arXiv:2301.00787v1 [gr-qc] 2 Jan 2023

高阶修正引力的哈密顿-雅可比分析

Alberto Escalante* 和 Aldair Pantoja†*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Apartado Postal J-48 72570, Puebla Pue., México,*（日期：2023年6月7日）

本文对广义相对论的 Chern-Simons $[CS]$ 修正进行了哈密顿-雅可比 $[HJ]$ 研究$[GR]$ 。文中给出了哈密顿量和广义括号的完整结构，并基于这些结果构造了 HJ 基本微分，进而找到了该理论的对称性。利用哈密顿量，我们消除了表面上的奥斯特罗格拉德斯基不稳定性，并给出了哈密顿量的新结构。此外，本文还对物理自由度进行了计数，并讨论了一些相关问题。

PACS分类号：98.80.-k,98.80.Qc

I. 引言

众所周知， GR 是描述引力场经典行为及其与时空几何关系的成功框架 [1–6]。从正则观点来看，GR 是一种背景无关的规范理论，具有微分同胚不变性；其扩展哈密顿量是一级约束的线性组合，并传播两个物理自由度 [7]。从量子观点来看，引力量子化纲领是一项艰巨的任务。事实上，在非微扰方案中，引力场的非线性体现在约束中，使量子化变得困难，因此，对非微扰量子引力理论的完整描述至今仍是一个悬而未决的问题 [8, 9]。另一方面，从微扰观点出发，路径积分方法会导致不可重整化问题[10, 11] ，量子场论中已发展的各种工具都未能成功解决这一问题。鉴于此，人们通常研究修正引力理论，以深入了解经典或量子区域；并期望这些理论能够提供新思路，或促成新工具的开发，从而推进量子化纲领，例如所谓的高阶理论 [12–15]。事实上，高阶理论是解决量子引力重整化问题中无穷大的理想候选方案。有人认为，在引力理论中加入曲率的二次高阶项有助于避免这一问题；由于这些项具有无量纲耦合常数，这可以确保

*电子邮箱：aescalan@ifuap.buap.mx
†电子邮箱：jpantoja@ifuap.buap.mx

最终理论无散 [16, 17]。高阶理论的研究是物理学中的一个现代课题，这些理论与暗能量物理 [18, 19], 、广义电动力学[20–22] 以及弦理论 [23, 24]密切相关。此外，文献中还提出了一个有趣的四维模型：通过加入与辅助场耦合的陈-西蒙斯四流，对爱因斯坦-希尔伯特 $[EH]$ 作用量进行扩展；因此，在对辅助场作特定选择后，所得作用量将成为与 GR [25]密切相关的模型。事实上，在拉格朗日层面，该理论描述了两个自由度的传播，它们对应于以速度 c传播的引力波，但具有不同的偏振强度，因而违反空间反射对称性。此外，史瓦西度规是运动方程的一个解，因此，修正理论与 EH 作用量具有相同的经典检验结果。另一方面，在哈密顿层面，该理论是一种高阶规范理论 [26] ，其哈密顿分析已知并不容易。对此，受约束高阶系统的分析通常采用奥斯特罗格拉德斯基-狄拉克 $[OD]$ [27–30] 方法或吉特曼-利亚霍维奇-秋京$[GLT]$ [31, 32] 方法。 OD 方案通过将场及其速度视为正则坐标来扩展相空间，随后为其正则动量引入扩展´。然而，识别约束并非易事；在某些情况下，为了获得自洽代数 [33] ，约束是人为设定的，这便为采用其他方法提供了契机。另一方面， GLT 框架通过引入额外变量，将含有高阶时间导数的问题转化为仅含一阶导数的问题；随后利用狄拉克括号即可消去第二类约束和额外变量 [34]。

然而，分析高阶理论还有另一种方案：即所谓的哈密顿-雅可比方法。正则场论的 HJ 方案由 G¨uler [35, 36]提出，随后在 [37, 38] 中推广至奇异系统。该方法基于对约束的识别，这些约束称为哈密顿量。这些哈密顿量可以是对合的，也可以是非对合的，并用于构造广义微分，从而识别理论的特征方程、规范对称性以及广义 HJ 括号。值得指出的是，哈密顿量是通过零向量来识别的，因此无需像其他方法那样手动设定，哈密顿量便具有正确的结构；由此，识别对称性的过程通常比其他方案更简洁 [39–43]。

综上所述，本文旨在对 [25] 中所述理论进行详细的 HJ 分析。事实上，我们将超越 [25] 中所述的拉格朗日方法来分析这一模型；我们将看到，Jackiw-Yi $[JY]$ 模型是一种高阶理论。鉴于它与 GR 密切相关，研究这一理论是十分必要的。然而，众所周知，高阶理论中可能存在与奥斯特罗格拉德斯基不稳定性 [44], 相关的鬼自由度；也就是说，哈密顿函数无界，这体现为哈密顿量中存在正则动量的线性项。在这方面，值得指出的是，如果存在约束，就有可能消除这些不稳定性 [45, 46]; 在我们的情形中， JY 模型将表现出表面上的奥斯特罗格拉德斯基不稳定性，因为动量中会出现线性项，然而，我们

将通过使用完整的哈密顿量集合来消除该理论中的不稳定性，从而驱逐相关的鬼自由度。

本文结构如下。在第 II 节中，我们从 $CS\ GR$ 修正出发，并在微扰背景下开展研究，也就是说，我们将围绕闵可夫斯基背景展开度规。我们将看到，修正理论含有高阶时间导数，因此接下来会引入变量变换，使作用量仅以一阶时间导数表示。变量变换将使我们能够轻松开展 HJ 分析；哈密顿量的识别、广义微分的构造以及对称性的确定都将直接完成。在第 III 节中，我们给出结论并作一些评述。

II. 哈密顿-雅可比分析

修正后的 EH 作用量为 [25]

$$S[g_{\mu\nu}]=\int_M\left(R\sqrt{-g}+\frac{1}{4}\theta^* R^{\sigma}{}_{\tau}{}^{\mu\nu}R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}\right)d^4x, \tag{1}$$

其中，M 是时空流形，$g_{\mu\nu}$ 是度规张量，R 是标量曲率，g 是度规行列式，$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ 是黎曼张量，θ 是耦合场。一般而言，θ 可视为外部量或局域动力学变量；然而，为了获得一个接近 GR 的作用量，我们将选择 $\theta=\frac{t}{}\Omega$。本文中，我们将用希腊字母表示时空指标 $\mu=0$、1、2、3，用拉丁字母表示空间指标 $i=1$、2、3。此外，我们将在微扰背景下开展研究，并围绕闵可夫斯基背景展开度规

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \tag{2}$$

其中 $h_{\mu\nu}$ 是微扰。将 θ 的表达式代入，并将式（2）代入式（1），我们得到如下线性化作用量

$$S[h_{\mu\nu}]=-\frac{1}{2}\int_M h^{\mu\nu}\left(G^{lin}_{\mu\nu}+C^{lin}_{\mu\nu}\right)d^4x, \tag{3}$$

其中 $G^{lin}_{\mu\nu}$ 是爱因斯坦张量的线性化形式，$C^{lin}_{\mu\nu}$ 是在线性化近似下定义的 Cotton 型张量$C^{lin}_{\mu\nu}=-\frac{1}{4}\Omega^{[}\epsilon_{0\mu\lambda\gamma}\partial^{\lambda}(\Box h^{\gamma}{}_{\nu}-\partial_{\nu}\partial_{\alpha}h^{\alpha\gamma})+\epsilon_{0\nu\lambda\gamma}\partial^{\lambda}(\Box h^{\gamma}{}_{\mu}-\partial_{\mu}\partial_{\alpha}h^{\alpha\gamma})]$ [25]。现在我们假设时空具有拓扑 $M\cong\mathbb{R}\times\Sigma$，其中 $\mathbb{R}$ 是演化参数，Σ 是柯西超曲面。因此，通过对作用量（3）进行 $3+1$ 分解，我们写出相应的拉格朗日密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\ =\ \int\Big[&\frac{1}{2}\dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij}-\partial_j h_{0i}\partial^j h^{0i}-\frac{1}{2}\partial_k h_{ij}\partial^k h^{ij}-\frac{1}{2}\dot{h}^i{}_i\dot{h}^j{}_j+\partial^j h^0{}_0\partial_j h^i{}_i+\frac{1}{2}\partial_k h^i{}_i\partial^k h^j{}_j-2\partial^i h^0{}_i\dot{h}^j{}_j\\&-\partial_i h^0{}_0\partial_j h^{ij}-\partial_i h^{ij}\partial_j h^k{}_k+2\partial_j h^0{}_i\dot{h}^{ij}+\partial_i h^i{}_0\partial_j h^{0j}+\partial_k h^k{}_i\partial_j h^{ij}+\frac{1}{\mu}\epsilon^{ijk}(-\ddot{h}^l{}_i\partial_j h_{lk}\\&+2\dot{h}^l{}_i\partial_j\partial_l h^0{}_k+\partial_l h^m{}_i\partial_m\partial_j h^l{}_k+\nabla^2 h^0{}_i\partial_j h_{0k}+\nabla^2 h^m{}_i\partial_j h_{mk})\Big]d^3x,\end{aligned} \tag{4}$$

其中，我们定义了 $\mu\equiv 2\Omega$ 和 $\epsilon^{ijk}\equiv\epsilon_0{}^{ijk}$。正如上文所述，我们将通过扩展构形空间来降低拉格朗日量(4)中时间导数的阶数，具体做法是

引入以下变量变换

$$K_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{h}_{ij} - \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i}), \tag{5}$$

这里 K_{ij} 与所谓的外在曲率 [47, 48]有关。因此，将（5）代入（4），我们将拉格朗日量改写为以下形式

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; \int \Big[& 2K_{ij}K^{ij} - 2K^{i}{}_{i}K^{j}{}_{j} - h_{00}R_{ij}{}^{ij} - h_{ij}R^{ij} + \frac{1}{2}h^{i}{}_{i}R_{ij}{}^{ij} + \frac{1}{\mu}\epsilon^{ijk}(4K_{i}{}^{l}\partial_j K_{kl} + \partial^m h_{im}\partial_j\partial^l h_{kl} \\ & + \nabla^2 h_{i}{}^{m}\partial_j h_{km}) + \psi^{ij}(\dot{h}_{ij} - \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i} - 2K_{ij})\Big]\, d^3x, \end{aligned} \tag{6}$$

其中，我们添加了拉格朗日乘子 ψ^{ij} 以强制满足关系式（5），而表达式$R_{ij}{}^{ij}$ 和 R_{ij} 定义如下

$$R_{ij}{}^{ij} \;\equiv\; \partial^i\partial^j h_{ij} - \nabla^2 h^{i}{}_{i}, \tag{7}$$

$$R_{ij} \;\equiv\; \frac{1}{2}(\partial_i\partial^k h_{jk} + \partial_j\partial^k h_{ik} - \partial^i\partial^j h^{k}{}_{k} - \nabla^2 h_{ij}). \tag{8}$$

现在，我们计算与动力学变量相关的正则动量

$$\pi^{00} \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{00}} = 0, \tag{9}$$

$$\pi^{0i} \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{0i}} = 0, \tag{10}$$

$$\pi^{ij} \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{ij}} = \psi^{ij}, \tag{11}$$

$$P^{ij} \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{K}_{ij}} = 0, \tag{12}$$

$$\Lambda^{ij} \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_{ij}} = 0. \tag{13}$$

Thus，根据方程（9）—（13），我们确定该理论的以下 HJ 哈密顿量

$$\mathcal{H}' \;\equiv\; \mathcal{H}_0 + \Pi = 0, \tag{14}$$

$$H_1^{00} \;\equiv\; \pi^{00} = 0, \tag{15}$$

$$H_2^{0i} \;\equiv\; \pi^{0i} = 0, \tag{16}$$

$$H_3^{ij} \;\equiv\; \pi^{ij} - \psi^{ij} = 0, \tag{17}$$

$$H_4^{ij} \;\equiv\; P^{ij} = 0, \tag{18}$$

$$H_5^{ij} \;\equiv\; \Lambda^{ij} = 0, \tag{19}$$

其中， $\mathcal{H}_0$是按通常方式定义的正则哈密顿量 $\mathcal{H}_0 = \dot{h}_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} + \dot{K}_{ij}P^{ij} + \dot{\psi}_{ij}\Lambda^{ij} - \mathcal{L}$，且 $\Pi = \partial_0 S$ [39–43]。此外，正则变量之间的基本泊松括号 $[PB]$

为

$$\{h_{\mu\nu}, \pi^{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu})\delta^3(x-y), \tag{20}$$

$$\{K_{ij}, \pi^{kl}\} = \frac{1}{2}(\delta^{k}_{i}\delta^{l}_{j} + \delta^{k}_{j}\delta^{l}_{i})\delta^3(x-y), \tag{21}$$

$$\{\psi^{ij}, \Lambda_{kl}\} = \frac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\delta^{j}_{l} + \delta^{j}_{k}\delta^{i}_{l})\delta^3(x-y). \tag{22}$$

此外，在 HJ 方案中，系统的动力学由定义如下的基本微分支配

$$dF = \{F, H_I\}d\omega^I, \tag{23}$$

其中， F 是定义在相空间上的任意函数， H_I 是所有哈密顿量 (14)-(19) 的集合， ω^I 是与它们相关的参数。值得注意的是，在 HJ 方法中，哈密顿量分为对合的和非对合的。对合哈密顿量是指其与所有哈密顿量（包括其自身）的 PB均为零；否则，它们称为非对合哈密顿量。由于可积性条件，通过引入所谓的广义括号，非对合哈密顿量会从基本微分 (23) 中消去。这些新的括号定义为

$$\{f, g\}^* = \{f, g\} - \{f, H^{a'}\}C^{-1}_{a'b'}\{H^{b'}, g\}, \tag{24}$$

其中， $C^{a'b'}$ 是由所有非对合哈密顿量之间的 PB 构成的矩阵。由 (14)-(19) 可知，非对合哈密顿量为 H^{ij}_3 和 H^{ij}_5，其 PB 为

$$\{H^{ij}_3, H^{ij}_5\} = -\frac{1}{2}(\eta^{ik}\eta^{jl} + \eta^{il}\eta^{kj})\delta^3(x-y), \tag{25}$$

因此，矩阵 $C^{a'b'}$ 定义为

$$C^{a'b'} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\eta^{ik}\eta^{jl} + \eta^{il}\eta^{kj}) \\ \frac{1}{2}(\eta^{ik}\eta^{jl} + \eta^{il}\eta^{kj}) & 0 \end{pmatrix}\delta^3(x-y), \tag{26}$$

及其逆 $C^{-1}_{a'b'}$ 的形式为

$$C^{-1}_{a'b'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\eta^{ik}\eta^{jl} + \eta^{il}\eta^{kj}) \\ -\frac{1}{2}(\eta^{ik}\eta^{jl} + \eta^{il}\eta^{kj}) & 0 \end{pmatrix}\delta^3(x-y). \tag{27}$$

由此，场之间出现以下非零广义括号

$$\{h_{\mu\nu}, \pi^{\alpha\beta}\}^* = \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu})\delta^3(x-y), \tag{28}$$

$$\{K_{ij}, P^{kl}\}^* = \frac{1}{2}(\delta^{k}_{i}\delta^{l}_{j} + \delta^{l}_{i}\delta^{k}_{j})\delta^3(x-y), \tag{29}$$

$$\{h_{\mu\nu}, \psi^{\alpha\beta}\}^* = \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu})\delta^3(x-y), \tag{30}$$

$$\{\psi_{ij}, \Lambda^{kl}\}^* = 0, \tag{31}$$

我们从（31）可以看出，正则变量（ψ_{ij}， Λ^{kl}）可以消去，这意味着我们可以进行 $\pi^{ij} = \psi^{ij}$ 和 $\Lambda^{ij} = 0$的代换，因此，正则哈密顿量具有

form

$$\mathcal{H}_0 = \int [2K^i{}_i K^j{}_j - 2K_{ij}K^{ij} + h_{00}R_{ij}{}^{ij} + h_{ij}R^{ij} - \frac{1}{2}h^i{}_i R_{ij}{}^{ij} - \frac{1}{\mu}\epsilon^{ijk}(4K_i{}^l\partial_j K_{kl} + \partial^m h_{im}\partial_j\partial^l h_{kl} + \nabla^2 h_i{}^m\partial_j h_{km}) - 2h_{0j}\partial_i\pi^{ij} + 2K_{ij}\pi^{ij}]d^3x. \tag{32}$$

值得指出的是，正则哈密顿量中含有关于动量 π^{ij} 的线性项，这一事实可能与奥斯特罗格拉德斯基不稳定性有关。然而，众所周知，通过正确识别约束 [45, 46]可以消除这些不稳定性。就此而言，HJ 方案的一个优势是，它能直接识别约束，无需手动设定；随后，借助广义括号并识别哈密顿量，我们可以消去正则动量中的线性项。事实上，使用哈密顿量（14）—（19），正则哈密顿量具有以下形式

$$\mathcal{H}_0' = \int [\frac{1}{2}\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{4}\pi^i{}_i\pi^j{}_j + h_{ij}R^{ij} - \frac{1}{\mu}\epsilon^{ijk}(4K_i{}^l\partial_j K_{kl} + \partial^m h_{im}\partial_j\partial^l h_{kl} + \nabla^2 h_i{}^l\partial_j h_{kl}) - \frac{4}{\mu^2}(2\partial^i K_{ij}\partial^j K^k{}_k + 2\partial^i K^j{}_k\partial_i K_j{}^k - 2\partial^j K^i{}_k\partial_i K_j{}^k - \partial^j K^i{}_k\partial^k K_{ij} - \partial_k K^i{}_i\partial^k K^j{}_j]d^3x.$$

henc因此，奥斯特罗格拉德斯基不稳定性已得到消除，相关的鬼也已被驱逐。 d.

另一方面，基于所有这些结果，我们用对合哈密顿量或广义括号来改写基本微分，这意味着

$$dF = \int [\{F, H'\}^* dt + \{F, H_1^{00}\}^* d\omega_{00}^1 + \{F, H_2^{0i}\}^* d\omega_{0i}^2 + \{F, H_4^{ij}\}^* d\omega_{ij}^4]d^3y. \tag{33}$$

因此，我们将探究该理论中是否还存在更多哈密顿量。为此，我们将考虑广义微分 (33) 或弗罗贝尼乌斯可积条件，它们确保系统是可积的，这意味着

$$dH_a = 0, \tag{34}$$

其中 $H_a \equiv (H_1^{00}, H_2^{0i}, H_4^{ij})$ 均为对合哈密顿量。由可积性条件 (34) 可得以下 10 个新的哈密顿量

$$H_6^{00} \equiv \nabla^2 h^i{}_i - \partial^i\partial^j h_{ij} = 0, \tag{35}$$

$$H_7^{0i} \equiv \partial_j\pi^{ij} = 0, \tag{36}$$

$$H_8^{ij} \equiv \pi^{ij} - 2K^{ij} + 2\eta^{ij}K^k{}_k - \frac{2}{\mu}(\epsilon^{ikl}\eta^{jm} + \epsilon^{jkl}\eta^{im})\partial_k K_{lm} = 0, \tag{37}$$

现在，我们观察到，哈密顿量 H_4^{ij} 、 H_6^{00} 和 H_8 是非对合的，因此将通过引入一组新的广义括号将它们消去。为此，如果我们计算一个矩阵，其各元素为非对合哈密顿量之间的广义括号，如式（28）—（31）所示，就会得到零向量，例如 $v^i = (\frac{1}{2}\partial_i\partial_j\zeta,\ \delta^i{}_k\zeta,\ 0)$，其中 ζ 是任意函数。因此，将零向量与哈密顿量 [42, 43]，进行缩并后，我们将得到以下对合哈密顿量

$$H_9 = \nabla^2 h^i{}_i - \partial^i\partial^j h_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j P^{ij}, \tag{38}$$

因此，只有 12 个非对合哈密顿量（H_4^{ij}、H_8^{ij}），其广义括号为

$$\begin{aligned}\{H_4^{ij}, H_8^{ij}\}^* &= 2[\frac{1}{2\mu}(\epsilon^{ikm}\eta^{jl}+\epsilon^{jkm}\eta^{il}+\epsilon^{ilm}\eta^{jk}+\epsilon^{ilm}\eta^{ik})\partial_m+\frac{1}{2}(\eta^{ik}\eta^{jl}\\ &\quad+\eta^{jk}\eta^{il})-\eta^{ij}\eta^{kl}]\delta^3(x-y). \end{aligned} \tag{39}$$

这样，我们以与之前处理括号（28）–（31）相同的方式，构造新的 HJ 广义括号组，即 $\{\ ,\ \}^{**}$。新的非平凡广义括号如下:

$$\{h_{ij}, \pi^{kl}\}^{**} = \frac{1}{2}(\delta_i^k\delta_j^l+\delta_i^l\delta_j^k)\delta^3(x-y), \tag{40}$$

$$\{K_{ij}, P^{kl}\}^{**} = 0, \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\{h_{ij}, K_{kl}\}^{**} &= \frac{1}{4}(\eta_{ik}\eta_{jl}+\eta_{il}\eta_{jk}-\eta_{ij}\eta_{kl})\delta^3(x-y)+\frac{\mu^2}{4\Xi}[[(\eta_{ik}\eta_{jl}+\eta_{il}\eta_{jk}-\eta_{ij}\eta_{kl})\nabla^2+(\eta_{ij}\partial_k\partial_l\\ &\quad+\eta_{kl}\partial_i\partial_j)](\nabla^2+\mu^2)-3\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l-\frac{3\mu^2}{4}(\eta_{ik}\partial_j\partial_l+\eta_{il}\partial_j\partial_k+\eta_{jk}\partial_i\partial_l+\eta_{jl}\partial_i\partial_k)\\ &\quad+\frac{\mu}{4}[(\epsilon_{ik}{}^m\eta_{jl}+\epsilon_{jk}{}^m\eta_{il}+\epsilon_{il}{}^m\eta_{jk}+\epsilon_{jl}{}^m\eta_{ik})(\nabla^2+\mu^2)+3(\epsilon_{ik}{}^m\partial_j\partial_l+\epsilon_{jk}{}^m\partial_i\partial_l\\ &\quad+\epsilon_{il}{}^m\partial_j\partial_k+\epsilon_{jl}{}^m\partial_i\partial_k)]\partial_m]\delta^3(x-y), \end{aligned} \tag{42}$$

其中 $\Xi\equiv-\mu^2\ (\nabla^2+\mu^2)\ \ (\nabla^2+\frac{\mu^2}{4})$。值得指出的是，[26], 中曾报告过一些括号，但两者存在一些差异。事实上，本文采用了另一种分析方法，并引入了新的变量；引入这些变量使我们能够直接确定括号（42），且其形式比 [26]中报告的结果更为紧凑。此外，在HJ 方案中，无需像通常那样繁琐地将约束分类为一级和二级。因此，我们可以看出，HJ 更加简洁。

有了新的对合哈密顿量组或广义括号组后，基本微分可写成如下新形式:

$$\begin{aligned}dF &= \int[\{F, H'(y)\}^{**}dt+\{F, H_1^{00}(y)\}^{**}d\omega_{00}^1+\{F, H_2^{0i}(y)\}^{**}d\omega_{0i}^2+\{F, H_7^{0i}(y)\}^{**}d\omega_{0i}^7\\ &+ \{F, H_9(y)\}^{**}d\omega^9]d^3y, \end{aligned} \tag{43}$$

其中

$$H_1^{00} = \pi^{00}, \tag{44}$$

$$H_2^{0i} = \pi^{0i}, \tag{45}$$

$$H_7^{0i} = \partial_j\pi^{ij}, \tag{46}$$

$$H_9 = \nabla^2 h^i{}_i-\partial^i\partial^j h_{ij}. \tag{47}$$

由 H_7^{0i}和 H_9 的可积性条件可得

$$dH_7^{0i} = 0, \tag{48}$$

$$dH_9 = -\partial_i\partial_j\pi^{ij} = -\partial_i H_7^{0i} = 0, \tag{49}$$

因此，不存在其他哈密顿量。值得指出的是，式（47）给出的哈密顿量与 [49] 中报道的哈密顿量有关，后者仅研究了线性化引力。不过，两者存在差异：一方面， [49] 中报道的泊松括号与式（40）—（42）中得到的广义括号并不相同。另一方面，修正项的贡献体现在广义括号中；这一点对于量子化研究十分重要，因为广义括号将变为对易子，而该贡献可能会导致其与标准线性化引力存在差异。

现在，我们将计算 HJ 特征方程，它们表示为

$$
\begin{aligned}
dh_{00} &= d\theta^{1}_{00}, && (50)\\
dh_{0i} &= \frac{1}{2}d\theta^{2}_{0i}, && (51)\\
dh_{ij} &= [2K_{ij}+\partial_i h_{0j}+\partial_j h_{0i}]dt-\frac{1}{2}(\delta^k_i\partial_j+\delta^k_j\partial_i)d\theta^{7}_{0k}, && (52)\\
d\pi^{00} &= -R_{ij}{}^{ij}dt, && (53)\\
d\pi^{0i} &= \frac{1}{2}\partial_j\pi^{ij}dt, && (54)\\
d\pi^{ij} &= [\eta^{ij}\nabla^2 h_{00}-\partial^i\partial^j h_{00}-\eta^{ij}R_{kl}{}^{kl}-2R^{ij}-\frac{1}{\mu}[(\epsilon^{ikl}\partial^j+\epsilon^{jkl}\partial^i)\partial_k\partial^m h_{lm}\\
&\quad -(\epsilon^{ikl}\eta^{jm}+\epsilon^{jkl}\eta^{im})\partial_k\nabla^2 h_{lm}]]dt+(\partial^i\partial^j-\eta^{ij}\nabla^2)d\theta^{9}, && (55)\\
dK_{ij} &= [-\frac{1}{2}\partial_i\partial_j h_{00}-R_{ij}+\frac{1}{4}\eta_{ij}R_{kl}{}^{kl}]dt+\frac{1}{2}\partial_i\partial_j d\theta_9, && (56)\\
dP^{ij} &= [0]dt, && (57)
\end{aligned}
$$

根据特征方程，我们可以得出以下结论：从方程（50）—（51）可以看出，变量 h_{00} 和 h_{0i} 被确定为拉格朗日乘子。此外，根据（41）和（57），我们排除 P^{ij} 作为自由度，因为它的时间演化为零。进一步地，我们确定了 h_{ij} 及其动量 π^{ij}的运动方程。事实上，取 $d\theta^{7}_{0k}=0$ 和$d\theta^{9}=0$，可得

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_{ij} &= 2K_{ij}+\partial_i h_{0j}+\partial_j h_{0i}, && (58)\\
\dot{\pi}^{ij} &= \eta^{ij}\nabla^2 h_{00}-\partial^i\partial^j h_{00}-\eta^{ij}R_{kl}{}^{kl}-2R^{ij}-\frac{1}{\mu}[(\epsilon^{ikl}\partial^j+\epsilon^{jkl}\partial^i)\partial_k\partial^m h_{lm}\\
&\quad -(\epsilon^{ikl}\eta^{jm}+\epsilon^{jkl}\eta^{im})\partial_k\nabla^2 h_{lm}], && (59)\\
\dot{K}_{ij} &= -\frac{1}{2}\partial_i\partial_j h_{00}-R_{ij}+\frac{1}{4}\eta_{ij}R_{kl}{}^{kl}. && (60)
\end{aligned}
$$

我们注意到，（58）对应于 K_{ij}的定义，因此，若使用（58）和 K_{ij} ，就会如预期那样得到关于 h_{ij} 的二阶时间方程，继而微扰对应六个自由度。这样，我们按如下方式计算物理自由度的数量：共有 12 个正则变量（h_{ij},π^{ij}）和八个对合哈密顿量（$H^{00}_1, H^{0i}_2, H^{0i}_7, H_9$），因此

$$
DOF = \frac{1}{2}[12-8]=2,
$$

因此，该理论和 GR [25, 26] 一样具有两个物理自由度。

另一方面　　另一方面，如果在特征方程中取 $dt=0$，那么我们可以确定以下内容

正则变换

$$\delta h_{00} = \delta\omega^1_{00}, \tag{61}$$
$$\delta h_{0i} = \frac{1}{2}\delta\omega^2_{0i}, \tag{62}$$
$$\delta h_{ij} = -\frac{1}{2}(\delta^k_i\partial_j + \delta^k_j\partial_i)\delta\omega^7_{0k}, \tag{63}$$

此外，考虑到当变分为 $\delta\mathcal{S}=0$ [50]时，拉格朗日量 (6) 在变换 (61)-(63) 下保持不变，我们便可确定该理论相应的规范变换，即

$$\delta S = \left[\frac{\partial S}{\partial h_{\mu\nu}}\delta h_{\mu\nu} + \frac{\partial S}{\partial(\partial_\alpha h_{\mu\nu})}\delta(\partial_\alpha h_{\mu\nu}) + \frac{\partial S}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu})}\delta(\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu})\right] \tag{64}$$
$$= \int\Big[\Big(-\Box h^{\mu\nu} + \Box h^\lambda{}_\lambda\eta^{\mu\nu} - \partial_\alpha\partial_\lambda h^{\alpha\lambda}\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu h^\lambda{}_\lambda + 2\partial^\mu\partial_\lambda h^{\nu\lambda} + \frac{1}{\mu}\epsilon^{0\mu\lambda\gamma}(\partial^\nu\partial_\alpha\partial_\lambda h^\alpha{}_\gamma$$
$$-\partial_\lambda\Box h^\nu{}_\gamma)\Big)\delta h_{\mu\nu}\Big]\,d^4x = 0, \tag{65}$$

因此，将（61）—（63）代入变分后，我们得到如下结果

$$\delta S = \int[R_{ij}{}^{ij}\delta\omega^1_{00} + \frac{1}{2}[2\nabla^2 h_0{}^i + 2\partial^i\dot{h}^j{}_j - 2\partial^i\partial^j h_{0j} - 2\partial_j\dot{h}^{ij} + \frac{1}{\mu}\epsilon^{0ijk}(\partial_j\nabla^2 h_{0k} - \partial_j\partial^l\dot{h}_{kl})]\delta\omega^2_{0i}$$
$$-\frac{1}{2}[\ddot{h}^{ij} - \ddot{h}^k{}_k\eta^{ij} + 2\partial^k\dot{h}_{0k}\eta^{ij} - 2\partial^i\dot{h}_0{}^j + \partial^i\partial^j h_{00} - \nabla^2 h_{00}\eta^{ij} + 2R^{ij} - R_{kl}{}^{kl}\eta^{ij}$$
$$+\frac{1}{\mu}\epsilon^{0ikl}(\partial_k\ddot{h}^j{}_l - \partial^j\partial_k\dot{h}_{0l} + \partial^j\partial_k\partial^m h_{lm} - \partial_k\nabla^2 h^j{}_l)]\delta(\partial_i\omega^7_{0j} + \partial_j\omega^7_{0i})]d^4x = 0. \tag{66}$$

现在，我们 定义 $\partial_0\xi \equiv \delta\omega^1_{00}$，经过繁复的代数运算后，我们发现变分具有如下形式

$$\delta S = \int[-\partial_j\dot{h}^{ij} + \partial^i h^j{}_j + \nabla^2 h_0{}^i - \partial^i\partial^j h_{0j} + \frac{1}{2\mu}\epsilon^{0ijk}(\partial_j\nabla^2 h_{0k} - \partial_j\partial^l\dot{h}_{kl})](-\partial_i\xi + \delta\omega^2_{0i} + \partial_0\delta\omega^7_{0i})d^4x,$$
$$= 0, \tag{67}$$

因此，当参数 $\omega's$ 满足以下条件时，作用量在（61）—（63）下保持不变

$$\delta\omega^2_{0i} = -\partial_0\delta\omega^7_{0i} + \partial_i\xi. \tag{68}$$

现在，我们将（68）改写成一种新形式。事实上，我们引入如下四维向量 $\xi_\mu \equiv (\frac{1}{2}\xi,\ -\frac{1}{2}\delta\omega^7_{0i}) \equiv (\xi_0,\ \xi_i)$；于是 $\xi = 2\xi_0$ 和 $\delta\omega^7_{0i} = -2\xi_i$。因此，关系式（68）可写为

$$\frac{1}{2}\delta\omega^2_{0i} = \partial_0\xi_i + \partial_i\xi_0, \tag{69}$$

最后，根据方程（61）—（63）和（69），可以确定以下规范变换

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu. \tag{70}$$

所有这些结果都与 [26], 中报告的结果一致。因此，我们的研究完善并拓展了文献中已有的研究。

III. 结论与评述

本文对高阶修正引力进行了详细的 HJ 分析。我们以不同于其他方法的方式引入了一组新变量，并在

相关文献中报告了这些变量，随后确定了完整的对合与非对合哈密顿量。正确识别哈密顿量，使我们得以通过消除含线性动量的项来避免奥斯特罗格拉德斯基不稳定性，从而修正正则哈密顿量。此外，我们得到了 HJ广义括号和基本微分，并据此确定了特征方程和规范对称性。对哈密顿量的完整识别使我们能够计算物理自由度的数量，并得出结论：修正理论与 GR 具有相同数量的物理自由度。如此一来，我们便具备了在量子背景下分析该理论所需的全部要素。事实上，通过我们的微扰 HJ研究，约束和广义括号都已得到控制，因此我们可以运用场论正则量子化中发展出的工具，推动这一研究计划[51]。此外，我们的分析也将有助于在非微扰情形下研究该理论。事实上，现在修正理论将完全背景无关，因此我们将比较文献中 GR 所报告的正则结构 [8, 9] 与修正理论的正则结构之间的差异。不过，这些构想仍在研究中，将很快报告 [52]。

数据可用性声明：稿件中没有相关数据

[1] A. Einstein, 《广义相对论的基础》, *Annalen Phys* **49**, 769-822 (1916).[2] A. Einstein, 《引力场方程》, *Sitzungsberichte*, 《普鲁士皇家科学院》, 柏林, 844-847 (1915).[3] F. Dyson、A. Eddington 和 C. Davison, 《根据1919年5月29日日全食期间的观测确定太阳引力场对光的偏折》, *Phil. Trans. R. Soc. Lond A* **220**, (1920).[4] B. Abbott *et al*, 《双黑洞并合产生引力波的观测》, *Phys. Rev. Lett.*116, 061102 (2016).[5] 事件视界望远镜合作组, 《首批M87事件视界望远镜观测结果：I. 超大质量黑洞的阴影》, *The Astrophysical Journal Letters* **875**, 1 (2019).[6] S. Turyshev, 《广义相对论的实验检验：近期进展与未来方向》, *Ups.Fiz. Nauk* **52** 1-27 (2009).[7] B. DeWitt, 《量子引力理论。I. 正则理论》, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).[8] Rovelli, C.《量子引力》。剑桥大学出版社，剑桥 (2004)[9] Thiemann, T. 《现代正则量子广义相对论》。剑桥大学出版社，剑桥 (2007).[10] C. Kiefer, 《量子引力》, 牛津科学出版物, (2007).[11] S. Deser 和 P. Nieuwenhuizen, 《量子化爱因斯坦–麦克斯韦系统的不可重整化性》, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 245 (1974).[12] H. Weyl, 《相对论的一种新扩展》, *Annalen Phys.* **59**, 101-133 (1919).[13] R. Bach, 《论外尔相对论及外尔对曲率张量概念的扩展》,

Mathematische Zeitschrift **9**, 110-135 (1921).[14] Q. Chen 和 Y. Ma, 《外尔引力的哈密顿结构与联络动力学》, *Phys. Rev.* **98**, 064009 (2018).[15] G. Alkac、M. Tek 和 B. Tekin, 《三维巴赫引力》, *Phys. Rev. D* **98**, 104021 (2018).[16] K. Stelle, 《高阶导数量子引力的重整化》, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).[17] E.S. Fradkin、A.A. Tseytlin, 《渐近自由且可重整化的量子引力理论》, *Nucl. Phys.B* **201**, 469 (1982).[18] G. W. Gibbons, 《幽灵物质与宇宙学常数》, arXiv:hep-th/0302199 (2003).[19] R.P. Woodard, 《通过广义相对论的1/R修正避免暗能量》, *Lect. Notes Phys.*720, 403 (2007).[20] B. Podolsky, 《广义电动力学》, *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942).[21] Podolsky、C. Kikuchi, 《广义电动力学：第二部分》, *Phys. Rev.* **65**, 228 (1944).[22] Podolsky、C. Kikuchi, 《广义量子电动力学中的辅助条件与静电相互作用》, *Phys. Rev.* **67**, 184 (1945).[23] A. Polyakov, 《弦的精细结构》, *Nucl. Phys. B* **268**, 406 (1986).[24] D.A. Eliezer、R.P. Woodard, 《弦理论中的非局域性问题》, *Nucl. Phys. B* **325**, 389 (1989).[25] R. Jackiw 和 S. Yi, 《广义相对论的陈-西蒙斯修正》, *Phys. Rev. D* **68**, 104012 (2003).[26] A. Escalante 和 A. Pantoja, 《高阶理论的哈密顿分析：广义相对论的陈-西蒙斯修正》, *The European Physical Journal C*, 审稿中 (2022).[27] M. Ostrogradsky, 《关于等周问题相关微分方程的回忆录》, *Mem. Ac. St. Petersbourg*, 385 (1850).[28] P. Dirac, 《广义哈密顿动力学》, *Canadian Journal of Mathematics* **2**, 129-148 (1950).[29] P. Dirac, 《量子力学讲义》, 叶史瓦大学, 纽约, (1964).[30] M. Henneaux 和 C. Teitelboim, 《规范系统的量子化》, 普林斯顿大学, (1994).[31] D. Gitman、S. Lyakhovich 和 I. Tyutin, 《高阶导数理论的哈密顿表述》, *Sov. Phys. Journal* **26**, 730-734 (1983).[32] D. Gitman 和 I. Tyutin, 《约束场的量子化》, 施普林格, (1990).[33] J. Barcelos 和 T. Dargam, 《拓扑质量引力的约束分析》, *Z. Phys. C Particlesand Fields* **67**, 701-705 (1995).[34] A. Escalante、Jorge Hern´ández-Aguilar, 《高阶拓扑质量引力的新正则分析》 *Eur. Phys. J. C* **81**, 678, (2021).[35] Y. G¨uler, 《离散正则约束系统的哈密顿-雅可比理论》, *IL Nuovo Cimento* **100**, 267-276 (1987).[36] Y. G¨uler, 《连续系统的哈密顿-雅可比理论》, *IL Nuovo Cimento* **100**, 251-266 (1987).[37] Y. G¨uler, 《奇异系统的正则表述》, *IL Nuovo Cimento* **107**, 1389-1395 (1992).[38] Y. G¨uler, 《奇异系统的积分》, *IL Nuovo Cimento*, 107 1143-1149, (1992).[39] M.C. Bertin、B.M. Pimentel、C.E. Valc´arcel, 《非对合约束系统与哈密顿-雅可比形式主义》, *Ann. Phys.* **323**, 3137 (2008).[40] M.C. Bertin、B.M. Pimentel、C.E. Valc´arcel, 《对合约束系统与哈密顿-雅可比形式主义》, *J. Math. Phys.* **55**, 112901 (2014).[41] N.T. Maia、B.M. Pimentel、C.E. Valc´arcel, 《三维背景场引力：哈密顿-雅可比分析》, *Class. Quantum Grav.* **32**, 185013 (2015).[42] A. Escalante、A. Pantoja, 《三维……的哈密顿-雅可比分析与协变描述》

帕拉蒂尼理论加上陈-西蒙斯项， *Eur. Phys. J. Plus* **134**，437 (2019)。[43] A. Escalante、M. Eduardo Hern´andez-Garc´ıa，三维阿什特卡引力的哈密顿-雅可比特征方程， *Eur. Phys. J. Plus* **135**，245 (2020)。[44] R. P. Woodard，奥斯特罗格拉茨基定理，arXiv:1506.02210v2。[45] A. Ganz 和 K. Noui，重新审视奥斯特罗格拉茨基定理：高阶导数拉格朗日量、鬼与简并性， *Class. Quantum Grav.* **38**，075005 (2021)。[46] Tai-jun Chen、M. Fasiello、Eugene A. Lim、Andrew J. Tolley，带约束的高阶导数理论：驱除奥斯特罗格拉茨基鬼， *JCAP* **130**，042，(2013)。[47] T. Frankel， *The Geometry of Physics* 3版，剑桥大学出版社，(2012)。[48] H. Fuhri、S. Hortner，《物理评论D辑》103，105014，(2021)。[49] M. Bertin、B. Pimentel、C. Valcarcel 和 G. Zambrano，线性化引力的哈密顿-雅可比形式主义，*Class. Quantum Grav.* **28**，175015 (2011)。[50] M.C. Bertin、B.M. Pimentel、C.E. Valc´arcel、G.E.R. Zambrano，对合约束系统与哈密顿-雅可比形式主义， *J. Math. Phys.* **55**，112901 (2014)。[51] R. Amorim 和 J. Barcelos，非局域有质量矢量规范理论的泛函量子化与正则量子化， *J. Math. Phys.* **40**，585 (1999)。[52] A. Escalante 和 A. Pantoja，
The perturbative and non-perturbative canonical analysis of the Chern-Simons modification of General Relativity，进行中。