arXiv:2301.00784v1 [math.RT] 2 Jan 2023

关于某些实正则表示的行列式公式

LÉA BITTMANN

摘要。我们将 Lapid-Mínguez 关于局部非阿基米德域上 GL_n 的实正则表示的一个公式解释为矩阵行列式。我们利用刘易斯·卡罗尔行列式恒等式证明了实正则表示之间的新关系。通过量子仿射 Schur-Weyl 对偶，这些关系推广了 Mukhin-Young 的扩展 T-系统，它针对量子仿射代数$U_q(\mathfrak{sl}_k)$的表示；而后者本身又是著名的 T-系统 关系的推广。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 良好线段 7 4. 行列式公式 10 5. 扩展 T-系统公式 11 6. 与量子仿射代数表示的关系 17 附录 A. 费雷尔图板 19 参考文献 20

1. 引言

本文的背景是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的表示论（其中 F 是一个非-Archimedean 阿基米德局部域），或者等价地，是类型 A 量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$ 的表示论（其中 $q \in \mathbb{C}^\times$ 不是单位根）。事实上，通过 Chari-Pressley 的 量子仿射 *Schur-Weyl* 对偶 [CP95], , $\widehat{\mathrm{GL}}_n(F)$ 的复光滑有限长表示范畴等价于（层级 n）有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$-模的范畴，当$k \geqslant n$。由于这两个背景彼此等价，本文大部分内容将讨论 $\mathrm{GL}_n(F)$ 表示的范畴 $\mathcal{C}$。这两个范畴都已得到深入（且独立的）研究，但一些重要的自然问题仍未解决。

归一化抛物诱导记为 $\times$，它赋予该范畴以环范畴结构，并赋予其格罗滕迪克群 $\mathcal{R}$ 以环结构。该范畴中的不可约表示 $\mathcal{C}$ 已由 Zelevinsky [Zel80] 借助多重线段（线段的形式和）完成分类。对于 $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_N$一个多重线段，相应的不可约表示 $Z(\mathfrak{m})$可作为标准表示 $\zeta(\mathfrak{m})$ 的唯一不可约子表示$= Z(\Delta_1) \times Z(\Delta_2) \times \cdots \times Z(\Delta_N)$得到。不可约表示和标准表示的类构成格罗滕迪克环 $\mathcal{R}$的两组基，它们之间的换基矩阵是单位三角形的，其系数可以用 Kazhdan-Lusztig 多项式表示（见 [Zel81],[CG97]）。对于 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$的有限维表示，也建立了类似的理论（参见 Nakajima [Nak01]的研究）。这给出了一个算法，可用于计算

由标准表示的类得到简单表示的类。然而，实际计算这些系数往往非常困难。

对于某些特定类别的不可约表示，人们已经建立了卓越的公式，用标准表示的类的线性组合来计算它们的类。Tadić [Tad95], 以及随后 Chenevier-Renard [CR08], 的工作为*Speh* 表示建立了这样的公式。巧妙的是，这个公式可以看作是计算一个矩阵的行列式，随后人们利用刘易斯·卡罗尔恒等式（也称为道奇森行列式法则）证明了该公式。在 [LM14], 中，Lapid-Mínguez 将 Tadić 的公式推广到了一个更大的表示类，称为梯形表示。随后，在 [LM18]中，同一作者为实的正则表示建立了一个更一般的公式（见下文（4.1）），这些表示满足- $Z(\mathfrak{m})$ 是不可约的条件。

此外，在 [LM14], 中，Lapid-Mínguez 利用刘易斯·卡罗尔恒等式，得到了这些梯形表示中某些表示的类之间一个卓越的关系。对于$Z(\mathfrak{m}) = Z(\Delta_1 + \cdots + \Delta_N)$一个梯形表示，我们在$\mathcal{R}$ [LM14，推论 12]中有如下关系：

$$Z(\Delta_1 + \cdots + \Delta_{N-1}) \times Z(\Delta_2 + \cdots + \Delta_N) = Z(\mathfrak{m}) \times Z(\Delta_2 + \cdots + \Delta_{N-1}) + Z(\mathfrak{m}') \times Z(\mathfrak{m}''), \tag{1.1}$$

其中， $Z(\mathfrak{m}')$和 $Z(\mathfrak{m}'')$ 也是梯子（见定理 5.5）。通过量子仿射 Schur-Weyl 对偶，Mukhin-Young 在 [MY12,^定理 4.1] 中独立地为量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$的表示建立了关系式（1.1），并将其称为扩展 T-系统。

扩展的 T-系统是著名的 T-系统关系的推广。后者是一组递推关系，在某些可积系统的研究中具有重要意义（参见综述 [KNS11]）。对于量子仿射代数表示， T-系统是格罗滕迪克环 $\mathcal{R}$中斯佩表示（在此称为*Kirillov-Reshetikhin* 模）的类之间的关系。这些关系先由 Nakajima 在所有单边类型（A、 D 或 E）中证明 [Nak01] ，随后由 Hernandez 在所有类型中证明 [Her06]。此外， T-系统及其扩展形式可解释为不可约有限维 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$-模之间的短正合列。

近来， T-系统被赋予了一种新解释：作为 Fomin-Zelevinsky 簇代数中的交换关系 [FZ02]。事实上，在 [HL16]中，Hernandez-Leclerc 证明了将 T-系统解释为簇变换的观点，并据此证明有限维 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$-模的范畴（涵盖所有 Dynkin 类型）的格罗滕迪克环具有簇代数结构。值得注意的是，Duan-Li-Luo 在 [DLL19] 中得到了 T-系统的另一种推广，这种推广不同于 Mukhin-Young 的扩展 T-系统；他们也将其解释为簇代数结构中的交换关系。

在本文中，我们为某些实正则表示建立了公式，将 Mukhin-Young 的扩展 T-系统推广开来。正则表示都与一个置换相关联，而 [LM18], Lapid-Mínguez 给出了正则表示为实表示的一个充分条件，即表示的关联置换满足模式避免条件。我们利用 *Ferrers* 棋盘的概念以及 Sjostrand [Sjo07] 的工作证明，在相同的模式避免条件下，Lapid-Mínguez 的公式 [LM18，定理 1.2 (9)] 可以写成一个矩阵行列式。随后，我们通过选择若干 Lewis Carroll 恒等式得到这些关系。作为主要结果，我们证明如下（定理 5.1 和推论 5.3）：对于 $Z(\mathfrak{m}) = Z(\Delta_1 + \cdots + \Delta_N)$ 一个关联置换 σ 避免模式 3412 的正则表示

和 4231 时，我们有以下关系 $\mathcal{R}$ ((5.1) 和 (5.2))：

$$Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_N)\times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_{\sigma(N)}) = Z(\mathfrak{m})\times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_N,\Delta_{\sigma(N)}) + Z(\mathfrak{m}_1')\times Z(\mathfrak{m}_1''), \tag{1.2}$$

$$Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_1)\times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_{\sigma(1)}) = Z(\mathfrak{m})\times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_1,\Delta_{\sigma(1)}) + Z(\mathfrak{m}_2')\times Z(\mathfrak{m}_2''), \tag{1.3}$$

其中 m_1'、m_1''、m_2' 和 m_2'' 是实正则表示。

作为定理 5.1 和推论 5.3 的一部分，我们还证明，作为扩展的 T-系统，这些关系对应于一个长度为 2 的模的分解；也就是说，(1.2) 和 (1.3) 右边的两项都是不可约表示。我们利用 Lapid-Mínguez 的 [LM16] 组合不可约性判据，以及新引入的一个多重线段中的良好线段 概念来证明这一点；借助该概念，我们可以通过归纳法证明某些不可约表示的抛物诱导是不可约的。

本文结构如下。我们先在第 2 节回顾线段、多重线段、$\mathrm{GL}_n(F)$ 的 p-进表示以及 Zelevinsky 分类。我们还将回顾 Lapid-Mínguez 关于两个表示的抛物诱导的 [LM16] 不可约性判据，该判据使用底和余底。在第 3 节，我们引入良好线段的概念，并用它得到一些组合判据，以证明某些抛物诱导 $Z(\Delta)\times Z(\mathfrak{m})$（其中 $Z(\mathfrak{m})$ 是正则表示）不可约。我们还证明了良好线段的存在性结果（命题 3.7）。特别地，我们得到：每个其置换避开模式 3412 和 4231 的正则表示至少有两个良好线段，由此可以推出这类表示是实的。在第 4 节，我们利用 Ferrers 棋盘的概念以及 Sjostrand [Sjo07] 和 Chepuri–Sherman-Bennett [CSB21] 的结果，将已有关系写成矩阵的行列式。主要结果在第 5 节陈述并证明，我们也在该节给出示例。最后，在第 6 节，我们将结果转到量子仿射代数表示的语境中，并展望后续方向，特别是与簇代数相关的方向。

致谢。 我们感谢 Alberto Mínguez 为本研究提供灵感。作者的研究部分得到了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线 2020 研究与创新计划（资助协议编号 948885）以及英国皇家学会大学研究奖学金的支持。

2. 预备知识

2.1. **线段与多重线段**。

定义 2.1. 线段 是由两个整数 $a\leqslant b\in\mathbb{Z}$ 构成的有序对，记作 $[a;b]$。

令 Seg 表示线段的集合。

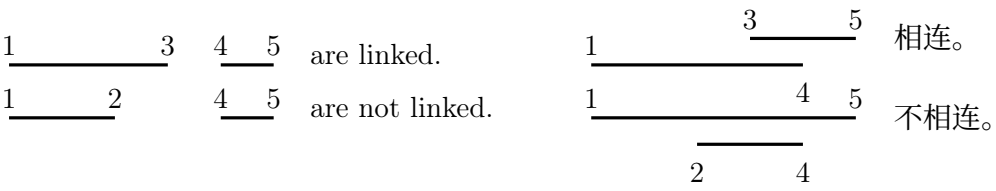
线段 $\Delta=[a;b]\in\mathrm{Seg}$ 的端点记作 $b(\Delta)=a$ 和 $e(\Delta)=b$。我们也写作 $\overleftarrow{\Delta}=[a-1;b-1]$。

定义 2.2。 如果两个线段 $\Delta=[a;b]$ 和 $\Delta'=[c;d]$ 是相连 的，则

$$\begin{aligned} &a<c \quad\text{and}\quad c-1\leqslant b<d,\\ \text{or}\quad &c<a \quad\text{and}\quad a-1\leqslant d<b. \end{aligned}$$

在第一种情况下，我们称 Δ 先于 Δ'，并记作 $\Delta\prec\Delta'$。

例 2.3. 相连与不相连的线段对的一些例子：



定义 2.4. 多重线段 $\mathfrak{m}$是 Seg 中线段的有限形式和（允许重数），$\mathfrak{m}=\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_N$。令 Mult 表示多重线段的集合。

若对所有 $1\leqslant i<j\leqslant N$、$\Delta_i$，$\Delta_i$ 不先于 Δ_j，则称线段序列（Δ_1、.....、Δ_N）为有序。若 $\mathfrak{m}\in\in$ Mult，且（Δ_1、.....、Δ_N）是满足 $\mathfrak{m}=\Delta_1+\cdots+\Delta_N$ 的有序线段序列，则称（Δ_1、.....、Δ_N）是 $\mathfrak{m}$ 的有序形式。

2.2. **表示**。设 F 是一个带有归一化绝对值 $|\cdot|$ 的非阿基米德局部域，D 是一个有限维中心除 F-代数。对 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，令 $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)$ 表示 $\mathrm{GL}_n(D)$ 的有限长度复光滑表示范畴，并令 $\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n)$ 表示 $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)$ 的不可约对象等价类集合。对 $\pi_i\in\mathcal{C}(\mathrm{GL}_{n_i})$、$i=1$、2，记 $\pi_1\times\pi_2\in\mathcal{C}(\mathrm{GL}_{n_1+n_2})$ 为由 $\pi_1\otimes\pi_2$ 抛物诱导得到的表示。抛物诱导赋予范畴 $\bigoplus_{N\geqslant 0}\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)$ 张量范畴的结构。

对于任意超尖点表示 $\rho\in\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n)$，存在唯一的正实数 s_ρ，使得 $\rho|\cdot|^{s_\rho}\times\rho$ 可约。令 $\nu_\rho=|\cdot|^{s_\rho}$，记 $\overrightarrow{\rho}=\rho\nu_\rho$, $\overleftarrow{\rho}=\rho\nu_\rho^{-1}$。尖点线是 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n)$ 上关于由 $\rho\sim\overrightarrow{\rho}$ 给出的等价关系所形成的一个等价类。

固定一条尖点线 $\mathcal{L}$，考虑由超尖点支撑包含于 $\mathcal{L}$ 的表示组成的 $\bigoplus_{N\geqslant 0}\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)$ 的 Serre 环子范畴 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$。那么所有范畴 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 作为环范畴彼此等价，而研究 $\bigoplus_{N\geqslant 0}\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n)$ 就归结为研究一个 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$。从现在起，我们固定一条尖点线，省略下标，并考虑范畴 $\mathcal{C}$、其不可约对象的等价类集合 Irr 以及其格罗滕迪克环 $\mathcal{R}$。

对于 $\Delta=[a;b]\in\mathrm{Seg}$，考虑诱导表示

$$I[a;b]:=\rho\nu_\rho^a\times\rho\nu_\rho^{a+1}\times\cdots\times\rho\nu_\rho^b.$$

定义 2.5. 我们考察该表示的底与余底：

$$Z[a;b]:=\mathrm{soc}(I[a;b]),\quad\text{maximal semi-simple submodule,}$$
$$L[a;b]:=\mathrm{cos}(I[a;b]),\quad\text{maximal semi-simple quotient.}$$

以下结论是已知的（例如参见 [Zel80]）。

命题 2.6. 对于 $\Delta_1,\ldots,\Delta_N\in\mathrm{Seg}$，$Z(\Delta_1)\times\cdots\times Z(\Delta_N)$（分别地，$L(\Delta_1)\times\cdots\times L(\Delta_N)$）不可约，当且仅当线段 $\Delta_1,\ldots,\Delta_N$两两不相连。

对于 $\mathfrak{m}\in$Mult 和 $(\Delta_1,\ldots,\Delta_N)$ $\mathfrak{m}$ 的一种有序形式，定义标准模：

$$\zeta(\mathfrak{m}):=Z(\Delta_1)\times\cdots\times Z(\Delta_N).$$

由前一个命题可知，$\zeta(\mathfrak{m})$与所选顺序无关。

定理 2.7。 *[Zel80]*[Zelevinsky 分类]映射

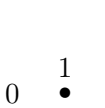
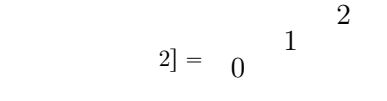
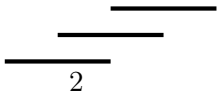
$$\mathfrak{m}\mapsto Z(\mathfrak{m}):=\mathrm{soc}(\zeta(\mathfrak{m})),$$

定义了一个双射

$$\mathrm{Mult}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Irr}\,.$$

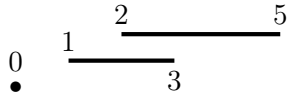
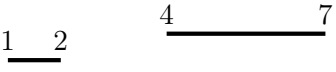
2.3. **表示族**。我们对某些特定的表示族感兴趣。令 $Z(\mathfrak{m})$ 为一个不可约表示，且 $\mathfrak{m}=\Delta_1+\cdots+\Delta_N\in$Mult。

定义 2.8. 不可约表示 $Z(\mathfrak{m})$是*Speh* 表示，如果对所有 $1\leqslant i\leqslant N-1$，$\Delta_{i+1}=\overleftarrow{\Delta_i}$。

例 2.9. 对应于多重线段的表示 $[3;\ 3]+[2;\ 2]+[1;\ 1]+[0;\ 0]=$  以及 $[2;\ 4]+[1;\ 3]+[0;\ 2]=$   是 Speh 表示。

定义 2.10. 不可约表示 $Z(\mathfrak{m})$ 是梯形 表示，如果对所有$1\leqslant i\leqslant N-1$、 $e(\Delta_{i+1})<e(\Delta_i)$ 和 $b(\Delta_{i+1})<b(\Delta_i)$均成立。

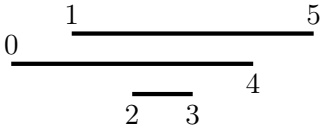
例 2.11. 所有 Speh 表示都是梯形表示的特例。对应于多重线段的表示

$[2;5]+[1;3]+[0;0]=$  , $[4;7]+[1;2]=$ 

是梯形表示。

定义 2.12. 不可约表示 $Z(\mathfrak{m})$ 是正则表示，若对所有 $1\leqslant i\neq j\leqslant N$、 $e(\Delta_j)\neq e(\Delta_i)$ 和 $b(\Delta_j)\neq b(\Delta_i)$均成立。相应地，多重线段 $\mathfrak{m}$也称为正则。

例 2.13. 所有梯形表示都是正则表示的特例。表示

$Z([1;5]+[0;4]+[2;3])=$ 

是一个正则表示。

定义 2.14. 若 $Z(\mathfrak{m})$ 是一个正则表示，则可按如下方式定义相应的置换 $\sigma_{\mathfrak{m}}$。记 $\mathfrak{m}=[a_1;b_1]+[a_2;\ b_2]+\cdots+[a_N;\ b_N]$，并假设$b_1>b_2>\cdots>b_N$，则 $\sigma_{\mathfrak{m}}\in\mathfrak{S}_N$满足

$$a_{\sigma_{\mathfrak{m}}(1)}<a_{\sigma_{\mathfrak{m}}(2)}<\cdots<a_{\sigma_{\mathfrak{m}}(N)}.$$

备注 2.15。若 $Z(\mathfrak{m})$ 是一个梯形表示，则关联置换为 w_0，即 $\mathfrak{S}_N$的最长元素。

定义 2.16. 若不可约表示 π 满足 $\pi\times\pi$ 也不可约，则称其为 实的 。

注 2.17. 在此语境中，实表示通常称为平方不可约 表示，但此处我们采用实的 这一术语，它源自 Kang-Kashiwara-Kim-Oh [KKKO15] 关于量子仿射代数表示的研究；这一概念在那里发挥了关键作用（见第 6.2 节）。

以下是 [LM18] 的主要结果之一。

定理 2.18。 正则表示 $Z(\mathfrak{m})$ 是实的，当且仅当不存在序列 $1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant N$, $r\geqslant 4$，使得若 $a'_i=a_{j_i}$且 $b'_i=b_{j_i}$，则

$$a'_{i+1}<a'_i\leqslant b'_{i+1}+1, i=3,\dots,r-1, a'_3<a'_1\leqslant b'_3+1,\ and\ a'_r<a'_2<a'_{r-1},$$
$$or\quad a'_{i+1}<a'_i\leqslant b'_{i+1}+1, i=4,\dots,r-1, a'_4<a'_2\leqslant b'_4+1,\ and\ a'_3<a'_r<a'_1<a'_\ell,$$

其中，若 $r = 4$ 则为 $\ell = 2$，否则为 $\ell = r - 1$。

若置换 $\sigma_{\mathfrak{m}}$ 避开模式 4231 和 3412，则定理 2.18 的条件成立。我们将这些表示称为避开模式的正则表示。

T相同的避开模式条件对应于 th 的光滑性条件 e Schubert 簇 $X_{\sigma_{\mathfrak{m}}}$（见 [LS90]）。

请注意，特别是所有梯形表示都是实的。

2.4. **不可约性判据**。以下结果将被频繁使用。

引理 2.19. *[MS14]* 设 π_1 和 π_2 是不可约表示，且 π 是一个表示，使得

(a) π 是 $\pi_1 \times \pi_2$的子表示，*(b)* π 是 $\pi_2 \times \pi_1$的商表示，*(c)* $\pi_1 \otimes \pi_2$ 在 $\pi_1 \times \pi_2$的乔丹-赫尔德序列中的重数为 *1*，则 π 是不可约的。

定义 2.20. 给定 $\pi_1 = Z(\mathfrak{m}_1)$ 和 $\pi_2 = Z(\mathfrak{m}_2)$，我们用 $\mathrm{LI}(\pi_1, \pi_2)$（分别用 $\mathrm{RI}(\pi_1, \pi_2)$）表示以下条件

$$Z(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) = \mathrm{soc}(\pi_1 \times \pi_2)$$

（分别为

$$Z(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) = \mathrm{cos}(\pi_1 \times \pi_2)).$$

引理 2.21. 设 $\mathfrak{m}$ 是一个多重线段，Δ是一个线段。则有以下等价关系：

$$\begin{aligned} \mathrm{LI}(Z(\Delta), Z(\mathfrak{m})) &\iff Z(\mathfrak{m} + \Delta) \hookrightarrow Z(\Delta) \times Z(\mathfrak{m}), \\ \mathrm{RI}(Z(\Delta), Z(\mathfrak{m})) &\iff Z(\mathfrak{m} + \Delta) \hookrightarrow Z(\mathfrak{m}) \times Z(\Delta). \end{aligned}$$

证明。第一个结论由线段表示 $Z(\Delta)$是一个左乘子 这一事实得出（见 [LM16，定义 4.3]），因此 $Z(\Delta) \times Z(\mathfrak{m})$ 有唯一的不可约子模，它在 $Z(\Delta) \times Z(\mathfrak{m})$的乔丹-赫尔德序列中重数为 1。

第二个陈述可以利用对偶表示从第一个陈述推出；更准确地说，参见 [LM16，引理 3.9]。□

Pro命题 2.22。 *[LM16]* $\pi_1 \times \pi_2$ 不可约，当且仅当 $\mathrm{LI}(\pi_1, \pi_2)$ 且 $\mathrm{RI}(\pi_1, \pi_2)$.

在 [LM16], 中，Lapid-Minguez 引入了一个组合框架，用以判定对于 $\Delta \in \mathrm{Seg}$ 和 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mult}$，条件 $\mathrm{RI}(Z(\Delta)、Z(\mathfrak{m}))$ 和 $\mathrm{LI}(Z(\Delta)、Z(\mathfrak{m}))$ 是否成立。下面回顾这一框架。

记 $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_N$，并考虑集合

$$X_{\Delta,\mathfrak{m}} = \{i \mid \Delta \prec \Delta_i\}, \quad \tilde{X}_{\Delta,\mathfrak{m}} = \{i \mid \Delta_i \prec \Delta\},$$
$$Y_{\Delta,\mathfrak{m}} = \left\{i \mid \overleftarrow{\Delta} \prec \Delta_i\right\}, \quad \tilde{Y}_{\Delta,\mathfrak{m}} = \left\{i \mid \overleftarrow{\Delta}_i \prec \Delta\right\}.$$

定义 2.23。设 $\mathrm{LC}(\Delta、\mathfrak{m})$ 表示存在一个单射$f : X_{\Delta,\ \mathfrak{m}} \to Y_{\Delta,\ \mathfrak{m}}$，使得对所有 $1 \leqslant i \leqslant N$、$\Delta_{f(i)} \prec \Delta_i$均成立的条件。

令 $\mathrm{RC}(\Delta, \mathfrak{m})$ 表示存在一个单射 $f : X_{\Delta,\mathfrak{m}} \to Y_{\Delta,\mathfrak{m}}$，使得对所有 $1 \leqslant i \leqslant N$，$\Delta_i \prec \Delta_{f(i)}$均成立。

定义 2.23 中的函数称为匹配函数。

命题 2.24。 *[LM16]*条件 $\mathrm{LC}(\Delta,\ \mathfrak{m})$ 和 $\mathrm{LI}(Z(\Delta),\ Z(\mathfrak{m}))$（分别地，$\mathrm{RC}(\Delta,\ \mathfrak{m})$和 $\mathrm{RI}(Z(\Delta),\ Z(\mathfrak{m}))$）等价。

将这一结果与命题 2.22 结合，可得如下结论。

推论 2.25. 抛物诱导 $Z(\Delta)\times Z(\mathfrak{m})$ 不可约，当且仅当 $\mathrm{LC}(\Delta,\ \mathfrak{m})$和 $\mathrm{RC}(\Delta,\ \mathfrak{m})$。

3. 良好线段

3.1. **定义**。

定义 3.1. 多重线段 $\mathfrak{m}\in$Mult 中的线段 Δ 称为良好线段 i f

$$\begin{cases} \text{(i) } Z(\mathfrak{m})\hookrightarrow Z(\Delta)\times Z(\mathfrak{m}^-) \\ \quad Z(\mathfrak{m})\hookrightarrow Z(\mathfrak{m}^-)\times Z(\Delta) \end{cases}\text{(ii)}\ \text{或，，其中 } \mathfrak{m}^-=\mathfrak{m}\backslash\{\Delta\}。$$

如果满足 (ii) 的第一种（分别地，第二种）子情形，则将 Δ 称为 $\mathfrak{m}$ 的良好左（分别地，右）线段。

利用引理 2.21 以及命题 2.4，我们得到以下等价关系：

$$\Delta \text{ is a good } \mathbf{left} \text{ segment of } \mathfrak{m} \iff \begin{array}{l}\mathrm{LC}(\Delta,\mathfrak{m}),\mathrm{RC}(\Delta,\mathfrak{m}),\\ \text{and } \mathrm{LC}(\Delta,\mathfrak{m}^-).\end{array}, \tag{3.1}$$

$$\Delta \text{ is a good } \mathbf{right} \text{ segment of } \mathfrak{m} \iff \begin{array}{l}\mathrm{LC}(\Delta,\mathfrak{m}),\mathrm{RC}(\Delta,\mathfrak{m}),\\ \text{and } \mathrm{RC}(\Delta,\mathfrak{m}^-).\end{array} \tag{3.2}$$

3.2. **组合判据**。

引理 3.2. 如果 $\mathfrak{m}=\Delta_1+\cdots+\Delta_N$ 是一个多重线段，且 Δ_0 是一个线段，使得 $\Delta_0+\mathfrak{m}$ 是一个正则多重线段，则

$$\mathrm{LC}(\Delta_0,\mathfrak{m})\Leftrightarrow \nexists i, \Delta_0\prec\Delta_i,$$
$$\mathrm{RC}(\Delta_0,\mathfrak{m})\Leftrightarrow \nexists i, \Delta_i\prec\Delta_0.$$

证明。 我们将证明第一个等价关系，第二个等价关系完全类似。根据条件 LC 的定义，蕴含关系

$$\mathrm{LC}(\Delta_0,\mathfrak{m})\Leftarrow \nexists i, \Delta_0\prec\Delta_i$$

显然成立。

令 $i\in Y_{\Delta_0,\mathfrak{m}}$。若 $i\notin X_{\Delta_0,\mathfrak{m}}$，则要么 $b(\Delta_0)=b(\Delta_i)$，要么 $e(\Delta_0)=e(\Delta_i)$，这就产生了矛盾。因此 $Y_{\Delta_0,\mathfrak{m}}\subset X_{\Delta,\mathfrak{m}}$。现在，若 $X_{\Delta_0,\mathfrak{m}}\neq\varnothing$，则无法满足 LC$(\Delta_0,\mathfrak{m})$ （根据霍尔婚姻定理）。□

引理 3.3. 若 $\mathfrak{m}=\Delta_1+\cdots+\Delta_N$ 是一个有序正则多重线段，且 $\sigma=\sigma_{\mathfrak{m}}$ 是其关联置换，则对所有 $1\leqslant i\leqslant N$,

- 条件 $\mathrm{LC}(\Delta_i,\mathfrak{m})$ 等价于 σ^{-1} 在 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$ 上严格递减,
- 条件 $\mathrm{RC}(\Delta_i,\mathfrak{m})$ 等价于 σ^{-1} 在 $\tilde{X}_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$ 上严格递减。

证明。与前面一样，我们只证明第一个结论。固定 $1\leqslant i\leqslant N$。若 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}=\varnothing$，则等价性显然成立。

假设 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}\neq\varnothing$，那么按照引理 3.2 证明中的相同推理，

$$Y_{\Delta_i,\mathfrak{m}}\subset X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}\cup\{i\}.$$

设 $Y_{\Delta_i,\mathfrak{m}}=X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}\cup\{i\}$。令 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}=\{j_1>j_2>\cdots>j_m\}$。那么，由于 $\mathfrak{m}$ 是有序的，$e(\Delta_{j_1})<e(\Delta_{j_2})<\cdots<e(\Delta_{j_m})$。

若 σ^{-1} 在 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$上严格递减，则 $b(\Delta_{j_1}) < b(\Delta_{j_2}) < \cdots < b(\Delta_{j_m})$。由于所有$j_k \in X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$，我们对所有 $1 \leqslant \ell \leqslant m-1$都有 $\Delta_{j_\ell} \prec \Delta_{j_{\ell+1}}$。因此，函数

$$\begin{aligned} f: \quad X_{\Delta,\mathfrak{m}} &\to Y_{\Delta,\mathfrak{m}}, \\ j_1 &\mapsto i, \\ j_{\ell+1} &\mapsto j_\ell, \qquad 1 \leqslant \ell \leqslant m-1, \end{aligned} \tag{3.3}$$

是从 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$ 到 $Y_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$的匹配函数。因此 $\mathsf{LC}(\Delta_i,\mathfrak{m})$。

若 $Y_{\Delta_i,\mathfrak{m}} \subsetneq X_{\Delta_i,\mathfrak{m}} \cup \{i\}$，则存在 $j \in X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$ 使得 $b(\Delta_j) = e(\Delta_i)+1$，并且$Y_{\Delta_i,\mathfrak{m}} = (X_{\Delta_i,\mathfrak{m}} \backslash \{j\}) \cup \{i\}$。若 σ^{-1} 在 $X_{\Delta,\mathfrak{m}}$上严格递减，则必有 $j = j_m$，且由 (3.3) 定义的函数 f 是从 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$ 到 $Y_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$的匹配函数，因为 j_m 不在 f的像中。

反过来，设 $\mathsf{LC}(\Delta_i,\mathfrak{m})$，并令 f 为从 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$ 到 $Y_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$的匹配函数。必有 $f(j_1) = i$，因为在所考虑的线段中，只有 Δ_i 先于 Δ_{j_1}。递归地，我们看到 f 就是由 (3.3) 定义的函数。由于它是匹配函数，我们推得对所有 $1 \leqslant \ell \leqslant m-1$都有 $\Delta_{j_\ell} \prec \Delta_{j_{\ell+1}}$，因此 σ^{-1} 在 $X_{\Delta_i,\mathfrak{m}}$上严格递减。□

注记 3.4。由引理 3.2 可知，若 $\mathfrak{m}$ 是正则多重线段，则对于所有 $1 \leqslant i \leqslant k$，$\mathsf{LC}(\Delta_i,\mathfrak{m}-\Delta_i)$（分别地，$\mathsf{RC}(\Delta_i,\mathfrak{m}-\Delta_i)$）等价于 Δ_i 在 $\mathfrak{m}$ 中没有任何线段排在它之前（分别地，没有任何线段排在它之后）。

结合引理 3.3，我们得到以下等价关系：

Δ 在 $\mathfrak{m}$ 的其他线段之前，且 $\Delta\Delta$ 是 $\mathfrak{m}$ $\iff$ 的良好左线段，当且仅当 Δ Δ 与排在它之前的线段构成一架梯子。Δ 在 $\mathfrak{m}$ 中没有其他线段排在它之后，且 Δ 是 $\mathfrak{m}$ $\iff$ Δ 的良好右线段，当且仅当 Δ 与排在它之后的线段构成一架梯子。

利用这一判据，以下结果显然成立。

引理 3.5。若 $\mathfrak{m}'$ 是 $\mathfrak{m}$ 的子多重线段，且 $\Delta \in \mathfrak{m}'$ 是 $\mathfrak{m}$ 的良好线段，则它也是 $\mathfrak{m}'$ 的良好线段。

备注 3.6。注意，逆命题并不成立。例如，任意线段 Δ 都是自身的良好线段，但不一定是任何包含它的多重线段的良好线段。

3.3. **存在性结果**。

命题 3.7。对于 $N \geqslant 2$，设 $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_N$ 是一个正则多重线段，使得对于所有满足 $b_1 > b_2 > \cdots > b_N$的 i、 $\Delta_i = [a_i,\ b_i]$，其关联置换σ 均避开模式 4231 和 3412，且 $\pi = Z(\mathfrak{m})$ 是一个素 不可约表示。那么

$$\begin{aligned} &either\ \Delta_1 \quad or \quad \Delta_{\sigma(1)}, \\ and \quad &either\ \Delta_N \quad or \quad \Delta_{\sigma(N)} \end{aligned}$$

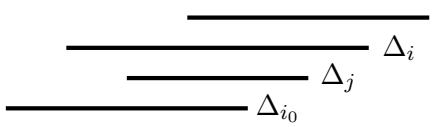
对应于 $\mathfrak{m}$的良好线段。

此外，若 $\sigma(N) = 1$（分别地，若 $\sigma(1) = N$），则 Δ_N 是 $\mathfrak{m}$的良好**右** 线段（分别地，Δ_1 是 $\mathfrak{m}$的良好**左** 线段）。若 $\sigma(N) = 1$ 且 $\sigma(1) = N$，则 $\mathfrak{m}$ 是一个梯子。

证明。首先，若 $\sigma(1) = 1$，则 Δ_1 与 $\mathfrak{m}$ 的任何其他线段都不相连，并且它既是 $\mathfrak{m}$ 的良左线段，也是良右线段。

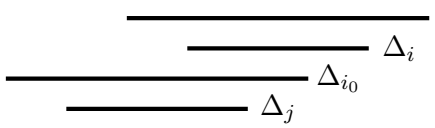
令 $i_0 = \sigma(1)$，并假设 $i_0 > 1$。假设 Δ_1 和 Δ_{i_0} 都不是良好线段。由引理 3.3，$\sigma_{\mathfrak{m}}^{-1}$ 在 $X_{\Delta_1,\ \mathfrak{m}}$ 上不递减，在 $\tilde{X}_{\Delta_{i_0},\ \mathfrak{m}}$ 上也不递减。我们分情况讨论。

如果存在 $i < j < i_0$ 使得 $\Delta_i \prec \Delta_1$ 和 $\Delta_j \prec \Delta_1$，或 $\Delta_{i_0} \prec \Delta_i$ 和 $\Delta_{i_0} \prec \Delta_j$和 $\Delta_j \nprec \Delta_j$，则构型如下：



此构型中出现了模式 4231，这与假设矛盾。

否则，至少存在一个 $1 < i < i_0$ 使得 $\Delta_{i_0} \prec \Delta_i$ 且 $\Delta_i \not\prec \Delta_1$，以及一个 $i_0 < j$ 使得 $\Delta_j \prec \Delta_1$ 且 $\Delta_j \not\prec \Delta_{i_0}$。构型如下：



此构型中出现了模式 3412，这是一个矛盾。

关于 Δ_N 和 $\Delta_{\sigma(N)}$ 的证明完全对称。

现在，假设 $\sigma(N) = 1$。我们知道，$\mathfrak{m}$的 Δ_1 或 Δ_N 中必有一个是良好线段。如果 Δ_1 是良好线段而 Δ_N 不是良好线段，那么我们必然处于上方画出的第一个构型中，该构型包含模式 4231。同理，如果 $\sigma(1) = N$，那么 $\mathfrak{m}$的 Δ_1 或 Δ_N 中必有一个是良好线段。同一模式避免条件意味着 Δ_1 必然是良好的。

如果 $\sigma(N) = 1$ 和 $\sigma(1) = N$，那么 Δ_1 与 Δ_N 之间任意一对不构成梯子的线段都会形成一个 4231 模式。因此 $\mathfrak{m}$ 是一个梯子。□

这一结果有如下推论。

推论 3.8. 设 $\pi = Z(\mathfrak{m})$ 是一个不含4231 和3412模式的正则表示，那么 π 至少有两条良好线段。

注记 3.9. 这一判据使我们能够恢复这一蕴含关系（该关系由定理 2.18 [LM18]确立）：

$$\mathfrak{m} \text{ avoids the patterns 4231 and 3412} \quad \Longrightarrow \quad Z(\mathfrak{m}) \text{ is real.}$$

可以对多重线段 $\mathfrak{m}$中的线段数 N使用归纳法来证明这一点。为完整起见，我们详细说明其推理过程。

如果 $N = 1$，那么 $\mathfrak{m} = \Delta$ 就是一条线段，而 $Z(\Delta)$ 是实的（例如，可由命题 2.6 得出）。

如果 $N \geqslant 2$ 和 $\mathfrak{m}$ 避免模式 4231 和 3412，那么根据推论 3.8，$\mathfrak{m}$ 至少有一**个**良好线段 Δ。不妨设它是一个良好左线段。于是

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}) &\hookrightarrow \underbrace{Z(\mathfrak{m}) \times Z(\Delta)}_{\text{irreducible}} \times Z(\mathfrak{m}^-), \\ &\hookrightarrow Z(\Delta) \times Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}^-) \hookrightarrow \underbrace{Z(\Delta) \times Z(\Delta)}_{\text{irreducible}} \times Z(\mathfrak{m}^-) \times Z(\mathfrak{m}^-). \end{aligned}$$

然而，$\mathfrak{m}-$ 有 $N-1$ 条线段，并满足模式避免条件。因此，根据归纳假设，$Z(\mathfrak{m}^-) \times Z(\mathfrak{m}^-)$ 是不可约的。

类似地，由于 $Z(\mathfrak{m}) \twoheadleftarrow Z(\mathfrak{m}^-) \times Z(\Delta)$,

$$Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}) \twoheadleftarrow Z(\mathfrak{m}^-) \times Z(\mathfrak{m}^-) \times Z(\Delta) \times Z(\Delta).$$

通过引理 2.19可得到 $Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m})$ 的不可约性。

请注意，尽管推论 3.8 中有两个良好线段，但证明中我们只用到了一个良好线段的存在性。

4. 行列式公式

4.1. 交错和公式。 [LM18] 的结果之一是：对每个正则实表示，都有一个使用标准表示的交错和公式。设 $\pi = Z(\mathfrak{m})$ 是一个正则实表示，满足 $\mathfrak{m} = [a_1;\ b_1] + \cdots + [a_N;\ b_N]$，且 $b_1 > \cdots > b_N$。

在格罗滕迪克环中，

$$\pi = \sum_{\substack{\sigma' \in S_N \\ \sigma_0 \leqslant \sigma' \leqslant \sigma}} \operatorname{sgn}(\sigma'\sigma) Z([a_{\sigma(1)}; b_{\sigma'(1)}]) \times Z([a_{\sigma(2)}; b_{\sigma'(2)}]) \times \cdots \times Z([a_{\sigma(N)}; b_{\sigma'(N)}]), \tag{4.1}$$

其中 $\sigma = \sigma_{\mathfrak{m}}$ 且对所有 i，

$$\sigma_0^{-1}(i) = \max\left\{ j \leqslant x_i \mid j \notin \sigma_0^{-1}(\{i+1, \ldots, N\}) \right\}, \quad \text{with } x_i = \#\{ j \mid a_j \leqslant b_i + 1 \}.$$

注记 4.1。 置换 σ_0 满足

$$\sigma_0 \leqslant \sigma' \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, a_{\sigma(i)} \leqslant b_{\sigma'(i)} + 1.$$

我们推得，等式 (4.1) 等价于

$$\pi = \sum_{\substack{\sigma' \in S_N \\ \sigma' \leqslant \sigma}} \operatorname{sgn}(\sigma'\sigma) Z([a_{\sigma(1)}; b_{\sigma'(1)}]) \times Z([a_{\sigma(2)}; b_{\sigma'(2)}]) \times \cdots \times Z([a_{\sigma(N)}; b_{\sigma'(N)}]). \tag{4.2}$$

事实上，对于 $\sigma' > \sigma_0$，$Z([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma'(i)}])$ 中至少有一个未定义，因此该项不会对 (4.2) 中的求和作出贡献。

对于所有 $i \in \{1, \ldots, N\}$，设 $a'_i = a_{\sigma(i)}$，则方程 (4.2) 可改写为

$$\pi = \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\sigma' \in [\mathrm{Id}, \sigma]} \operatorname{sgn}(\sigma') Z([a'_1; b_{\sigma'(1)}]) \times Z([a'_2; b_{\sigma'(2)}]) \times \cdots \times Z([a'_N; b_{\sigma'(N)}]), \tag{4.3}$$

其中，$[\mathrm{Id}\ \sigma]$ 表示 S_N 中小于 σ 的排列所构成的布鲁哈特区间。

4.2. 矩阵行列式。 方程 (4.3) 与矩阵的行列式类似，只是将某些元素替换为零，以反映缺失的排列 σ'。更确切地说，对于 S_N 中的 σ_1, σ_2 个排列，令

$$\Gamma[\sigma_1, \sigma_2] := \{(i, \sigma(i)) \mid \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], 1 \leqslant i \leqslant N\},$$

那么，图包含于 $\Gamma[\mathrm{Id}\ \sigma]$ 的排列构成右凸包，这一结果见 Sjöstrand [Sjo07] 的工作。以下结论由 [Sjo07 的定理 4] 得出。

命题 4.2。 *[CSB21，命题 3.3]* 若置换 $\sigma \in S_N$ 避免模式4231和 3412[1]，且 $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ 是一个方形 $N \times N$-矩阵，则

$$\det(M|_{\Gamma[\mathrm{Id},\sigma]}) = \sum_{\sigma' \in [\mathrm{Id}, \sigma]} \operatorname{sgn}(\sigma') m_{1,\sigma'(1)} m_{2,\sigma'(2)} \cdots m_{N,\sigma'(N)}. \tag{4.4}$$

注 *4.3*。使用费雷尔图板（见附录 A），通过在方框 (i, j) 中放置系数 $m_{i,j}$（若该方框着色则放置该系数，否则放置 0），即可计算公式（4.4）中的行列式。注意，点放置在 $Z([a_i; b_i])$ 上。

将命题 4.2 与 (4.3) 结合，并假设 σ 避开模式 4231 和 3412，可得：

$$\pi = \operatorname{sgn}(\sigma) \det\left((Z(a'_i; b_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |_{\Gamma[\mathrm{Id},\sigma]} \right). \tag{4.5}$$

[1] in [Sjo07，CSB21], 模式避免条件较弱，假设排列回避 t
该模式 35142、42513 和 351624

4.3. **刘易斯·卡罗尔恒等式**。 以下结果通常称为刘易斯·卡罗尔恒等式 或德斯南诺–雅可比恒等式。

命题 4.4。 设 M 为一个方形 $N \times N$-矩阵，且 $A, B \subset \{1, \dots, N\}$，令 M_A^B 为从 M 中删去所有由 A 中元素索引的行以及所有由 B 中元素索引的列后得到的矩阵。那么，对于所有 $1 \leqslant a < a' \leqslant N$ 和 $1 \leqslant b < b' \leqslant N$，

$$\det(M)\det(M_{a,a'}^{b,b'}) = \det(M_a^b)\det(M_{a'}^{b'}) - \det(M_a^{b'})\det(M_{a'}^b). \tag{4.6}$$

我们可以将命题 4.4 与公式 (4.5) 结合，用来写出格罗滕迪克环 $\mathcal{R}$ 中涉及 π 的关系。然而，如果 $M = \big((Z(a_i'; b_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant N}|_{\Gamma[\mathrm{Id},\sigma]}\big)$，子矩阵 M_i^j 的行列式不一定能（相差一个符号）表示 $\mathcal{R}$ 中不可约表示 $Z(\mathfrak{m}')$ 的类，对于所有 $1 \leqslant i, j \leqslant N$。

例 4.5. 设 $\mathfrak{m} = [1; 4]+[0; 3]+[2; 2]$，对应的置换是反射$\sigma = (12) \in S_3$。不可约表示类的交错和公式为

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{m}) &= Z([1;4]) \times Z([0;3]) \times Z([2;2]) - Z([0;4]) \times Z([1;3]) \times Z([2;2]), \\ &= -\begin{vmatrix} Z([0;4]) & Z([0;3]) & 0 \\ Z([1;4]) & Z([1;3]) & 0 \\ 0 & 0 & Z([2;2]) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

设 M 为上述矩阵，则

$$\begin{aligned} &\det(M_2^1) = Z([0;3]) \times Z([2;2]) = Z([0;3]+[2;2]) \quad \in \mathcal{R}, \\ &\det(M_3^1) = 0 \neq Z(\mathfrak{m}'). \end{aligned}$$

尽管如此，在一些有趣的情形下，仍然可以在格罗滕迪克环 $\mathcal{R}$ 中写出显式公式。

我们将使用以下关键结果。

命题 4.6. *[CSB21，命题 4.17]*设 σ 为 S_N 中一个避开模式 4231 和 3412 的置换，并选择 $i \in [N]$。设 $\overline{\sigma}^i \in S_{N-1}$ 为从 σ 中删除 $(i,\ \sigma(i))$ 并适当平移剩余数字后得到的“压平”置换。那么对于 M 这个 $(N-1) \times (N-1)$-矩阵，

$$\det(M|_{\Gamma[\mathrm{Id},\sigma]_i^{\sigma(i)}}) = \det(M|_{\Gamma[\mathrm{Id},\overline{\sigma}^i]}). \tag{4.7}$$

注 4.7. 注意，对于 M这个 $N \times N$-矩阵以及 $1 \leqslant i, j \leqslant N$，

$$\big(M|_{\Gamma[\mathrm{Id},\sigma]}\big)_i^j = M_i^j|_{\Gamma[\mathrm{Id},\sigma]_i^j}.$$

5. 扩展的 T-系统公式

我们的主要结果如下，将在第 5.2 节和第 5.3 节中证明。

定理 5.1. 设 $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_N$ 是一个正则多重线段，满足 $b_1 > b_2 > \cdots > b_N$，其中对所有 $1 \leqslant i \leqslant N$，$\Delta_i = [a_i;\ b_i]$。假设相应的置换 σ 避免模式 4231 和 3412，且 $\sigma(N) \neq N$。令

$$I = \left\{ i \mid \begin{array}{l} a_N \leqslant a_i \\ b_i \leqslant b_{\sigma(N)} \end{array} \right\} = \{i_1 < i_2 < \cdots i_r\}.$$

那么，在格罗滕迪克环 $\mathcal{R}$ 中，我们有如下关系：

$$Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_N) \times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_{\sigma(N)}) = Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_N, \Delta_{\sigma(N)}) + Z(\mathfrak{m}') \times Z(\mathfrak{m}''), \tag{5.1}$$

其中

$$\mathfrak{m}' = \sum_{j\notin I}\Delta_j + \sum_{k=1}^{r-1}[a_{i_k}; b_{i_{k+1}}], \quad \mathfrak{m}'' = \sum_{i\notin I}\Delta_i + \sum_{k=1}^{r-1}[a_{i_{k+1}}; b_{i_k}].$$

此外，(5.1) 右侧两项中的乘积均不可约。

注 5.2。 **(1)** 若 $\sigma(N) = N$，则线段 Δ_N 与 $\mathfrak{m}$的任何其他线段都不相连。在这种情况下

$$Z(\mathfrak{m}) = Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_N) \times Z(\Delta_N).$$

(2) 由于 σ 避免模式 **4231**，因此线段 Δ_i与 $i \in I$ 构成一架梯子。

推论 5.3. 设置换 σ 避免模式4231 和3412 ，且满足 $\sigma(1) \neq 1$。令

$$J = \left\{ j \mid \begin{array}{c} a_j \leqslant a_1 \\ b_{\sigma(1)} \leqslant b_j \end{array} \right\} = \{j_1 < j_2 < \cdots j_s\}.$$

格罗滕迪克环 $\mathcal{R}$中满足以下关系：

$$Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_1) \times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_{\sigma(1)}) = Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_1, \Delta_{\sigma(1)}) + Z(\mathfrak{m}') \times Z(\mathfrak{m}''), \tag{5.2}$$

其中

$$\mathfrak{m}' = \sum_{i\notin J}\Delta_i + \sum_{k=1}^{s-1}[a_{j_k}; b_{j_{k+1}}], \quad \mathfrak{m}'' = \sum_{i\notin J}\Delta_i + \sum_{k=1}^{s-1}[a_{j_{k+1}}; b_{j_k}].$$

证明。 将定理 5.1 应用于不可约表示$Z(\mathfrak{m}')$，其中 $\mathfrak{m}' = [-b_N;\ -a_N] + \cdots + [-b_1;\ -a_1]$，即可得到该结果。□

例 5.4。 **(1)** 设 $\mathfrak{m} = [2;\ 3] + [0;\ 2] + [1;\ 1]$。相应的正规表示 $Z(\mathfrak{m})$ 是实的，因为其关联置换为 $\sigma = 231$。它有两个良好右线段，分别为 $[0;\ 2]$ 和 $[1;\ 1]$ （$\Delta_{\sigma(1)}$ 和 Δ_3）。应用定理 5.1 可得以下关系：

$$Z([2;\ 3] + [0;\ 2]) \times Z([0;\ 2] + [1;\ 1]) = Z(\mathfrak{m}) \times Z([0;\ 2]) + Z([0;\ 2]) \times Z([1;\ 3] + [0;\ 2]).$$

注意， $Z([0;2]+[1;1]) \cong Z([0;\ 2]) \times Z([1;\ 1])$，在这种情况下，上述关系可以通过 $Z([0;\ 2])$ 简化。

(2) 设 $\mathfrak{m} = [1;6]+[3;5]+[0;4]+[2;\ 3]$。相应的正则表示 $Z(\mathfrak{m})$ 是实的，因为其关联置换为 $\sigma = 3142$。它有两条良好线段，分别是 $[1;6]$（左）和 $[2;\ 3]$（右）。应用定理 5.1 得到以下关系：

$$\begin{aligned} Z([1;6] + [3;5] + [0;4]) \times Z([1;6] + [0;4] + [2;3]) &= Z(\mathfrak{m}) \times Z([1;6] + [0;4]) \\ &\quad + Z([1;6] + [0;4] + [3;3]) \times Z([1;6] + [0;4] + [2;5]). \end{aligned}$$

而应用推论 5.3 可得如下关系：

$$\begin{aligned} Z([3;5] + [0;4] + [2;3]) \times Z([1;6] + [3;5] + [2;3]) &= Z(\mathfrak{m}) \times Z([3;5] + [2;3]) \\ &\quad + Z([3;5] + [2;3] + [1;4]) \times Z([3;5] + [2;3] + [0;6]). \end{aligned}$$

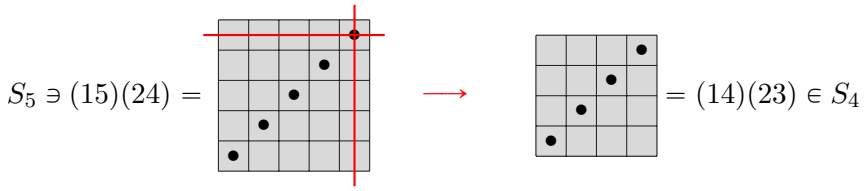
5.1. 梯形情形。 如果 $\mathfrak{m}$是梯子，那么相应的置换就是最长置换 w_0。因此 $\Gamma[\mathrm{Id}\ w_0] = [N]$。在这种情况下，定理 5.1 的结果早已为人所知；参见 [LM14], 中的推论 12，或 [MY12], 中以量子仿射代数表示的语言表述的定理 4.1。

定理 5.5. 设 $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_N$ 是一个梯形多重线段，其中 $\Delta_i = [a_i; b_i]$，则

$$Z(\Delta_1 + \cdots + \Delta_{N-1}) \times Z(\Delta_2 + \cdots + \Delta_N) = Z(\mathfrak{m}) \times Z(\Delta_2 + \cdots + \Delta_{N-1}) + Z([a_1; b_2] + \cdots + [a_{N-1}; b_N]) \times Z([a_2; b_1] + \cdots + [a_N; b_{N-1}]). \tag{5.3}$$

在此情形下，结果是将刘易斯·卡罗尔恒等式 (4.6) 应用于矩阵 $(Z([a_i; b_j]))_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ 的第 1 行和第 N 列得到的。不过，为了更好地理解一般情形，我们来更详细地考察将刘易斯·卡罗尔恒等式应用于矩阵 $M = (Z([a'_i; b_j]))_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ 的过程（回忆 $a'_i = a_{N-i+1}$）。

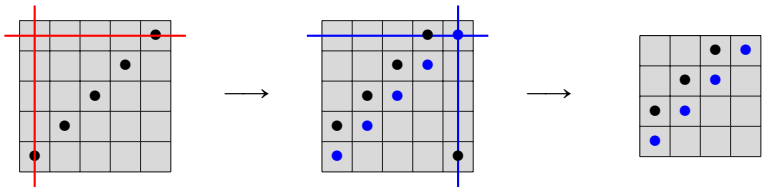
可以看看这种情形下费雷尔图板（见附录 A）的变化。置换 w_0 由一条反对角线表示，而费雷尔图板就是完整网格。删去第 1 行和第 N 列，恰好得到与 S_{N-1} 的最长元素对应的网格。



由于 S_N 中最长置换的符号为 $(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$，因此有

$$(-1)^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \det(M_N^1) = Z(\Delta_1 + \cdots + \Delta_{N-1}),$$
$$(-1)^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \det(M_1^N) = Z(\Delta_2 + \cdots + \Delta_N),$$
$$(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} \det(M_{1,N}^{1,N}) = Z(\Delta_2 + \cdots + \Delta_{N-1}).$$

现在，去掉第 1 行和第 1 列，或第 N 行和第 N列，得到的仍是与 S_{N-1}中最长元素对应的网格，但点的位置发生了变化。例如，若将各列向左循环置换，并把第 1 列移到末尾，那么在移位后的棋盘中去掉第 1 行和第 1 列，所得结果与去掉第 1 行和第 N 列相同。



同样的操作也可以应用于矩阵 M。注意，新的点位于系数 $Z([a_1;\ b_2])$，....., $Z([a_{N-1};\ b_N])$上。列的置换不会改变行列式的符号，因为计算该行列式所用的列彼此之间的相对顺序并未改变。

$$\det(M_1^1) = \det(\mathrm{shift}(M)_1^N) = (-1)^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} Z([a_1; b_2] + \cdots + [a_{N-1}; b_N]).$$

类似地，

$$\det(M_N^N) = (-1)^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} Z([a_2; b_1] + \cdots + [a_N; b_{N-1}]).$$

最后，刘易斯·卡罗尔恒等式（4.6）给出了定理 5.5 的关系式（5.1）。

此外，$Z(\mathfrak{m}) \times Z(\Delta_2 + \cdots + \Delta_{N-1})$ 和 $Z([a_1;\, b_2] + \cdots + [a_{N-1};\, b_N]) \times Z([a_2;\, b_1] + \cdots + [a_N;\, b_{N-1}])$ 的不可约性已在 [BLM13, 示例 4.5] 中得到证明。

5.2. 关系式 (5.1) 的证明。 我们将命题 4.4（刘易斯·卡罗尔恒等式）应用于矩阵 $\tilde{M} = M|_{\Gamma[\mathrm{Id},\sigma]}$，其中 $M = ((Z(a'_i; b_j))_{1\leqslant i,j\leqslant N})$，取行 $\sigma^{-1}(N), N$ 和列 $\sigma(N), N$：

$$\det(\tilde{M}) \det(\tilde{M}^{\sigma(N),N}_{\sigma^{-1}(N),N}) = \det(\tilde{M}^{\sigma(N)}_{\sigma^{-1}(N)}) \det(\tilde{M}^N_N) - \det(\tilde{M}^N_{\sigma^{-1}(N)}) \det(\tilde{M}^{\sigma(N)}_N). \tag{5.4}$$

利用命题 4.6，

$$\det\left(\tilde{M}^{\sigma(N)}_N\right) = \det\left(M^{\sigma(N)}_N|_{\Gamma[\mathrm{Id},\overline{\sigma}^N]}\right),$$
$$\det\left(\tilde{M}^N_{\sigma^{-1}(N)}\right) = \det\left(M^N_{\sigma^{-1}(N)}|_{\Gamma[\mathrm{Id},\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}]}\right).$$

由于 $\overline{\sigma}^N$ 和 $\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}$ 满足模式避免条件，利用 (4.5)，可得

$$\det\left(M^{\sigma(N)}_N|_{\Gamma[\mathrm{Id},\overline{\sigma}^N]}\right) = \mathrm{sgn}(\overline{\sigma}^N) Z(\Delta_1 + \cdots + \widehat{\Delta_{\sigma(N)}} + \cdots + \Delta_N),$$
$$\det\left(M^N_{\sigma^{-1}(N)}|_{\Gamma[\mathrm{Id},\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}]}\right) = \mathrm{sgn}(\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}) Z(\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{N-1}).$$

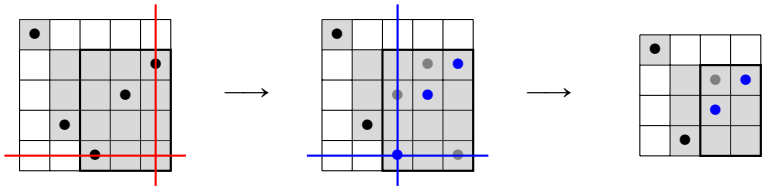
注意，对于 $i \in [N]$，$M^{\sigma(i)}_i$ 是通过删去包含系数 $Z([a'_i$ 的行和列得到的；$b_{\sigma(i)}]) = Z(\Delta_{\sigma(i)})$。

类似地，

$$\det\left(\tilde{M}^{\sigma(N),N}_{\sigma^{-1}(N),N}\right) = \mathrm{sgn}(\overline{\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}}^N) Z(\Delta_1 + \cdots + \widehat{\Delta_{\sigma(N)}} + \cdots + \Delta_{N-1}).$$

现在考虑系数 $\det(\tilde{M}^N_N)$ 和 $\det(\tilde{M}^{\sigma(N)}_{\sigma^{-1}(N)})$。根据引理 A.3，我们知道，$\tilde{M}$ 的两列 $\sigma(N)$ 和 N 或两行 $\sigma^{-1}(N)$ 和 N 相似（零的位置相同）。假设 M 的两列 $\sigma(N)$ 和 N 相似，也就是说，系数 $Z([a'_{\sigma^{-1}(N)};\ b_{\sigma(N)}])$ 上方的零与 $Z([a'_{\sigma^{-1}(N)};\ b_N])$ 上方的零一样多。注意，由于 σ 避免模式 4231，费雷尔图板右下角的点构成一架梯子。特别地，可以运用梯形情形中的相同推理。

我们对列 $\sigma(N)$, ..., N 作循环置换，使列 N 位于位置 $\sigma(N)$，并取移位 $(\tilde{M}^N_N) = \mathrm{shift}(\tilde{M})^{\sigma(N)}_N$ 的子式的行列式，而不是子式 $\tilde{M}^N_N$。由于这些列的上部具有相同的零块，这些行列式相等。所得置换为 $\overline{\sigma}^N$（与删去第 N 行和第 $\sigma(N)$ 列时所得的置换相同）。



对于 $j \notin I$，点仍放置在 $Z([a_j;\ b_j])$ 上，而新点放置在 $Z([a_{i_{k+1}};\ b_{i_k}])$ 上，适用于 $1 \leqslant k \leqslant r$。

因此，

$$\det(\tilde{M}^N_N) = \det(\mathrm{shift}(\tilde{M})^{\sigma(N)}_N) = \mathrm{sgn}(\overline{\sigma}^N) Z(\mathfrak{m}'').$$

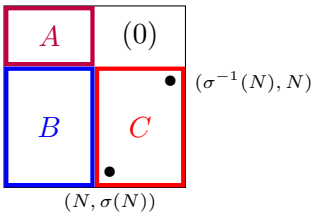
同理，

$$\det(\tilde{M}^{\sigma(N)}_{\sigma^{-1}(N)}) = \operatorname{sgn}(\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)})Z(\mathfrak{m}').$$

现在我们根据引理 A.4 的判据来考察这些置换的符号：

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \sum_{\bullet} \sharp \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \bullet \\ \hline & & \\ \hline \bullet & & \\ \hline \end{array} \right\}.$$

我们将网格（或矩阵）分成 4 个区块， A、 B、 C，右上方则为空（或填充零）。



注意，区域 C 中包含 r 个点，其中 r 是 I 的基数。从 σ 到 $\overline{\sigma}^N$ 时，我们移去最后一行上的点。显然，除最下面的点外，区域 A、 B 和 C 中的所有点对和 ℓ 的贡献都相同。因此，差值等于最下面的点 $(N$、 $\sigma(N))$ 的贡献，即 $r-1$。因此

$$\operatorname{sgn}(\overline{\sigma}^N) = \operatorname{sgn}(\sigma)(-1)^{r-1}.$$

现在，从 σ 到 $\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}$ 时，我们移去点 $(\sigma^{-1}(N)$、 $N)$。区块 A 中的所有点贡献仍然相同，但区块 B 中的点在其右上角少计一个点。区块 C 中剩余的点也会少计一个点。因此，

$$\operatorname{sgn}(\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)(-1)^{r-1+\sharp B}.$$

从 σ 到 $\overline{\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}}^N$，我们取出这两个点，所得置换的符号为

$$\operatorname{sgn}(\overline{\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)}}^N) = \operatorname{sgn}(\sigma)(-1)^{\sharp B+1}.$$

化简（5.4）中的符号后，我们得到所需的关系式（5.1）。

最后，如果相同的不是两列，而是 $\Gamma[\mathrm{Id}\ \sigma]$ 的两行 $\sigma^{-1}(N)$ 和 N，则可以用同样的方法，对矩阵 M 的 $\tilde{}$ 行作循环置换。由此，

$$\det(\tilde{M}^N_N) = \operatorname{sgn}(\overline{\sigma}^{\sigma^{-1}(N)})Z(\mathfrak{m}''),$$
$$\det(\tilde{M}^{\sigma(N)}_{\sigma^{-1}(N)}) = \operatorname{sgn}(\overline{\sigma}^N)Z(\mathfrak{m}').$$

不过，对符号作类似推理，也能得到所需的关系式，从而完成（5.1）的证明。

5.3. **不可约性证明。**

5.3.1., 的不可约性 $Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_N, \Delta_{\sigma(N)})$: 如注 3.9 所述，我们用归纳法证明这一结果，归纳参数为 $N \geqslant 3$，即 $\mathfrak{m}$ 中线段的数量。对于 $N=3$，假设 $\sigma(3) \neq 3$，则有$Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta_3, \Delta_{\sigma(3)}) = Z(\Delta)$，其中 Δ 根据命题 3.7 必定是 $\mathfrak{m}$ 的良好线段。根据定义， $Z(\mathfrak{m}) \times Z(\Delta)$ 是不可约的。

由命题 3.7 可知， σ 避开模式 4231 和 3412，因此 $\mathfrak{m}$ 要么是梯子，要么至少有一条良好线段 Δ，且该线段不同于 Δ_N 和 $\Delta_{\sigma(N)}$。梯形情形已在第 5.1 节中讨论。否则，根据引理 3.5，我们知道 Δ 也是 $\mathfrak{m}'$ 的一条良好线段：$=\mathfrak{m}\backslash\Delta_N$、 $\Delta_{\sigma(N)}$（位于同一侧）。

不妨假设 Δ 是 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$ 的一条良好左线段。于是，如推论 3.8 的证明中所示，

$$Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}') \hookrightarrow \underbrace{Z(\mathfrak{m}) \times Z(\Delta)}_{\text{irreducible}} \times Z(\mathfrak{m}'\backslash\Delta) \cong Z(\Delta) \times Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}'\backslash\Delta)$$
$$\hookrightarrow \underbrace{Z(\Delta) \times Z(\Delta)}_{\text{irreducible}} \times Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta) \times Z(\mathfrak{m}'\backslash\Delta).$$

由归纳法可知，$Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta) \times Z(\mathfrak{m}'\backslash\Delta)$ 不可约。

同理，

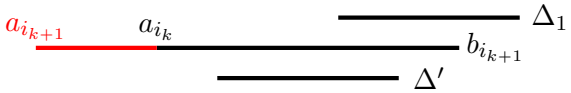
$$Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}') \twoheadleftarrow Z(\mathfrak{m}\backslash\Delta) \times Z(\mathfrak{m}'\backslash\Delta) \times Z(\Delta) \times Z(\Delta).$$

由引理 2.19，我们得出 $Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}')$ 不可约。

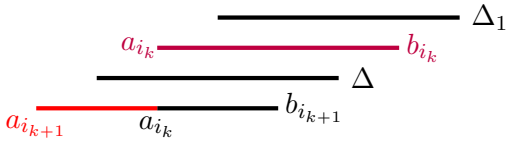
5.3.2. 的不可约性：和之前一样，我们通过归纳法证明这一点，这次对$N - r$进行归纳，其中 $r = |J|$。若 $r = N$，则 $\mathfrak{m}$是一个梯子，结论已在 [BLM13，例 4.5] 中证明。若 $N > r$，则 $\mathfrak{m}$ 不是梯子。此时，Δ_1 或 $\Delta_{\sigma(1)}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个良好线段，且与 Δ_N 和 $\Delta_{\sigma(N)}$ 不能构成梯子。这个良好线段不是 Δ_{i_k} 之一，因此它是 $\mathfrak{m}'$ 和 $\mathfrak{m}''$的一个线段。我们来证明它是 $\mathfrak{m}'$ 和 $\mathfrak{m}''$的一个公共良段。

假设 $\sigma(N) \neq 1$，且 Δ_1 是 $\mathfrak{m}$ 的良好左线段。显然，Δ_1 不位于 $\mathfrak{m}'$ 或 $\mathfrak{m}''$ 的任何线段之前。

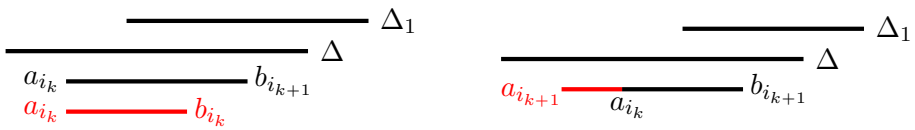
假设 Δ_1 不与 $\mathfrak{m}'$ 中位于其前面的线段构成梯子。因此，存在 Δ、Δ'，使得 $\Delta \prec \Delta_1$、$\Delta' \prec \Delta_1$ 且 $\Delta' \subsetneq \Delta$。由于 Δ_1 是 $\mathfrak{m}$ 的良好线段，Δ、Δ' 中恰有一个位于 $\mathfrak{m}$ 中，而另一个已被移位。若 $\Delta' \in \mathfrak{m}$，则 $\Delta = [a_{i_k}$；对某个 k，有 $b_{i_{k+1}}]$。在这种情况下，$\Delta_{i_{k+1}} \prec \Delta_1$ 且 $\Delta' \not\prec \Delta_{i_{k+1}}$，这与 Δ_1 是 $\mathfrak{m}$ 的良好线段这一事实相矛盾。



若 $\Delta = [a_i;\ b_i] \in \mathfrak{m}$，则存在 k 使得 $\Delta' = [a_{i_k};\ b_{i_{k+1}}]$。若 $b_{i_k} > b_i$ 和 $a_{i_{k+1}} < a_i$ 均成立，则 $i \in I$，这与 Δ 尚未被移位这一事实相矛盾。



若 $b_{i_k} < b_i$，则 $\Delta_{i_k}, \Delta, \Delta_1$ 在 $\mathfrak{m}$ 中不构成梯子；若 $a_{i_{k+1}} > a_i$，则 $\Delta, \Delta_{i_{k+1}}, \Delta_1$ 在 $\mathfrak{m}$ 中不构成梯子。这两种情况都与 Δ_1 是 $\mathfrak{m}$ 的良好线段这一事实矛盾。



因此，根据第 3.2 节中的判据，Δ_1 是 $\mathfrak{m}'$ 的良好线段。我们以类似的方式证明，Δ_1 是 $\mathfrak{m}''$ 的良好线段。

那么，

$$Z(\mathfrak{m}') \times Z(\mathfrak{m}'') \hookrightarrow \underbrace{Z(\Delta_1) \times Z(\Delta_1)}_{\text{irreducible}} \times Z(\mathfrak{m}'\backslash\Delta_1) \times Z(\mathfrak{m}''\backslash\Delta_1).$$

由归纳法可知， $Z(\mathfrak{m}'\backslash\Delta_1)\times Z(\mathfrak{m}''\backslash\Delta_1)$ 是不可约的。

同样，

$$Z(\mathfrak{m}')\times Z(\mathfrak{m}'')\twoheadleftarrow Z(\mathfrak{m}'\backslash\Delta_1)\times Z(\mathfrak{m}''\backslash\Delta_1)\times Z(\Delta_1)\times Z(\Delta_1).$$

由引理 2.19，我们得出 $Z(\mathfrak{m}')\times Z(\mathfrak{m}'')$ 是不可约的。

6. 与量子仿射代数表示的关系

6.1. 结果的转译。 如上所述，定理 5.1 的结果通过量子仿射 *Schur-Weyl* 对偶有一个量子仿射类比。事实上，当 q 不是单位根时，Chari-Pressley [CP96] 已经建立了仿射赫克代数的有限维表示范畴 $H_{q^2}(n)$ 与量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$的（水平为 n）有限维表示范畴之间的范畴等价，其中 $k\geqslant n$。此外，通过类型理论（例如参见 [Hei11]），已知仿射赫克代数 $H_{q^2}(n)$ 的有限维表示与 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的有限长度表示等价。

这种等价是幺半的，也就是说，在 $\mathcal{C}$ 中对两个表示进行抛物诱导，会对应于相应 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$-模的张量积。

有限维不可约 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$-模不再用多段来分类，而是借助与其最高权相对应的 *Drinfeld* 多项式进行分类。通过类似于第 2.2 节开头所述的将问题约化到尖点线的过程，有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$-模范畴的研究归结为对骨架塞尔子范畴 $\mathscr{C}$ 的研究。该子范畴由 Hernandez-Leclerc 引入（见 [HL10，第 3.7] 节），与簇代数相关。令 $\mathscr{R}$ 表示幺半范畴 $\mathscr{C}$ 的格罗滕迪克环。

范畴 $\mathscr{C}$ 中的简单对象于是可在同构意义下由形式变量 $Y_{i,\ p}$, $(i,p)\in I:=\{\{1,\dots,k-1\}\times\mathbb{Z}\mid i+p+1\in 2\mathbb{Z}\}$ 的单项式参数化。线段与形式变量之间的对应关系如下：

$$\begin{array}{ccc}[a;b] & \mapsto & Y_{b-a+1,-a-b},\\ [\frac{1-i-p}{2};\frac{i-p-1}{2}] & \leftarrow\!\shortmid & Y_{i,p}.\end{array}\tag{6.1}$$

由于我们采用 Zelevinsky 分类来研究 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的表示，从起，不可约的 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$-模将记作 $L(M)$，其最高环路权为 M，属于支配环路权集合：

$$\hat{P}_\ell:=\left\{\prod_{j=1}^{N}Y_{i_j,p_j}\mid\ \forall\ 1\leqslant j\leqslant N,(i_j,p_j)\in\hat{I}\right\}.$$

在这种对应关系下，在量子仿射代数的语境中，梯形表示通常称为蛇形模。为完整起见，回顾 Mukhin-Young 对蛇模的定义。对于 $M=\prod_{j=1}^{N}Y_{i_j,p_j}\in\hat{P}_\ell$，简单模 $L(M)$ 是蛇形模，当且仅当对所有 $1\leqslant j\leqslant N$，

$$p_{j+1}-p_j\geqslant|i_{j+1}-i_j|+2.$$

显然，这与定义 2.10 中的梯子的定义相对应。注意，Mukhin-Young 也为 B 型量子仿射代数引入了蛇模的定义。

此外，如上所述，[LM14]中的定理 5.5此前已由 Mukhin-Young 以蛇形模的形式证明。

对于使得 $L(M)$ 为蛇形模的$M = \prod_{j=1}^{N} Y_{i_j,p_j} \in \hat{} P_\ell$，我们在格罗滕迪克环 $\mathscr{R}$ [MY12 定理 4.1]中有以下关系：

$$\left[L\left(\prod_{j=1}^{N-1} Y_{i_j,p_j}\right)\right]\cdot\left[L\left(\prod_{j=2}^{N} Y_{i_j,p_j}\right)\right] = \left[L\left(\prod_{j=2}^{N-1} Y_{i_j,p_j}\right)\right]\cdot[L(M)] + \big[L(M')\big]\cdot\big[L(M'')\big], \tag{6.2}$$

其中， M'、 M''称为 M的相邻蛇形，在此情形下分别对应于 $\mathfrak{m}'$和 $\mathfrak{m}''$。注意，关系 (6.2) 已在 [MY12] 中针对类型 B建立。此外，与我们的结果一样，(6.2) 左端的两项都对应于不可约模。

基于这些原因，我们的定理 5.1 是对 [MY12 定理 4.1], 的推广，并且我们^建立了关于 $U_q(\mathfrak{sl}_k)$的不可约表示的一些新关系。

例 6.1。 我们将例 5.4 中得到的关系改写如下：

^ (1) 对于 $k \geqslant 4$，令 $M = Y_{2,-5}Y_{3,-2}Y_{1,-2} \in P_{\ell_0}$。与之前一样，相应的正则表示 $L(M)$ 是实的。应用定理 5.1 得到以下关系：

$$L(Y_{2,-5}Y_{3,-2})\cdot L(Y_{3,-2}Y_{1,-2}) = L(M)\cdot L(Y_{3,-2}) + L(Y_{3,-2})\times L(Y_{3,-4}Y_{3,-2}).$$

^ (2) 对于 $k \geqslant 7$，设 $M = Y_{6,-7}Y_{3,-8}Y_{5,-4}Y_{2,-5} \in P_{\ell_0}$。相应的正则表示 $L(M)$ 是实的，应用定理 5.1 得到以下关系：

$$L(Y_{6,-7}Y_{3,-8}Y_{5,-4})\cdot L(Y_{6,-7}Y_{5,-4}Y_{2,-5}) = L(M)\cdot L(Y_{6,-7}Y_{5,-4}) + L(Y_{6,-7}Y_{5,-4}Y_{1,-6})\cdot L(Y_{6,-7}Y_{5,-4}Y_{4,-7}).$$

而应用推论 5.3 得到以下关系：

$$L(Y_{3,-8}Y_{5,-4}Y_{2,-5})\cdot L(Y_{6,-7}Y_{3,-8}Y_{2,-5}) = L(M)\cdot L(Y_{3,-8}Y_{2,-5}) + L(Y_{3,-8}Y_{2,-5}Y_{4,-5})\cdot L(Y_{3,-8}Y_{2,-5}Y_{7,-6}).$$

注意，当 $k = 7$ 时，最后一个关系右端可化简为$L(Y_{3,-8}Y_{2,-5}Y_{4,-5})\cdot L(Y_{3,-8}Y_{2,-5})$。

6.2. **与簇代数的关系**。 在 [HL16], Hernandez 和 Leclerc 证明，格罗滕迪克环 $\mathscr{R}$ 具有簇代数结构，其初始簇变量为$Kirillov\text{-}Reshetikhin$ 模（或斯佩表示，如定义 2.8 所述）。此外，该结果的一个关键要素是， T-系统关系（Mukhin-Young 扩展 T-系统是其推广）对应于簇代数结构中的交换关系。同一作者还在 [HL16，猜想 5.2] 中猜想，簇变量与素实单模之间存在双射。Kashiwara-Kim-Oh-Park 在 [KKOP21], 中证明了该猜想的部分内容，证明所有簇变量都对应于素实单模。

在 [DLL19] Duan-Li-Luo证明了素蛇形模与簇变量相对应，从而证明了Hernandez-Leclerc关于蛇形模的猜想，并为此在格罗滕迪克环 $\mathscr{R}$中引入了新的关系，他们将其解释为交换关系。然而，目前尚不清楚Mukhin-Young扩展的 T-系统（或其中某些系统）能否解释为交换关系。

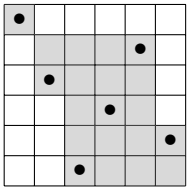
本研究的动机之一是对 T- 系统关系作出更多推广，使其能够被解释为交换关系。我们猜想，若加入 (5.1) 和 (5.2) 这类更明确的关系，就有可能证明所有素实正则表示（满足定理 2.18 [LM18] 的判据）都对应于簇变量。

然而，我们已经发现，关系 (5.1) 和 (5.2) 并非全都具有交换关系的形式。例如，在例 6.1 (1) 的关系中，左边的一个因子不是素的 $L(Y_{3,\ -2}Y_{1,\ -2}) \cong L(Y_{3,\ -2}) \cdot L(Y_{1,\ -2})$。因此，左边是三个素不可约模的乘积，该关系不能是交换关系。

附录 A. 费雷尔棋盘

S_N 中的排列可以通过在一个 $N \times N$-网格中放置点来表示。对于所有$1 \leqslant i \leqslant N$，在方格 $(i, \sigma(i))$中放置一个点。然后，集合 $\Gamma[\mathrm{Id}\ \sigma] \subset [N]^2$ 可以通过将方格 $(i, \sigma'(i))$着色来表示在网格中，其中 $\sigma' \leqslant \sigma$。

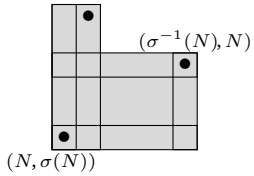
例 A.1. 与置换 $\sigma = 152463$ 对应的网格为



注 A.2. 根据 Sjöstrand 的研究 [Sjo07], 集合 $\Gamma[\mathrm{Id}\ \sigma]$ 是一个 右对齐的斜•费雷尔图板，特别是它是以下矩形的并集 • 对所有（不一定不同的）点对 。

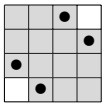
引理 A.3. 设 σ 是 S_N 中的一个置换，且避免模式 3412，那么 $\Gamma[\mathrm{Id}\ \sigma]$ 的列 $\sigma(N)$ 和 N 或行 $\sigma^{-1}(N)$ 和 N 相同。

证明。 如果 $\Gamma[\mathrm{Id}\ \sigma]$ 的 $\sigma(N)$ 列和 N 列不同，那么在 $(\sigma^{-1}(N)、\ N)$ 的上方，且在 $(N、\ \sigma(N))$ 的右侧有一个点。



同理，如果 $\sigma^{-1}(N)$ 行和 N 行不同，那么在 $(N、\ \sigma(N))$ 的左侧，且在 $(\sigma^{-1}(N)、\ N)$ 的下方有一个点。

因此，如果 $\sigma(N)$ 列和 N 列不同，且 $\sigma^{-1}(N)$ 行和 N 行不同，就会出现一个 3412 构型，这与假设矛盾。



□

根据符号的定义，以下结论显而易见。

引理 A.4. 置换 σ 的符号等于 $(-1)^{\ell}$，其中 ℓ 是对所有点 • 求和，求每个点严格位于 •上方且右侧的点数。

参考文献

[BLM13]I. Badulescu、E. Lapid 和 A. Mínguez。使 GL(m 的抛物诱导不可约的一个充分条件，D)。傅里叶数学研究所年刊（格勒诺布尔），63(6):2239–2266，2013。[CG97] N. Chriss 和 V. Ginzburg。《表示论与复几何》。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州，第一版，1997。[CP95] V. Chari 和 A. Pressley。量子仿射代数及其表示。载于《群表示》（班夫，AB，1994），加拿大数学会会议论文集第 16 卷，第 59–78 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1995。[CP96] V Chari 和 A Pressley。量子仿射代数与仿射赫克代数。太平洋数学杂志，174(2):295–326，1996。[CR08] G. Chenevier 和 D. Renard。Speh 表示的特征与 Lewis-Caroll 恒等式。表示论，12:447–452，2008。[CSB21] S. Chepuri 和 M. Sherman-Bennett。避免 1324 和 2143 的 Kazhdan–Lusztig immanant 与 k-正性。加拿大数学杂志，第 1–31 页，2021。[DLL19] B. Duan、J.-R. Li 和 Y.-F. Luo。簇代数与蛇模。代数杂志，519:325–377，2019。[FZ02] S. Fomin 和 A. Zelevinsky。簇代数 I：基础。美国数学会杂志，15(2):497–529，2002。[Hei11]V. Heiermann。约化群 p-进情形下的交织算子与带参数的赫克代数：经典群情形。数学精选（新系列），17(3):713–756，2011。[Her06] D. Hernandez。Kirillov-Reshetikhin猜想与 T-系统的解。纯粹与应用数学杂志，596:63–87，2006。[HL10] D. Hernandez 和 B. Leclerc。簇代数与量子仿射代数。杜克数学杂志，154(2):265–341，2010。[HL16] D. Hernandez 和 B. Leclerc。Kirillov-Reshetikhin 模的 q-特征的簇代数方法。欧洲数学会杂志（JEMS），18(5):1113–1159，2016。[KKKO15] S-J. Kang、M. Kashiwara、M. Kim 和 S. Oh。张量积的头与底的简单性。组合数学，151(2):377–396，2015。[KKOP21] M. Kashiwara、M. Kim、S.-J. Oh 和 E. Park。幺半范畴化与量子仿射代数 II。arXiv 预印本，第 arXiv:2103.10067 页，2021年3月。[KNS11] A. Kuniba1、T. Nakanishi 和 J. Suzuki。可积系统中的 T-系统与 Y系统。物理学杂志A：数学与理论，44，2011。[LM14] E. Lapid 和 A. Mínguez。关于 Tadić 的一个行列式公式。美国数学杂志，136(1):111–142，2014。[LM16] E. Lapid 和 A. Mínguez。非阿基米德局部域上一般线性群内形式的抛物诱导。数学精选（新系列），22(4):2347–2400，2016。[LM18] E. Lapid 和 A. Mínguez。非阿基米德局部域上一般线性群某些表示的 $\square$-不可约性的几何条件。数学进展，339:113–190，2018。[LS90] V. Lakshmibai 和 B. Sandhya。判定 Sl$(n)/B$ 中舒伯特簇光滑性的准则。印度科学院数学科学论文集，100(1):45–52，1990。[MS14] A. Mínguez 和 V. Sécherre。 ℓ 模 $GL_m(D)$ 的光滑表示。杜克数学杂志，163(4):795–887，2014。

[MY12] E. Mukhin 和 C. A. S. Young。扩展 T-系统。数学精选（新系列），18(3):591–631，2012。[Nak01] H. Nakajima。量子仿射代数的箭图簇与有限维表示。美国数学会杂志，14(1):145–238，2001。[Sjo07] J. Sjostrand。斜费雷尔棋盘上的布鲁哈特区间与车。组合理论杂志 *A* 辑，114(7):1182–1198，2007。[Tad95] M. Tadić。关于一般线性群不可约酉表示的特征。汉堡大学数学研讨会论文集，65:341–363，1995。[Zel80] A. Zelevinsky。约化 p-进群的诱导表示。II. 关于 GL(n) 的不可约表示。法国高等师范学校科学年刊（第*4*辑），13(2):165–210，1980。[Zel81] A. Zelevinsky。Kazhdan-Lusztig 猜想的 p-进类比。函数分析及其应用，15:83–92，1981。

Léa Bittmann，霍奇研究所，爱丁堡大学，英国。电子邮箱地址：lea.bittmann@ed.ac.uk