|_{s=t} = g_0.$$

[5]标准的 $m$ 阶算子是指其符号 $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ 满足

$$|\partial_x^\alpha \partial_k^\beta a(x,k)| \lesssim (1+|k|)^{m-|\beta|}$$

对所有多重指标 $\alpha$ 和 $\beta$。

使用这个测试函数，由 (4.17) 可得，几乎必然对所有 $t > 0$ 都成立

$$\int_{\mathbb{R}^d_x} v(t,x) g_0(x) dx = 0.$$

因此，几乎必然地，对所有 $t$, $v(t, \cdot) = 0$ 几乎处处成立。更准确地说，对于我们问题的任意两个解 $u_1$, $u_2$，我们有：

$$\mathbb{P}\left[\forall t > 0,\ u_1(t,x) = u_2(t,x) \text{ almost everywhere in } x\right] = 1.$$

**注 4.7.** 注意，只需稍微改变弱解的定义，就可以得到更强版本的唯一性。例如，可以加入条件 $\mathbb{E}|u(t,x)|^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)_t \times \mathbb{R}^d_x)$。在这个新定义下，可以证明任意两个解 $u_1$ 和 $u_2$都必须满足

$$\mathbb{E}|u_1(t,x) - u_2(t,x)| = 0$$

$(t,x)$-几乎处处成立。这直接由上述证明唯一性的论证以及方差几乎处处有限这一事实得出。

4.1.2. 弱解的存在性。 我们先给出 $e^{-tA}[\tau_y \varphi](x)$ 的一个表达式，这将使我们能够证明 (4.12) 确实给出了 (4.4) 的一个弱解。

**命题 4.8**。 对于所有 $\varphi \in X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$，函数 $G(t,x,y) := e^{-tA}[\tau_y \varphi](x)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} G(t,x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d_k} \chi_{|k|>ct+\kappa} \left(\frac{|k|-ct}{|k|}\right)^{H+d-\frac{1}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{|k|-ct}{|k|}k\right) e^{-i2\pi\left(\frac{|k|-ct}{|k|}\right)k\cdot y + i2\pi k\cdot x}\, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_k} \left(\frac{|k|}{|k|+ct}\right)^{H+\frac{1}{2}} \widehat{\varphi}(k)\, e^{i2\pi\left(\frac{|k|+ct}{|k|}\right)k\cdot x - i2\pi k\cdot y}\, dk. \end{aligned} \tag{4.18}$$

是关于所有变量的光滑函数。此外：

- 对于每个多重指标 $\beta$ 以及每个固定的 $y \in \mathbb{R}^d$, $\partial_y^\beta G(\cdot,\cdot,y) \in C^1([0,\infty)_t, X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$。此外，$\partial_y^\beta G(\cdot,\cdot,y)$ 的任意施瓦茨半范数（关于 $x$）在 $y$ 上局部一致。

- 对于每个 $x \in \mathbb{R}^d$, $\partial_x^\beta G(\cdot,x,\cdot) \in C^1([0,\infty)_t, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_y))$。此外，$\partial_x^\beta G(\cdot,x,\cdot)$ 的任意施瓦茨半范数（关于 $y$）在 $x$ 上局部一致。

最后，其关于 $y$ 的傅里叶变换为

$$(\mathcal{F}_2 G)(t,x,k) = \left(\frac{|k|}{|k|+ct}\right)^{H+\frac{1}{2}} \overline{\widehat{\varphi}(k)}\, e^{-i2\pi\left(\frac{|k|+ct}{|k|}\right)k\cdot x}.$$

证明。 表达式 (4.18) 来自 $e^{-tA}$ 在 (4.6) 中的定义，以及变量替换 $k \mapsto (|k|+ct)/|k|k$。第二个表达式直接给出了 $(\mathcal{F}_2 G)(t,\ x,\ k)$ 的公式。

$G$ 关于三个变量均为光滑函数这一事实，可由其积分表达式以及积分与微分可以交换这一事实直接得出。后一步将在下文证明。

我们来证明，对于任意多重指标 $\beta$ 以及任意固定的 $x$, $\partial_x^\beta G(\cdot,\ x,\ \cdot) \in C^1([0,\infty)_t,\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_y))$（固定 $y$ 的情形可用类似的证明）。注意，任意导数 $\partial_y^n \partial_x^\beta G(t,\ x,\ y)$ 都会产生一个因子

$(-i2\pi k)^n$，它可以被 $\widehat{\varphi}(k)$ 吸收，因此光滑性不是问题。我们来关注衰减。对于 $|y| \le 1$，注意到

$$|\partial_x^\beta G(t,x,y)| \le (2\pi)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}_k^d} \left( \frac{|k| + ct}{|k|} \right)^{|\beta|} |\widehat{\varphi}(k)|\, dk.$$

回顾一下，t he $\varphi$ 的支撑集保证了在 $k = 0$附近不存在积分问题 .

对于 $|y| \ge 1$ 以及任意的 $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} \left| (-iy_j)^n \partial_x^\beta G(t,x,y) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}_k^d} \left( \frac{|k|}{|k| + ct} \right)^{H + \frac{1}{2} - |\beta|} \widehat{\varphi}(k)\, e^{i2\pi \left( \frac{|k| + ct}{|k|} \right) k \cdot x} \partial_{k_j}^n e^{-i2\pi k \cdot y}\, dk \right| \\ &\le (2\pi)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}_k^d} \left| \partial_{k_j}^n \left[ \left( \frac{|k|}{|k| + ct} \right)^{H + \frac{1}{2} - |\beta|} \widehat{\varphi}(k)\, e^{i2\pi \left( \frac{|k| + ct}{|k|} \right) k \cdot x} \right] \right| dk \end{aligned}$$

可以证明，最后一个表达式的被积函数在 $\widehat{\varphi}$的支撑集上是绝对可积的。不过需要注意的是，为了控制这一项，需要消耗 $x$ （其为固定值）的一些幂次。因此，隐含常数将依赖于这些幂次，但它关于 $x$ 是局部一致的（即对于紧集中的所有 $x$ ，均取相同的常数）。

这就完成了如下证明：对于每个固定的 $y \in \mathbb{R}^d$， $G$（$\cdot$， $\cdot$， $y$）$\in C$（$[0,\infty)_t$， $X \cap \mathcal{S}$（$\mathbb{R}_x^d$）。为了将该空间改进为 $C^1$（$[0,\infty)_t$， $X \cap \mathcal{S}$（$\mathbb{R}_x^d$），只需对 $G$关于时间求导，并重复上述步骤即可。

利用分部积分进行类似论证可知，对于每个固定的 $y \in \mathbb{R}^d$ 以及每个多重指标 $\beta$, $\partial_y^\beta G(\cdot, \cdot, y) \in C^1([0,\infty)_t, X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^d))$。□

利用 $G$的这些良好性质，可得到以下推论。

**推论 4.9**。 在(4.12) 中定义的函数 $u(t,x)$ 是一个定义良好的高斯过程。对于任意$0 < \alpha < 1/2$, 它关于 $t$ 几乎必然具有 $\alpha$-*Holder* 连续样本路径，且关于 $x$几乎必然具有光滑样本路径。

特别地，对于任意多重指标 $\beta$、任意 $t_1, t_2 > 0$ 以及任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ ，存在一个（局部一致的）常数 $C > 0$ ，使得

$$\mathbb{E}|\partial_x^\beta u(t_1,x_1) - \partial_x^\beta u(t_2,x_2)|^2 \le C \left( |t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|^2 \right). \tag{4.19}$$

证明。 令 $G$ 如 (4.18) 所示，则 $u$ 可写为

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_y^d} G(t-s,x,y)\, dW(s,y)$$

根据命题 4.8，对于任意固定的 $(t,x)$， $G(\cdot,x,\cdot) \in C^1([0,\infty)_s, X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^d)) \subset L^2([0,t]_s \times \mathbb{R}_y^d)$，因此 $u$ 是一个均值为零、方差为

$$\mathbb{E}|u(t,x)|^2 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_y^d} |G(s,x,y)|^2\, dy\, ds.$$

接下来我们研究正则性。首先注意，对于任意多重指标 $\beta$

$$\partial_x^\beta u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_y^d} \partial_x^\beta G(t-s,x,y)\, dW(s,y).$$

简单计算表明，对于 $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\partial_x^\beta u(t_1,x) - \partial_x^\beta u(t_2,x)|^2 &= \int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d_y} |\partial_x^\beta G(t_2-s,x,y) - \partial_x^\beta G(t_1-s,x,y)|^2\,dy\,ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d_y} |\partial_x^\beta G(t_2-s,x,y)|^2\,dy\,ds \\
&\le \int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d_y} |\partial_x^\beta G(t_2-t_1+s,x,y) - \partial_x^\beta G(s,x,y)|^2\,dy\,ds \\
&\quad + |t_1-t_2| \left\|\partial_x^\beta G(\cdot,x,\cdot)\right\|^2_{L^\infty([0,t_2],L^2(\mathbb{R}^d_y))} \\
&\lesssim t_1\,|t_1-t_2|^2 \left\|\partial_x^\beta \partial_s G(\cdot,x,\cdot)\right\|^2_{L^\infty([0,t_2],L^2(\mathbb{R}^d_y))} \\
&\quad + |t_1-t_2| \left\|\partial_x^\beta G(\cdot,x,\cdot)\right\|^2_{L^\infty([0,t_2],L^2(\mathbb{R}^d_y))}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

利用以下事实： $\partial_x^\beta G(\cdot,x,\cdot) \in C^1([0,\infty)_s, X\cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$。

类似地，对于任意 $x_1, x_2$，有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\partial_x^\beta u(t,x_1) - \partial_x^\beta u(t,x_2)|^2 &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d_y} |G(s,x_1,y) - G(s,x_2,y)|^2\,dy\,ds \\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d_y} \Big|\int_0^1 (x_2-x_1)\cdot\nabla_x G(s,(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,y)\,d\lambda\Big|^2\,dy\,ds \\
&\le |x_2-x_1|^2 \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d_y}\int_0^1 |\nabla_x G(s,(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,y)|^2\,d\lambda\,dy\,ds \\
&\le |x_2-x_1|^2 \int_0^1 \|\nabla_x G(s,(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,y)\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^d_y)}\,d\lambda
\end{aligned} \tag{4.21}$$

T后一个因子是有限的，因为 $\partial_x^\beta G(\cdot,x,\cdot) \in C^1([0,\infty)_t, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_y))$ 在 $x$ 中局部一致 .

利用 (4.20) 和 (4.21) 可得 (4.19)。由于 $\partial_x^\beta u(t,x)$ 是一个高斯过程，(4.19) 立即推出，对于任意 $m\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}|\partial_x^\beta u(t_1,x_1) - \partial_x^\beta u(t_2,x_2)|^{2m} \le C_m\left(|t_1-t_2|^m + |x_1-x_2|^{2m}\right).$$

柯尔莫哥洛夫连续性定理保证 $\partial_x^\beta u(t,x)$ 因此几乎必然关于时间是 $\alpha$-H¨older 连续的，对任意 $0<\alpha<(m-d)/(2m)$ 均成立。□

现在我们可以证明，(4.12) 中定义的函数 $u$ 确实是 (4.4) 的弱解，且符合定义 4.3 所给出的意义。

证明 $u$ 是一个弱解。**步骤 1**。 我们先检查 (4.10)。任取 $g\in C^\infty((0,\infty)\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$，满足 $\widehat{g}(t,k) = 0$ 对所有 $|k|>\kappa$均成立。于是

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d_x}\left(\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d_y} G(s-s',x,y)\,dW(s',y)\right) g(s,x)\,dsdx = \int_0^t\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d_y}\left(\int_{\mathbb{R}^d_x} G(s-s',x,y)\,g(s,x)\,dx\right) dW(s',y)\,ds, \tag{4.22}$$

为了证明这一点，只需说明 $G(s-s',x,y)\ g(s,x)$ 关于 $x\in\mathbb{R}^d$和 $s\in[0,t]$上的勒贝格测度，以及关于 $d\widehat{W}(s',y)$，是绝对可积的，其中$s'\in[0,t]$ 和 $y\in\mathbb{R}^d$。

如命题 4.8 所证明的，可以证明 $|G(s-s',\ x,\ y)|\le C(s-s',\ x)\ \langle y\rangle^{-d-1}$ 其中$C(s-s',\ x)$ 关于 $s-s'$ 和 $x$呈多项式依赖。为补偿这种关于 $x$的增长，回忆一下，对于任意 $N$, $|g(s,\ x)|\lesssim_N\langle x\rangle^{-N}$。因此， $|G(s-s',\ x,\ y)\ g(s,\ x)|\le C(t,\ N)\ \langle y\rangle^{-d-1}\langle x\rangle^{-N}$。这保证了我们可以按任意喜欢的顺序进行积分。

为了验证 (4.10)，只需证明对于所有 $s'\in[0,s]$, $s\in[0,t]$ 和 $y\in\mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d_x}G(s-s',x,y)\,g(s,x)\,dx=0. \tag{4.23}$$

这由 Plancherel 定理得出。该定理使我们可以将 (4.23) 中的积分改写为

$$\int_{\mathbb{R}^d_k}\widehat{G}(s-s',k,y)\,\widehat{g}(s,k)\,dk=$$
$$\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>c(s-s')+\kappa}\left(\frac{|k|-c(s-s')}{|k|}\right)^{H+d-\frac12}\widehat{\varphi}\left(\frac{|k|-c(s-s')}{|k|}k\right)e^{-i2\pi\left(\frac{|k|-c(s-s')}{|k|}\right)k\cdot y}\,\widehat{g}(s,k)\,dk.$$

注意， $\widehat{g}(s,\cdot)$ 的支撑集与 $\widehat{\varphi}$ 的支撑集不相交。因此，该积分为零。

**步骤 2.** 接下来我们验证 (4.9)。取某个 $g\in C^\infty((0,\infty)\ D(A^*)\cap\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$。交换积分次序后（其合理性可像步骤 1 中那样由命题 4.8 证明），(4.9) 等价于：

$$\int_{\mathbb{R}^d_x}G(t-s',x,y)\,g(t,x)\,dx+\int_{s'}^t\int_{\mathbb{R}^d_x}G(s-s',x,y)\,(-\partial_s+A^*)g(s,x)\,dx\,ds$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d_x}\varphi(x-y)g(s',x)dx \tag{4.24}$$

对所有 $s'\in[0,t]$ 和所有 $y\in\mathbb{R}^d$ 均成立。接下来，我们可以利用 $-\partial_s+A^*$ 的预伴随算子来改写左边的第二项。利用 $G(0,x,y)=\varphi(x-y)$ 这一事实后，我们发现 (4.24) 成立当且仅当：

$$\int_{s'}^t\int_{\mathbb{R}^d_x}(\partial_s+A)G(s-s',x,y)\,g(s,x)\,dx\,ds=0\qquad\forall\ s'\in[0,t],\ y\in\mathbb{R}^d. \tag{4.25}$$

因此，只需证明 $(\partial_t+A)G(t,\ x,\ y)=0$。根据命题 4.8，可以对 $x$ 作傅里叶变换，因此只需验证：

$$\partial_t\widehat{G}(t,k,y)+c\,\mathrm{div}_k\left(\frac{k}{|k|}\widehat{G}(t,k,y)\right)+c\frac{H+d-\frac12}{|k|}\,\widehat{G}(t,k,y)=0 \tag{4.26}$$

一　利用.....这一事实直接计算，即可轻松验证 (4.26) 确实成立。　t:

$$\widehat{G}(t,k,y)=\chi_{|k|>ct+\kappa}\left(\frac{|k|-ct}{|k|}\right)^{H+d-\frac12}\widehat{\varphi}\left(\frac{|k|-ct}{|k|}k\right)e^{-i2\pi\left(\frac{|k|-ct}{|k|}\right)k\cdot y}.$$

□

4.2. **的相关函数** $H \in (0,1)$。我们的第一个结果给出了任意有限时间下解的相关函数的显式公式。请注意，无论 $H$ 的值如何，该结果都成立，因为 $t > 0$ 有限。不过，只有当 $H \in (0,1)$ 时，我们才能（作为函数）取极限。

**命题 4.10.** 对于任意有限时间，相关函数满足

$$\mathbb{E}[u(t,x_1)u(t,x_2)] = \int_{\mathbb{R}^d_k} |k|^{-(2H+d)}\, F(t,|k|)\, e^{i2\pi k(x_1-x_2)}\, dk$$

其中 $F$ 是注 *3.3* 中给出的函数。

证明。对于任意有限时间 $t > 0$，有

$$\mathbb{E}[u(t,x_1)u(t,x_2)] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(t-s)A}[\tau_y\varphi](x_1) e^{-(t-s)A}[\tau_y\varphi](x_2)\, dy\, ds.$$

变量替换 $s \mapsto t-s$ 得到

$$\mathbb{E}[u(t,x_1)u(t,x_2)] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-sA}[\tau_y\varphi](x_1) e^{-sA}[\tau_y\varphi](x_2)\, dy\, ds.$$

利用 结合命题 4.8 和 Plancherel 定理（关于 $y$ 变量），我们得到

$$\mathbb{E}[u(t,x_1)u(t,x_2)] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|k|}{|k|+cs}\right)^{2H+1} |\widehat{\varphi}(k)|^2\, e^{-i2\pi\left(\frac{|k|+cs}{|k|}\right)k\cdot(x_1-x_2)} dk\, ds.$$

接下来，我们进行变量替换 $k \mapsto \frac{|k|}{|k|+cs}\, k$，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(t,x_1)u(t,x_2)] &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{|k|>cs+\kappa} \left(\frac{|k|-cs}{|k|}\right)^{2H+d} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{|k|-cs}{|k|}\, k\right)\right|^2 e^{-i2\pi k\cdot(x_1-x_2)}\, dk\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i2\pi k\cdot(x_1-x_2)}\, |k|^{-2H-d} \left(\int_0^t \chi_{|k|>cs+\kappa}\, (|k|-cs)^{2H+d} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{|k|-cs}{|k|}\, k\right)\right|^2 ds\right) dk.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

作为推论，我们令 $t \to \infty$ 趋于极限，并证明定理 4.4 的 (ii) 和 (iv) 点。

**推论 4.11**。设 $H \in (0,1)$。则 $u(t,x)$ 依分布收敛于零均值高斯场 $u_\infty(x)$，其相关结构如下：

$$\mathbb{E}[u_\infty(x_1)u_\infty(x_2)] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[u(t,x_1)u(t,x_2)]$$

此外

$$\mathbb{E}[u(t,x_1)u(t,x_2)] = C(d,H)\, \mathcal{K}_H(x_1-x_2) - (\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)(x_1-x_2) + O\Big((ct)^{-2H}\Big)$$

其中

$$\mathcal{K}_H := \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{|k|>\kappa}\, |k|^{-(2H+d)}\right] \quad \text{and} \quad \mathcal{J}_H := \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{|k|>\kappa}\, \Psi_{d,H}(|k|)\right] \tag{4.27}$$

并且 $C(d, H)$ 和 $\Psi_{d,H}$ 见定理 *3.2*。

证明。定义

$$v(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_y} G(s,x,y)\, dW(s,y),$$

我们注意到，对于固定的 $t$，$v(t,x)$ 和 $u(t,x)$ 是分布相同的高斯随机变量，因为它们的均值和相关函数相同。

首先我们证明

$$v_\infty(x) := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d_y} G(s,x,y)\, dW(s,y)$$

是一个定义良好的高斯场。这是因为对于固定的 $x \in \mathbb{R}^d$，函数 $G(\cdot,x,\cdot) \in L^2([0,\infty]_s \times \mathbb{R}^d_y)$。事实上，按照命题 4.10 中的论证，很容易得到

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d_y} |G(s,x,y)|^2\, dy\, ds = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|k|}{|k|+cs}\right)^{2H+1} |\widehat{\varphi}(k)|^2\, dk\, ds.$$

$v(t)$ 收敛到 $v_\infty$ 现在是标准的。注意：

$$v_\infty(x) - v(t,x) = \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^d_y} G(s,x,y)\, dW(s,y),$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|v_\infty(x) - v(t,x)|^2 &= \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^d_y} |G(s,x,y)|^2\, dy\, ds \\
&= \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|k|}{|k|+cs}\right)^{2H+1} |\widehat{\varphi}(k)|^2\, dk\, ds \\
&= \frac{1}{2cH} \int_{\mathbb{R}^d} (|k|+ct)^{-2H} |k|^{2H+1} |\widehat{\varphi}(k)|^2\, dk
\end{aligned}$$

同样的论证也允许我们对 $v(t)$ 的二点相关函数取 $t \to \infty$ 的极限。这些二点相关函数与命题 4.10 中 $u(t)$ 的二点相关函数一致，并给出 $u_\infty$ 的相关函数。交换极限与期望的依据，与定理 2.4 证明中步骤 2 的论证相同。事实上，注意到方差 $\mathbb{E}|u_\infty(x)|^2$ 是有限的，且与 $x \in \mathbb{R}^d$ 无关。

当 $t \to \infty$ 时，相关函数的收敛速率直接取决于命题 4.10 中的函数 $F$。仔细分析可知，收敛速率为 $(ct)^{-2H}$ 的某个倍数。□

既然我们知道，对于 $H \in (0,\ 1)$，$u_\infty$ 是一个以$x \in \mathbb{R}^d$为指标集的定义良好的高斯场，我们可以进一步考察它的连续性和正则性。关于这一点，我们有如下结果：

**推论 4.12.** 假设 $H \in (0,\ 1)$。极限 $u_\infty = \lim_{t\to\infty} u(t)$ 是$x \in \mathbb{R}^d$ 中的一个高斯场，它有一个修正，其样本路径几乎处处为 $\alpha$-*H¨older* 连续，对任意 $0 < \alpha < H$均成立。更准确地说，对于所有 $x$、$\ell \in \mathbb{R}^d$，增量的方差满足

$$\mathbb{E}|\delta_\ell u_\infty(x)|^2 \le \frac{C_{\mathcal{K}}}{H(1-H)}|\ell|^{2H} + C_{\mathcal{J}}|\ell|^2, \tag{4.28}$$

其中 $C_{\mathcal{K}}$ 和 $C_{\mathcal{J}}$ 仅依赖于 $H$ 和 $d$，且当 $H$ 趋于0 或1时不会发散。

证明。 由 (4.13)，我们有

$$\mathbb{E}|\delta_\ell u_\infty(x)|^2 = 2C(d,H)[\mathcal{K}_H(0) - \mathcal{K}_H(\ell)] - 2[(\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)(0) - (\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)(\ell)]. \tag{4.29}$$

**步骤 1.** 式（4.27）中的函数 $(\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)$ 是光滑的，因为 $\Psi_{d,\ H}(|k|)$ 在 $k$ 中以任意快的速度衰减。此外，我们可以写成：

$$1 - e^{2\pi i k\cdot\ell} = 1 - \cos(2\pi k\cdot\ell) - i\,\sin(2\pi k\cdot\ell). \tag{4.30}$$

接着注意到

$$\int_{\mathbb{R}^d_k} \sin(2\pi k\cdot\ell)\,\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{2-(2H+d)}\,|\Psi_{d,H}(|k|)|\,dk = 0$$

由于 $\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\Psi_{d,\,H}(|k|)$ 是旋转不变的，且作变量替换 $k\mapsto -k$。

因此，

$$\begin{aligned}|(\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)(0) - (\mathcal{K}_H * \mathcal{J}_H)(\ell)| &= \int_{\mathbb{R}^d_k} [1-\cos(2\pi k\cdot\ell)]\;\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,|\Psi_{d,H}(|k|)|\,dk\\ &\le \int_{\mathbb{R}^d_k} \frac{(2\pi|k|\ell)^2}{2}\,\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,|\Psi_{d,H}(|k|)|\,dk\\ &\le 2\pi^2\,|\ell|^2\int_{\mathbb{R}^d_k}|k|^{2-(2H+d)}\,|\Psi_{d,H}(|k|)|\,dk.\end{aligned}$$

后一个积分有限，这是因为 $\Psi_{d,\,H}(|k|)$ 快速衰减。这就处理了 (4.29) 右端的第二项。

**步骤 2.** 为了研究 H¨older 正则性，主要项是 (4.29) 右端的第一项。我们将积分拆分为两部分：

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_H(0)-\mathcal{K}_H(\ell) &= \int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>\kappa}\left(1-e^{2\pi ik\cdot\ell}\right)\,|k|^{-(2H+d)}\,dk\\ &= \int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|<r}\chi_{|k|>\kappa}\left(1-e^{2\pi ik\cdot\ell}\right)\,|k|^{-(2H+d)}\,dk\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>r}\chi_{|k|>\kappa}\left(1-e^{2\pi ik\cdot\ell}\right)\,|k|^{-(2H+d)}\,dk.\end{aligned}\tag{4.31}$$

我们选择 $r=(2\pi|\ell|)^{-1}$；可以仔细验证，这一选择是最优的。进一步假设 $|\ell|<\kappa$，另一种情形更容易处理，可以单独研究。

(4.31) 右侧的第二项给出：

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>r}\chi_{|k|>\kappa}\left(1-e^{2\pi ik\cdot\ell}\right)\,|k|^{-(2H+d)}\,dk\Big| \le \Big|\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>r}\,|k|^{-(2H+d)}\,dk\Big|.$$

接着，对变量 $k$ 作球坐标变换，

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>r}\,|k|^{-(2H+d)}\,dk\Big| \lesssim \Big|\int_{|k|>r}|k|^{-(2H+1)}\,d|k|\Big| \lesssim \frac{1}{H}\,r^{-2H} \lesssim \frac{1}{H}\,|\ell|^{2H}.$$

右侧的第一项在 (4.31) 中需要更加谨慎。像之前一样使用 (4.30)，注意到 at

$$\int_{|k|<r}\sin(2\pi k\cdot\ell)\;\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,dk = 0,$$

a通过变量替换 $k\mapsto -k$ 很容易看出这一点。因此，只需对其进行界定

$$\begin{aligned}\Big|\int_{|k|<r}[1-\cos(2\pi k\cdot\ell)]\;\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,dk\Big| &\le \int_{|k|<r}\frac{(2\pi|k||\ell|)^2}{2}\,\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,dk\\ &\lesssim 2\pi^2|\ell|^2\int_\kappa^r |k|^{1-2H}\,d|k|\\ &\lesssim \frac{1}{2-2H}\,|\ell|^{2H}.\end{aligned}$$

这就完成了对（4.28）的证明。利用关于方差的这一界，以及基于 $u_\infty$ 的高斯性和柯尔莫哥洛夫连续性定理的标准论证，可以证明 $u_\infty$ 几乎处处具有 $\alpha$-Hölder 连续路径，其中任意 $0<\alpha<H$ 均可。□

**4.3. 关于 $H\in[-d/2,0]$ 的相关函数。** 对于此范围内的 $H$ 值，我们仍将证明 $u_\infty=\lim_{t\to\infty}u(t)$ 存在。然而，$u_\infty$ 不能解释为一个函数；事实上，它的方差不是有限的。相反，$u_\infty$ 是一个随机分布，作用于测试函数空间 $X\cap S(\mathbb{R}^d)$。我们的第一个结果是命题 4.10 在分布背景下的对应版本。

收敛速率取决于所选测试函数的某些可积性和可微性性质。若使用 $X\cap S(\mathbb{R}^d)$ 中的施瓦茨函数进行测试，收敛速度将快于 $t^{-n}$，对任意 $n\in\mathbb{N}$ 均如此（如下文所示）。然而，人们可能希望使用正则性较低或衰减较慢的函数进行测试，在这种情况下，可以量化该收敛速率。

在此之前，需要确定一个合适的测试函数空间，使得“测试”仍有良好定义。鉴于 $u(t,\ x)$ 通常不会沿 $x$ 变量衰减，因此需要对测试函数施加一定的衰减条件。对于 $n\in\mathbb{N}$，定义空间[6] $H^{n,n}(\mathbb{R}^d)$，它是在该范数下 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 的闭包

$$\|g\|_{H^{n,n}(\mathbb{R}^d)}=\sum_{j=0}^{n}\left\|\langle x\rangle^j g\right\|_{H^{n-j}(\mathbb{R}^d_x)}.$$

不难证明，$H^{n,n}(\mathbb{R}^d)$ 是一个嵌入在 $L^2(\mathbb{R}^d_x)$ 中的巴拿赫空间代数，因此傅里叶变换对这类函数是良定义的。此外，当且仅当 $g\in H^{n,n}(\mathbb{R}^d_x)$ 时，$\widehat{g}\in H^{n,n}(\mathbb{R}^d_k)$（且两种范数等价）。

**命题 4.13.** 设 $H\in[-d/2,0]$。对于任意的 $t>0$ 和任意测试函数 $g_1,g_2\in H^{n,n}(\mathbb{R}^d)$，满足 $3(d+1)/2<n$，相关函数满足

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle u(t),g_1\rangle\langle u(t),g_2\rangle]&=C(d,H)\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\Psi_{d,H}(|k|)\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>ct+\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,[\Psi_{d,H}(|k|-ct)-\Psi_{d,H}(0)]\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk\\&=C(d,H)\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\Psi_{d,H}(|k|)\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk\\&\quad+C(d,H)\left(\frac{1}{ct}\right)^{-(2H+d)-2n}\|g_1\|_{H^{n,n}}\,\|g_2\|_{H^{n,n}}\end{aligned}\tag{4.32}$$

其中 $C(d,H)$ 和 $\Psi_{d,H}$ 由定理 3.2 给出，而 $F$ 由 (3.3) 给出。

**注 4.14.** 若选取测试函数 $g_1,g_2\in X\cap\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，则上述结果给出的收敛速率正比于 $(ct)^{-(2H+d)-2n}$，其中 $n$ 可任意大。

[6]需要指出的是，或许可以采用更好的空间，也就是说，可以要求物理空间中的衰减更弱。不过，这需要仔细研究适用于 $u(t,x)$ 和 $G(s,x,y)$ 的恰当函数空间。我们将这一研究留待未来开展。

证明。 **步骤 1**。 首先，注意到对于每个 $t>0$， $\langle u(t)\ g_1\rangle$ 都有定义。这可通过类似于证明 (4.22) 合理性的论证得出，即 $G(s,x,y)g_1(x)$ 关于 $x$ 上的勒贝格测度以及关于 $dW(s,y)g_1$绝对可积。事实上，我们已经证明了$|G(s,x,y)| \lesssim_t \langle x\rangle^{d+1}\langle y\rangle^{-d-1}$，因此只需证明 $\langle x\rangle^{d+1}|g_1(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d_x)$。然而，这可由 $n$ 的选取以及柯西-施瓦茨不等式得出：

$$\int_{\mathbb{R}^d}\langle x\rangle^{d+1}|g_1(x)|\,dx \lesssim \|g_1\|_{H^{n,n}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\langle x\rangle^{-d-1}\,dx\right)^{1/2}.$$

根据命题 4.10，我们有：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle u(t),g_1\rangle\langle u(t),g_2\rangle] &= \int_{\mathbb{R}^d_{x_1}\times\mathbb{R}^d_{x_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d_k}|k|^{-2H-d}F(t,|k|)e^{i2\pi k(x_1-x_2)}\,dk\right)g_1(x_1)g_2(x_2)\,dx_1dx_2\\ &= \int_{\mathbb{R}^d_k}|k|^{-2H-d}F(t,|k|)\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}dk\end{aligned}$$

最后，我们使用注 3.3 中得到的 $F(t,|k|)$ 表达式。由此得到 (4.32)。

**步骤 2.** 为了得到关于 $t$ 的渐近展开，注意只需研究 (4.32) 右端的最后一项。利用 $\Psi_{d,H}$ 的定义，该项可改写如下：

$$-\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>ct+\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\left(\int_\kappa^{|k|-ct}s^{2H+d}\psi(s)\,ds\right)\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk.$$

注意，通常我们无法期待比下式更好的界：

$$\left|\chi_{|k|>ct+\kappa}\left(\int_\kappa^{|k|-ct}s^{2H+d}\psi(s)\,ds\right)\right| \le C(d,H)\lesssim 1.$$

当然，如果 $\psi$ 在零点附近的一个大球内消失，我们可以得到更好的界；但这并非我们所关注的物理情形。

因此，根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>ct+\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\left(\int_\kappa^{|k|-ct}s^{2H+d}\psi(s)\,ds\right)\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk\right|\\ &\qquad\le C(d,H)\int_{\mathbb{R}^d_k}\chi_{|k|>ct+\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,|\widehat{g_1}(k)|\,|\widehat{g_2}(k)|\,dk\\ &\qquad\lesssim C(d,H)\,(ct)^{-(2H+d)-2n}\,\|g_1\|_{H^{n,n}}\,\|g_2\|_{H^{n,n}}.\end{aligned}$$

□

借助命题 4.13 中得到的相关函数公式，我们现在可以研究当 $t\to\infty$ 时 $u(t)$ 的渐近行为。这就是下一个结果的内容。

**推论 4.15.** 设 $H\in[-d/2,0]$ 和 $n>3(d+1)/2$。方程(4.12) 中的解 $u(t)$ 当 $t\to\infty$ 时依分布收敛至作用于 $X\cap H^{n,n}(\mathbb{R}^d)$上的随机高斯测度。此外，相关

极限高斯测度的相关结构如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle u_\infty, g_1\rangle\langle u_\infty, g_2\rangle] &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\langle u(t), g_1\rangle\langle u(t), g_2\rangle] \\ &= C(d,H)\int_{\mathbb{R}^d_k} \chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d_k} \chi_{|k|>\kappa}\,|k|^{-(2H+d)}\,\Psi_{d,H}(|k|)\,\widehat{g_1}(k)\,\overline{\widehat{g_2}(k)}\,dk.\end{aligned} \tag{4.33}$$

对于任意 $g_1$、$g_2 \in X \cap H^{n,\,n}(\mathbb{R}^d)$。

证明。 $\langle u(t)\ g\rangle$ 的收敛性（当 $t\to\infty$ 时）可由与推论 4.11 的证明中类似的论证得到，因此我们着重证明（4.33）。在（4.32）中取 $t\to\infty$ 即可得到（4.33）中的第二个等式。最后，第一个等式可采用定理 2.4 证明中步骤 2 的相同论证，因此略去。□

**4.4. 情形** $H = -d/2$。 在此情形下，请注意，推论 4.15 中得到的极限高斯场 $u_\infty$ 似乎在以下两个方面不同于通常的白噪声测度：

（i）测试函数空间 $X \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 仅包含其傅里叶变换在 $|k|<\kappa$ 中消失的函数；以及

（ii）式 (4.33) 中的最高阶项，其中涉及对波数 $|k|>\kappa$ 的截断。

通过定义一个连续零均值高斯场 $u_{\mathcal{I}}$ 及其相关函数，可以解决问题（ii）

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_{\mathcal{I}}(x_1)u_{\mathcal{I}}(x_2)] &= \mathcal{J}_{-d/2}(x_1-x_2) + \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{|k|\le\kappa}\right](x_1-x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_k} \chi_{|k|>\kappa}\,\Psi_{d,H}(|k|)\,e^{2\pi i k\cdot(x_1-x_2)}\,dk + \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{|k|\le\kappa}\right](x_1-x_2) \\ &=: \mathcal{I}(x_1-x_2),\end{aligned} \tag{4.34}$$

其中 $\mathcal{J}$ 在 (4.27) 中定义。注意， $\mathcal{I}(x)$ 是一个连续的径向平方可积函数，因此比狄拉克 δ 函数规则得多。例如，在一维情形 $d=1$ 中，右端的第二项对应于 sinc 函数。

利用 (4.34)，我们可以将 (4.33) 中解 $u_\infty$ 的相关函数改写如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle u_\infty, g_1\rangle\langle u_\infty, g_2\rangle] &= \mathbb{E}[\langle dW, g_1\rangle\langle dW, g_2\rangle] - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{I}(x_1-x_2)\,g_1(x_1)\,g_2(x_2)\,dx_1dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_x} g_1(x)g_2(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{I}(x_1-x_2)\,g_1(x_1)\,g_2(x_2)\,dx_1dx_2\end{aligned} \tag{4.35}$$

对于任意 $g_1,\ g_2 \in X\cap\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$。这就解决了问题（ii）。

接下来我们关注问题（i），即测试函数的空间。可以将 $u(t)$ 视为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ 中的分布（而不是 $(X\cap\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))'$），这是一种自然的处理方式。固定一个测试函数 $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，使得

$$\begin{cases}\widehat{h}(k) = 0 \qquad \text{if } |k|\ge\kappa, \\ \widehat{h}(k) \text{ is radial and takes values in } [0,1] \text{ for } |k|<\kappa.\end{cases} \tag{4.36}$$

对于任意测试函数 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，可以将其分解为

$$g = \mathcal{L}_1 g + \mathcal{L}_2 g := \mathcal{F}^{-1}[\,\widehat{g}\,\widehat{h}\,] + \mathcal{F}^{-1}[\,\widehat{g}\,(1-\widehat{h})\,].$$

接下来，可以对定义 4.3 中的解这一概念稍作修正。事实上，可以将 (4.4) 的弱解定义为满足 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty)_t \times \mathbb{R}^d)$ 几乎处处成立的随机过程 $u$，并且对所有 $g \in C^\infty((0,\infty)\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x))$

$$\int_{\mathbb{R}^d_x} u(t,x)\mathcal{L}_2 g(t,x)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_x} u(s,x)(-\partial_s + A^*)\mathcal{L}_2 g(s,x)dsdx$$
$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_y} \left( \int_{\mathbb{R}^d_x} \varphi(x-y)\, \mathcal{L}_2 g(s,x)dx \right) dW(s,y)$$

and

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d_x} u(s,x)\, \mathcal{L}_1 g(s,x)dsdx = 0.$$

请注意，式（4.12）中得到的解在采用这个新定义后仍然是一个解。此外，只要函数 $h$ 满足式（4.36），该解就不依赖于函数 $h$ 的选取。

这使我们能够将 $u(t)$ 和 $u_\infty$ 视为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ 中的分布，从而将式（4.35）推广到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 中的测试函数。于是，式（4.35）的最高阶项确实对应于经典意义下的白噪声。

## 5. 数值模拟

本章节的目标是进行数值模拟，以说明前面章节中提出的理论。我们回顾连续问题（3.12）：

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t,k) + \mathfrak{L}\big(\widehat{u}\big)(t,k) + \mathfrak{D}\big(\widehat{u}\big)(t,k) = \widehat{f}(t,k) & \text{for } t>0, k\in\mathbb{R}^d, |k|>\kappa \\ \widehat{u}(t,k) = 0 & \text{for } t>0, k\in\mathbb{R}^d, |k|\le\kappa, \\ \widehat{u}(0,k) = 0 & \text{for } k\in\mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中

$$\mathfrak{L}\big(\widehat{u}\big)(t,k) := c\,\mathrm{div}_k\left(\frac{k}{|k|}\,\widehat{u}(t,k)\right) \quad \text{and} \quad \mathfrak{D}\big(\widehat{u}\big)(t,k) := \left(c\,\frac{H+\frac{1}{2}}{|k|} + (2\pi)^2\nu|k|^2\right)\widehat{u}(t,k) \tag{5.2}$$

这里，$H$ 最终是解在无限时间下的赫斯特指数，而 $\nu > 0$ 表示黏度。引入黏度是必要的，这样才能在有限时间内达到统计平稳态，从而可以进行统计分析。另一方面，对于（3.1）中提出的无黏问题，时间 $t$时会出现小至 $1/ct$ 的尺度；在具有有限分辨率的有限周期盒中进行模拟时，这会导致数值不稳定性并引发爆炸。

我们数值方法结合了时间预测校正格式 [24] 和伪谱方法 [36]的思想。具体而言，这意味着使用离散傅里叶变换（DFT），这会对离散化作出某些选择。

我们将用 $\widehat{u}[t,k]$ 表示其连续对应物为 $\widehat{u}(t,\ k)$的（离散）向量。我们用 $\Delta t > 0$ 表示时间步进，用 $\Delta x > 0$ 表示网格尺寸。网格尺寸也是可访问的最小长度尺度。

### 5.1. **数值方法**。

5.1.1. 离散化。 我们通过考虑单位长度为 $L_{tot} = 1$的离散周期盒 $x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ 来离散化物理空间，在每个方向上使用 $N = 2^n$ 个配点，其中 $n \in \mathbb{N}$，并约定0不是自然数。因此，网格尺寸为

$$\Delta x = L_{tot}/N.$$

波矢 $k = (k_i)_{1 \le i \le d}$ 离散化为

$$k_i = [0, 1, ..., N/2, -N/2 + 1, -N/2 + 2, ..., -1]\Delta k,$$

其中，谱分辨率为

$$\Delta k = 1/L_{tot}.$$

使用离散傅里叶变换（DFT）时，这种离散化是标准做法。选择从 $k_i = 0$ 作为数组的第一个元素，是由定义 DFT 及其逆变换时采用的约定所决定的。

为了离散化 (5.2) 中的散度项 $\mathfrak{L}(\widehat{u})$，我们引入波数各分量 $k_j$ 的如下导数离散化：

$$\partial_{k_j} \widehat{g}[t, k] = \mathrm{DFT}\left[-2\pi i \tilde{x}_j \mathrm{DFT}^{-1}\left[\widehat{g}[t, k]\right]\right], \tag{5.3}$$

其中，分量 $\tilde{x}_j = [0, 1, ..., N/2 - 1, 0, -N/2 + 1, -N/2 + 2, ..., -1]\Delta x$作为向量，而 $\mathrm{DFT}^{-1}\left[\widehat{g}[k]\right]$ 作为标量，对应于位置 $j$ 的分量 $x_j$；为符合微分运算的奇偶性，“奈奎斯特”模态被设为 0。

$\widehat{\ }$5.1.2. 强迫项的离散化。 为了生成强迫项 $f[t, k]$，我们在每个时间步长生成一个由 $N^d$ 个相互独立、均值为零且方差为一的高斯随机变量组成的样本，并将其存储在向量 $g[t, x]$ 中。然后，我们用适当的因子 $(\Delta x)^{d/2}$ 对它们加权，进行离散傅里叶变换，并乘以示性函数 $\chi_{3 \le |k| L_{tot} \le 5}$。这尤其确保了能量不会注入到模态 $k = 0$，而主要注入到大尺度上。用数学语言表示，可得

$$\widehat{f}[t, k] = \chi_{3 \le |k| L_{tot} \le 5} \, \mathrm{DFT}\left[(\Delta x)^{d/2} \, g[t, x]\right]. \tag{5.4}$$

最后，我们选择 $\kappa = 1/L_{tot}$，使其小于$\widehat{\ }$源 $f[t, k]$ 的最小非零波数（见注 1.2）。

5.1.3. 算法。

- 我们按照 (5.4) 预先计算外力 $\widehat{\ }f[t, k]$。
- 初始化步骤： $\widehat{u}[0, k] = 0$。
- 归纳步骤：给定 $\widehat{u}[t, k]$，我们通过以下过程计算 $\widehat{u}[t + \Delta t, k]$ ：

(1) (预测步骤 - 空间部分) 根据 (5.3) 计算 $\mathfrak{L}(\widehat{u})[t, k]$，并计算数值阻尼 $\mathfrak{D}(\widehat{u})[t, k]$。

(2) (预测步骤 - 时间部分) 对于每个满足 $|k| \ge \kappa$ 的 $k$，根据以下公式计算预测器 $\widehat{u}^*[t, k]$

$$\frac{\widehat{u}^*[t, k] - \widehat{u}[t, k]}{\Delta t} + \mathfrak{L}(\widehat{u})[t, k] + \mathfrak{D}(\widehat{u})[t, k] = \widehat{f}[t, k](\Delta t)^{-\frac{1}{2}} \, .$$

（3）（校正步骤 - 空间部分）根据（5.3）计算 $\mathfrak{L}(\widehat{u}^*)[t, k]$，以及数值阻尼$\mathfrak{D}(\widehat{u}^*)[t, k]$。

（4）（校正步骤 - 时间部分）对于每个满足 $|k| \geq \kappa$ 的 $k$，根据以下内容计算校正器 $\widehat{u}[t+\Delta t,k]$

$$\frac{\widehat{u}[t+\Delta t,k]-\widehat{u}[t,k]}{\Delta t}+\frac{\mathfrak{L}\big(\widehat{u}^*\big)[t,k]+\mathfrak{D}\big(\widehat{u}^*\big)[t,k]+\mathfrak{L}\big(\widehat{u}\big)[t,k]+\mathfrak{D}\big(\widehat{u}\big)[t,k]}{2}=\widehat{f}[t,k](\Delta t)^{-\frac{1}{2}}\ .$$

5.2. **数值方法的讨论**。

5.2.1. 算子的离散化 $\mathfrak{L}$。无论如何估计 $\mathfrak{L}\big(\widehat{u}\big)$（见式（5.2））中涉及的导数，都不适合采用笛卡尔方式离散化波矢，因为这并不适用于具有天然球对称性的这一数值问题。此外，$\widehat{\ }$外力 $f$仅具有统计各向同性，而演化的确定性部分具有球对称性[7]。尽管如此，目前采用笛卡尔形式进行离散化，能够方便且标准地实现离散傅里叶变换（使用快速傅里叶变换算法），从而通过对 $\widehat{u}[t,k]$进行逆离散傅里叶变换，得到物理空间中的解 $u[t,x]$，其定义在离散位置集合 $x=(x_i)_{1\leq i\leq d}$ 上，且 $x_i=[0,1,...,N/2,-N/2+1,-N/2+2,...,-1]\Delta x$。

如前所述，我们无法将 $\widehat{u}(t,\ k)$ 理解为 $k$ 的逐点函数。为此，需要论证问题在傅里叶空间中的表述，并赋予粗糙场的散度以适当的含义；详见章节 3 和 4。为进行数值模拟，我们因此提出了式 (5.3)，将其作为导数的一种数值实现，其中使用了正反向离散傅里叶变换，并乘以适当的空间相关因子。

5.2.2. 算子的离散化 $\partial_t$。对于给定时间步进 $\Delta t$ 的时间积分，我们采用显式预测-校正方法，并使用外力的一次独立实现：先通过显式欧拉离散格式预测解 $\widehat{u}[t+\Delta t,k]$，以先前时间步长 $\widehat{u}[t,k]$ 的状态作为初始条件；再通过另一欧拉格式进行校正，使初始条件与预测值的权重相等。

5.2.3. 离散化参数的选择。下面给出模拟中使用的最后几个相关参数。请注意，空间分辨率 $\Delta x=L_{tot}/N$ 由周期盒边长的物理长度决定（下文中，不失一般性，我们取 $L_{tot}=1$），而每个方向上的配点数为 $N$。正如我们将看到的，黏度$\nu$ 据此选定。

首先，需要选取时间步长 $\Delta t$。目前，我们尚不清楚所提出算法中动力学的 CFL判据。因此，现阶段我们假设，合理的稳定性判据可能来自时间导数和黏性项。基于这一思路，考虑热方程的数值稳定性似乎是合理的；该稳定性由黏性项决定，并要求[8] 满足 $\nu\Delta t<(\Delta x)^2/2$（例如参见文献 [37]）。

未来将针对非常高的配点数量$N$ 进行模拟，以便考虑较小的黏度 $\nu$。即使在最理想的情况下，即 $\nu\Delta t$ 为 $\Delta x$量级时，计算成本最终也会变得难以承受。因此，我们选择了一个与分辨率和维数 $d$ 无关、且由 $\Delta t=5\times10^{-3}$ 给出的时间步长。对于 $d=1$ 和 $d=2$ 使用 $\Delta t=\ (\Delta x)^{\ 2}/2$ 进行的额外模拟（未显示数据），以及对于中等数量的配点 $N$ 进行的模拟，都得到了与以下情况相似的数值结果

[7]事实上，所有量都涉及向量振幅 $|k|$。此外，$\mathfrak{L}(\widehat{u})$可以写成关于 $|k|$ 的径向导数（见 (3.2)）。[8]还可以构造一种更复杂的格式，在时间步进中显式纳入底层热方程的精确解；这称为指数格式，并可达到 $\nu\Delta t$ 阶 $\Delta x$。

$\Delta t = 5 \times 10^{-3}$。目前尚不清楚为何所选的时间步长不会导致数值不稳定性，尽管我们可以认为黏度将被选取得非常小。

5.3. **模拟**。

5.3.1. 黏度的确定与平均过程。 理论章节中给出的所有预测，都涉及（3.12）中回顾的连续问题的解 $u(t,\ x)$ 的统计行为，无论是否包含黏度。从数值角度来看，我们需要确定一个时间 $T_*$ ，此时系统已达到统计平稳状态，并在该状态下用时间上的经验平均来近似数学期望。由于随着时间推移，能量级联过程最终会使越来越高波数 $k$ 对应的模态得到激发，我们引入黏度，以便在能量到达可达的最高波数后将其全部耗散

$$k_{\max} := (N/2)\Delta k.$$

在无黏度（$\nu = 0$）状态下，低波数处注入的能量最终会在一个量级为下述值的时间尺度内到达 $k_{\max}$

$$T_* := k_{\max}/c.$$

我们选择 $\nu$ 小于 $ck_{\max}^{-3}$ ，以确保高波数处的谱密度显著下降（见定理 3.7）。实际操作中，我们将通过不同取值的 $\nu$开展探索性模拟，这些取值均满足上述标准。该标准对于确保人工波数周期盒边界处没有波发生反射至关重要。我们将把 $T_*$视为达到统计平稳状态的时间。

随后，我们让模拟继续运行 $T_*$，并每隔 $(10^3\Delta t)$ 从由 100 个样本组成的集合中计算稍后定义的统计估计量的平均值，以确保统计独立性[9]。更明确地说，给定时间函数的后续时间平均值 $\langle g[t]\rangle_t$ $g[t]$ 将按以下方式计算:

$$\langle g[t]\rangle_t := \frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} g[T_* + n \times (10^3\Delta t)]. \tag{5.5}$$

相应地，我们将时间积分停止在

$$T^* = T_* + 100 \times (10^3\Delta t).$$

采用这些选择后，配点数量 $N$越多，模拟运行时间就越长，但这使得黏度可以越来越小，而这对于形成更宽广的惯性区间是必要的。

5.3.2. 关键统计量的定义与估计。首先，解 $u[t,x]$ 在给定时刻 $t$ 的 $L^2$-范数 $\sigma_u^2[t]$ 定义为

$$\sigma_u^2[t] = \sum_k |\widehat{u}[t,k]|^2\Delta k, \tag{5.6}$$

其中求和遍历离散波矢 $k$的所有可能取值。初始时，我们有$\sigma_u^2[0] = 0$，随后它会迅速增长，并在远早于$T_*$ 之前围绕某个均值波动（数据未显示）。前述均值 $\langle\sigma_u^2[t]\rangle_t$的时间平均过程定义见（5.5），可将其视为解的方差；我们已验证，只要 $\nu$ 取得足够小，该方差便与黏度无关，这正是预期的结果。从物理角度看，这与以下观察结果一致：在较大的雷诺数下，纳维–斯托克斯方程解的方差与黏度无关（1.1）。

[9]样本数量以及样本之间的时间间隔是根据经验选取的。

为了更准确地刻画解的统计行为，特别是在 $L^2$-范数开始围绕某个均值（5.6）波动时，我们将能量谱密度定义为以周期图估计的量，即傅里叶模态的模平方，也就是

$$\widehat{C}_u(t,k) = |\widehat{u}[t,k]|^2, \tag{5.7}$$

及其时间平均版本

$$\widehat{C}_u(k) = \langle |\widehat{u}[t,k]|^2 \rangle_t \tag{5.8}$$

其中时间平均定义见 (5.5)。

另一个非常重要的量是所谓的二阶结构函数，即尺度为 $\ell \in \mathbb{R}^d$ 的增量的方差，其定义为

$$S_2(\ell) = \langle (u[t,x+\ell] - u[t,x])^2 \rangle_{t,x}, \tag{5.9}$$

其中时间平均定义见 (5.5)，此外，对于给定的空间函数 $g[x]$，空间平均取遍 $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle g[x] \rangle_x := \frac{1}{L_{\text{tot}}^d} \sum_x g[x] (\Delta x)^d.$$

其中求和遍及离散波矢 $x$ 的所有可能取值。我们回顾一下，对于纳维–斯托克斯方程的解，观察发现，当雷诺数趋于无穷大时， $S_2(\ell)$ 的行为如 $|\ell|^{2/3}$ ，这对应于 H¨older 型正则性，其中 $H = 1/3$ （参见 (1.2)）。

5.3.3. 维数为 $d = 1$ 时的结果与讨论。 我们在图2中展示空间维数为 $d = 1$ 时的模拟结果。我们采用了 $c = 1$ 和 $H = 1/3$，时间步长为 $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$，其取值依据第5.2.3节中的讨论。如第5.3.1节所述，我们运行模拟直至$T_* = k_{\max}/c$ ，此时所有可达长度尺度和波长都已得到充分激发。在此瞬态之后，我们每隔2个时间单位对各种估计量取平均，例如能量谱密度 (5.8) 和二阶结构函数 (5.9)。事实上，我们观察到（未展示数据），远早于 $T_*$ 时，解的 $L^2$-范数就已围绕某个均值涨落。图2(a)和(c)展示了解 $u[\cdot, x]$ 在统计平稳状态某一时刻的典型快照。(a)中采用了适中的黏度 $\nu = 10^{-8}$ ，而(c)中使用的黏度 $\nu = 10^{-12}$ 则小得多。可以看到，随着 $\nu$ 变小，速度剖面呈现出更小的尺度；对于所考虑的最小黏度，速度剖面看起来也更加粗糙。图2(b)展示了所有所考虑黏度下得到的平均周期图 (5.8)。由于所有模拟使用了相同的强迫项，因此在低波长处，所有估计的功率谱密度都重合。随后，在较高波长处，谱呈现出普适的幂律，与强迫项的特征无关，其指数 $-5/3$ 与预期的–(2$H + d$) 指数一致（见式 (3.10)），其中取值为 $H = 1/3$。接着，在由黏度值决定的特征波长处，谱急剧下降，这与黏性阻尼相似。二阶结构函数 $S_2(\ell)$ (5.9) 也呈现出类似行为。在大长度尺度 $\ell$ ，即能量注入系统的尺度附近（由强迫项的谱支撑集决定）， $S_2(\ell)$ 与黏度无关。在这些大于空间剖面 $u[t,x]$ 相关长度的尺度上， $S_2(\ell)$ 近似等于解方差的两倍。所有曲线在这些尺度上重合，这一事实表明该方差确实与黏度无关。在所谓的惯性尺度区间内，正如第1.2节所述， $S_2(\ell)$ 呈现幂律行为，其指数 $2H$ 决定渐近解的 H¨lder 正则性。在更小的长度尺度上，黏度会平滑任何不规则变化，因此 $S_2(\ell)$ 可作泰勒展开，并与 $\ell^2$成正比。

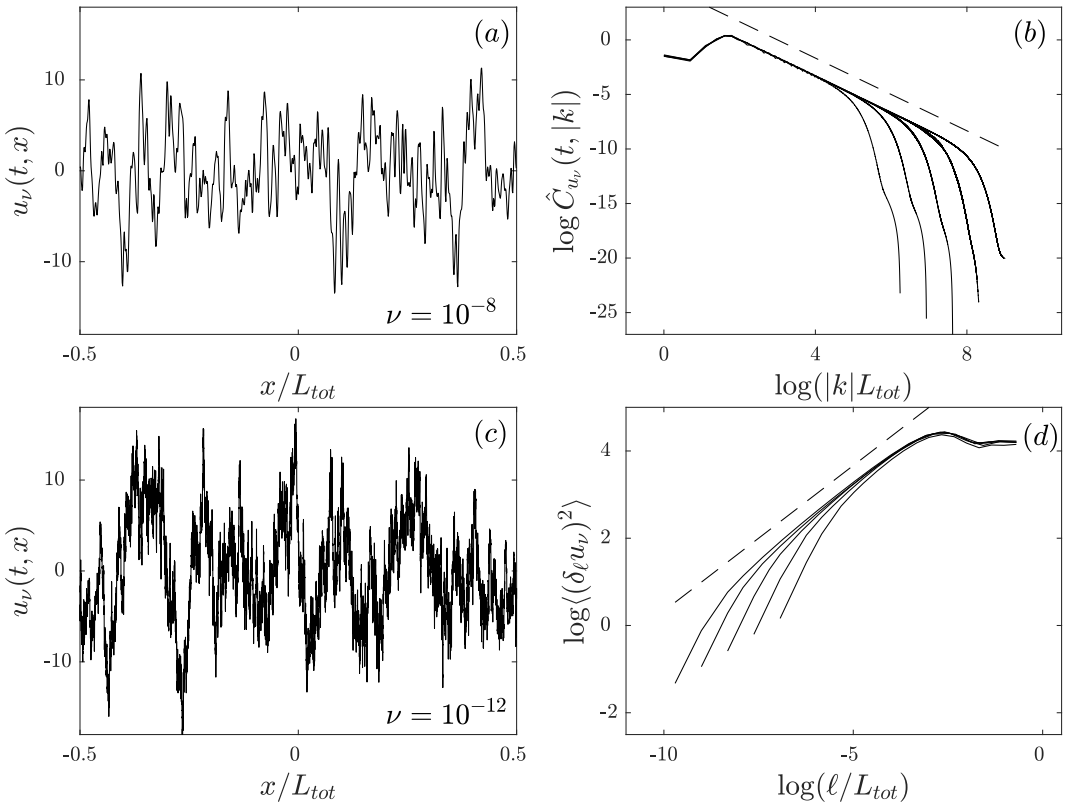



FIGURE 2. 空间维数为 $d = 1$、黏度为 $\nu$时，在统计稳态范围内，5.1.3段所述演化过程的解 $u[t,x]$ 的局部和统计行为。所有模拟均采用 $c = 1$和 $H = 1/3$ 完成。(a)：统计平稳状态下给定时刻 $t$ 的 $u[\cdot,x]$ 空间剖面，其中 $\nu = 10^{-8}$ 使用 $N = 2^{10}$ 个配点获得。(b)：基于解的平均周期图（见第5.3.2节和公式（5.8））估算的能量谱密度，对应不同黏度值$\nu = 10^{-8}$、 $10^{-9}$、 $10^{-10}$、 $10^{-11}$ 和 $10^{-12}$（从左至右），分别使用$N = 2^{10}$、$2_{11}$、$2_{12}$、$2_{13}$ 和 $2^{14}$ 个配点。图中以虚线叠加渐近预测 $|k|^{-5/3}$。(c)：与(a)相同的图，但黏度 $\nu = 10^{-12}$更低。(d)：与(b)类似的图，但展示二阶结构函数 $S_2(\ell)$（5.9），即增量的方差；计算时采用了文中详述的平均过程。图中叠加了预期的渐近幂律行为 $\ell^{2/3}$。

5.3.4. 维数为 $d = 2$ 时的结果与讨论。 现在我们在图3中展示空间维数为 $d = 2$ 时的模拟结果。我们再次采用了 $c = 1$ 和 $H = 1/3$，时间步长为$\Delta t = 5 \times 10^{-3}$。与 $d = 1$ 情形类似，我们使用预测校正法，对5.1.3段中给出的离散演化进行时间推进，直至时间 $T_*$，此时所有可达尺度都已得到充分激发。在此之前，黏度已将小尺度上的所有能量耗散掉，因此 $k_{\max}$ 处的傅里叶模态指数级地小。因此，我们认为从时间 $T_*$ 开始，系统也已进入统计平稳状态。图3(a)展示了统计平稳状态中时刻 $t$ 的傅里叶模态 $\widehat{u}[t,k]$ 振幅，以对数表示法表示为波矢 $k$ 两个分量 $k_x$ 和 $k_y$ 的函数。可以看到，大量能量集中在两条直线 ($k_x$，0) 和 (0，$k_y$) 上；而在平面其他位置，除涨落外，能量以旋转不变（即各向同性）的方式分布。请注意

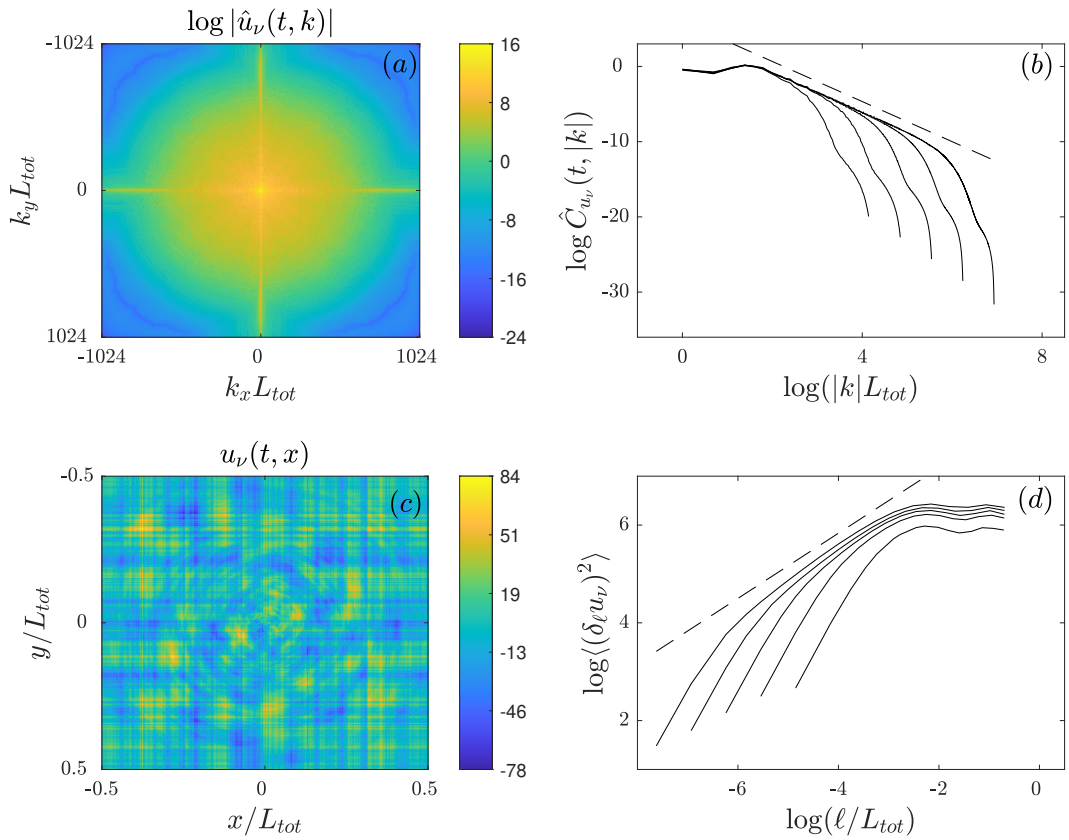



FIGURE 3. 在统计平稳范围内，空间维数为 $d = 2$、黏度为 $\nu$ 时，第5.1.3段所述演化的解 $u[t,x]$ 的局部行为和统计行为。所有模拟均使用 $c = 1$ 和$H = 1/3$ 。（a）：统计平稳状态下某一时刻 $\widehat{u}[\cdot,k]$ 绝对值的对数表示，针对 $\nu = 10^{-9}$，使用 $N = 2^{11}$个配点获得。（b）：基于解的平均周期图（见第5.3.2节和（5.8））对角度平均能量谱密度进行估计，黏度取不同值 $\nu = 10^{-5}$、 $10^{-6}$、 $10^{-7}$、 $10^{-8}$ 和 $10^{-9}$ （从左至右），分别使用 $N = 2^7$、$2_8$、$2_9$、$2_{10}$ 和 $2^{11}$ 个配点。图中以虚线叠加渐近预测 $|k|^{-2H-d}$，其中 $H = 1/3$ 且 $d = 2$。（c）：与（a）类似的图，但显示对应的 $u[\cdot,x]$空间剖面。（d）：与（b）类似的图，但显示二阶结构函数 $S_2(\ell)$（5.9），即增量方差；其计算采用正文中详述的平均过程。图中叠加预期的渐近幂律行为 $\ell^{2H}$，其中 $H = 1/3$。

在连续框架中，任意时刻 $t$的傅里叶模态 $\widehat{u}(t,\ k)$的统计性质预计只取决于振幅 $|k|$。这表明，我们的数值表示$\widehat{u}[t,k]$ 本质上具有各向异性。我们认为，这种虚假的各向异性是由模拟区域有限及其导致的分辨率 $\Delta k = 1/L_{tot}$有限所造成的，同时也与傅里叶模态 $\widehat{u}[t,k]$ 分布在笛卡尔网格上有关，而连续解 $\widehat{u}(t,\ k)$在平均意义上预计呈球对称。数值方法的另一项局限与预期解的粗糙性有关。从图 3(a)可以明显看出，傅里叶模态彼此相关，且比统计各向同性随机场的傅里叶变换所预期的更加平滑。这很可能与在演化（3.12）中通过有限差分估计散度算子有关，因为

这一过程实际上是通过来回进行离散傅里叶变换实现的（见公式（5.3））。我们需要专门撰写一篇文章，探讨（3.12）中连续形式的数值表示，例如设计一些能够处理底层场粗糙性的有限体积算法。这将是未来出版物的主题。

因此，我们在图 3(c)中展示的解在物理空间中的表示呈现出两种各向异性。第一种各向异性表现为沿笛卡尔坐标系的两个方向 $x$ 和 $y$ 延伸的直线。这种各向异性与图 3(a)所示傅里叶变换中沿 $k_x$ 和 $k_y$观察到的现象一致。从图 3(c)中还可以看出，原点周围，即 $x = y = 0$周围，存在另一种各向异性。请注意，对于统计均匀场，概率定律应当具有平移不变性，因此定义域的原点不应具有特殊作用。然而，在我们的数值解中，情况显然并非如此；我们认为，这种各向异性与图 3(a)所示傅里叶模态之间前述的相关性有关。我们仍需进一步研究，以设计出能够消除这些虚假各向异性的适当数值格式。

尽管存在这些各向异性——它们在连续框架的解中并不存在——我们的数值解在统计意义上仍表现符合预期。例如，我们在图 3(b) 中展示了功率谱密度的估计值，该估计值通过对傅里叶模态振幅的平方进行时间平均得到。需要指出的是，这些功率谱密度还对波矢 $k$ 与笛卡尔坐标系各轴所成的角度进行了平均，因此所展示的功率谱密度仅取决于波长幅值 $|k|$。确实可以观察到，随着黏度不断减小，功率谱密度在惯性区间内逐渐呈现幂律行为，其指数为预期值 $-(2H + d)$，该值由式 (3.10) 推导得出。在较高波数处，傅里叶模态受到黏度的指数衰减。通过考察图 3(d) 所示二阶结构函数 $S_2(\ell)$ 对尺度的依赖关系，也可以得出类似结论。这里还要说明，空间平均是在整个空间域上进行的，并且还对两个结构函数取了平均；计算这两个结构函数时，分别采用空间滞后 $\ell = |\ell|e_x$ 和 $\ell = |\ell|e_y$，其中 $e_x$ 和 $e_y$ 是笛卡尔坐标系的两个标准正交单位向量。在最大尺度上，也就是大于外力的特征尺度时，可以看到 $S_2(\ell)$ 达到一个平台，且随着 $\nu \to 0$，该平台不再依赖于黏度。与 $d = 1$ 情形类似，在超过 $u[t, x]$的相关长度后， $S_2(\ell)$ 等于 $u[t, x]$方差的两倍；换句话说，只要将 $\nu$ 选得足够小，方差本身便不再依赖于黏度。在较小尺度处，即惯性区间内，$S_2(\ell)$ 呈现指数为 $2H$的幂律行为，这与连续框架中的预测（推论 4.12）相符；随着黏度不断减小，幂律行为所跨越的尺度范围也随之扩大。最后，在更小的尺度上，黏性效应占主导并使空间剖面变得平滑，因此 $S_2(\ell)$ 与 $\ell^2$成正比。

5.3.5. 维数为 $d = 3$的结果与讨论。现在，我们以图 4 中空间维数为 $d = 3$ 时的结果，为本章节的数值模拟部分作结。在三维设置中，模拟的计算量要大得多，正向和逆向快速傅里叶变换的计算成本也会高得多，因为必须考虑沿 3 个方向的导数，而且离散点的数量 $N^3$ 也会随着 $N$ 增大而急剧增加。出于这些原因，再加上我们需要从零初始条件开始推进时间积分，直至达到统计平稳状态后再计算平均值，因此每个方向上的配点数量无法超过 $N = 2^9 = 512$。因此，我们无法对小于 $\nu = 10^{-7}$ 的黏度进行模拟。尽管如此，我们仍观察到（未展示数据），从 $\nu = 10^{-6}$ 开始，以 $L^2$-范数（5.6）量化的涨落在良好近似下不再依赖于黏度，这与

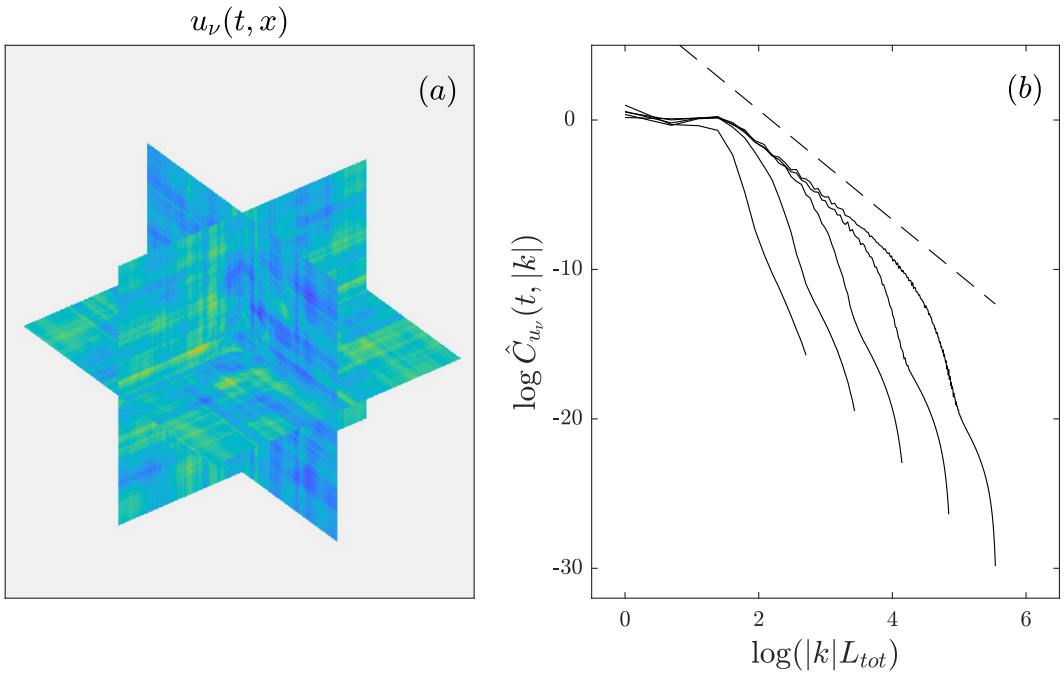



FIGURE 4. 在统计稳态范围内，给定黏度 $\nu$时，第5.1.3段所述演化的解 $u[t,x]$ 在空间维数为 $d = 3$下的局部与统计行为。所有模拟均采用 $c = 1$和 $H = 1/3$ 完成。(a)：在统计平稳状态下某一给定时刻，展示 $u[\cdot,x]$ 的若干切片；该结果针对 $\nu = 10^{-7}$，使用每个方向上 $N = 2^9$ 个配点得到。(b)：基于解在不同黏度取值下的平均周期图（见第5.3.2节和 (5.8)）估算角度平均能量谱密度，黏度取值依次为 $\nu = 10^{-3}$、$10^{-4}$、$10^{-5}$、$10^{-6}$ 和 $10^{-7}$（从左至右），分别使用 $N = 2^5$、$2_6$、$2_7$、$2_8$ 和 $2^9$ 个配点。图中以虚线叠加渐近预测 $|k|^{-2H-d}$，其中 $H = 1/3$和 $d = 3$。

连续框架下解的行为一致。如前所述，与 $d = 1$ 和 $d = 2$ 的情况类似，我们在积分求解至时间 $T_*$ 的过程中经历瞬态，之后才开始计算平均值。

我们在图 4(a)中展示了物理空间笛卡尔坐标系下三维模拟的渲染图。为清晰起见，并且由于可视化会变得更加复杂，我们只展示沿以下平面的三个切片：$(x,\ y,\ 0)$、$(x,\ 0,\ z)$和$(0,\ y,\ z)$。亮色和暗色分别对应解的大幅正向涨落和大幅负向涨落，与 $d = 2$ 情形中观察到的现象类似，其展示于图 3(c)中。我们再次观察到两种各向异性：一种沿笛卡尔坐标系的三个方向分布，另一种围绕原点分布；这两种现象此前已在 $d = 2$ 情形中得到证实。

然而，正如图 4(b)所示，从功率谱密度 (5.8) 可以看出，模拟在统计意义上表现符合预期。这些谱密度不仅是在达到统计平稳状态后对时间取平均，还对波矢 $k$ 与笛卡尔坐标轴所成的两个角度取平均，因此$\frown C_u(k)$仅是模长 $|k|$ 的函数。可以看到，在大尺度（即低波数$|k|$）下，涨落与黏度无关，即使对于用于配点数最少的情形 $N = 2^5$的最大取值 $\nu = 10^{-3}$ 也是如此。不过，考虑更小的

黏度值仍然至关重要；因此，为了形成更宽的惯性区间，需要采用更大的 $N$值，最高可达 $N = 2^9$。显然，对于最小的黏度值（ $N = 2^9$时为$\nu = 10^{-7}$ ），谱密度已在惯性区间呈现幂律行为，其指数为预期的 $-(2H + d)$，这与我们的理论预测 (3.10) 一致。

由此可见，我们能够使用离散傅里叶变换来定义谱演化式 (3.12) 中的散度算子，从而为连续框架提供适当的数值表示。具体而言，我们能够在离散设置下重现谱密度（式 3.10）和二阶结构函数（推论 4.12）的统计行为及其相关的幂律行为。不过，对于 $d = 2$ 和 $d = 3$ 这两种情形中明显观察到的各向异性，我们仍需进一步研究以消除它们。为此，一个颇有前景的方向是设计一种有限体积格式，使其能够遵循演化式 (3.12) 的确定性部分所固有的球对称性。要提出一个真实刻画充分发展流体湍流的模型，就必须满足这一要求；该模型还应能高效应用于多种场景，因为速度场的空间涨落会对所关注的动力学量的演化产生重大影响。这些重要的后续工作留待未来研究。

## References


[1] J. Almonacid and N. Nigam, *Characterization of singular flows of zeroth-order pseudo-differential operators via elliptic eigenfunctions: a numerical study* 2022 , . arXiv 预印本. [2] G. B. Apolinário and L. Chevillard, *Space-time statistics of a linear dynamical energy cascade model*, 《工程数学》, 5 (2023 年), 第 1–23 页. [3] G. B. Apolinário, L. Chevillard, and J.-C. Mourrat, *Dynamical fractional and multifractal fields*, 《统计物理学杂志》, 186 (2022年). [4] D. Barbato, L. A. Bianchi, F. Flandoli, and F. Morandin, *A dyadic model on a tree*, 《数学物理杂志》, 54 (2013年), 第 021507 页. [5] D. Barbato, F. Morandin, and M. Romito, *Smooth solutions for the dyadic model*, 《非线性》, 24 (2011), 第 3083 页. [6] G. K. Batchelor, *The theory of homogeneous turbulence*, 剑桥大学出版社, 1953年. [7] G. Beck, *Modélisation et étude mathématique de réseaux de câbles électriques*, 学位论文, 巴黎萨克雷大学, 2016年 3 月. [8] G. Beck and D. Lannes, *Freely floating objects on a fluid governed by the boussinesq equations*, 《亨利·庞加莱研究所年刊 C 辑：非线性分析》, 39 (2022年). [9] L. Biferale, *Shell models of energy cascade in turbulence*, 《流体力学年评》, 35 (2003年), 第 441–468 页. [10] T. Bohr, M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Dynamical systems approach to turbulence*, 剑桥大学出版社, 1998年. [11] R. Carles and C. Cheverry, *Constructive and destructive interferences in nonlinear hyperbolic equations*, 《法国数学会回忆录》, 174 (2022年). [12] M. Chaves, K. Gawedzki, P. Horvai, A. Kupiainen, and M. Vergassola, *Lagrangian dispersion in gaussian self-similar velocity ensembles* 113 2003 643 692 , 《统计物理学杂志》, ( ), 第 – 页. [13] A. Cheskidov, M. Dai, and S. Friedlander, *Dyadic models for fluid equations: a survey*, arXiv 预印本 arXiv:2209.10203, (2022 年). [14] L. Chevillard, *Une peinture aléatoire de la turbulence des fluides*, 研究指导资格论文, 里昂高等师范学院, 2015年 10 月. [15] L. Chevillard, C. Garban, R. Rhodes, and V. Vargas, *On a skewed and multifractal unidimensionalrandom field, as a probabilistic representation of kolmogorov's views on turbulence*, 载于《亨利·庞加莱年刊》, 第 20 卷, 施普林格, 2019 年, 第 3693–3741 页. [16] S. Cohen and J. Istas, *Fractional fields and applications*, 第 2 卷, 施普林格, 2013年. [17] Y. Colin de Verdière and L. Saint-Raymond, *Attractors for two-dimensional waves with homogeneous hamiltonians of degree 0* 73 2020 421 462 , 《纯粹与应用数学通讯》, ( ), 第 – 页. [18] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, 工业与应用数学学会, 1992年. [19] S. Dyatlov and M. Zworski, *Microlocal analysis of forced waves*, 《纯粹与应用分析》, 1 (2019年), 第 359–384 页. [20] U. Frisch, *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov*, 剑桥大学出版社, 1995年.

[21] J. Galkowski and M. Zworski, *Viscosity limits for zeroth-order pseudodifferential operators*, 《纯粹与应用数学通讯》, 75 (2022 年 ), 第 1798–1869 页 . [22] S. Janson, *Gaussian Hilbert Spaces*, 剑桥数学论丛 , 剑桥大学出版社 , 1997. [23] I. Karatzas and S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 《数学研究生教材》第 113 卷, 施普林格纽约出版社, 1998年. [24] P. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, 随机建模与应用概率, 施普林格柏林海德堡出版社, 2011. [25] A. N. Kolmogorov, *Dissipation of Energy in Locally Isotropic Turbulence*, 苏联科学院通报, 32 (1941), 第 16 页. [26] R. H. Kraichnan, *Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence*, 《流体物理学》, 11 (1968), 第 945–953 页. [27] D. Lannes, *Lecture notes volume of the winter school on fluid dynamics dispersive equations and quantum fluids* , . 即将发表, 私人通信. [28] R. Lewandowski and B. Pinier, *The Kolmogorov Law of Turbulence What Can Rigorously Be Proved? Part II*, 《重访混沌基础：从庞加莱到近期进展》. 理解复杂系统. 施普林格, 查姆, (2016). [29] A. Lodhia, S. Sheffield, X. Sun, and S. S. Watson, *Fractional Gaussian fields: A survey*, 《概率调查》, 13 (2016), 第 1–56 页. [30] L. R. Maas, D. Benielli, J. Sommeria, and F.-P. A. Lam, *Observation of an internal wave attractor in a confined stably stratified fluid* 388 1997 557 561 , , 《自然》, ( ), 第 – 页 . [31] A. A. Mailybaev, *Continuous representation for shell models of turbulence*, 《非线性》 , 28 (2015), 第 2497 页. [32] A. Maspero, *Generic transporters for the linear time dependent quantum harmonic oscillator on* $\mathbb{R}$, 2022年. arXiv 预印本. [33] J. C. Mattingly, T. Suidan, and E. Vanden-Eijnden, *Simple systems with anomalous dissipation and energy cascade* 276 2007 189 220 , 《数学物理通讯》, ( ), 第 – 页. [34] G. Métivier, *On the* $L^2$ *well posedness of Hyperbolic Initial Boundary Value Problems*, 《傅里叶研究所年刊》, 67 (2017), 第 1809–1863 页. [35] A. Monin and A. Yaglom, *Statistical fluid dynamics*, 第 I 卷和第 II 卷, 麻省理工学院出版社, 剑桥, (1971). [36] S. B. Pope, *Turbulent flows*, 剑桥大学出版社, 2000. [37] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing* 2007 , 剑桥大学出版社, . [38] R. Rhodes and V. Vargas, *Gaussian multiplicative chaos and applications: a review*, 《概率调查》, 11 (2014), 第 315–392 页, 1305.6221. [39] M. Rieutord, B. Georgeot, and L. Valdettaro, *Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum* 435 2001 103 144 , 《流体力学杂志》, ( ), 第 – 页. [40] M. Rieutord and L. Valdettaro, *Inertial waves in a rotating spherical shell*, 《流体力学杂志》, 341 (1997), 第 77–99 页. [41] H. Scolan, E. Ermanyuk, and T. Dauxois, *Nonlinear fate of internal wave attractors*, 《物理评论快报》 , 110 (2013), 第 234501 页 . [42] H. Tennekes and J. L. Lumley, *A first course in turbulence*, 麻省理工学院出版社, 1972. [43] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov spectra of turbulence I: Wave turbulence*, 施普林格科学与商业媒体, 2012.

Theoretical Physics I, University of Bayreuth, Universitätsstr. 30, 95447 Bayreuth, Germa ny

*Email address*: gapolinario@uni-bayreuth.de

Univ Rennes, IRMAR UMR 6625 & Centre Inria de l'Université de Rennes (MINGuS) & ENS Rennes,France

*Email address*: geoffrey.a.beck@inria.fr

Univ Lyon, ENS de Lyon, Univ. Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique, 46 allée d'Italie,69342 Lyon, France & Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, InstitutCamille Jordan, 43 boulevard du 11 Novembre 1918, F-69622 Villeurbanne, France

*Email address*: laurent.chevillard@cnrs.fr

Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, CNRS, PSL University, and Université Paris Cité, 75005 Paris, France

*Email address*: isabelle.gallagher@ens.fr

Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, CNRS, PSL University, 75005 Paris, France

*Email address*: ricardo.grande@ens.fr