arXiv:2301.00783v2 [physics.soc-ph] 5 Sep 2023

J. S. 巴赫音乐中音符转移的信息含量

Suman Kulkarni,[1] Sophia U. David,[2,3] Christopher W. Lynn,[4,5] 和 Dani S. Bassett[1, 2, 6, 7, 8, 9,*]

[1] *Department of Physics & Astronomy, College of Arts & Sciences,University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA*
[2] *Department of Bioengineering, School of Engineering & Applied Science,University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA*
[3] *Department of Psychology, Yale University, New Haven, CT 06520, USA*
[4] *Initiative for the Theoretical Sciences, Graduate Center,City University of New York, New York, NY 10016, USA*
[5] *Joseph Henry Laboratories of Physics, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA*
[6] *Department of Electrical & Systems Engineering, School of Engineering & Applied Science, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA*
[7] *Department of Neurology, Perelman School of Medicine,University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA*
[8] *Department of Psychiatry, Perelman School of Medicine,University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA*
[9] *Santa Fe Institute, Santa Fe, NM 87501, USA*（日期：2023年9月6日）

音乐具有复杂的结构，能够表达情感并传递信息。人类通过并不完美的认知工具处理这些信息，形成对现实模糊、失真的格式塔式认知。我们如何量化一首乐曲所包含的信息？此外，人类推断出的信息是什么？这又与一首乐曲的真实结构有何关联，又有何不同？为定量探讨这些问题，我们提出了一个研究框架：通过构建并分析由音符（节点）及其转移（边）构成的网络，研究音乐作品所传递的信息。借助这一框架，我们从网络科学、信息论和统计物理学的视角分析 J. S. 巴赫创作的音乐。作为西方音乐传统中最伟大的作曲家之一，巴赫的作品具有高度的数学结构，并涵盖了多种作曲形式，如赋格曲和合唱作品。我们将每部作品概念化为一个音符转移网络，量化其中包含的信息，发现不同类型的乐曲可以根据其信息含量和网络结构归为不同类别。此外，我们发现，音乐网络在传递大量信息的同时，推断网络与真实网络之间的偏差很小，这表明它们的结构有利于高效传递信息。我们进一步探究了促成这种快速、高效信息传递的网络结构——即高度异质性和强聚类。综上，我们的发现为理解巴赫作品的信息特征和网络属性提供了新的视角。更广泛地说，我们提出的简明框架可作为探索更深层音乐复杂性、创造力及相关问题的起点。我们预计，该框架将广泛适用于理解各种复杂系统中的信息结构。

一、引言

从藏族喉音唱法、苏格兰风笛变奏曲到现代嘻哈音乐，音乐是人类文化中普遍存在的一部分，世界各地、各个年龄段的人都喜爱音乐。甚至有人提出，音乐是人之为人的根本组成部分 [1]。尽管不同文化和时代的风格、声音和乐器千差万别，但不可否认的是，音乐对人类和社会的发展产生了重大影响 [2, 3]。我们可以通过音乐讲述故事 [4],传递信息 [5], 并注入最强烈的情感[6–8]。听到一首小调慢歌后感到沉思或沮丧，或是听到一首大调欢快歌曲后感到无忧无虑或精神振奋，都是常见的人类体验。但像音乐这样抽象的事物，究竟如何传达如此丰富的内容？以往的文学作品曾从预期与惊奇的角度探讨音乐 [9–11]。为了在进化中取得成功，我们的大脑善于根据先前发生的事情形成预期。当经历与这些预期相悖时，我们便会感到惊奇。惊奇还可能伴随许多其他情感：当我们预期会听到的不协和音实际上是协和音时，可能会感到宽慰；而当预期中的音乐解决没有发生时，则可能感到苦恼 [12]。但我们如何量化这些预期与惊奇？又如何用数学形式化并衡量一首音乐作品所传达的信息？从根本上说，音乐由转瞬即逝、难以捉摸的声音构成，因此似乎难以衡量。

在此，我们试图透过网络科学的视角审视音乐，从其复杂性中提取秩序。网络由节点和边构成，分别代表实体及其间的连接——

*通信请联系：dsb@seas.upenn.edu

。将每个音符视为一个节点，将两个音符之间的每次转换视为一条边，我们便能为任何一首乐曲构建网络 [13–17]。这种表示方式使我们能够运用基于物理学的方法，对乐曲的各个方面进行定量分析。借助音乐网络，我们建立了一个研究乐曲所传达信息的框架，并将其用于全面分析巴赫的乐曲。巴赫是一个理想的案例研究对象，这源于他创作生涯的丰硕、其乐曲广受赞誉，以及他对同时代及后世作曲家的影响。他创作的乐曲类型多样（从众赞歌到赋格曲），适用于不同类型的音乐家（从歌手到管弦乐团成员）；这些作品往往具有相同的基本结构，即反复出现、近乎数学化的音乐主题和动机。巴赫乐曲的这些特点，使其特别适合运用数学框架进行研究。

聆听音乐时，我们会形成预期。听到某个音符后，我们会根据过去的转移，预判接下来可能出现哪些音符。结果越不可能发生，我们听到时就越惊讶。这种“意外程度”可以用香农信息熵 [18]量化。信息论的思想已在诸多领域带来深刻见解，包括语言 [19, 20], 、社会网络 [21, 22],、交通模式 [23] 和音乐 [24, 25]。我们借鉴这些思想，对音乐网络中包含的信息进行量化。此前的研究曾尝试定量识别不同类型音乐 [15, 26–28], 中存在的模式和特征，但人类如何感知这些模式，比单纯评估作品的结构更为微妙复杂，因为人类并非完美的学习者。相反，研究一再发现，人类会通过有缺陷的感知系统吸收所接收到的信息模式，从而形成对转移结构 [29–32]略有偏差的表征。这一发现引出了关于人类所感知信息的有趣问题；尤其是，推断出的结构与乐曲的真实结构有何关联，又有何不同？此外，音乐中是否存在某些模式，能特别鲜明地穿透人类感知这一纷乱过程？如果存在，这些模式在不同类型的音乐中又有何差异？这些问题虽颇为微妙，且可能受到训练等因素影响，但近期有关人类如何学习信息网络的研究进展，为探讨这些问题提供了宝贵的框架 [31, 33–35]。

在此，我们借鉴网络科学、信息论和认知科学的理念，构建一个用于研究音乐所传达信息的框架。随后，我们运用这一框架，对 J. S. 巴赫创作的音乐进行系统分析。我们首先在第二节讨论如何将音乐表示为网络，并介绍本研究所分析乐曲的详细情况。接下来，在第三节中，我们研究其中的信息含量。我们发现，巴赫的音乐网络所包含的信息多于典型（或随机）转移结构所预期的信息。值得注意的是，我们还发现，某些作曲形式会根据其信息含量聚集在一起。我们考察网络结构如何影响信息含量，并表明这些音乐网络中较高的信息含量，以及同一作曲形式内不同乐曲之间观察到的差异，都可以用节点度的异质性来解释（节点度即某个音符之后出现的不同音高数量）。接下来，在第五节中，我们采用一种关于人类如何感知信息网络的最大熵模型，考察乐曲的推断转移结构与真实网络结构的吻合程度。我们假设，音乐网络的推断网络与真实网络之间的偏差较小，而这一特性由网络中的紧密聚类所驱动。此外，我们发现，可以根据原始网络与推断网络之间的差异来区分某些作曲形式。总之，我们的框架为音乐研究带来了全新视角，并使我们得以深入认识巴赫音乐的特性。通过系统研究音乐这类复杂系统中的信息如何组织并被人类感知，我们的工作揭示了人类创造力以及人类如何体验周遭世界的一些特点。本研究还为后续探索开辟了许多有趣方向，我们将在第七节讨论这些方向。

II. 音乐作为音符转移网络

我们注意到，此前已有研究致力于构建并分析音乐的不同网络表示 [13–17]。在本研究中，我们重点探究音乐中的音符转移所传达的信息，并从音符转移的基本表示入手。我们研究了巴赫的多种乐曲，包括：前奏曲、赋格曲、创意曲、康塔塔、英国组曲、法国组曲、众赞歌、勃兰登堡协奏曲、托卡塔和协奏曲。这些乐曲的音频文件以 MIDI格式收集并读取，随后从中提取音符序列（关于各类乐曲的更多细节及每首乐曲的来源，请参见方法部分 A 1）。乐曲中出现的每个音符都表示为网络中的一个节点，不同八度的音符则表示为不同的节点。不同乐器的音符转移分别计算。如果音符 i 转移到音符 j，我们便从节点 i 向节点 j 绘制一条有向边 （见图 1）。对于和弦，即多个音符同时出现的情况，则在第一个和弦的所有音符与第二个和弦的所有音符之间绘制边。为简化分析，我们移除网络中的所有自环，从而将研究范围限定在理解转移至下一个不同 音符的结构上。

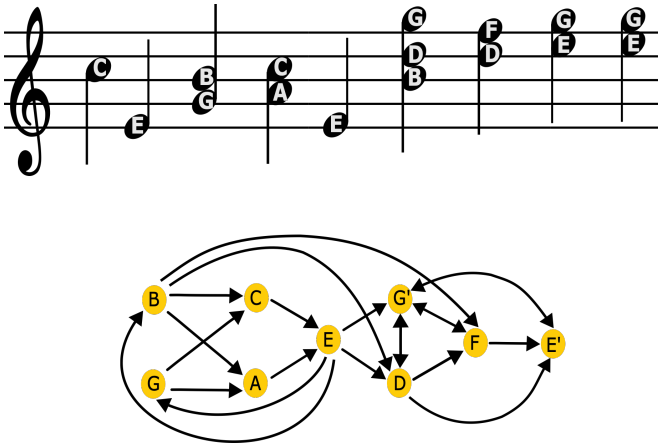

图1. 使用我们论文中描述的方法从一首乐曲构建网络的示例。上方展示一段示例乐曲。下方展示该网络，其中音符是节点，音符间转移（无论是单独发生还是作为和弦的一部分同时演奏）都是有向边。边的方向与转移的时间方向一致。

乐曲。我们首先考察音符转移的无权网络，重点关注网络结构本身如何影响乐曲的信息含量和感知。在了解转移的骨架后，我们再根据各类转移出现的频率为边赋予权重。这一过程使我们能够区分网络结构（由可能发生的音符转移集合构成）和边权重（由音符转移概率构成）各自的影响。尽管我们的重点是构建乐曲中音符转移的基本表示，但值得指出的是，这种表示还可以扩展，以捕捉音乐的其他重要方面。关于未来研究如何融入更多音乐真实感与复杂性，我们将在第七节中进一步阐述。

III. 网络中的信息量化

我们旨在衡量一个音符序列所产生的信息量。尽管音符序列可能具有长程时间依赖 [36, 37]和高阶结构 [38, 39], ，作为第一步分析，我们聚焦于马尔可夫转移结构。也就是说，我们研究单个音符转移所包含的信息。这些信息通过网络上的随机游走的香农熵来量化 [18, 40]（图2；更多细节另见方法部分 A 2）。给定一个转移网络，i^{th} 节点对熵的贡献可以用转移概率矩阵的各项表示为： P

$$S_i = -\sum_j P_{ij} \log P_{ij}. \tag{1}$$

对于有向无权网络， P_{ij} =$1/k_i^{out}$，其中 k_i^{out}是节点的出度。因此，对于无权网络，节点级熵为 S_i =log（k_i^{out}），完全由出度决定。

为了计算整个网络的熵，节点的贡献按其平稳分布加权——即经过无限长时间后游走者最终到达节点 i 的概率——我们将其记为 π_i [40]。因此，网络的熵为：

$$S = \sum_i \pi_i S_i = -\sum_i \pi_i \sum_j P_{ij} \log P_{ij}. \tag{2}$$

对于无向无权网络，平稳分布具有简单的解析形式 $\pi_i = k_i/2E$,

Model information production using random walks

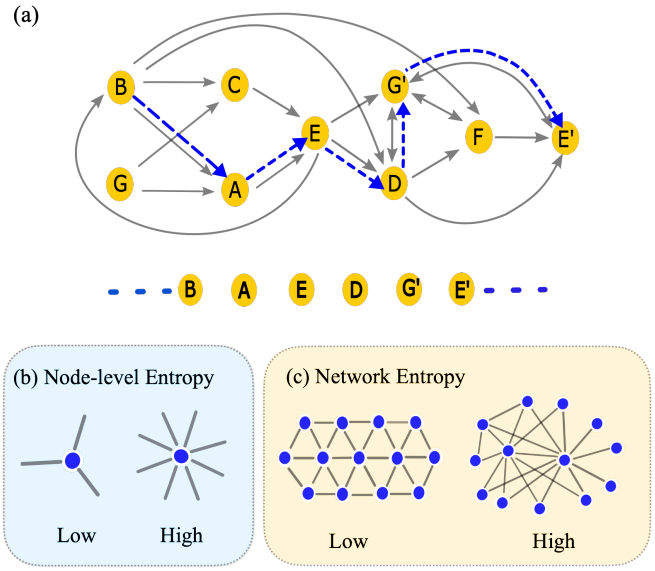

图2. **利用随机游走产生信息的模型**。(a) 蓝色虚线显示了在音符转移网络上的一次随机游走示例。在每个节点，游走者都会以相同的概率选择一条出边 traversing。此次游走会生成下方所示的音符序列。(b) 游走者从一个节点 traversing 一条边时所产生的信息量，或 *entropy*，取决于该节点的度。 traversing 度较高而非较低的节点时，游走者可选择的边更多，因此，这种转移会产生更多信息。因此，度较高的节点（右侧）被认为比度较低的节点（左侧）具有更高的熵。(c) 要计算整个网络的熵，需要根据游走者占据每个节点的概率，对各节点的贡献加权。对于平均度相同的网络，度的范围更广的网络（右侧）比度的范围更窄的网络（左侧）具有更高的熵。

其中 k_i 是节点 i的度， E 是边的总数。网络熵为：

$$S = \frac{1}{2E} \sum_i k_i \log k_i. \tag{3}$$

相比之下，对于有向网络，平稳分布取决于网络的具体结构，无法用闭式表达。因此，对于我们的有向音乐网络，我们通过数值计算平稳分布，并使用公式 2 计算每首乐曲的熵。

为了理解音乐网络所产生的信息量，我们将其与规模相同的随机化（或“零模型”）网络进行比较；也就是说，这些网络具有相同数量的节点和边（关于如何生成零模型网络的详情，见方法部分 A 5）。这有助于我们直观了解规模相同的网络通常包含多少信息。如果音乐网络中的音符转移确实具有独特属性，使其能够传递大量信息，那么我们就会预期巴赫的网络比零模型转移结构包含更多信息。对每首乐曲的 100 个随机网络取平均后，我们发现，真实网络的熵普遍且持续地更高——因而包含更多信息——而随机网络则不然（图 3A）。此外，通过比较不同乐曲，我们发现不同类型的乐曲会根据熵聚类。众赞歌通常由教会场合中的群体演唱，是较短、较简单的自然音阶乐曲，其熵明显低于本研究考察的其他乐曲。相比之下，托卡塔以更复杂、涵盖更广旋律音域的半音阶乐段为特色，熵要高得多。众赞歌用于冥想、崇敬和祈祷，其功能或许最适合由可预测性（因而是低熵）来支撑；而托卡塔和前奏曲的娱乐功能，则或许最适合由不可预测性（因而是高熵）来支撑。

我们知道，节点级熵仅由节点的出度决定。因此，评估真实网络与其他网络之间的差异是有意义的；在后者中，通过保持真实的度分布，固定节点级熵。为进行这项评估，我们将真实网络的熵与另一组零模型进行比较：这些随机化网络保留每个节点的入度和出度（关于如何生成这些网络的详情，请参见方法部分 A 5）。我们观察到，网络的熵大致保持不变（见图 3B）。尽管对于无向网络而言，熵仅由度分布决定，因此这种保持是意料之中的，但对于有向网络（不同的平稳分布会对熵产生影响）而言，这种情况未必成立。因此我们发现，音乐网络的熵主要由其度分布而非平稳分布决定。

为了直观理解音符转移的熵如何取决于网络结构，不妨考虑无权无向网络的情形。如式 3 所示，此时网络熵的形式尤为简单。围绕网络的平均度进行泰勒展开（见方法部分 A 2）后，可得：

$$S = \log\langle k\rangle + \frac{\mathrm{Var}(k)}{2\langle k\rangle^2} + ... \tag{4}$$

其中，$\langle k\rangle$是网络的平均度，Var(k)是度的方差。通过一阶近似可以看出，熵随网络平均度的增加而呈对数增长。通过二阶近似可以看出，熵会随度的方差或异质性 增加而增加，因此，度分布具有异质性（或更宽泛）的网络会产生更多信息。我们将度异质性定义为：

$$H = \frac{\mathrm{Var}(k)}{\langle k\rangle^2}. \tag{5}$$

我们在日常生活中遇到的许多网络都具有异质性度分布，通常包含少数高度“枢纽”节点和许多低度节点 [41–43]。相比之下，正则图——其节点的度都相同——产生的随机游走熵最低（见图2(c)）。

巴赫的音乐在这一谱系中处于什么位置？我们在图 3A中发现，所分析的音乐网络的熵始终高于节点数和边数相同的零模型网络（换言之，即平均度相同的随机化网络）。在《补充信息》第 D 4 节中，我们表明，巴赫音乐网络具有更高的信息含量，是因为其入度和出度分布具有更高的异质性；也就是说，与同等规模的转移结构所预期的情况相比，这些音乐网络的度更加异质，因此能够在其结构中容纳更多信息。由于我们的分析聚焦于音符之间的一阶序列关系，而这类关系很可能普遍存在于不同类型的音乐中，因此我们预计这一结果也适用于其他类型的音乐。

在图 3A 中，我们还观察到，属于某些作曲形式的不同乐曲在熵方面聚集在一起。与这一观察一致，我们发现，熵方面聚集在一起的乐曲具有非常相似的度（见补充信息第 D 3 节）。例如，英国组曲、法国组曲和众赞歌。相比之下，赋格曲在熵方面的聚集程度不如其他乐曲类型，且平均度差异较大。对于在熵方面归为一组的乐曲，我们发现，组内乐曲之间观察到的差异可以用它们的度异质性来解释（见补充信息第 D 4 节）。例如，我们可以在众赞歌中看到这种关系

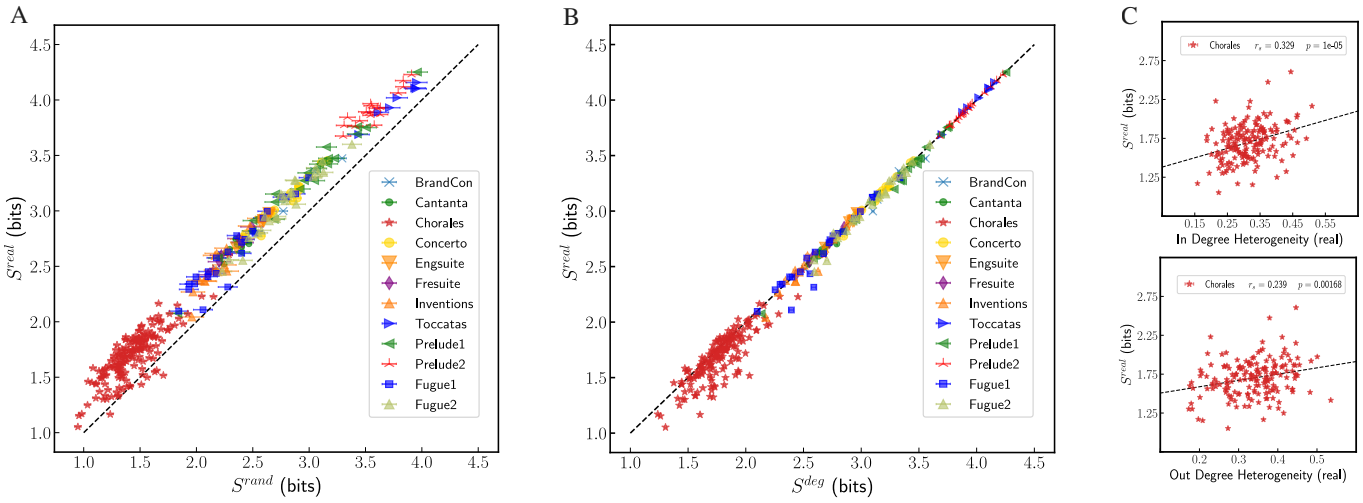

图 3. **使用音符转移网络上随机游走的熵量化巴赫音乐的信息。**(A) 巴赫音乐网络的熵（S^{real}）与相同规模随机网络的熵（S^{rand}）的比较。我们报告了对 100 个独立实现取平均后相应随机网络的熵。 S^{rand} 的误差条表示样本的标准误。(B) 巴赫音乐网络的熵（S^{real}）与保持每个节点入度和出度的随机网络的熵（S^{deg}）的比较。我们报告了对 100 个独立实现取平均后相应度保持随机网络的熵。 S^{rand} 的误差条表示样本的标准误。(C) 众赞歌的熵与网络平均入度异质性 $H^{\text{in}} = \text{Var}(k^{\text{in}})/\langle k^{\text{in}}\rangle$ (*top*) 和出度异质性 $H^{\text{out}} = \text{Var}(k^{\text{out}})/\langle k^{\text{out}}\rangle$ (*bottom*) 的关系。在 (A) 和 (B) 图中，每个数据点代表一首乐曲。颜色和标记表示作品类型，如图例所示。虚线表示直线 $y = x$。在 (C) 图中，点线表示最佳线性拟合，报告的 r_s 值为斯皮尔曼相关系数。

其中，入度和出度异质性较高的乐曲往往具有较高的熵，尽管它们的度相似（图 3*C*）。我们注意到，即使在我们的有向 网络数据集中，熵与度异质性之间的这种关系依然成立，这可能是因为入度和出度往往相关。

IV. 人类如何感知信息网络

人类交流的一个关键方面，是接收并吸收以相互关联的刺激形式呈现的信息——从语言和文学中的词语序列，到乐曲中的旋律音符，甚至抽象概念。人类吸收这些信息，并构建对项目间关系底层结构的表征，如图 4a所示。如前所述，人类借助并不完美的认知工具构建这些内部网络模型，因此所得的真实网络结构表征会略有失真。人类感知到的信息，既包括系统中实际存在的信息，也包括感知过程中不完美的认知过程所造成的误差 [17]。上一节中，我们着重量化了系统中实际存在的信息（见图2）。现在，我们将考虑第二部分：由于感知信息的认知过程并不完美而产生的误差（见图4）。

为了理解人类如何学习和表征转移结构，研究人员开展了多项实验，并提出了一系列模型，用来描述人类如何在内部构建转移网络 [31– 33, 44–46]。这些研究和模型有一个共同点：人类会随时间整合转移概率，将彼此相邻的项目联系起来，也会联系那些相隔两步、三步等转移的项目 [17, 32, 45, 47]。这样做能够降低计算成本，并提升对新信息的泛化能力，但代价是准确性下降。本文聚焦于一种基于自由能原理的模型，它刻画了这种时间整合以及感知中的不准确性 [17, 31]。该模型假设，在构建信息的内部网络表征时，人类力求最大限度地提高内部表征的准确性，同时尽可能降低构建该表征所需的计算成本 [17, 31, 35, 48]。一方面，人类可以毫无差错地学习结构，形成一个完全准确的转移网络（图 4b (i)），但这一形成过程的计算成本很高。另一方面，人们也可以不顾准确性，采用成本最低的表征（图 4b (iii)）。大多数人会采取折中做法：回忆转移序列时，有时准确，有时不准确，从而形成对真实网络的模糊感知（图 4b (ii)）。从形式上说，计算复杂度与准确性之间的权衡，可以用人们内部表征的自由能模型来刻画

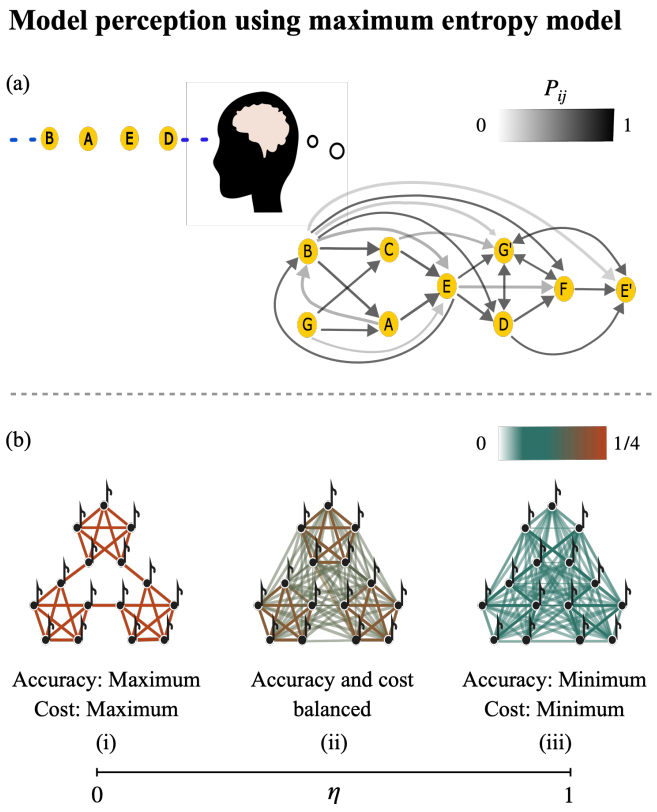

图 4. **人类如何处理信息网络。**(a) 人类交流的一个关键方面，是接收并吸收以相互连接的刺激形式呈现的信息。人类通过并不完美的感知系统吸收呈现给他们的信息模式，因此对底层转移结构形成的内部模型会略有偏差。(b) 构建关于世界的内部网络模型时，人类会在准确性与复杂性之间取得平衡。参数 η 量化了准确性与成本之间的权衡。在面板 (i) 中，我们看到仅通过最大化准确性 ($\eta \to 0$) 构建的示例网络，它对现实进行了完美表征。然而，构建这一网络需要完美的记忆，且计算成本高昂。在面板 (iii) 中，我们看到仅通过最小化计算成本 ($\eta \to 1$) 构建的网络，其中所有节点都彼此相连，与原始网络不同。构建这一网络无需付出显著成本，但它无法准确表征原始信息。人类往往表现出中间水平的 $\eta = 0.80$ [17]，因而构建出如面板 (ii) 所示的网络，保留了*some*，但并未保留全部真实的转移结构。图经许可改编自参考文献 [35]。

[31]。该模型下学习到的转移概率 $\hat{}(P)$ 可用真实转移概率 (P) 表示如下：

$$\hat{P} = (1-\eta)P(I-\eta P)^{-1}, \tag{6}$$

其中 $\eta \in [0,1]$ 刻画了表征中的误差。该表达式的详细推导见方法部分 A 3。我们强调，这种形式在多种不同的认知理论中具有相似性[30, 33, 34]。通过将推断的转移结构与真实网络结构联系起来，该框架使人们能够探究人类从给定网络中感知到的信息。鉴于我们对音乐情境下此类问题的兴趣，我们使用该模型计算每首乐曲的推断网络。我们注意到，关于音乐期待的研究强调，统计学习与其他因素一样，是音乐期待和知识获取的一种机制 [49–52]。

在接下来的讨论中，我们单独使用“推断网络”一词，指代利用上述感知模型计算得出的网络。以往研究表明，在大规模在线实验室实验中，人类平均表现出 $\eta = 0.80$ [17]。给定一个具有转移概率的音符转移网络（P），我们使用这一实测值，根据方程 6 计算推断网络（$\hat{}P$）。在音乐语境中，重要的是要认识到，推断出的结构自然会呈现差异，这些差异可能受到个人训练水平等因素的影响。尽管如此，这一框架仍能帮助我们深入了解哪些类型的结构可能更有效地传递信息，同时考虑到人类感知系统的局限性。我们将在第七节讨论未来研究如何拓展本研究，并改进对音乐中信息感知的研究。

V. 量化音乐网络感知中的差异

现在，我们可以着手探究推断出的音乐网络与其真实结构之间的偏差程度。推断结构与真实结构之间偏差较小的网络，可以被视为更能有效、准确地传递信息。因此，从网络如何与我们不完美的感知系统互动这一角度来看，该框架有助于我们了解网络在沟通方面的成效。数学上，可以使用 Kullback-Leiber（KL）散度量化推断网络（P）与原始网络（P）之间的偏差：

$$D_{KL}(P||\hat{P}) = -\sum_i \pi_i \sum_j P_{ij} \log \frac{\hat{P}_{ij}}{P_{ij}}, \tag{7}$$

其中，π_i 是原始网络的平稳分布。KL散度越小，网络就越接近真实网络，因此可以认为该网络在准确传递信息方面更有效。巴赫的音乐作品是否具有鲜明特征，使其感知结构的差异更小？不同乐曲在这些差异方面有何不同？导致这些差异的音乐作品在结构上有何不同

导致这些差异的乐曲?

为回答这些问题，我们针对每首乐曲，计算真实转移概率 P 与推断出的转移概率 $\hat{P}$之间的 KL散度。随后，为了了解这些音乐网络在推断出的结构中是否确实保持了较低的差异，我们将它们与节点数和边数相同的随机网络进行比较。数据证实了我们的直觉（图 5A）：巴赫的音乐网络的 KL散度低于规模相同的随机网络。即使将其与入度和出度分布相同的零模型网络进行比较，我们仍然发现音乐网络的 KL散度较低（图 5B）。这一发现表明，这些网络较低的 KL散度不能仅用其度分布来解释。此外，我们还观察到不同作曲形式之间的 KL散度存在有趣的差异（图 5）。众赞歌似乎处于一个极端，其 KL散度最高，而前奏曲和托卡塔的 KL散度最低。下文将尝试找出并解释导致不同作曲形式和乐曲之间推断信息差异出现变化的网络属性。

A. 传递聚类系数

如上一节所示，仅凭度分布无法解释音乐网络中推断出的转移结构与真实转移结构之间的差异。对于无向网络，先前研究已表明，随着网络中三角形密度的增加，推断出的转移结构与真实转移结构之间的 KL散度会降低 [17]。将网络推断版本的表达式（公式 6）代入 KL散度方程（公式 7），即可展示这种关系。现在，我们将这一分析扩展到我们的有向 网络，旨在将这一发现推广开来。通过进行这一代入，我们得到以下以原始网络的邻接矩阵（A）表示的 KL散度表达式：

$$D_{KL}(P||\hat{P}) = -\log(1-\eta) - \frac{\eta}{ln\,2}\sum_i \pi_i \times \left\{ \sum_j A_{ij} \sum_l \frac{1}{k_i^{out}} A_{il} \frac{1}{k_l^{out}} A_{lj} \right\} + \mathcal{O}(\eta^2). \tag{8}$$

这里可以看到，KL散度取决于形如 $A_{ij}A_{il}A_{lj}$ 的乘积，它量化了网络中存在的传递关系。更明确地说，它取决于形如$i \to j \to k$ 和 $i \to k$的有向三角形的数量。

为了量化网络中此类聚类的程度，我们引入一种称为传递聚类系数，其定义方式与网络的聚类系数类似 [53, 54]。对于每个节点，该量的计算方法是将该节点 i 参与的传递三角形数量（Δ_i^T）除以可能的有向三角形数量：

$$C_i^T = \frac{\Delta_i^T}{k_i^{\mathrm{tot}}(k_i^{\mathrm{tot}}-1)}. \tag{9}$$

这里，k_i^{tot}是该节点的总度（ +出度）。我们对网络中的所有节点取这一数值的平均值，从而为每首乐曲报告一个单一数值。如式 8 所示，我们预期网络的 KL散度主要受传递聚类系数驱动。图 $5C$ 清楚地显示了这种关系：我们观察到，传递聚类系数较高的音乐网络往往具有较低的 KL散度。在此背景下，我们还观察到，与众赞歌等其他乐曲相比，前奏曲和托卡塔（其 KL散度相对较低）具有更高密度的传递三角形。

此时自然会产生一个问题：网络中的这些传递关系有何意义？它们为何能缩小推断结构与真实结构之间的差异？从认知科学的角度来看，KL散度与聚类之间的这种关系源于人类倾向于计数长度为二的转移，正如前文所述。在一种情形中，若某个节点i 与节点 j 相连，且节点 j 连接到节点 k，人类学习者可能会在心智中错误地在节点 i 和节点 k 之间画一条边。然而，如果网络原本就有一条从节点 i 到节点 k的直接连接，那么这种错误就会强化一条已有的边，使推断网络更接近真实网络。因此，我们预期聚类程度较高的网络能更好地抵御推断过程中的错误。从音乐的角度来看，由于网络没有边权重，解读这些三角形并非易事。尽管如此，这类三角形的密度较高，意味着如果音符i 与 j之间存在转移，且音符 i 与 k之间存在转移，那么音符 j 与 k之间也很可能存在转移。这或许反映了音乐倾向于形成调性稳定的音符转移序列。要证实这些观点，还需进一步研究，我们将在第七节中详述。

进一步分析传递聚类后，我们发现，音乐网络的传递聚类系数高于保持度不变的随机网络（图 $5D$），这表明这一特征并非纯属偶然。从图 $5D$ 中，我们观察到一个有趣的现象：前奏曲的传递聚类系数似乎低于保持规模和度分布不变的对应零模型网络，而众赞歌作品的传递聚类系数通常高于零模型网络的预期值。我们在补充信息中对此进行了进一步探究，并找到了可能的中尺度结构。

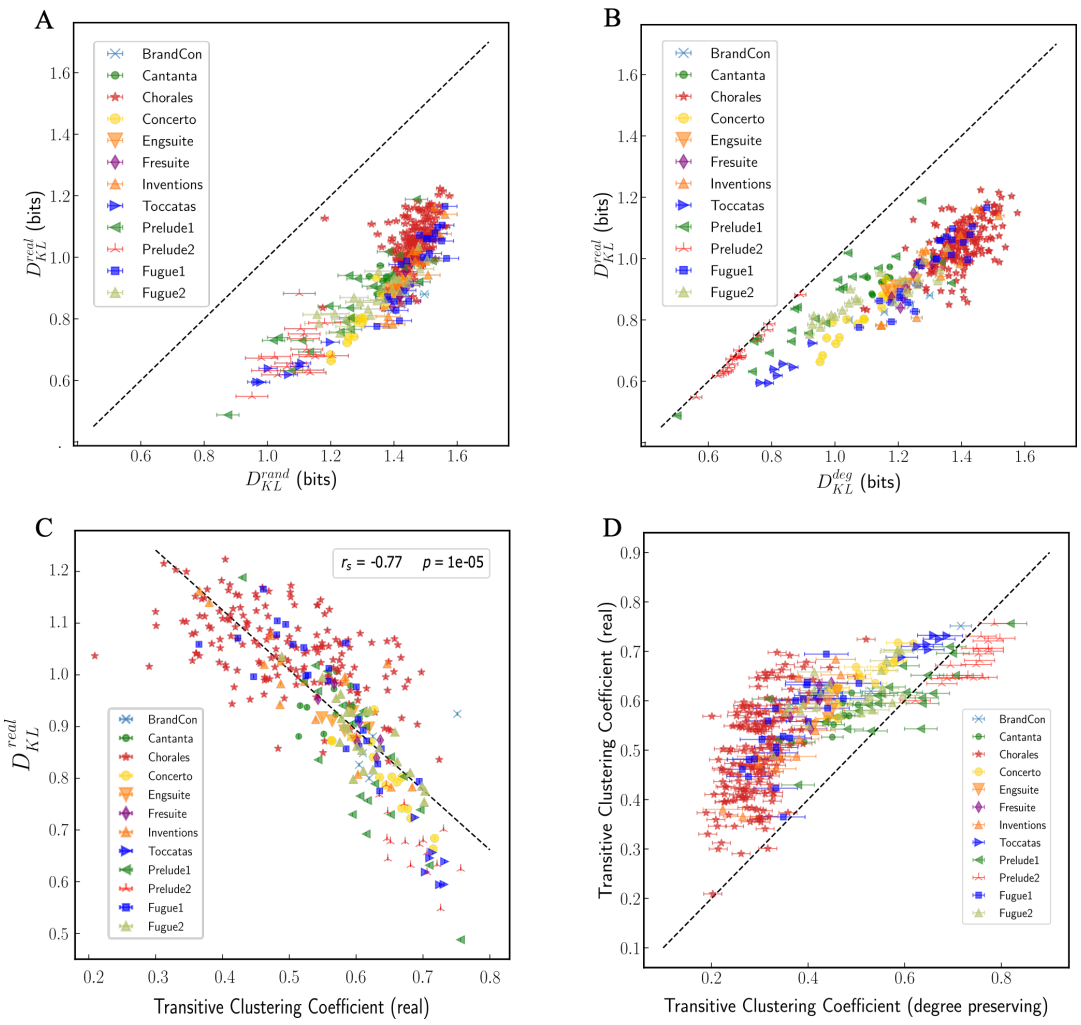

图 5. **通过计算实际网络与感知网络之间的 KL散度，量化巴赫音乐网络中实际信息与感知信息之间的差异。**（A）真实音乐网络（$D_{\mathrm{KL}}^{\mathrm{real}}$）与相同规模的随机网络（$D_{\mathrm{KL}}^{\mathrm{rand}}$）之间的 KL散度。我们对相应随机网络进行 100 次独立实现取平均后，报告其 KL散度。$D_{\mathrm{KL}}^{\mathrm{rand}}$的误差条表示样本的标准误。（B）真实音乐网络（$D_{\mathrm{KL}}^{\mathrm{real}}$）与保持每个节点入度和出度的随机网络（$D^{\mathrm{deg}}{}_{\mathrm{KL}}$）之间的 KL散度。我们对相应的度保持随机网络进行 100 次独立实现取平均后，报告其 KL散度。 $D^{\mathrm{deg}}{}_{\mathrm{KL}}$ 的误差条表示样本的标准误。（C）真实音乐网络的 KL散度与网络传递聚类系数的关系 $C = \langle \Delta_i^T / k_i^{\mathrm{tot}} \left(k_i^{\mathrm{tot}} - 1 \right) \rangle$。（D）真实音乐网络的传递聚类系数与保持每个节点入度和出度的随机网络进行比较。虚线表示直线 $y = x$。对于度保持随机网络，我们对 100 次独立实现取平均后报告传递聚类系数，误差条表示样本的标准误。在所有面板中，每个数据点代表一首乐曲。颜色和标记表示作品类型，如图例所示。面板（A）、（B）和（D）中的虚线表示直线 $y = x$。

导致观察到的作曲形式之间的差异。

VI. 音符转移频率的说明

到目前为止，我们一直关注由巴赫的音乐构建的未加权（或二元）音符转移网络的信息含量与感知。因此，这些网络只能捕捉两个音符之间是否存在转移，却无法反映各类转移发生的频率。二元网络使我们能够探究转移结构如何支持有效沟通。然而，在许多真实网络中，各类转移发生的频率并不相同。为了反映转移可能发生的不同频率，我们构建了根据转移频率赋予转移权重的网络。例如，如果音符 i 后面有 j 90% 的概率跟着音符

k 后面有 j 10% 的概率跟着音符，那么从节点 j 到节点 i 的边，其权重就会高于从节点 j 到节点 k 的边（关于网络构建的更多细节，参见方法部分 A 1）。将这条信息加入网络后，我们便可以进一步探讨转移权重在向听众传递信息方面所起的作用。例如，网络上的随机游走所生成的信息会如何因转移频率的差异而改变？这些频率差异会减少推断网络中的偏差吗？

权重降低转移的惊异度

对于无权网络，随机游走的节点级熵完全由出度（k_i^{out}）决定，因为每条出边被遍历的概率均为 $P_{ij} = 1/k_i^{\text{out}}$。如果根据转移频率为边赋予权重，$P_{ij}$ 将不再呈均匀分布，每条出边被遍历的概率也不再相等。因此，纳入边权重会降低节点级熵。这一观察符合直觉，因为任何分布中的不均匀性都会导致熵降低。然而，将这种直觉延伸至整个网络产生的熵则并非那么直接，因为必须根据随机游走者的平稳分布对每个节点的贡献加权，而对于有向网络，该平稳分布无法用闭合形式表示。一般而言，我们发现加权网络的熵仍低于 对应的无权网络（图 6A）。这一发现表明，不同的权重确实降低了网络产生的整体惊异度。

权重缩小了推断网络与原始网络之间的差异

纳入转移频率还有助于我们理解权重在人类推断音符转移过程中所发挥的作用。我们观察到，音符转移的加权网络的*KL*散度较低于二元网络（图6B）。这一观察表明，权重有助于形成更准确的转移结构内部表征，从而缩小推断结构与真实结构之间的差异。

鉴于这些数据，接下来我们通过比较加权音乐网络与经过边重连的零模型网络的熵和 KL散度，来验证网络结构在加权网络的交流成功中所起的作用。在对无权网络的分析中，我们观察到熵主要由网络的度分布决定，而对具体的连接模式并不敏感。为了验证这一观察，我们曾将真实音乐网络的熵与随机化网络进行比较；这些随机化网络保留了每个节点的精确度分布，因此固定了节点级熵。按照类似思路，这里我们采用保持节点级熵不变的零模型，即保留每个节点的入度和出度以及 出权重（有关零模型的详细信息，请参阅方法部分）。通过将加权音乐网络的熵与保度加权零模型进行比较，我们发现真实网络的熵总体上仍基本不变，不过真实网络的熵略高于零模型网络（图 $6C$，上）。这些结果支持我们的结论：真实网络中的熵仍主要由其度分布决定。比较真实加权网络与保度加权零模型的KL散度后，我们发现真实网络的 KL散度低于相应的零模型网络（图 $6C$，下）。综合来看，这些结果表明，在网络分析中纳入权重，并不会从定性上改变我们关于网络结构影响的结论。

在网络模型中考虑音符转移频率，会引出几个有趣的研究方向。例如，究竟是不是特定的权重分布提高了推断音乐网络的准确性？未来的研究可以通过比较加权网络与一类零模型的KL散度来评估这一可能性；这些零模型保留网络骨架，但对边权重进行置换。测试较高的边权重是否集中在网络的三角形簇中也会很有意义，这或许能解释为什么与二元网络相比，加权网络的KL散度更低。

七、结论与未来方向

在人类的语言、文学、音乐乃至抽象概念中，人类都展现出从项目序列中识别模式和关系的非凡能力——这是信息共享与交流的重要方面 [31, 35, 55–57]。在此，我们借鉴网络科学、信息论和统计物理学的思想，构建了一个框架，为研究一首乐曲所传达的信息奠定基础。我们运用这一框架，分析 J. S. 巴赫创作的各种音乐作品中的音符转移网络。对于每首音乐作品，我们通过在连续演奏的音符之间绘制有向边，构建音符转移网络。随后，我们量化网络结构所产生的信息量，并发现不同的作曲形式可以根据其信息熵进行归类。我们将每首乐曲的信息含量与其网络结构联系起来，从而深入了解其结构

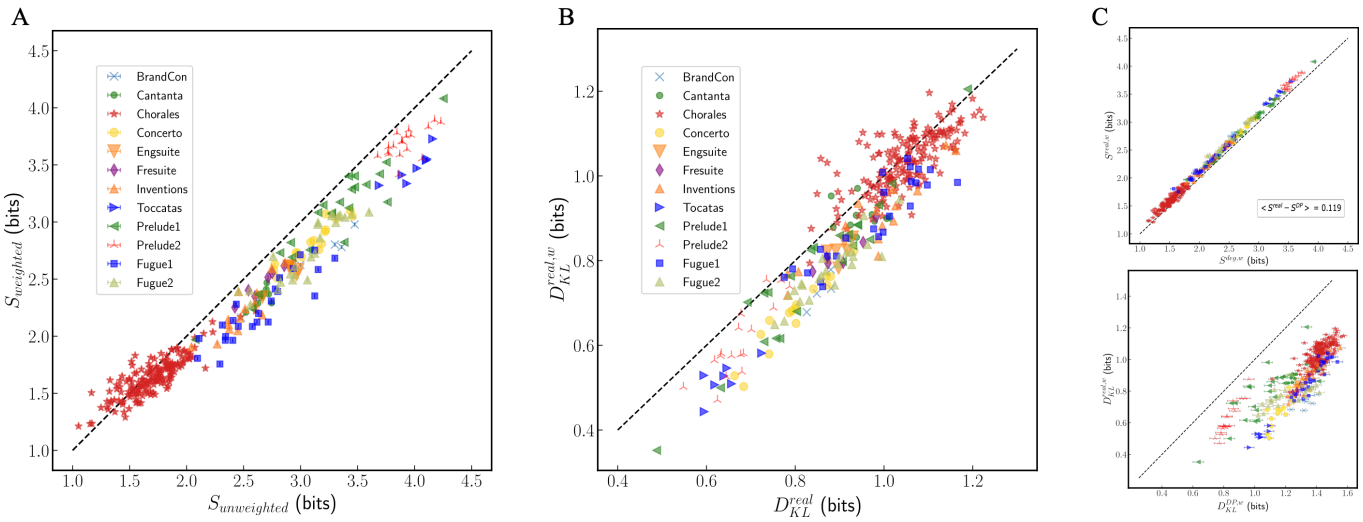

图 6. **在分析中考虑音符转移的频率**。(A) 巴赫音乐网络加权版本的熵（S_{weighted}）与对应未加权版本（$S_{\text{unweighted}}$）的比较。(B) 巴赫音乐网络加权版本的 KL散度（$D^{real}_{KL^{w}}$）与对应未加权版本（D^{real}_{KL}）的比较。(C) 上图：加权音符转移网络（$S^{\text{real}, \text{w}}$）的熵与保持度的边重连零模型网络（$S^{\text{deg}, \text{w}}$）的比较。下图：加权音符转移网络（$D^{\text{real}, \text{w}}{}_{\text{KL}}$）的 KL散度与保持度的边重连零模型网络（$D^{\text{deg}, \text{w}}{}_{\text{KL}}$）的比较。在所有面板中，每个数据点代表一首乐曲。颜色和标记表示作品类型，如图例所示。虚线表示直线 $y = x$。在面板 (C) 的上图中，我们报告数据点与直线 y = x 的平均偏差。

特征。接下来，受统计学习领域近期进展的启发——该领域展示了人类如何从视觉和听觉领域推断转移结构 [31, 49, 50, 56], 我们使用一个计算模型 [17, 31]来描述人类如何学习信息网络，并据此计算每首乐曲的平均“推断”网络结构。随后，在该模型下，我们量化推断出的转移结构与真实转移结构之间的差异。在这里，我们同样观察到各乐曲之间存在有趣的差异，并将其归因于网络聚类程度的不同。最后，我们研究转移频率如何通过按照转移发生的次数对其加权，影响音乐作品的信息含量和感知。我们发现，这些权重降低了转移的整体熵或意外度，也缩小了推断网络与实际网络之间的偏差，表明权重有助于准确推断这些转移结构。

此外，我们发现，与相同规模的典型转移结构所预期的情况相比，音乐网络包含更多信息，并且在推断出的结构中保持较低的差异。这使我们得以深入了解哪些特征能使信息网络有效地传递信息。总的来说，更稠密的网络（具有更高的平均度）会产生更多信息（具有更高的信息熵）。对于平均度相近的网络而言，度分布更不均匀（方差更高）的结构比度更规则或更均匀的结构产生更多信息（图 7(i)）。

此外，聚类程度较高的网络与人类预期之间的偏差较低（图 7(ii)）。综合来看，这些发现表明，对于给定规模的网络，同时具有异质性和聚类特征的结构有助于实现快速且准确的信息交流（图 7）。值得注意的是，这类结构广泛存在于复杂系统之中 [41–43, 58, 59]。

我们希望，我们的框架能够促进物理学、认知科学与音乐学之间进一步的交流。从更广泛的层面来看，我们的研究也为探讨复杂系统中的信息如何组织增添了新内容。最后，我们重点介绍若干令人振奋的未来研究方向，并概述拓展和改进这一框架的途径。

未来方向

这一分析自然会引出后续研究：考察其他作曲家的作品，尤其是西方传统之外的作品。这也促使我们提出一些问题，以评估不同风格或音乐流派之间的差异 [60–62]。具体而言，听众是依据哪些关键特征来区分两个时代的音乐，例如古典主义时期与浪漫主义时期的音乐？结构上的差异又会如何影响听众对乐曲的感知？因此，像我们这样对音乐作品进行定量评估，提出了这种

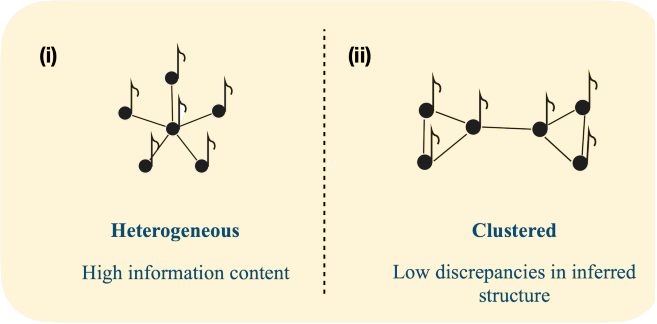

图 7. **支持信息有效沟通的网络结构**。 如上图所示，节点度方差或异质性较大的网络，能在其结构中容纳更多信息，且熵更高。如下图所示，网络中的聚类使其结构更能抵御人们在构建信息内部表征时所犯的错误，从而能够更准确地推断网络。这些结构共同传达了大量信息，人们能够更准确地学习这些信息，因此它们更有利于交流。

令人感兴趣的可能性：识别出音乐学家未必能先验地察觉的某位作曲家的作品或音乐流派。

系统地分析我们从复杂系统中提取的信息，也为我们提供了理解人类创造力与体验的新工具。在探讨人类如何体验音乐时，一个常见的问题是：是什么让一部音乐作品悦耳动听？尽管人们对音乐的偏好差异很大，且高度主观，但对于某些作曲家被视为“有影响力”或“伟大”，人们仍普遍认同。这一事实表明，广受认可、令人愉悦的音乐作品可能具有某些共同的内在特质。识别这些特征或许能让我们深入了解音乐创作的过程，也能补充现有利用人工智能生成音乐的研究 [63, 64]。人们已尝试多次识别这类模式。例如，文献 [15] 分析了巴赫、肖邦和莫扎特的一些乐曲以及中国流行音乐中的音符转移网络，并提出“优秀”音乐具有小世界特性 [53] 和重尾度分布。另一方面，文献 [26] 研究了巴赫《平均律键盘曲集》中的部分乐曲，发现其度分布并非重尾分布，这表明这类分布并非音乐悦耳动听的必要条件。未来若能设计实验，确定我们的发现是否与乐曲的审美或情感吸引力相关，将会很有意义。在本研究中，我们发现，巴赫的音乐网络中传递三角簇数量更多，因此比任意转移结构更容易学习。这类三角形数量更多的乐曲是否也更能吸引听众？未来的研究将评估这一可能性可通过开展实验，请人们评价巴赫的乐曲，并分析这些评价是否与三角形簇的存在相关，从而检验这一可能性。更广泛而言，我们的研究不仅关注音乐转移结构中固有的信息，也关注人类听众如何感知这一转移结构中的信息。这个框架或许有助于研究音乐的认知层面，并将数据中观察到的模式与音乐认知理论联系起来。

未来的研究还可以将我们的分析拓展至考察音乐网络如何随时间演变。这里有三个可能颇具意义的研究方向：第一，随着一首乐曲的推进，其熵和 KL散度会如何变化？这种时间变化在不同的作曲形式之间是否有所不同？第二，某位作曲家（无论是巴赫还是其他人）的音乐在其一生中发生了怎样的变化？其乐曲是否变得更加精巧复杂、包含更多信息？或许随着作曲家经验的积累，其乐曲传达信息的效率和准确性会提高，表现为KL散度降低？如果知道每首乐曲的确切创作日期，那么本文采用的框架或许能够回答这些问题。第三，某一特定体裁的音乐，例如古典音乐，如何随着岁月流逝在不同作曲家之间发生变化？例如，Ref. [28], 研究了巴赫、莫扎特、贝多芬、门德尔松和肖邦的乐曲中相邻音符之间的音高波动，发现从巴赫到肖邦，作曲家作品中的最大音高波动随时间逐渐增大。正如前文所述，将我们的分析扩展至不同作曲家，并考察信息和预期如何因作曲家及时间而异，将会很有意义。

最后，我们还指出了分析中的局限性，这些局限性凸显了未来进一步努力的方向。首先，我们的研究依赖于一种较为简单的音乐表征方式，今后可以扩展该方式，以纳入更多音乐现实性与复杂性。例如，可以考虑音色的差异、音符之间的音程，甚至是融合音符或和弦；众所周知，这些因素在音乐感知中发挥着关键作用 [65, 66]。其次，尽管我们关注了音符之间一阶序列关系中所包含的信息，但未来的研究可以捕捉音乐中固有的高阶相关性、层级结构以及更复杂的结构 [36–39]。近期对网络中高阶依赖关系和结构的研究进展，为捕捉这种复杂性提供了一种有前景的方法 [67–69]。纳入这些细微之处不仅能够加深我们对网络结构方式的理解，也能增进我们对其感知方式的认识。在此基础上，开展有针对性的实验将十分有益，具体探讨并构建关于不同音乐属性感知的模型。此外，探索个体之间音乐感知的差异性，并考虑音乐训练或文化影响等因素

也将很有意义。

上述及后续研究方向将拓展我们的能力，使我们能够探讨有关前文所述作曲家特征、时代特征和体裁的更具体问题。因此，我们的研究提供了一个灵活的框架，物理学领域内外的广大研究者均可加以运用。除了音乐之外，我们的研究还可以扩展到我们身边各种复杂系统，例如语言和社会网络。比如，我们可以分析文学作品并提出这样的问题：莎士比亚不同作品中名词转移的熵是否因体裁而异？更具体地说，悲剧与喜剧中的名词转移信息含量及其可学习性，或人物之间关系的差异，是否有所不同？我们的研究以实际信息和感知信息在音乐中的系统性、全面性分析为例，补充并拓展了对语言、音乐和艺术作为复杂系统的丰富研究[26, 70, 71]。

致谢

我们感谢 Chris Macklin 早期就这一主题与我们进行的交流，也感谢曾就我们早期关于通信网络的工作提出深入问题的听众。这些互动促使我们继续对这一领域展开研究。我们还要感谢 Sandip Varkey、Shubhankar Patankar 和 Aaron Winn，他们就本稿早期版本进行了有益的交流并提出了反馈。本项研究主要由陆军研究办公室项目资助，项目编号为 DCIST-W911NF-17-2-0181，以及美国国家精神卫生研究所项目资助，项目编号为 1-R21-MH-124121-01。D.S.B. 还要感谢约翰·D·和凯瑟琳·T·麦克阿瑟基金会、阿尔弗雷德·P·斯隆基金会、科学交流研究所基金会以及陆军研究办公室（Grafton-W911NF-16-1-0474）提供的额外支持。本文内容完全由作者负责，并不一定代表任何资助机构的官方观点。

附录A：数据与方法的更多细节

1. 数据收集与网络构建

这些音乐文件以 MIDI格式从各种来源收集而来。所分析乐曲的来源如下：前奏曲 [72, 73], 赋格曲 [72, 73], 创意曲[72, 73], 康塔塔[74], 英国组曲[75],法国组曲[75], 四声部众赞歌[73], 勃兰登堡协奏曲[73], 托卡塔[75], 以及协奏曲[75]。前奏曲和赋格曲按其属于《平均律键盘曲集》的第一卷还是第二卷分类，并标记为“1”或“2”。某些乐曲由多个乐章组成，我们的数据集中为每个乐章分别提供了 MIDI 文件。我们分别分析每个乐章，并对测量结果取平均值，从而为每首乐曲得到一个测量值，并以唯一的 BWV编号标识。对于众赞歌，我们分析了 BGA第39卷中 BWV编号为253至438的186首四声部众赞歌。

使用 MATLAB 中的 readmidi 函数读取 MIDI 文件，以获取演奏音符的信息 [76] 。每个数据文件中，乐曲的不同乐器分别存储在独立的通道中。针对每种乐器或音轨，分别计算音符间转移。我们将乐曲中出现的每个音符指定为网络中的一个节点，并将不同八度的音符指定为不同节点。如果音符 i 与音符 j 之间发生转移，我们便从前者向后者绘制一条边。如果同一时刻有多个音符正在演奏 t （例如和弦），则从先前演奏的音符向该时刻的所有音符绘制边 t，并从时刻 t 正在演奏的所有音符向后续音符绘制边。这一流程生成了一个表示音符转移的有向二值网络。用于构建这些网络的代码和数据可在 [77] 获取。我们还构建了这些网络的加权版本，其中每条边的权重等于相应转移发生的次数。

2. 网络随机游走熵

我们使用随机游走来模拟如何从一个底层信息网络中生成信息序列。在这一模型中，游走者在每个节点选择一条出边进行遍历，从而穿过网络。给定一个邻接矩阵为 A 且矩阵元素为 A_{ij}的网络，在标准马尔可夫随机游走中，游走者从节点 i 转移到节点 j 的概率为 $P_{ij} = A_{ij}/k_i^{out}$，其中$k_i^{out} = \sum_j G_{ij}$ 是节点的出度。我们希望量化所得序列中包含的信息量，这可由随机游走熵表示:

$$S = -\sum_i \pi_i \sum_j P_{ij} \log P_{ij},$$

其中， π 是游走者的平稳分布，满足条件 $P\pi = \pi$。对于最简单的无向无权网络，$P_{ij} = 1/k_i$ 和 $\pi_i = k_i/2E$，其中 k_i 是 i^{th} 节点的度，且$E = \sum_{i,\ j} A_{ij}/2$ 是边的总数。在这种情况下，熵可简化为:

$$S = \frac{1}{2E}\sum_i k_i \log k_i = \frac{\langle k \log k\rangle}{\langle k\rangle}. \qquad \text{(A1)}$$

我们可以围绕网络的平均度对这一表达进行泰勒展开，从而得到:

$$S = \text{对数}\langle k\rangle + \frac{\text{Var(k)}}{2\langle k\rangle^2} + \ldots \qquad \text{(A2)}$$

因此，我们发现随机游走熵随网络平均度的增加而呈对数增长。此外，它还会随度方差的增加而增大。这一形式化方法使我们能够将各种音乐网络的信息含量与其网络结构联系起来。用于测量所分析网络的随机游走熵的代码可在[77]获取。

3. 人类如何学习网络的模型

如正文所述，由于认知过程存在缺陷，人类无法以绝对准确的方式推断信息序列的转移概率。研究一再发现，在构建转移结构的内部表征时，人类会随时间整合转移概率[17, 32, 45, 47]。这一过程使人类将序列中并非直接相邻的项目联系起来。从数学上看，在这种模糊时间整合模型下，我们可以用真实的转移结构 P 来表示推断出的转移结构 P：

$$\hat{P} = \sum_{\Delta t=0}^{\infty} f(\Delta t) P^{\Delta t+1}, \tag{A3}$$

其中， f（Δt）是赋予P 较高次幂的权重，并且是 Δt 的递减函数，因此距离较远的关联对一个人的网络表征贡献较小。 f（Δt）的函数形式通过参考文献 [31]中描述的自由能模型得出。该模型表明，在构建信息的内部表征时，每个人都会权衡准确性与成本。在这一模型下，f（Δt）的最优分布是一个玻尔兹曼分布，其参数 β 量化了形成信息内部表征时成本与准确性之间的权衡：

$$f(\Delta t) = e^{-\beta \Delta t}/Z, \tag{A4}$$

其中， $Z = \sum e^{-\beta \Delta t} = (1 - e^{-\beta})^{-1}$ 是一个归一化常数。将此表达代入并化简方程 A3，可得一个将推断出的转移概率 P 与真实转移概率P联系起来的方程：

$$\begin{aligned} \hat{P} =& (1 - e^{-\beta})^{-1} \sum_{\Delta t=0}^{\infty} e^{-\beta \Delta t} P^{\Delta t+1} \\ =& (1 - \eta) P (I - \eta P)^{-1}, \end{aligned} \tag{A5}$$

其中 $\eta = e^{-\beta}$。先前研究通过对人类进行大规模在线实验，估算出η 的值为 0.8 [17]。使用这一测得的 η值，我们用公式 A5 计算任意给定音乐网络的推断网络（代码见 [77]）。

4. KL散度

为量化失真后的学习转移结构 P 与原始转移结构P之间的差异，我们计算这两种转移结构之间的Kullback-Leiber（KL）散度。Kullback-Leiber散度用于衡量一个概率分布与参考分布之间的差异，定义如下：

$$D_{KL}(P||\hat{P}) = -\sum_i \pi_i \sum_j P_{ij} \log \frac{\hat{P}_{ij}}{P_{ij}}, \tag{A6}$$

其中， $\vec{\pi}$ 是转移矩阵 P的平稳概率分布，通过求解 $P\pi = \pi$得到。两个量之间的 KL散度始终非负，且当且仅当 $P = P$时取值为零。KL散度越大，推断出的网络 P 与原始网络的差异就越大。因此，这一量可以衡量网络因人类学习的不准确性而被扰乱的程度——换言之，也可以衡量网络结构推断得有多准确。

5. 零模型

我们的目标是找出音乐网络中的独特特征，这些特征使其能够有效地传递信息。为了评估我们的观察结果究竟只是偶然所致，还是我们数据集的独特特征，我们将对真实音乐网络的测量结果与以下零网络模型 [78, 79]进行比较。

1. 具有相同节点数和边数的零模型网络。这类网络通过生成节点数和边数相同的随机网络来构建，使我们能够评估所测量的量是否仅仅由网络规模决定。

2.度保持零网络。这类网络是规模相同的随机化网络，此外还要求网络中每个节点的入度和出度保持不变。构建这类网络时，反复交换网络中节点对之间的边，从而在保持每个节点入度和出度不变的同时，随机化网络的连通性（或拓扑结构）。这类零模型使我们能够评估连通性或拓扑结构对所测量的量的作用。

我们可以将度保持零网络推广到加权网络。我们关注度保持的随机化网络，因为这些网络能固定节点级熵，使我们能够研究拓扑结构对所测量量的影响。在加权网络中，节点级熵由节点的出权重和出度决定。

因此，我们在网络中对节点对之间进行边交换的步骤仍然适用，因为它除了保留每个节点的入度和出度外，也保留了各节点的出权重。借助这些零模型，我们可以评估所关注的量是否存在，并识别连接模式或规模所起的作用。用于生成零模型网络的代码可在 [77] 获取。

6. 传递聚类系数

仿照节点[53, 54], 的聚类系数，我们将传递聚类系数定义为一种度量，用于衡量有向网络中的节点形成传递关系的倾向。节点 i 的传递聚类系数（对于不含自环的无权图）定义如下：

$$C_i^T = \frac{\Delta_i^T}{k_i^{\mathrm{tot}}(k_i^{\mathrm{tot}} - 1)}, \tag{A7}$$

其中， Δ_i^T表示节点 i 所参与的传递三角形数量， k_i^{tot}表示该节点的总度（ + 入度与出度）。分母则用于统计节点 i的邻域内可能存在的三角形数量。

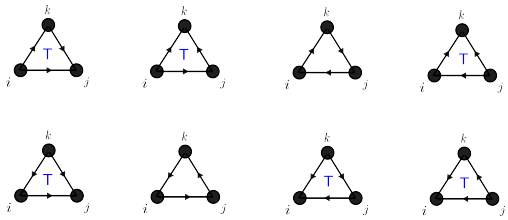

图 8. 有向图中以节点 i 为顶点的 8 种可能三角形。代表传递关系的三角形以字母“T”标记。

涉及节点 i 的可能有向三角形可分为两类——代表循环关系的三角形和代表传递关系的三角形（图 8）。图 A的邻接矩阵可用于表示实际存在且涉及节点 i 的传递三角形数量：

$$C_i^T = \frac{(A + A^T)_{ii}^3 - A_{ii}^3 - (A^T)_{ii}^3}{2\, k_i^{\mathrm{tot}}(k_i^{\mathrm{tot}} - 1)}. \tag{A8}$$

该表达式统计了三角形总数的一个子集，是文献 [80] 中推导出的表达式的一个特例。我们将使用该表达式来衡量各音乐网络的传递聚类系数（代码见 [77]）。

附录 B：引文多样性声明

科学的多个领域近期研究发现，引文实践存在偏差：女性和其他少数群体学者的论文所获引用，低于其论文数量在该领域中所占的比例 [81–89]。在此，我们力求主动选择能够体现该领域在思想、贡献形式、性别、种族、族裔及其他方面多样性的参考文献。首先，我们利用存储姓名为女性使用概率的数据库，预测每条参考文献第一作者和末位作者的性别 [85, 90]。按此方法计算（并排除对本文第一作者和末位作者的自引），我们的参考文献中，女性（第一作者）／女性（末位作者）占 9.37%，男性／女性占 18.67%，女性／男性占 19.29%，男性／男性占 52.67%。此方法存在局限：a）用于构建数据库的姓名、代词和社交媒体资料并非在所有情况下都能反映性别认同；b）该方法无法涵盖双性人、非二元性别者或跨性别者。其次，我们利用存储姓名由有色人种作者使用概率的数据库，预测每条参考文献第一作者和末位作者的种族／族裔类别 [91, 92]。按此方法计算（并排除自引），我们的参考文献中，有色人种作者（第一作者）／有色人种作者（末位作者）占 11.79%，白人作者／有色人种作者占 11.60%，有色人种作者／白人作者占 16.05%，白人作者／白人作者占 60.56%。此方法存在局限：a）姓名和佛罗里达州选民数据（用于进行预测）未必能反映种族／族裔身份；b）该方法无法涵盖原住民和混血作者，也无法涵盖那些因姓名的种族化或族裔化含义模糊而可能面临不同偏差的人。我们期待未来的研究能帮助我们更好地了解如何在科学领域推动公平的实践。

附录 C：数据和代码可用性

本文分析所用的数据和代码均可公开获取，网址为 https://github.com/ SumanSKulkarni/Music_Networks。

附录 D：补充信息

1. 引言

在这份补充信息中，我们提供了扩展分析与讨论，以支持正文中呈现的结果。在第 D 2 节中，我们进一步分析巴赫音乐网络的信息含量及其与网络结构的关系。在第 D 5 节中，我们更仔细地考察传递聚类系数，并研究可能解释不同作曲形式之间所观察到差异的中尺度特征。

2. 信息含量

为了更好地呈现各首音乐作品信息含量的差异，我们为每首乐曲分配一个索引编号，并绘制每首乐曲的信息熵随其索引编号变化的图（图 9A）。由此可以更清楚地看到，不同作曲形式的乐曲往往会按熵值聚集在一起。如正文所述，我们发现众赞歌的熵明显低于所研究的其他乐曲。相比之下，托卡塔和第二组前奏曲的熵则高得多。为了将音乐网络的信息熵与其结构联系起来，我们将其熵与相应的零模型网络进行比较（正文中的图 3A 和 B），据此得出结论：信息熵主要由度分布决定。对于无向无权网络，网络熵在一阶和二阶近似下，分别取决于网络平均度的对数和度分布的异质性（式 4）[17, 40]。下面我们将补充呈现音乐网络的信息熵与其结构之间关系的结果。

3. 理解一阶信息熵：平均度

将音乐网络的信息熵绘制为其平均度的函数（图 9B），我们可以看到，各种作曲形式的一阶信息熵差异源于其平均度的差异。尽管我们在图9A中观察到，各种作曲形式的熵彼此聚集，但很明显，有些乐曲——例如众赞歌、法国组曲、英国组曲和康塔塔——比赋格曲和第一组前奏曲聚集得更紧密。这些差异可以用不同乐曲之间平均度的变化幅度来解释。在图10中，我们按作曲类型分别绘制音乐网络的熵与平均网络度的关系。此外，我们还报告了每种作曲类型中各乐曲平均度的标准差。通过研究这些图，我们观察到，英国组曲、法国组曲和众赞歌（其熵聚集得更紧密）的度分布也更集中，而赋格曲（其熵分布更分散）的平均度则更加多样。

4. 深入理解二阶信息熵：度异质性

在正文图3A中，我们观察到，真实音乐网络的熵大于具有相同节点数和边数的相应随机化零模型网络。由于这两种网络的平均度相同，我们假设差异源于更高的入度和出度异质性，如公式4所示。为检验这一假设，我们在图11中将音乐网络的入度和出度异质性（根据公式5计算）与相应的零模型网络进行比较。总体而言，我们观察到，巴赫的音乐网络确实比同等规模的随机网络预期的更加异质。这种组织方式使它们能够在结构中容纳更多信息。

度异质性也可以解释熵高度聚类的乐曲之间所观察到的熵差异。正如前文所述，众赞歌、法国组曲、英国组曲和康塔塔等乐曲的平均度彼此聚类在一起，因此它们的熵也随之聚类在一起。我们预计，每组乐曲之间观察到的差异可以由其度异质性的差异来解释。在图12和图3C中，我们将聚类在一起的乐曲的熵绘制为其入度和出度异质性的函数；总体而言，我们观察到，异质性更高的乐曲具有更高的信息熵。不过需要指出的是，对于大多数乐曲形式，我们的样本量都较小，因此正文中仅报告众赞歌。

5. 进一步分析传递聚类系数

在分析巴赫音乐作品中音符转换的实际信息含量与感知信息含量之间的差异时，我们发现，这些差异主要由传递三角簇的存在所致。传递三角簇往往会使推断网络更接近实际网络，从而让网络更容易学习。如图 13A 所示，真实的（无权重）音乐网络的传递聚类系数往往高于保留每个节点度数的随机网络，这表明这是音乐网络的一项独特特征，并非仅仅由偶然因素造成。图 13A 中的数据呈现出引人注目的形态，我们将在本节中详细说明并分析。首先，我们观察到，众赞歌作品的传递聚类系数往往高于同等规模、具有相同度分布的网络所预期的水平。其次，尽管前奏曲的传递聚类系数高于其他作曲形式，但其数值仍低于同等规模、具有相同度分布的网络所预期的水平。事实上，仅考察 x 轴便会发现，与前奏曲对应的零模型网络的传递聚类系数高于与众赞歌对应的零模型网络。然而，考察 y 轴则会发现，真实众赞歌与前奏曲网络之间的偏差并没有那么

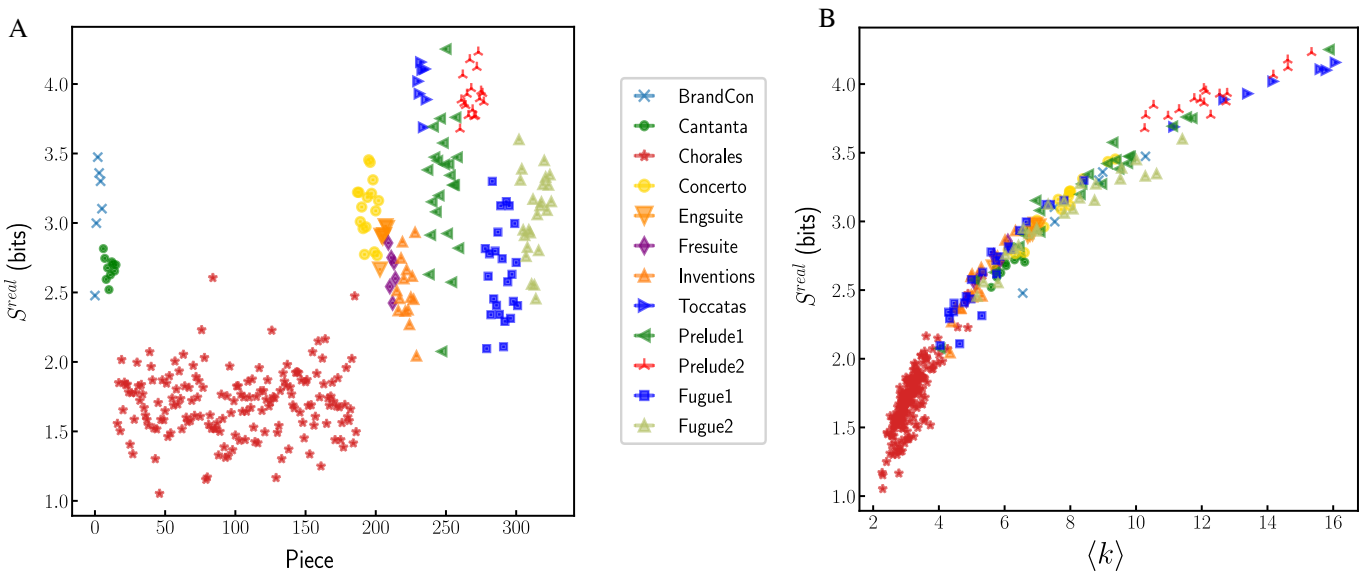

图 9. **巴赫音乐网络的熵及其与网络平均度的关系。(A)** 巴赫音乐网络的熵（S^{real}），按乐曲排列。**(B)** 巴赫音乐网络的熵（S^{real}）随网络平均度 $\langle k \rangle$ 的变化。面板 **(A)** 和 **(B)** 中的每个数据点都代表一首乐曲。颜色和标记表示作品类型，如图例所示。

明显。我们推测，这些差异可能是由网络中介观特征的存在所致，例如核心-边缘结构。

a. Core-periphery structure

网络中的核心-边缘结构指存在两个组成部分：紧密连接的“核心”和稀疏连接的“边缘”。核心由彼此之间以及与边缘连接良好的节点组成，而边缘中的节点彼此之间以及与核心中的节点连接稀疏[93, 94]。我们推测，相对较大的核心或许可以解释为何众赞歌的聚类系数高于根据其规模和度所预期的值。同样，前奏曲中小于预期的核心或许可以解释为何其聚类系数低于同等规模和度分布的网络所预期的值。由于核心由与核心自身及边缘连接良好的节点构成，如果核心内部以及核心与边缘之间的边数量多于边缘节点之间的边，那么这些边很可能会形成我们感兴趣的聚类。我们将连接两个核心节点的边称为核心-核心（CC），连接两个边缘节点的边称为边缘-边缘（PP），连接核心节点与边缘节点的边称为核心-边缘（CP）。

为检验我们的假设，我们采用 Borgatti 和 Everett [94] 描述的方法，计算每个音乐网络的核心-边缘结构。然后计算每个网络中核心-核心（CC）边与核心-边缘（CP）边的数量之和同边缘-边缘（PP）边数量的比值。为理解这一比值，我们将其与相应的度保持零网络进行比较（图 13B）。值得注意的是，我们发现，众赞歌中位于核心内部或从核心延伸出去的边所占比例，高于相应零模型网络的预期。前奏曲则恰好相反，其位于核心内部或从核心延伸出去的边所占比例，低于相应零模型网络的预期。这一发现模式表明，众赞歌的核心-边缘结构比偶然情况下预期的更为显著，而前奏曲的核心-边缘结构则不如预期显著。尽管前奏曲的传递聚类系数仍略高于其他乐曲，但由于核心-边缘结构存在这些差异，实际差异并不像人们预期的那么显著。

通过进行这项额外分析，我们展示了音乐网络如何呈现出有趣的中尺度结构；这些结构因作曲形式而异，从而导致人们对其网络结构的感知存在差异。

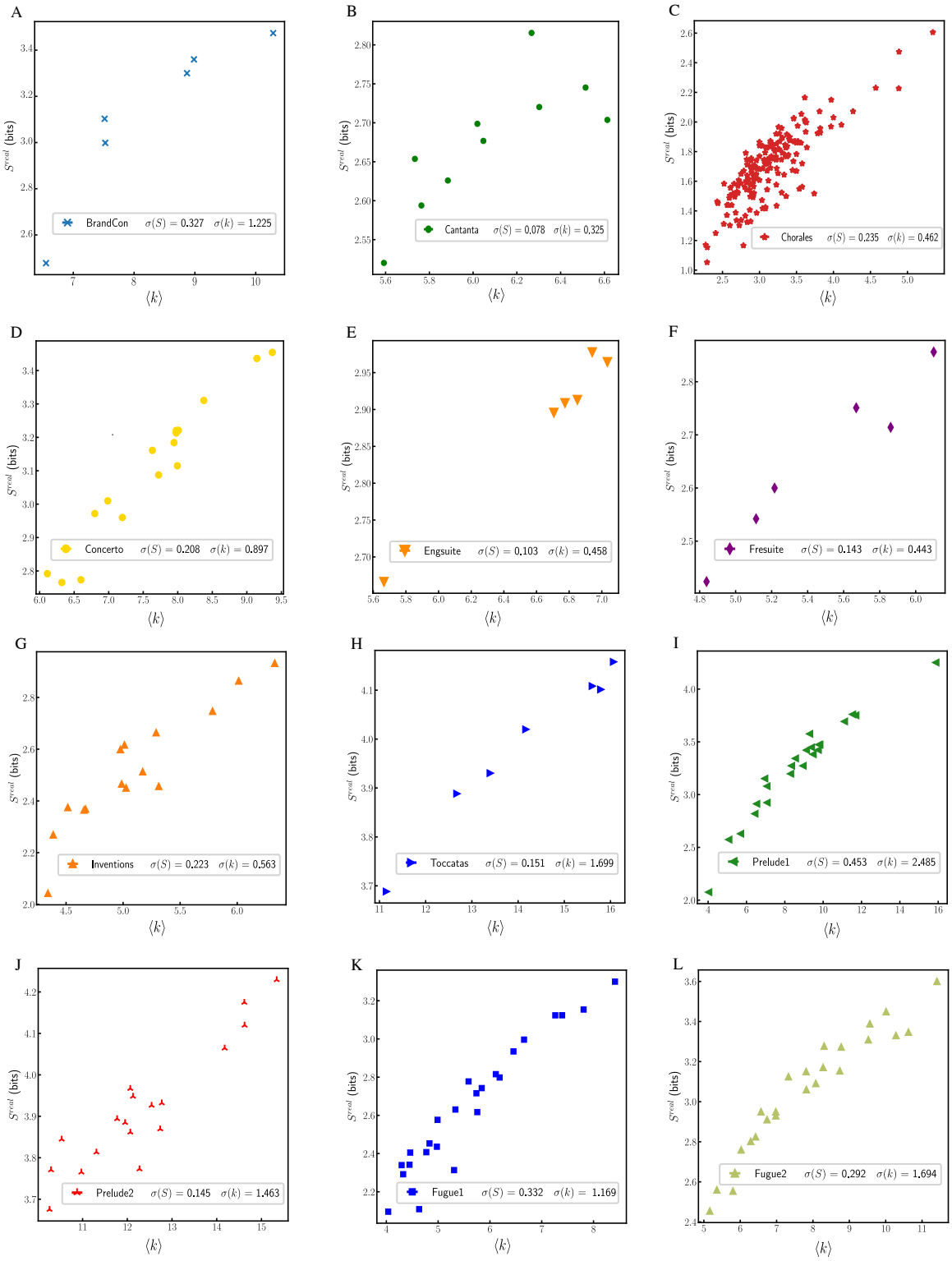

图10。**按每种作曲形式分别绘制的信息熵与音乐网络平均度之间的关系**。巴赫音乐网络的熵（S^{real}）与网络的平均度 $\langle k \rangle$ 的关系图。每个数据点代表一首乐曲。颜色和标记表示作品类型，如图例所示。

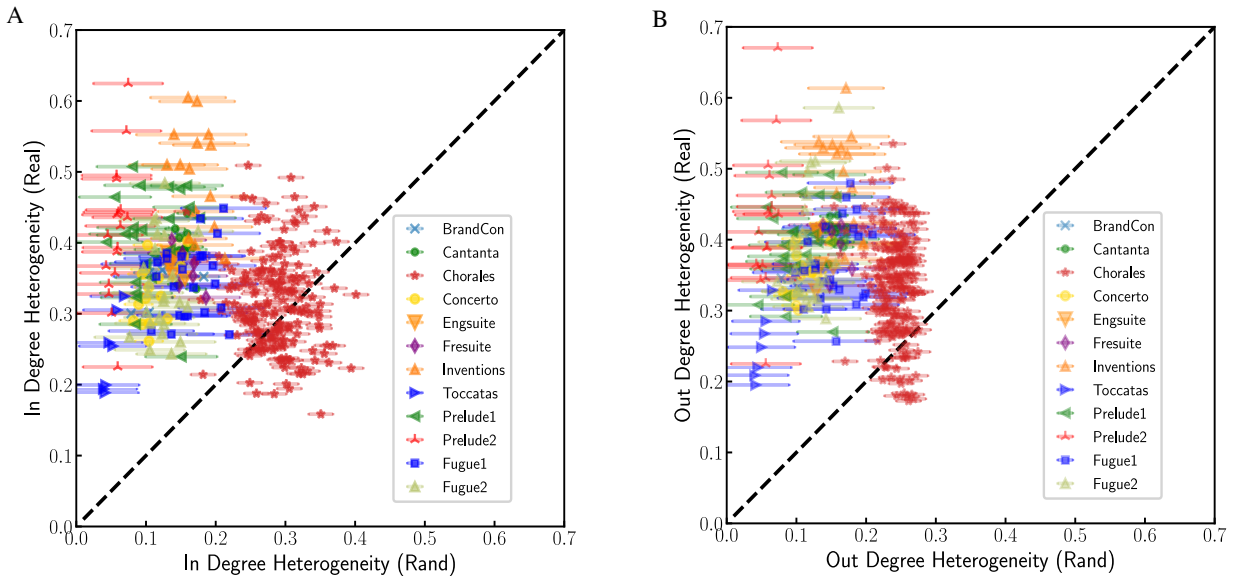

图11。**比较巴赫音乐网络与规模相同的随机化空网络的异质性**。(A) 音乐网络的入度异质性与规模相同的随机网络的比较。(B) 音乐网络的出度异质性与规模相同的随机网络的比较。面板(A)和(B)中的每个数据点代表一首乐曲。颜色和标记表示作品类型，如图例所示。对于每个随机网络，我们对100个独立实现取平均后报告入度和出度异质性。x轴上的误差条表示样本的标准误。

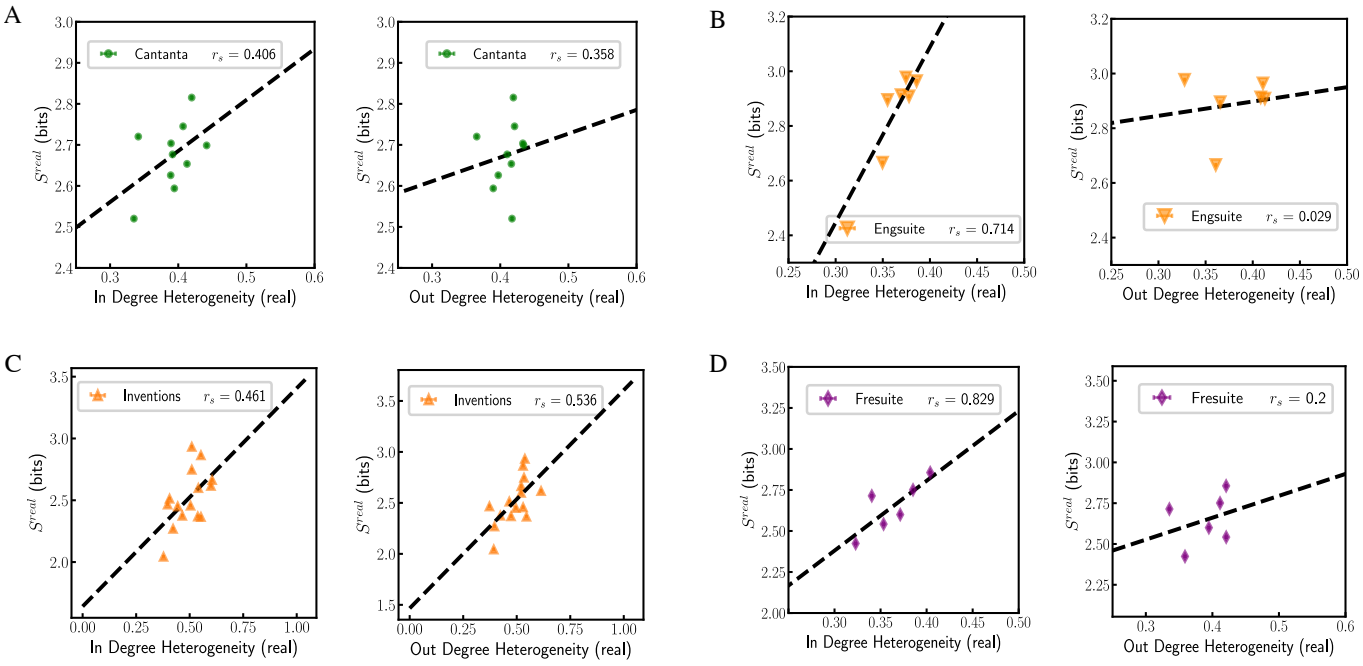

图12。**巴赫音乐网络的信息熵与度异质性之间的关系**。巴赫音乐网络的熵（S^{real}）与网络的入度和出度异质性的关系图。每个数据点代表一首乐曲。颜色和标记表示作品类型，如图例所示。每个面板中的虚线表示最佳线性拟合，报告的 r_s 值为x轴变量与y轴变量之间的斯皮尔曼相关系数。

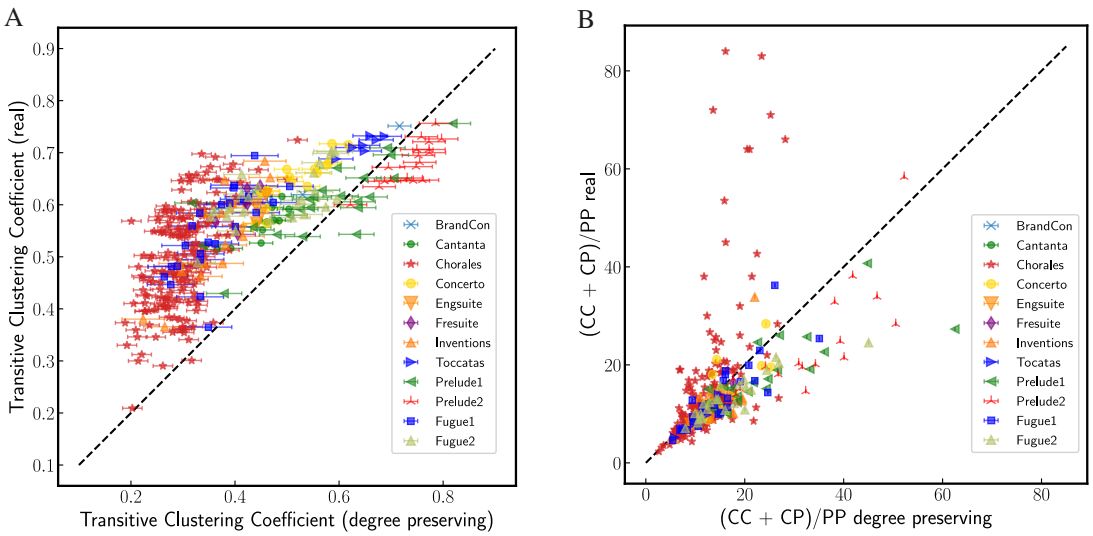

图 13. **音乐网络的核心-边缘分析**。(A) 真实音乐网络的传递聚类系数，与保持每个节点入度和出度不变的零模型网络进行比较。对于度保持零网络，我们报告 100 次独立实现的平均值，误差条表示样本的标准误。(B) 真实音乐网络中核心-核心（CC）边和核心-边缘（CP）边的数量与边缘-边缘（PP）边数量之比，并与度保持零网络进行比较。对于度保持零网络，我们报告基于 100 个独立随机图计算出的平均值。在两个面板中，虚线表示直线 $y = x$。颜色和标记表示作品类型，详见图例。

[1] S. J. Mithen, *The Singing Neanderthals: the origins ofmusic, language, mind and body*（哈佛大学出版社，2005年）。[2] G. F. Welch、M. Biasutti、J. MacRitchie、G. E. McPher- son 和 E. Himonides，《音乐对人类发展和幸福感的影响》（2020年）。[3] I. Cross，《音乐、认知、文化与进化》，《纽约科学院年鉴》930，28–42（2001年）。[4] S. McClary，《踩在面包上的即兴曲：或音乐如何讲述故事》，《叙事》5，20–35（1997年）。[5] E. Glennie、E. Mac Donald，*et al.*，*Musical communication* 2005（牛津大学出版社按需出版，）。[6] K. R Scherer 和 E. Coutinho，《音乐如何创造情感：一种多因素过程方法》，《音乐的情感力量：关于音乐唤醒、表达和社会控制的多学科视角》，121–145（2013）。[7] S. Koelsch，《音乐诱发的情绪的脑相关指标》，《自然综述：神经科学》15，170–180（2014年）。[8] A. J. Blood 和 R. J. Zatorre，《对音乐的强烈愉悦反应与奖赏和情感相关脑区的活动相关》，《美国国家科学院院刊》98，11818–11823（2001年）。[9] D. Huron，*Sweet Anticipation: Music and the Psychology of Expectation* 2006（麻省理工学院出版社，）。[10] B. Tillmann、B. Poulin-Charronnat 和 E. Bigand，《音乐中的期待的作用：从乐谱到情绪和大脑》，《WIREs认知科学》5，105 113 2014–（）。[11] M. T. Pearce 和 G. A Wiggins，《听觉期待：音乐感知与认知的信息动力学》，《认知科学专题》4，625–652（2012年）。[12] L. B. Meyer, *Emotion and Meaning in Music*，ACLS 人文电子书（芝加哥大学出版社，1956年）。[13] S. Ferretti，《将音乐独奏建模为复杂网络》，《信息科学》375（2017年）。[14] S. Ferretti，《音乐作品的复杂网络结构：来自不同音乐流派的一些应用案例分析》，《多媒体工具与应用》77，16003–16029（2018年）。[15] X. F. Liu、K. T. Chi 和 M. Small，《音乐作品的复杂网络结构：具有吸引力的音乐的算法生成》，《物理学A：统计力学及其应用》389，126–132（2010年）。[16] M. B. Nardelli，《Musicntwrk：音乐理论、分析与创作的数据工具》，载于 *Perception Representations Image Sound Music: 14th International Symposium CMMR 2019 Marseille France October 14–18 2019 2021, Revised Selected Papers 14*（施普林格，）第190–215页。[17] C. W. Lynn、L. Papadopoulos、A. E. Kahn 和 D. S. Bassett，《复杂网络中的人类信息处理》，《自然·物理》16，965（2020年）。[18] C. E. Shannon，《通信的数学理论》，《贝尔系统技术期刊》27，379–423（1948年）。[19] S. T. Piantadosi、H. Tily 和 E. Gibson，《词长经过优化以实现高效通信》，《美国国家科学院院刊》108，3526–3529（2011年）。[20] J. B. Plotkin 和 M. A. Nowak，“语言演化与信息论”，《理论生物学杂志》**205**，147 159 2000–（）。[21] J.-P. Eck mann、E. Moses 和 D. Sergi，“对话熵在电子邮件流量中形成相干结构”，《美国国家科学院院刊》**101**，14333 14337 2004–（）。[22] K. Zhao、M. Karsai 和 G. Bianconi，“动态社会网络的熵”，PLOS ONE，1–7 (2011年)。[23] M. Rosvall、A. Trusina、P. Minnhagen 和 K. Sneppen，“网络与城市：信息视角”，《物理评论快报》**94**，028701 (2005年)。[24] J. E. Cohen，“信息论与音乐”，《行为科学》**7**，137–163 (1962年)。[25] L. Hiller 和 C. Bean，“对四部奏鸣曲呈示部的信息论分析”，《音乐理论杂志》**10**，96 137 1966–（）。[26] F. Gomez、T. Lorimer 和 R. Stoop，“古典音乐和声结构的复杂网络”，载于 *Non-linear Dynamics of Electronic Systems*（施普林格国际出版，卡姆，2014年）第262–269页。[27] J.-P. Boon、A. Noullez 和 C. Mommen，“复杂动力学与音乐结构”，《界面》**19**，3–14 (1990年)。[28] L. Liu、J. Wei、H. Z hang、J. Xin 和 J. Huang，“从巴赫到肖邦的古典音乐音高波动的统计物理学视角：标度的证据”，PLOS ONE **8**，1–6 (2013)。[29] D. Kahneman、S. P. Slovic、P. Slovic 和 A. Tversky, *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*（剑桥大学出版社，1982年)。[30] P. Dayan，“改进时间差分学习的泛化：后继表示”，《神经计算》**5**，613–624 (1993年)。[31] C. W. Lynn、A. E. Kahn、N. Nyema、D. S. Bassett，“事件的抽象表征源自学习和记忆中的心理错误”，《自然·通讯》，2313 (2020年)。[32] I. Momennejad、E. M. Russek、J. H. Cheong、M. M. Botvinick、N. D. Daw 和 S. J. Gershman，“人类强化学习中的后继表示”，《自然·人类行为》**1**，680–692 (2017年)。[33] M. W. Howard 和 M. J. Kahana，“时间情境的分布式表征”，《数学心理学杂志》**46**，269–299 (2002年)。[34] S. J. Gershman、C. D. Moore、M. T. Todd、K. A. Norman 和 P. B. Sederberg，“后继表示与时间情境”，《神经计算》**24**，1553–1568 (2012年)。[35] C. W. Lynn 和 D. S. Bassett，“人类如何学习和表征网络”，《美国国家科学院院刊》**117**，29407 (2020年)。[36] G. R. Jagari、P. Pedram、L. Hedayatifar，“巴赫创意曲音高的长程相关性与多重分形性”，《统计力学杂志：理论与实验》**04**(2007年)。[37] J. M. Moore、D. C. Corrˆea 和 M. Small，“巴赫的大脑是马尔可夫链吗？用递归量化评估短篇符号音乐作品的马尔可夫阶数”，《混沌：非线性科学跨学科期刊》**28**，085715 (2018年)。[38] F. Lerdahl 和 R. S. Jackendoff，*A Generative Theory*

of Tonal Music, reissue, with a new preface (麻省理工学院出版社，1996年)。[39] S. Koelsch、M. Rohrmeier、R. Torrecuso 和 S. Jentschke，“音乐中层级句法结构的加工”，《美国国家科学院院刊》110，15443–15448 (2013)。[40] J. Gomez-Gardenes 和 V. Latora，“复杂网络上扩散过程的熵率”，《物理评论 E》78，065102 (2008年)。[41] R. Albert，“细胞生物学中的无标度网络”，《细胞科学杂志》118，4947–4957 (2005年)。[42] K. Lerman、X. Yan 和 X.-Z. Wu，“社会网络中的多数错觉”，PLOS ONE 11，e0147617 (2016年)。[43] A.-L. Barab´asi 和 R. Albert，“随机网络中标度的涌现”，《科学》286，509–512 (1999年)。[44] M. M. Garvert、R. J. Dolan 和 T. EJ Behrens，“人类海马—内嗅皮层中抽象关系知识的映射”，eLife 6 (2017年)。[45] F. Meyniel、M. Maheu 和 S. Dehaene，“人类对序列的推断：一个最简转移概率模型”，《公共科学图书馆计算生物学》12，e1005260 (2016年)。[46] F. Meyniel 和 S. Dehaene，“概率学习中置信度加权与层级推断的脑网络”，《美国国家科学院院刊》114，E3859–E3868 (2017年)。[47] E. L. Newport 和 R. N. Aslin，“远距离学习 I：非相邻依存关系的统计学习”，《认知心理学》48，127–162 (2004年)。[48] A. E. Kahn、E. A. Karuza、J. M. Vettel、D. S. Bassett，“概率性运动序列可学习性的网络约束”，《自然·人类行为》，936–947 (2018年)。[49] J. R. Saffran、E. K. Johnson、R. N. Aslin 和 E. L. Newport，“人类婴儿和成年人对音调序列的统计学习”，《认知》70 (1999年)。[50] E. Morgan、A. Fogel、A. Nair 和 A. D. Patel，“统计学习与格式塔式原则可预测旋律预期”，《认知》189 (2019年)。[51] V. K. Cheung、P. M. C. Harrison、S. Koelsch、M. T. Pearce、A. D. Friederici 和 L. Meyer，“认知信息与感觉信息在音乐预期中的不同作用”，(2020年)。[52]T. Collins、Barbara Tillmann、Frederick S Barrett、Charles Delb´e 和 Petr Janata，“感觉与认知表征共同构成音乐调性预期的综合模型：从音频信号到行为。”《心理学评论》121 (2014年)。[53] D. J. Watts 和 S. H. Strogatz，“小世界网络的集体动力学”，《自然》393，440–442 (1998年)。[54] G. Szab´o、M. J. Alava 和 J. Kert´esz，“复杂网络中的聚类”，《物理学讲义》650，139–162 (2004年)。[55] Jenny R Saffran、Richard N Aslin 和 Elissa L Newport，“8个月大的婴儿的统计学习”，《科学》274 (1996年)。[56]J´ozsef Fiser 和 Richard N Aslin，“从视觉形状序列中统计学习高阶时间结构。”《实验心理学杂志：学习、记忆与认知》28 (2002年)。[57]Alexa R Romberg 和 Jenny R Saffran，“统计学习与语言习得”，《威利跨学科评论：认知科学》1 (2010年)。[58] Duncan J Watts 和 Steven H Strogatz 网络的集体动力学，”《自然》（1998）。[59] Ramon Ferrer I Cancho 和 Richard V Sol´e，“人类语言的小世界”，《伦敦皇家学会会刊》B辑：生物科学（2001年）。[60] P. H. R. Zivic、F. Shifres 和 G. A. Cecchi，“西方音乐风格演变的感知基础”，《美国国家科学院院刊》110，10034–10038（2013）。[61] C. P´erez-Sancho、D. Rizo 和 J. M. I˜nesta，“利用和弦和随机语言模型进行体裁分类”，《连接科学》21，145–159（2009）。[62] D. K. Simonton，“旋律结构与音符转移概率：对15,618个古典音乐主题的内容分析”，《音乐心理学》12，3–16（1984）。[63] J. Thickstun、Z. Harchaoui 和 S. Kakade，“从零开始学习音乐特征”，arXiv预印本 arXiv:1611.09827（2016）。[64] I Liu、Bhiksha Ramakrishnan、 *et al.*，“2014年的巴赫：利用循环神经网络进行音乐创作”，arXiv预印本 arXiv:1412.3191（2014年）。[65]W Jay Dowling 和 James C Bartlett，“音程信息对旋律长期记忆的重要性。”《音乐心理学：音乐认知研究期刊》1（1981）。[66] Richard Parncutt 和 Richard Parncutt，“心理声学”，《和声：一种心理声学方法》（1989）。[67]Jian Xu、Thanuka L Wickramarathne 和 Nitesh V Chawla，“表示网络中的高阶依赖关系”，《科学进展》2（2016）。[68] Renaud Lambiotte、Martin Rosvall 和 Ingo Scholtes，“从网络到复杂系统的最优高阶模型”，《自然·物理》15（2019）。[69] Hao Yin、Austin R Benson 和 Jure Leskovec，“网络中的高阶聚类”，《物理评论 E》97（2018年）。[70]J. Stiller、D. Nettle 和 R. IM Dunbar，“莎士比亚戏剧的小世界”，《人性》14，397–408（2003）。[71] Y.-M. Choi 和 H.-J. Kim，“希腊与罗马神话的有向网络”，《物理学 A：统计力学及其应用》382，665–671（2007年）。[72]“Bach Central”，http://www.bachcentral.com/midiindexcomplete.html。[73] “Kern乐谱”，http://kern.humdrum.org/search?s=t& keyword=Bach+Johann。[74] “巴赫康塔塔网站”，https://www.bach-cantatas.com/Mus/BWV1-Mus.htm。[75]“Suzu MIDI”，http://www.suzumidi.com/eng/bach4.htm。[76] “Ken Schutte的MATLAB MIDI文件工具”，https://github.com/kts/matlab-midi。[77] “J. S. 巴赫音乐中音符转移的信息含量。”https://github.com/SumanSKulkarni/Music_ Networks。[78] M. E. J. Newman 和 M. Girvan，“发现并评估网络中的社群结构”，《物理评论 E》69，026113（2004年）。[79] F. V´a˘sa 和 B. Mi˘si´c，“网络神经科学中的零模型”，《自然综述：神经科学》，1–12（2022年）。[80] G. Fagiolo，“复杂有向网络中的聚类”，《物理评论 E》76，026107（2007年）。[81] S. M. Mitchell、S. Lange 和 H. Brus，“国际关系期刊中的性别化引文模式”，《国际研究视角》14

，“小世界”

’ 485–492（2013）。

[82] M. L. Dion、J. L. Sumner 和 S. Mitchell，“政治学与社会科学方法论领域中的性别化引文模式”，Political Analysis **26**，312–327（2018年）。[83] N. Caplar、S. Tacchella 和 S. Birrer，“根据引文计数定量评估天文学出版物中的性别偏见”，Nature Astronomy **1**，0141（2017年）。[84] D. Maliniak、R. Powers 和 B. F. Walter，“国际关系领域中的性别引文差距”，International Organization **67**，889–922（2013）。[85] J. D. Dworkin、K. A. Linn、E. G. Teich、P. Zurn、R. T. Shinohara 和 D. S. Bassett，“神经科学参考文献列表中性别失衡的程度及其驱动因素”，bioRxiv（2020年）。[86] M. A. Bertolero、J. D. Dworkin、S. U. David、C. L. Lloreda、P. Srivastava、J. Stiso、D. Zhou、K. Dzirasa、D. A. Fair、A. N. Kaczkurkin、B. J. Marlin、D. Shohamy、L. Q. Uddin、P. Zurn 和 D. S. Bassett，“神经科学参考文献列表中的种族与族裔失衡及其与性别的交叉关系”，bioRxiv（2020年）。[87] X. Wang、J. D. Dworkin、D. Zhou、J. Stiso、E. B. Falk、D. S. Bassett、P. Zurn 和 D. M. Lydon-Staley，“交流领域中的性别化引文实践”，Annals of the International Communication Association (2021)。[88]P. Chatterjee 和 R. M. Werner，《高影响力期刊论文中的性别差异与引用》，JAMA Netw Open **4**，e2114509（2021）。[89] J. M. Fulvio、I. Akinnola 和 B. R. Postle，《认知神经科学引文实践中的性别（不）平衡》，J Cogn Neurosci **33**，3–7（2021）。[90] D. Zhou、E. J. Cornblath、J. Stiso、E. G. Teich、J. D. Dworkin、A. S. Blevins 和 D. S. Bassett，《性别多样性声明与代码笔记本 v1.0》（2020）。[91] A. Ambekar、C. Ward、J. Mohammed、S. Male 和 S. Skiena，《基于开放来源的姓名族裔分类》，发表于 *Proceedings of the 15th ACM SIGKDD international conference on Knowledge Discovery and Data Mining* 2009 49 58 ( ) 第 –页。[92] G. Sood 和 S. Laohaprapanon，《根据姓名中的字符序列预测种族与族裔》，arXiv 预印本 arXiv:1805.02109（2018）。[93] M. P. Rombach、M. A. Porter、J. H. Fowler 和 P. J. Mucha，《网络中的核心-边缘结构》，SIAM Journal on Applied Mathematics **74**，167–190（2014）。[94] S. P. Borgatti、M. G. Everett，《核心/边缘结构模型》，Social Networks **21**，375–395（2000）。