arXiv:2301.00803v2 [math.NA] 3 Jan 2023

非局部交通流模型的一类数值格式的渐近相容性 *

KUANG HUANG† 和QIANG DU‡

摘要。本文研究了用于描述涉及非局部车辆间相互作用的车辆交通流的非局部守恒律的数值离散。该非局部模型包含一个在视界参数所确定的范围内取值的积分；当非局部视界参数趋于零时，该模型便还原为局部的 Lighthill-Richards-Whitham 模型。用于模拟这类参数化非局部交通流模型的优良数值格式应能稳健应对模型参数的变化，但文献中尚未对此进行系统研究。为弥补这一空白，我们仔细研究了一类有限体积数值格式及其对非局部积分的适当离散；这些格式包括文献中提出的若干格式及其变体。本文的主要贡献是证明了这些格式具有渐近相容性：对于给定的正非局部视界参数，数值解一致收敛于非局部连续模型的唯一解；当网格尺寸和非局部视界参数同时趋于零时，数值解则收敛于局部模型的唯一熵解。研究表明，凭借渐近相容性，这些格式能够在非局部视界参数变化时提供稳健的数值计算。

关键词。交通流，非局部 LWR，有限体积格式，渐近相容性，非局部到局部极限

AMS 主题分类。65M08, 35L65, 76A30, 35R09, 65R20, 65D30

1. 引言。本文研究经典 Lighthill-Richards-Whitham (LWR) 模型的一种非局部类比模型的数值离散 [36, 37]。后者由下式给出：

$$\partial_t \rho(t,x) + \partial_x(\rho(t,x)v(\rho(t,x))) = 0, \tag{1.1}$$

对于密度 $\rho = \rho(t,x)$ 和速度 $v = v(\rho(t,x))$，该模型已广泛用于交通流研究。近年来，为研究存在非局部车辆间相互作用时交通流的动态特性[5, 26], ，人们提出了以下非局部 *LWR* 模型

$$\partial_t \rho(t,x) + \partial_x(\rho(t,x)v_\delta(\rho(t,\cdot),t,x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0. \tag{1.2}$$

与（1.1）不同，非局部 LWR 模型（1.2）采用如下建模假设：在高速公路上行驶的车流中，每辆车决定自身行驶速度时，并非依据局部信息，而是通过对车辆当前位置前方长度为 $\delta > 0$ 的道路路段内交通信息进行非局部加权平均来决定。更具体地说，速度 $v_\delta = v_\delta(\rho,\ t,\ x)$ 具有如下形式

$$v_\delta(\rho(t,\cdot),t,x) = v(q_\delta(\rho(t,\cdot),t,x)), \quad \text{with} \quad q_\delta(\rho(t,\cdot),t,x) = \int_0^\delta \rho(t,x+s)w_\delta(s)\,ds, \tag{1.3}$$

*本研究部分由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1937254、DMS-2012562 和 CNS-2038984。

†哥伦比亚大学应用物理与应用数学系，纽约州纽约市 10027；kh2862@columbia.edu

‡哥伦比亚大学应用物理与应用数学系及数据科学研究所，纽约州纽约市 10027； qd2125@columbia.edu

其中，积分核 $w = w_\delta(s)$ 被假设为定义在区间 $[0, \delta]$ 上的概率密度函数。或者，也可以考虑由 [22] 给出的非局部速度

$$v_\delta(\rho(t,\cdot),t,x) = \int_0^\delta v(\rho(t,x+s))w_\delta(s)\,ds. \tag{1.4}$$

方程（1.2）采用如下初始条件求解：

$$\rho(0,x) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

其中 ρ_0 ： $\mathbb{R} \to [0,1]$ 表示初始交通密度。 $\rho_0 \equiv 0$ 表示道路为空， $\rho_0 \equiv 1$ 则表示交通完全拥堵。

由于速度对密度的非局部依赖，方程（1.2）导出一个非局部守恒律。考虑重标度核 $w_\delta(s)$ $= w(s/\delta)/\delta$ ，使得 w_δ 在 $\delta \to 0$时收敛到狄拉克点质量。显然，无论速度取（1.3）还是（1.4）所给出的形式，非局部 LWR 模型（1.2）在取极限 $\delta \to 0$时，都能形式上恢复局部模型（1.1）。关于非局部 LWR 模型（1.2）的更严格分析，已有不少研究成果，包括模型适定性 [5, 8, 14, 22, 26], 行波解 [38, 40], 均匀流的渐近稳定性 [28], 以及非局部到局部极限（当 $\delta \to 0$ [7, 8, 12, 14–16, 22, 32, 33]）。

非局部 LWR 模型 (1.2) 的数值离散也已在 [5, 10,13, 23, 24, 26] 中得到研究。然而，尚无系统研究探讨数值解对参数 δ 的依赖性及其在极限 $\delta \to 0$ 下的行为。本研究旨在弥补这一空白：我们设计并分析非局部 LWR 模型 (1.2) 的有限体积数值格式，使其既能正确解析给定 $\delta > 0$ 时的非局部模型，也能在 $\delta \to 0$ 时正确解析局部模型 (1.1)。这类格式体现了渐近相容格式的思想，能够在 δ 变化时提供稳健的数值计算；有关更一般的非局部模型数值离散的渐近相容性讨论，见 [42, 43] 。本文的主要贡献是严格证明了这些格式的渐近相容性，其中包括：对于给定的正视界参数，数值解一致收敛到非局部连续模型的唯一解；以及当网格尺寸和非局部视界参数同时趋于零时，数值解收敛到局部模型的唯一熵解。据我们所知，这些结果此前尚未在文献中得到证明。证明的主要依据是 $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$ 空间中的紧性以及数值解的熵可容许性。 [5, 26] 中的分析基于固定 $\delta > 0$ 时的先验 L^∞ 估计和全变差估计，但由此得到的全变差界在 $\delta \to 0$ 时会趋于无穷大。本文的一项创新是采用不同的方法，证明当 δ 接近零时，所提出格式生成的数值解满足单侧利普希茨条件，从而保证全变差有界并满足熵可容许性。局部模型 (1.1) 的数值格式研究中曾采用过这种方法，见 [6, 41], ；但据我们所知，该方法尚未用于非局部模型。本文还报告了数值实验，以补充理论研究。需要指出的是，尽管本研究的动机是对具有非局部车辆相互作用的交通流进行建模，但具有非局部通量的守恒律也应用于行人交通 [9, 17], 、沉积 [4], 以及传送带上的物料流 [27, 39] 建模；更多相关研究见 [1–3, 11, 18, 21, 25, 31] 。因此，本文的研究可用于多个应用领域中广泛问题的数值模拟。

总而言之，在本节余下部分（第1节）中，我们将在简要介绍非局部模型的假设和一些基本数学性质之后，介绍数值

离散化格式，并总结有关其收敛行为和渐近相容性的主要定理。主要定理的详细证明见第2节。第3节展示一些数值实验的结果，第4节则给出结论。

1.1. 适定性与非局部到局部极限综述。我们首先陈述该模型的一些假设。

ASSUMPTION 1. ***(i)*** 非局部核由 $w_\delta(s) = w(s/\delta)/\delta$ 给出，其中 $s \in [0,\delta]$，$w = w(s)$ 是定义在 $[0,1]$，上的 $\mathbf{C}^1$ 光滑、严格递减且非负的概率密度函数，并满足归一化条件 $\int_0^1 w(s)\, ds = 1$。

(ii) 速度函数为 $v(\rho) = 1-\rho$。因此，(1.3) 和(1.4) 会得到相同的结果。***(iii)*** 初始数据 $\rho_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $0 \le \rho_0(x) \le 1$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立。此外， ρ_0 具有有界全变差。

关于非局部 LWR 模型（1.2）的数学分析，我们回顾一下：对于非局部核、速度函数和初始数据的一般选取，弱解的存在性和唯一性已得到证明，参见例如 [5, 8, 14, 26]。针对本文的情形，以下命题总结了上述文献中的已知结果。

PROPOSITION 1。 在假设 *1*下，非局部 *LWR* 模型 (1.2) 存在唯一的弱解 $\rho \in \mathbf{L}^\infty([0,+\infty) \times \mathbb{R})$，满足

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \rho(t,x)\partial_t\phi(t,x) + \rho(t,x)v_\delta(\rho(t,\cdot),t,x))\partial_x\phi(t,x)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x)\phi(0,x)\, dx = 0, \tag{1.6}$$

对所有 $\phi \in \mathbf{C}_c^1([0,+\infty) \times \mathbb{R})$，其中 $v_\delta(\rho(t,\cdot)\ t,\ x)$ 由 (1.3)给出。此外，该解满足最大值原理

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \rho_0(x) \le \rho(t,x) \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \rho_0(x), \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

非局部 LWR 模型 (1.2) 的解在 $\delta \to 0$ 时的收敛性也得到了广泛研究。文献中通常假设非局部核 $w = w_\delta(s)$ 定义在$s \in [0,+\infty)$ 上，且非局部密度定义为

$$q_\delta(\rho(t,\cdot),t,x) = \int_0^\infty \rho(t,x+s)w_\delta(s)\, ds.$$

[7,8] 研究了指数核 $w_\delta(s) = \delta^{-1}e^{-\frac{s}{\delta}}$，并证明在初始数据 1.2) 收敛到局部模型 (1.1) 的唯一弱熵解，其中假设初始数据 ρ_0 一致正。 [14] 将收敛结果推广到一类具有指数衰减率的非局部核，但增加了一个假设，即 ρ_0 是单侧利普希茨连续。在 [14], 中，作者还给出了反例，说明初始数据的一致正性对于收敛结果至关重要。在后续工作 [12,15,22,32,33], 中，无需假设初始数据一致正，便得到了关于非局部量 $q_\delta(\rho(t,\cdot)\ t,x)$ 在 $\delta \to 0$时的收敛结果。

在本文中，我们采用了与 [14] 类似的方法，并对初始数据作出以下附加假设：初始数据基本上需要处处为正且不存在负跳跃。

ASSUMPTION 2。 初始数据 ρ_0 满足

$$\rho_0(x) \geq \rho_{\min} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\frac{\rho_0(y) - \rho_0(x)}{y - x} \leq L \quad \forall x \neq y \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

对于某些常数 $\rho_{\min} > 0$ 和 $L > 0$。

在我们的情形下， [14] 中的相同论证可用于得到非局部到局部极限结果，如下述命题 2所述；对于紧支撑非局部核，只需做很少的修改。

PROPOSITION 2。 假设条件 *1* 和 *2* 均成立。当 $\delta \to 0$，非局部 ***LWR*** 模型 (1.2) 的解在 $\mathbf{L}^1_{\text{loc}}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ 中收敛到局部模型 (1.1)的弱熵解，该解满足

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \rho(t,x)\partial_t\phi(t,x) + \rho(t,x)v(\rho(t,x))\partial_x\phi(t,x)\,dxdt + \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x)\phi(0,x)\,dx = 0, \tag{1.9}$$

对于所有 $\phi \in \mathbf{C}^1_c([0, +\infty) \times \mathbb{R})$，并且

$$-\frac{\rho(t,y) - \rho(t,x)}{y - x} \leq \frac{1}{2t} \quad \forall x \neq y \in \mathbb{R},\, t > 0. \tag{1.10}$$

在命题 2中，不等式（1.10）即 Oleinik 熵条件，用于从标量守恒律（1.1）中选取唯一的熵容许解，参见 [34]。熵条件（1.10）对解的单侧 Lipschitz 常数施加约束，意味着解只能出现正跳跃。

1.2. 有限体积近似。现在考虑非局部 LWR 模型（1.2）的数值离散。采用有限体积近似，数值解定义为分片常数函数：

$$\rho(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_j^n \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j \times \mathcal{T}^n}(t,x), \tag{1.11}$$

其中， $\mathcal{C}_j = (x_{j-1/2},\ x_{j+1/2})$、 $\mathcal{T}^n = (t^n,\ t^{n+1})$分别为空间单元和时间单元。网格点为$x_j = jh$和 $t^n = n\tau$，其中 h和 τ分别为空间和时间网格尺寸。在初始时刻 $t^0 = 0$，初始数据离散为：

$$\rho_j^0 = \frac{1}{h}\int_{\mathcal{C}_j} \rho_0(x)\,dx, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.12}$$

记 $F^n_{j-1/2}$和 $F^n_{j+1/2}$为时间从 t^n 到 t^{n+1}期间穿过单元边界$x_{j-1/2}$和$x_{j+1/2}$的数值通量。指定适当的边界通量后，有限体积格式为：

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n + \lambda(F^n_{j-1/2} - F^n_{j+1/2}), \tag{1.13}$$

其中 CFL 比 $\lambda = \tau/h$ 取为一个固定常数。为确定数值通量，我们需要计算式（ $q_\delta(\rho(t,\ \cdot)\ t,\ x)$中给出的非局部密度 1.3。令

$$q_j^n = \sum_{k=0}^{m-1} w_k \rho^n_{j+k}, \tag{1.14}$$

其中 $m = \lceil \frac{\delta}{h} \rceil$ 是非局部积分中涉及的单元数，$\{w_k\}_{k=0}^{m-1}$ 是一组数值求积权重，使得：

$$w_{\delta,h}(s) = \sum_{k=0}^{m-1} w_k \mathbf{1}_{[kh,(k+1)h]}(s), \quad s \in [0,\delta], \tag{1.15}$$

是非局部核 $w_\delta = w_\delta(s)$ 的分段常数近似。

给定离散非局部密度 $\{q_j^n\}_{j\in\mathbb{Z}}^{n\geq 0}$，式（1.13）中的非局部通量可以通过多种不同方式构造。下面列举几个例子。

- 在 [5, 26], 中，构造了一种 Lax-Friedrichs 型格式，其数值通量为：

$$F_{j-1/2}^n = \frac{1}{2}\left[\rho_{j-1}^n v\left(\sum_{k=0}^{m-1} w_k \rho_{j+k-1}^n\right) + \rho_j^n v\left(\sum_{k=0}^{m-1} w_k \rho_{j+k}^n\right)\right] + \frac{\alpha}{2}(\rho_{j-1}^n - \rho_j^n), \tag{1.16}$$

其中，$\alpha > 0$ 为数值黏性常数，数值求积权重由左端点值给出：

$$\text{[Left endpoint]} \quad w_k = w_\delta(kh)h, \quad k = 0, \cdots, m-1. \tag{1.17}$$

- 在 [24], 中，提出了一种 Godunov 型格式，其数值通量定义为：

$$F_{j-1/2}^n = \rho_{j-1}^n v\left(\sum_{k=0}^{m-1} w_k \rho_{j+k}^n\right), \tag{1.18}$$

其中，数值求积权重由精确求积给出：

$$\text{[Exact quadrature]} \quad w_k = \int_{kh}^{\min\{(k+1)h,\delta\}} w_\delta(s)\, ds, \quad k = 0, \cdots, m-1. \tag{1.19}$$

- 受到（1.16）和（1.18）的启发，我们还考虑以下 Lax-Friedrichs 型通量：

$$F_{j-1/2}^n = \frac{1}{2}(\rho_{j-1}^n + \rho_j^n) v\left(\sum_{k=0}^{m-1} w_k \rho_{j+k}^n\right) + \frac{\alpha}{2}(\rho_{j-1}^n - \rho_j^n), \tag{1.20}$$

其中，数值求积权重取左端点值或采用精确求积。

在本文中，我们考虑一族有限体积格式：

$$\rho_j^{n+1} = \mathcal{H}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n, \cdots, \rho_{j+m}^n) = \rho_j^n + \lambda(F_{j-1/2}^n - F_{j+1/2}^n) \tag{1.21}$$

$$= \rho_j^n + \lambda\big[g(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, q_{j-1}^n, q_j^n) - g(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n, q_j^n, q_{j+1}^n)\big], \tag{1.22}$$

其中，q_j^n由（1.14）给出，$\lambda = \tau/h$ 为 CFL 比，而 $g = g(\rho_L, \rho_R, q_L, q_R)$ 是一个数值通量函数，它同时取决于局部密度 ρ_L, ρ_R 和非局部密度 q_L, q_R。我们指出，令 $q_L = \rho_L$ 和 $q_R = \rho_R$，$g = g(\rho_L, \rho_R, \rho_L, \rho_R)$ 就成为局部模型（1.1）的数值通量函数，相应的数值格式：

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n + \lambda\big[g(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j-1}^n, \rho_j^n) - g(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n)\big], \tag{1.23}$$

可视为（1.21）-（1.22）的局部对应形式。

值得一提的是，上述格式的数值通量分别为（1.16）、（1.18）和（1.20），它们均属于上述格式族（1.21）-（1.22），其数值通量函数为：

$$\text{(1.24a)} \qquad \text{[Lax-Friedrichs]} \quad g(\rho_L,\rho_R,q_L,q_R)=\frac{1}{2}(\rho_L v(q_L)+\rho_R v(q_R))+\frac{\alpha}{2}(\rho_L-\rho_R),$$

$$\text{(1.24b)} \qquad \text{[Godunov]} \quad g(\rho_L,\rho_R,q_L,q_R)=\rho_L v(q_R),$$

$$\text{(1.24c)} \qquad \text{[modified Lax-Friedrichs]} \quad g(\rho_L,\rho_R,q_L,q_R)=\frac{1}{2}(\rho_L+\rho_R)v(q_R)+\frac{\alpha}{2}(\rho_L-\rho_R),$$

。现在，我们对数值求积权重、数值通量函数和 CFL 比 λ 作出如下假设。

Assumption 3。 数值求积权重 $\{w_k\}_{0\le k\le m-1}$ 满足

$$\text{(1.25)} \qquad w_\delta(kh)h\ge w_k\ge w_\delta((k+1)h)h \quad \text{and} \quad w_k-w_{k+1}\ge cm^{-2},$$

对于某个常数 $c>0$，它仅依赖于核函数 $w=w(s)$。此外，$\{w_k\}_{0\le k\le m-1}$满足归一化条件：

$$\text{(1.26)} \qquad \sum_{k=0}^{m-1} w_k=1.$$

Assumption 4。 (*i*) 数值通量函数 g 是二次函数。(*ii*) 当 $\rho_L=\rho_R$ 和 $q_L=q_R$ 时，$g(\rho_L,\rho_L,q_L,q_L)=\rho_L(1-q_L)$。(*iii*) 记 γ_{ij}、$1\le i$、$j\le 4$ 为 g的二阶偏导数，它们满足

$$\text{(1.27)} \qquad \gamma_{11}=\gamma_{12}=\gamma_{22}=0, \quad \gamma_{33}=\gamma_{34}=\gamma_{44}=0,$$

$$\text{(1.28)} \qquad \gamma_{13},\gamma_{23},\gamma_{14},\gamma_{24}\le 0, \quad \gamma_{13}+\gamma_{23}+\gamma_{14}+\gamma_{24}=-1.$$

(iv) 记 $\theta^{(i)}$、$1\le i\le 4$ 为 g 关于其四个自变量 ρ_L、ρ_R、q_L、q_R 的一阶偏导数。对于任意 $0\le\rho_L$、ρ_R、q_L、$q_R\le 1$:

$$\text{(1.29)} \qquad \theta^{(1)}(q_L,q_R)\ge 0,\ \theta^{(2)}(q_L,q_R)\le 0,\ \theta^{(3)}(\rho_L,\rho_R)\le 0,\ \theta^{(4)}(\rho_L,\rho_R)\le 0,$$

$$\text{(1.30)} \qquad \theta^{(1)}(q_L,q_R)+\theta^{(3)}(\rho_L,\rho_R)+2(\gamma_{13}+\gamma_{23})\ge 0,\ \theta^{(2)}(q_L,q_R)-2(\gamma_{23}+\gamma_{24})\le 0,$$

$$\text{(1.31)} \qquad \theta^{(3)}(\rho_L,\rho_R)+\theta^{(4)}(\rho_L,\rho_R)\le -\min\{\rho_L,\rho_R\}.$$

Assumption 5。根据记号 $\theta^{(i)}$，$1\le i\le 4$ 在假设 *4* 中 λ 满足

$$\text{(1.32)} \qquad \lambda\sum_{i=1}^{4}\left\|\theta^{(i)}\right\|_\infty<1.$$

1.3. 主要结果。本节概述主要结果。需要指出，所有定理均以假设 1-5 为前提。为明确记号，我们记：

- ρ^δ：非局部 LWR 模型（1.2）的连续介质解；
- ρ^0：局部 LWR 模型的连续介质解（1.1）；

- $\rho^{\delta,\ h}$：非局部 LWR 模型的数值解；以及
- $\rho^{0,\ h}$：局部 LWR 模型的数值解。

有两组参数：非局部视界参数 δ 和网格尺寸参数 h。在本文中，我们关注沿不同的极限路径（如图 1.1所示），建立这些解之间的关系，其中 $\delta \to 0$且 $h \to 0$ 。

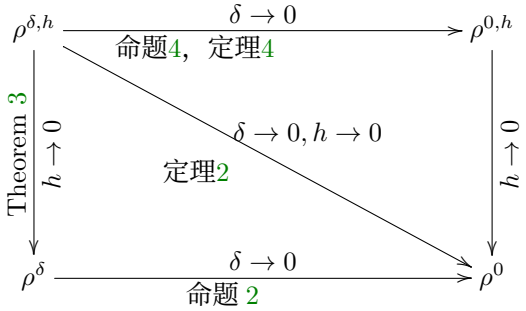

图 1.1：各种极限路径示意图

1. 非局部模型的数值收敛：当 $h \to 0$ 且 $\delta > 0$ 固定时，$\rho^{\delta,h} \to \rho^{\delta}$ 可按照 [26] 中的方法证明。该证明基于数值解的先验 L^{∞} 估计和全变差估计。定理 3 给出了一个更强的结果，即关于 δ 的一致数值收敛。2. 局部模型的数值收敛：当 $h \to 0$ 时，$\rho^{0,h} \to \rho^{0}$ 是一个经典结果，参见例如 [35]。3. 非局部到局部极限：当 $\delta \to 0$ 时，$\rho^{\delta} \to \rho^{0}$ 见命题 2。4. 数值离散的非局部到局部极限：当 $\delta \to 0$ 且 h 固定时，$\rho^{\delta,h} \to \rho^{0,h}$ 可由命题 4 得出。我们还在定理 4 中给出了一致收敛结果。

为补全图 1.1中的收敛图，我们需要考察 $\rho^{\delta,\ h} \to \rho^{0}$ 当$\delta \to 0$ 和 $h \to 0$ 同时成立时是否如此。如果答案是肯定的，我们就称数值格式（1.21）-（1.22）与其局部极限渐近相容 [42, 43] 。

我们的主要贡献是证明所提出的数值格式（1.21）-（1.22）具有渐近相容性，该格式见定理 2。证明基于定理 $\mathbf{L}^{\infty}$ 先验估计和全变差估计（定理 1），这些估计关于非局部视界参数 δ一致。

THEOREM 1。 在假设 *1-5*下，且满足

$$0 < \delta \leq \delta_0 \doteq \frac{c\rho_{\min}}{2Lw(0)}, \tag{1.33}$$

其中常数 c 如 (1.25) 所示，常数 $\rho_{\min}$ 和 L 如 (1.8)所示。数值解 $\rho^{\delta,\ h}$ 由数值格式 (1.21)-(1.22) 生成，并满足最大值原理

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \rho_0(x) \leq \rho^{\delta,h}(t,x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \rho_0(x), \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

此外，数值解在空间中的全变差$\mathrm{TV}(\rho^{\delta,\ h}(t,\cdot))$ 是 $t \in [0,+\infty)$的非增函数，并且

$$\mathrm{TV}(\rho^{\delta,h};\, [0,T] \times \mathbb{R}) \leq T \cdot \mathrm{TV}(\rho_0) \quad \forall T > 0. \tag{1.35}$$

THEOREM 2。 在假设 1-5下，当 $\delta \to 0$ 和 $h \to 0$ 同时成立时，由格式 $\rho^{\delta,\, h}$ 生成的数值解 (1.21)-(1.22) 在 $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ 中收敛到局部模型 ρ^0 的弱熵解 (1.1)，其定义见命题 2。

基于该格式的渐近相容性，我们可以证明数值解从 $\rho^{\delta,h}$ 到 ρ^δ 在 δ上一致收敛，这保证了在 δ 变化时使用格式（1.21）-（1.22）进行数值计算的鲁棒性。此外，我们还可以证明数值解从$\rho^{\delta,h}$ 到 $\rho^{0,h}$ 关于网格尺寸 h一致收敛。文献 [20, 29, 30]将这一性质称为渐近保持。

THEOREM 3。在假设 *1-5* 下，并且 δ 满足条件（*1.33*），当 $h \to 0$时，由格式（*1.21*）-（*1.22*）得到的数值解 $\rho^{\delta,h}$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty) \times \mathbb{R})$ 中收敛到非局部模型（*1.2*）的弱解 ρ^δ，该弱解如命题 *1* 中所定义。此外，关于 $\delta \in$，收敛在 $(0, \delta_0]$ 上一致，其中 δ_0 如（*1.33*）所示：

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\delta\in(0,\delta_0]} \left\|\rho^{\delta,h} - \rho^\delta\right\|_{\mathbf{L}^1(U)} = 0 \quad \text{for any bounded } U \subset [0,+\infty)\times\mathbb{R}. \tag{1.36}$$

我们对上述定理中的收敛率作几点说明。2 和定理3。一方面，格式（1.21）-（1.22）基于分段常数近似，因此其精度预计至多为一阶。另一方面，对于标量守恒律，已知一阶单调格式对不连续解的收敛率可能为 $O(h^{1/2})$。在第3节的数值实验中，我们分别使用光滑初始数据和不连续初始数据对该格式进行测试。结果验证了当 $O(h$取固定整数 $m > 0$时，该格式收敛到局部解的 $\delta = mh$ 收敛率（如定理2所述）；同时也验证了该格式关于 δ 一致收敛到非局部解的 $O(h$收敛率（如定理3所述）。各种极限路径下收敛率的严格分析留待今后研究。

最后，我们还可以得到数值离散的非局部到局部极限，特别是以下一致收敛结果。

THEOREM 4. 在假设 *1-5* 下，对于任意 $h_0 > 0$，我们有

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{h\in(0,h_0]} \left\|\rho^{\delta,h} - \rho^{0,h}\right\|_{\mathbf{L}^1(U)} = 0 \quad \text{for any bounded } U \subset [0,+\infty)\times\mathbb{R}. \tag{1.37}$$

1.4. 关于数值求积权重和数值通量函数的说明。 下面我们对数值求积权重 $\{w_k\}_{0\le k\le m-1}$ 的选取作几点说明。若非局部核 $w_\delta = w_\delta(s)$ 是$\mathbf{C}^1$ 光滑且递减的，则可以将数值求积权重写为

$$w_k = w(\xi_k)\frac{h}{\delta}, \quad \xi_k \in \left[k\frac{h}{\delta}, (k+1)\frac{h}{\delta}\right], \quad k = 0, \cdots, m-1,$$

其中，$\{\xi_k\}_{0\le k\le m-1}$ 可以看作区间 $[0,1]$ 上黎曼和求积的采样点。

假设3中的条件（1.25 ）基本上要求采样点彼此之间不能过于接近，该条件用于推导定理 1中数值解所需的先验估计。为说明（ c 和因子m^{-2} 在（1.25）中的含义，我们以（1.17）中的左端点求积权重为例进行说明。在这种情况下，

$$w_{k-1} - w_k = \frac{h}{\delta}\left[w\left((k-1)\frac{h}{\delta}\right) - w\left(k\frac{h}{\delta}\right)\right] \ge \left(\min_{s\in[0,1]} -w'(s)\right)\left(\frac{h}{\delta}\right)^2 \ge cm^{-2},$$

其中常数 $c = \min_{s\in[0,1]} -w'(s) > 0$。

假设1.26中的条件3 是数值求积权重的归一化条件，对于格式（1.21）-（1.22）与局部模型（1.1）之间的一致性至关重要。为说明违反归一化条件（1.26）时可能存在的风险，考虑 $\delta = mh$ 其中 m 是一个固定的正整数。此时，格式（1.21）-（1.22）可视为局部模型（1.1）的 $m+2$点守恒格式，其数值通量函数为:

$$g_{\text{local}}(\rho_j, \cdots, \rho_{j+m}) = g\left(\rho_j, \rho_{j+1}, \sum_{k=0}^{m-1} w_k \rho_{j+k}, \sum_{k=0}^{m-1} w_k \rho_{j+k+1}\right),$$

其中 g与假设4中相同。设 $\rho_j = \cdots = \rho_{j+m} = \bar{\rho}$，为了使 g_{local}与局部模型（1.1）一致，必须满足

$$g_{\text{local}}(\bar{\rho}, \cdots, \bar{\rho}) = \bar{\rho}\left(1 - \bar{\rho}\sum_{k=0}^{m-1} w_k\right) = \bar{\rho}(1-\bar{\rho}),$$

这要求满足归一化条件（1.26）。相反，如果违反条件（1.26）且$\eta \doteq \sum_{k=0}^{m-1} w_k \neq 1$，数值解将形式上收敛于方程

$$\partial_t \rho(t,x) + \partial_x(\rho(t,x)(1-\eta\rho(t,x))) = 0,$$

而非所需的方程（1.1），其中 $v(\rho) = 1-\rho$。这意味着，对于某些数值求积权重，若不满足归一化条件（1.26），则当 $\delta \to 0$ 和 $h \to 0$ 同时成立时，可能会得到错误的极限解。因此，我们引入以下归一化左端点求积权重:

$$\text{(1.38)} \qquad \text{[Normalized left endpoint]} \quad w_k = \frac{w_\delta(kh)h}{\sum_{k=0}^{m-1} w_\delta(kh)h}, \quad k = 0, \cdots, m-1,$$

并给出以下命题。

PROPOSITION 3. *归一化左端点求积权重（1.38）和精确求积权重（1.19）均满足假设 3，其中条件（1.25）中的常数 c 分别为 $c = \frac{1}{1+w(0)}\min_{s\in[0,1]} -w'(s)$ 和 $c = \min_{s\in[0,1]} -w'(s)$。左端点求积权重满足条件（1.25），其常数为 $c = \min_{s\in[0,1]} -w'(s)$，但不满足归一化条件（1.26）。*

第3节通过数值实验比较了不同数值求积权重的选择。

关于数值通量函数的假设 4，给定速度函数 g，$v(\rho) = 1-\rho$，连续模型（1.2）中的通量函数为 $\rho(1-q)$，它是关于（ρ，q）的二次多项式，且唯一的二次项为 $-\rho q$。因此，假设数值通量函数 g 为二次函数，且其二阶导数满足条件（iii），是合理的。条件（ii）保证格式（1.21）-（1.22）与模型（1.2）的一致性。条件（iv）用于证明在所有假设 1-5下，该格式是单调的，见定理 1。自然会有人提出这样的问题：本文的结果能否推广到更一般的数值通量函数，例如 g 不是二次函数的情形。我们将此类推广的研究留待未来工作。

需要指出的是，式（1.24a）-（1.24c）给出的数值通量函数均满足假设 4。对于两个 Lax-Friedrichs 型数值通量函数（1.24a）和（1.24c），数值黏性常数应满足 $\alpha \geq 2$。

我们还指出，在 $0 < \delta \leq h$的情形下，即非局部视界位于一个空间网格单元内时，有 $q_L = \rho_L$ 且 $q_R = \rho_R$ 由假设3可知。设 g 满足假设4，则局部模型（1.1）的数值通量函数 $g = g(\rho_L,\ \rho_R,\ \rho_L,\ \rho_R)$ 关于 ρ_L 非递减，关于 ρ_R非递增。因此，格式（1.23）是局部模型（1.1）的单调格式。由此，我们得到以下结果。

PROPOSITION 4。在假设*1*、*3*-*5*下，令 $\rho^{\delta,\ h}$ 为格式(1.21)-(1.22) 产生的数值解，且 $\rho^{0,\ h}$ 为格式(1.23)产生的数值解。则有：

$$\rho^{\delta,h} = \rho^{0,h} \quad \text{when} \quad 0 < \delta \leq h.$$

此外，$\rho^{0,\ h}$ 在 $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty) \times \mathbb{R})$ 收敛到局部模型 ρ^0 的弱熵解(1.1)，其定义见命题 *2*。

2. 定理证明。 本节旨在证明我们的主要结果。首先，在第 2.1 节，我们证明数值解的最大值原理。随后，我们在第2.2节给出数值解的单侧 Lipschitz 估计；数值格式（1.21）-（1.22）的单调性以及数值解的总变差估计由此作为推论得到。这两个小节构成了定理 1 的证明。在第 2.3 节，我们令 $h \to 0$，并证明数值解收敛到适当的非局部解或局部解，从而给出定理2和定理 3的证明。在第 2.4 节，我们证明定理 4 关于数值离散的非局部到局部极限。

2.1. 最大值原理。 在本小节中，我们旨在证明定理 1.34 中的最大值原理（1。根据假设 1 和（1.12），初始时刻的数值解 $\{\rho_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$满足 $0 \leq \rho_j^0 \leq 1$ 对所有 $j \in \mathbb{Z}$。然后，可以利用以下引理 1.34 通过归纳法证明最大值原理（4.1）。

LEMMA 4.1. 设定理 *1* 中的所有条件均成立，且 $0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_{j+k}^n \leq \rho_{\max} \leq 1$ 对于 $k = -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ m$。则有

$$\rho_{\min} \leq \mathcal{H}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n, \cdots, \rho_{j+m}^n) \leq \rho_{\max}, \tag{2.1}$$

其中，算子 $\mathcal{H}$ 定义见 (1.21)-(1.22)。

首先，检验由（1.21）-（1.22）定义的格式的单调性。记

$$\theta_j^{n,(i)} = \theta^{(i)}(q_{j-1}^n, q_j^n),\ i = 1,2; \quad \theta_j^{n,(i)} = \theta^{(i)}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n),\ i = 3,4 \quad \text{for} \quad j \in \mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

直接计算可得：

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_{j-1}^n} = \lambda\Big(\theta_j^{n,(1)} + w_0\theta_j^{n,(3)}\Big); \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_j^n} = 1 + \lambda\Big(\theta_j^{n,(2)} - \theta_{j+1}^{n,(1)} + w_1\theta_j^{n,(3)} + w_0\theta_j^{n,(4)} - w_0\theta_{j+1}^{n,(3)}\Big); \tag{2.2b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_{j+1}^n} = \lambda\Big(w_2\theta_j^{n,(3)} + w_1\theta_j^{n,(4)} - \theta_{j+1}^{n,(2)} - w_1\theta_{j+1}^{n,(3)} - w_0\theta_{j+1}^{n,(4)}\Big); \tag{2.2c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_{j+k}^n} = \lambda\Big(w_{k+1}\theta_j^{n,(3)} - w_k\theta_{j+1}^{n,(3)} + w_k\theta_j^{n,(4)} - w_{k-1}\theta_{j+1}^{n,(4)}\Big), \quad k = 2,\cdots,m; \tag{2.2d}$$

其中约定 $w_m = w_{m+1} = 0$。

在（2.2d）中，由于通量对解的非局部依赖，可能出现 $\theta^{n,}{}_{j}{}^{(3)} < 0$， $\theta^{n,}{}_{j}{}^{(4)} < 0$ 而 $\theta^{n,}{}_{j+1}{}^{(3)} = \theta^{n,}{}_{j+1}{}^{(4)} = 0$ 在某点 $j = j_0$处成立，例如，考虑如下黎曼型解：

$$\rho_j^n = 1,\ j \le j_0; \quad \rho_j^n = 0,\ j > j_0.$$

在这种情况下，$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_{j+k}^n} < 0$ 当 $k = 2, \cdots, m-1$。因此，不能通过证明（2.1）由（1.21）-（1.22）构成单调格式来推导（2.1）。这里我们用另一种方法证明（ [24, 26]。

引理 *4.1* 的证明。我们注意到恒等式 $\mathcal{H}(\rho_{\min}, \rho_{\min}, \rho_{\min}, \cdots, \rho_{\min}) = \rho_{\min}$ 因此，我们可以将项 $\mathcal{H}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n, \cdots, \rho_{j+m}^n) - \rho_{\min}$ 写成两部分之和：

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{H}_1 =& \mathcal{H}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n, \rho_{j+2}^n \cdots, \rho_{j+m}^n) - \mathcal{H}(\rho_{\min}, \rho_{\min}, \rho_{j+1}^n, \rho_{j+2}^n, \cdots, \rho_{j+m}^n),\\
\Delta\mathcal{H}_2 =& \mathcal{H}(\rho_{\min}, \rho_{\min}, \rho_{j+1}^n, \rho_{j+2}^n, \cdots, \rho_{j+m}^n) - \mathcal{H}(\rho_{\min}, \rho_{\min}, \rho_{\min}, \rho_{\min} \cdots, \rho_{\min}).
\end{aligned}$$

根据中值定理，

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{H}_1 &= \sum_{k=-1,0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_{j+k}^n}(\tilde{\rho}_{j-1}^n, \tilde{\rho}_j^n, \rho_{j+1}^n, \rho_{j+2}^n \cdots, \rho_{j+m}^n)(\rho_{j+k}^n - \rho_{\min}),\\
\Delta\mathcal{H}_2 &= \sum_{1\le k\le m} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_{j+k}^n}(\rho_{\min}, \rho_{\min}, \tilde{\rho}_{j+1}^n, \tilde{\rho}_{j+2}^n \cdots, \tilde{\rho}_{j+m}^n)(\rho_{j+k}^n - \rho_{\min}),
\end{aligned}$$

其中 $0 \le \rho_{\min} \le \tilde{\rho}_{j+k}^n \le \rho_{\max} \le 1\ \forall k = -1, 0, 1, \cdots, m$。

令我们在2.2a)-(2.2d中令 $\theta^{n,}{}_{j}{}^{(i)}$ 替换为 $\tilde{\theta}^{n,}{}_{j}{}^{(i)}$ 即关于 $\tilde{\rho}_{j+k}^n$。根据假设4，有 $\tilde{\theta}^{n,}{}_{j}{}^{(1)} + \tilde{\theta}^{n,}{}_{j}{}^{(3)} \ge 0$ 从而得到关于 $k = -1$ 在 $\Delta\mathcal{H}_1$ 中的项为非负。此外，假设5 意味着关于 $k = 0$ 在 $\Delta\mathcal{H}_1$ 中的项为非负。对于$\Delta\mathcal{H}_2$，注意到

$$\tilde{\theta}_{j+1}^{n,(3)} = \tilde{\theta}_j^{n,(3)} + \gamma_{23}(\tilde{\rho}_{j+1}^n - \rho_{\min}) \le \tilde{\theta}_j^{n,(3)}, \quad \tilde{\theta}_{j+1}^{n,(4)} = \tilde{\theta}_j^{n,(4)} + \gamma_{24}(\tilde{\rho}_{j+1}^n - \rho_{\min}) \le \tilde{\theta}_j^{n,(4)},$$

由此可得

$$w_{k+1}\tilde{\theta}_j^{n,(3)} - w_k\tilde{\theta}_{j+1}^{n,(3)} + w_k\tilde{\theta}_j^{n,(4)} - w_{k-1}\tilde{\theta}_{j+1}^{n,(4)} \ge (w_{k+1} - w_k)\tilde{\theta}_j^{n,(3)} + (w_k - w_{k-1})\tilde{\theta}_j^{n,(4)} \ge 0,$$

对于 $k = 1, \cdots, m$。因此 $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\rho}_{j+k}^n} \ge 0$ 对于 $k = 1, \cdots, m$。于是我们 deduce that

$$\mathcal{H}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n, \cdots, \rho_{j+m}^n) - \rho_{\min} = \Delta\mathcal{H}_1 + \Delta\mathcal{H}_2 \ge 0.$$

类似地，可以证明上界估计 $\mathcal{H}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n, \cdots, \rho_{j+m}^n) - \rho_{\max} \le 0$。 □

2.2. 单侧 Lipschitz 估计。现在，我们将推导引理 4.2 中数值解的单侧 Lipschitz 估计。由此可推出，格式（1.21）-（1.22）是单调的，并得到引理 4.4 中数值解的全变差估计。定理 1.35）中的总变差递减性质和估计（1 是引理 4.4 的直接推论。

LEMMA 4.2. 假设定理 *1* 中的所有条件均成立，并且 $\{\rho_j^n\}_{j\in\mathbb{Z}}^{n\geq 0}$ 是由格式 (1.21)-(1.22)生成的数值解。数值差分

$$r_j^n = \rho_{j+1}^n - \rho_j^n, \quad j\in\mathbb{Z},\ n\geq 0, \tag{2.3}$$

满足

$$r_j^n \geq -Lh, \quad j\in\mathbb{Z},\ n\geq 0. \tag{2.4}$$

证明。 由格式的定义（1.21)-(1.22)可得

$$r_j^{n+1} = r_j^n + \lambda\big[2g(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n,q_j^n,q_{j+1}^n) - g(\rho_{j-1}^n,\rho_j^n,q_{j-1}^n,q_j^n) - g(\rho_{j+1}^n,\rho_{j+2}^n,q_{j+1}^n,q_{j+2}^n)\big]. \tag{2.5}$$

注意到 g 是一个二次函数，我们可以进行泰勒展开，得到

$$\begin{aligned}
&g(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n,q_j^n,q_{j+1}^n) - g(\rho_{j-1}^n,\rho_j^n,q_{j-1}^n,q_j^n)\\
&\quad= \theta_j^{n,(1)} r_{j-1}^n + \theta_j^{n,(2)} r_j^n + \theta_j^{n,(3)}(q_j^n - q_{j-1}^n) + \theta_j^{n,(4)}(q_{j+1}^n - q_j^n)\\
&\qquad+ \gamma_{13} r_{j-1}^n (q_j^n - q_{j-1}^n) + \gamma_{14} r_{j-1}^n (q_{j+1}^n - q_j^n) + \gamma_{23} r_j^n (q_j^n - q_{j-1}^n) + \gamma_{24} r_j^n (q_{j+1}^n - q_j^n),\\
&g(\rho_{j+1}^n,\rho_{j+2}^n,q_{j+1}^n,q_{j+2}^n) - g(\rho_{j-1}^n,\rho_j^n,q_{j-1}^n,q_j^n)\\
&\quad= \theta_j^{n,(1)}(r_{j-1}^n + r_j^n) + \theta_j^{n,(2)}(r_j^n + r_{j+1}^n) + \theta_j^{n,(3)}(q_{j+1}^n - q_j^n + q_j^n - q_{j-1}^n)\\
&\qquad+ \theta_j^{n,(4)}(q_{j+2}^n - q_{j+1}^n + q_{j+1}^n - q_j^n) + \gamma_{13}(r_{j-1}^n + r_j^n)(q_{j+1}^n - q_j^n + q_j^n - q_{j-1}^n)\\
&\qquad+ \gamma_{14}(r_{j-1}^n + r_j^n)(q_{j+2}^n - q_{j+1}^n + q_{j+1}^n - q_j^n) + \gamma_{23}(r_j^n + r_{j+1}^n)(q_{j+1}^n - q_j^n + q_j^n - q_{j-1}^n)\\
&\qquad+ \gamma_{24}(r_j^n + r_{j+1}^n)(q_{j+2}^n - q_{j+1}^n + q_{j+1}^n - q_j^n),
\end{aligned}$$

其中 $\{\theta_j^{n,(i)} = \theta^{(i)}(q_{j-1}^n,\ q_j^n)\}_{i=1}^2$ 且 $\{\theta_j^{n,(i)} = \theta^{(i)}(\rho_{j-1}^n,\ \rho_j^n)\}_{i=3}^4$ 对于 $j\in\mathbb{Z}$ 和 $n\geq 0$。此外，根据 q_j^n在（1.14）中的定义可得:

$$q_{j+1}^n - q_j^n = \sum_{k=0}^{m-1} w_k r_{j+k}^n.$$

因此，（2.5）可改写为

$$\begin{aligned}
r_j^{n+1} &= \lambda\theta_j^{n,(1)} r_{j-1}^n + \Big(1 + \lambda\theta_j^{n,(2)} - \lambda\theta_j^{n,(1)}\Big) r_j^n - \lambda\theta_j^{n,(2)} r_{j+1}^n\\
&\quad+ \lambda\Big(\theta_j^{n,(3)} + \gamma_{13} r_{j-1}^n + (\gamma_{23} - \gamma_{13}) r_j^n - \gamma_{23} r_{j+1}^n\Big) \sum_{k=0}^{m-1} w_k r_{j+k-1}^n\\
&\quad+ \lambda\Big(\theta_j^{n,(4)} - \theta_j^{n,(3)} + (\gamma_{14} - \gamma_{13}) r_{j-1}^n + (\gamma_{24} - \gamma_{13} - \gamma_{14} - \gamma_{23}) r_j^n - (\gamma_{23} + \gamma_{24}) r_{j+1}^n\Big) \sum_{k=0}^{m-1} w_k r_{j+k}^n\\
&\quad- \lambda\Big(\theta_j^{n,(4)} + \gamma_{14} r_{j-1}^n + (\gamma_{14} + \gamma_{24}) r_j^n + \gamma_{24} r_{j+1}^n\Big) \sum_{k=0}^{m-1} w_k r_{j+k+1}^n.
\end{aligned}$$

在上述表达式中，r_j^{n+1} 表示为 r_{j-1}^n、 $\cdots$、 r_{j+m}^n的线性组合。直接计算可得，项 r_{j-1}^n、 $\cdots$、 r_{j+m}^n 前的系数之和为

$$S = 1 - 2\lambda\big((\gamma_{13} + \gamma_{14}) r_j^n + (\gamma_{23} + \gamma_{24}) r_{j+1}^n\big),$$

其中用到了事实 $\gamma_{13}+\gamma_{14}+\gamma_{23}+\gamma_{24}=-1$。

由于求和结果不等于 1，我们将关于 r_j^n 和r_{j+1}^n的两个二次项拆分，得到如下形式

$$r_j^{n+1}=\sum_{-1\le k\le m} c_{j,k}^n r_{j+k}^n - 2\lambda(\gamma_{13}+\gamma_{14})(r_j^n)^2 - 2\lambda(\gamma_{23}+\gamma_{24})(r_{j+1}^n)^2, \tag{2.6}$$

使得 $\sum_{-1\le k\le m} c_{j,k}^n = 1$。系数 $\{c_{j,k}^n\}_{-1\le k\le m}$ 由下式给出：

$$c_{j,-1}^n = \lambda\theta_j^{n,(1)} + \lambda w_0\Big(\theta_j^{n,(3)} + \gamma_{13}r_{j-1}^n + (\gamma_{23}-\gamma_{13})r_j^n - \gamma_{23}r_{j+1}^n\Big); \tag{2.7a}$$

$$c_{j,0}^n = 1 + \lambda\Big(\theta_j^{n,(2)} - \theta_j^{n,(1)}\Big) + \lambda p_{j,0}^n + 2\lambda(\gamma_{13}+\gamma_{14})r_j^n; \tag{2.7b}$$

$$c_{j,1}^n = -\lambda\theta_j^{n,(2)} + \lambda p_{j,1}^n + 2\lambda(\gamma_{23}+\gamma_{24})r_{j+1}^n; \tag{2.7c}$$

$$c_{j,k}^n = \lambda p_{j,k}^n, \quad k=2,\cdots,m; \tag{2.7d}$$

其中

$$\begin{aligned} p_{j,k}^n =& w_{k+1}\Big(\theta_j^{n,(3)} + \gamma_{13}r_{j-1}^n + (\gamma_{23}-\gamma_{13})r_j^n - \gamma_{23}r_{j+1}^n\Big) \\ &+ w_k\Big(\theta_j^{n,(4)} - \theta_j^{n,(3)} + (\gamma_{14}-\gamma_{13})r_{j-1}^n + (\gamma_{24}-\gamma_{13}-\gamma_{14}-\gamma_{23})r_j^n - (\gamma_{23}+\gamma_{24})r_{j+1}^n\Big) \\ &- w_{k-1}\Big(\theta_j^{n,(4)} + \gamma_{14}r_{j-1}^n + (\gamma_{14}+\gamma_{24})r_j^n + \gamma_{24}r_{j+1}^n\Big), \end{aligned} \tag{2.8}$$

并约定 $w_{-1}=w_m=w_{m+1}=0$。

初始单侧利普希茨条件（1.8）给出 $r_j^0 \ge -Lh$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}$。接下来证明，若（2.4）对任意 $n\ge 0$成立，则对 $n+1$也成立。于是，由归纳法可得（2.4）。

我们使用（ 2 6 2 8 3 5, $c_{j\,k}^n \ge 0$ $k=-1$ 0 $-\lambda\theta_j^{n\,(2)}+$ 。）- $2\lambda\ \gamma_{23}+\gamma_{24}\ r_{j+1}^n \ge 0$ $c_{j\,k}^n \ge 0$ $-1\le k\le m$ $p_{j\,k}^n \ge 0$ （。）。根据假设，我们有，对于，以及，()。要证明，对所有，只需证明，对所有$k=1,\ \cdots,\ m$。根据假设 3-5，可得

$$w_{k+1}\le w_k\le w_{k-1}\le w(0)m^{-1}, \quad w_{k-1}-w_k\ge cm^{-2}, \quad w_k-w_{k+1}\ge cm^{-2},$$

且 $\theta^{n,\ (3)}_{\ j}+\theta^{n,\ j\ (4)}\le -\rho_{\min}$，其中常数 c 与（1.25）中的定义相同，而常数 $\rho_{\min}$ 与（1.8）中的定义相同。因此我们推得

$$\begin{aligned} p_{j,k}^n \ge& -2w(0)m^{-1}[(\gamma_{13}+\gamma_{14})r_j^n + (\gamma_{23}+\gamma_{24})r_{j+1}^n] + cm^{-2}(\theta_j^{n,(3)}+\theta_j^{n,(4)}) \\ \ge& -2w(0)m^{-1}Lh + cm^{-2}\rho_{\min} \ge m^{-2}(c\rho_{\min} - 2w(0)\delta L) \ge 0, \end{aligned}$$

给定 $0<\delta\le\delta_0=\frac{c\rho_{\min}}{2Lw\ \theta()。}$

现在，系数 $\{c_{j,k}^n\}_{-1\le k\le m}$ 均为非负数，且系数之和 $\sum_{-1\le k\le m} c^n_{j,\ k}=1$。因此，$r_j^{n+1}$ 是 r_{j-1}^n，r_j^n，r_{j+1}^n，$\cdots$，r_{j+m}^n的凸组合，再加上非负的二次项 $-2\lambda(\gamma_{13}+\gamma_{14})(r_j^n)^2-2\lambda(\gamma_{23}+\gamma_{24})(r_{j+1}^n)^2$。因此我们有：

$$\inf_{j\in\mathbb{Z}} r_j^{n+1} \ge \inf_{j\in\mathbb{Z}} r_j^n \ge -Lh,$$

至此，证明完成。 □

根据引理 4.2，经过更细致的分析，可得到与熵条件（1.10）对应的以下更精确估计。

LEMMA 4.3. 假设定理*1* 中的所有条件均成立，并且 $0 < h < h_0$，其中 $h_0 > 0$ 仅依赖于 $1 - \lambda \sum_{i=1}^{4} \left\|\theta^{(i)}\right\|_{\infty}$ 和 $\frac{c\rho_{\min}}{2Lw\ 0()} - \delta$。我们有：

$$L^n \le \frac{1}{\frac{1}{L^0} + 2n\tau} \le \frac{1}{2n\tau}, \quad n \ge 1, \tag{2.9}$$

其中

$$L^n \triangleq \sup_{j\in\mathbb{Z}} \max\left\{-\frac{r_j^n}{h}, 0\right\}, \quad n \ge 0. \tag{2.10}$$

证明。 我们仍从（2.6）开始。对于 $k \neq 0$，1，我们使用如下估计

$$c_{j,k}^n r_{j+k}^n \ge -c_{j,k}^n L^n h. \tag{2.11}$$

对于 $k = 0$ 和 $k = 1$，我们考虑以下二次函数：

$$b_0(r_j^n) \doteq c_{j,0}^n r_j^n - 2\lambda(\gamma_{13} + \gamma_{14})(r_j^n)^2, \quad b_1(r_{j+1}^n) \doteq c_{j,1}^n r_{j+1}^n - 2\lambda(\gamma_{23} + \gamma_{24})(r_{j+1}^n)^2,$$

分别。可以验证

$$\begin{aligned} b_0'(r_j^n) &= c_{j,0}^n - 4\lambda(\gamma_{13} + \gamma_{14}) r_j^n \ge c_{j,0}^n + 4\lambda(\gamma_{13} + \gamma_{14}) L^n h \ge C_0 - 4\lambda L h, \\ b_1'(r_{j+1}^n) &= c_{j,1}^n - 4\lambda(\gamma_{23} + \gamma_{24}) r_{j+1}^n \ge c_{j,1}^n - 4\lambda(\gamma_{23} + \gamma_{24}) L^n h \ge C_1 - 4\lambda L h, \end{aligned}$$

当 r_j^n，$r_{j+1}^n \ge -L^n h$时，其中常数 $C_0 > 0$ 仅依赖于 $1 - \lambda \sum_{i=1}^{4} \left\|\theta^{(i)}\right\|_{\infty}$，常数 $C_1 > 0$ 仅依赖于 $\frac{c\rho_{\min}}{2Lw\ 0()} - \delta$。因此，存在仅依赖于$1 - \lambda \sum_{i=1}^{4} \left\|\theta^{(i)}\right\|_{\infty}$ 和$\frac{c\rho_{\min}}{2Lw\ 0()} - \delta$的 $h_0 > 0$，使得只要 $h < h_0$，便有$b_0'(r_j^n) \ge 0$，$b_1'(r_{j+1}^n) \ge 0$。在这种情况下，我们有

$$b_0(r_j^n) \ge -c_{j,0}^n L^n h - 2\lambda(\gamma_{13} + \gamma_{14})(L^n h)^2, \quad b_1(r_{j+1}^n) \ge -c_{j,1}^n L^n h - 2\lambda(\gamma_{23} + \gamma_{24})(L^n h)^2. \tag{2.12}$$

将2.11）对 $k \neq 0$、1 相加，并将2.12）对 $k = 0$、*1* 相加，再注意到 $\gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{23} + \gamma_{24} = -1$，即可得到：

$$r_j^{n+1} \ge -\left(\sum_{-1\le k\le m} c_{j,k}^n\right) L^n h + 2\lambda(L^n h)^2 = -L^n h + 2(L^n)^2 h\tau,$$

由此得到 $L^{n+1} \le L^n - 2(L^n)^2\tau$。然后由归纳法可得2.9）。 □

现在回过头来检验格式1.21）—（1.22）的单调性。利用推导得到的单侧 Lipschitz 估计2.4），并进行与引理4.2 证明中类似的计算，可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_{j+k}^n} &= \lambda\left(w_{k+1}\theta_j^{n,(3)} - w_k\theta_{j+1}^{n,(3)} + w_k\theta_j^{n,(4)} - w_{k-1}\theta_{j+1}^{n,(4)}\right) \\ &\ge \lambda m^{-2}(c\rho_{\min} - 2w(0)\delta L) \ge 0, \end{aligned}$$

当 $k = 2$、$\cdots$、m时，格式（1.21）-（1.22）关于其各个自变量均为单调格式。直接推论可知，它是总变差不增（TVD）的。因此，我们有以下引理。

LEMMA 4.4. 在与引理 *4.2* 相同的条件下，格式 $\{\rho_j^n\}_{j\in\mathbb{Z}}^{n\geq 0}$ 生成的数值解 （1.21）-（1.22）满足：

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|r_j^n|\leq\sum_{j\in\mathbb{Z}}|r_j^0|\leq \mathrm{TV}(\rho_0),\quad n\geq 0; \tag{2.13}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_j^{n+1}-\rho_j^n|\leq\lambda\|\nabla g\|_\infty\sum_{j\in\mathbb{Z}}|r_j^n|\leq \mathrm{TV}(\rho_0),\quad n\geq 0. \tag{2.14}$$

引理的证明与 [35] 中针对标量守恒律单调格式的证明类似。总变差估计（1.35）可由上述引理立即得到。

2.3. 收敛性。 本小节将给出定理 2 和定理 3的证明。回顾一下，数值解定义如下：

$$\rho^{\delta,h}(t,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho_j^n\mathbf{1}_{\mathcal{C}_j\times\mathcal{T}^n}(t,x), \tag{2.15}$$

其中 $\mathcal{C}_j=(x_{j-1/2},\ x_{j+1/2})\ \forall j\in\mathbb{Z}$ 且 $\mathcal{T}^n=(t^n,\ t^{n+1})\ \forall n\geq 0$。

定理 2 的证明。考虑数值解族$\{\rho^{\delta,h}\}_{0<\delta\leq\delta_0,0<h<1}$，其中$\delta_0$ 如（1.33）所示。定理 1 给出了 $\rho^{\delta,h}$ 的先验 $\mathbf{L}^\infty$ 估计和总变差估计，因此数值解族在 $\mathbf{BV}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ 中一致有界。由此，它在 $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}$ 范数下相对紧（见 [19]），并且存在一个序列 $\{\rho^{\delta_l,h_l}\}$，在 $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ 中收敛到极限函数 ρ^*，当 $\delta_l\to 0,h_l\to 0$ 同时趋于极限时。注意到熵解的唯一性，为了证明当 $\delta\to 0$ 和 $h\to 0$ 沿任意路径趋于极限时，$\rho^{\delta,h}$ 收敛，只需证明 ρ^* 满足弱形式（1.9）和熵条件（1.10）。

对于任意检验函数 $\phi\in\mathbf{C}_{\mathrm{c}}^1([0,+\infty)\times\mathbb{R})$，记 $\phi_j^n=\phi(t^n,x_j)$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}$和 $n\geq 0$成立。将格式 (1.21)-(1.22) 乘以 $\phi_j^n h$，对所有 $j\in\mathbb{Z}$和 $n\geq 0$求和，并应用分部求和，得到：

$$h\tau\sum_{n\geq 1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{\phi_j^n-\phi_j^{n-1}}{\tau}\rho_j^n+h\tau\sum_{n\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{h}g(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n,q_j^n,q_{j+1}^n)+h\sum_{j\in\mathbb{Z}}\phi_j^0\rho_j^0=0. \tag{2.16}$$

当 $h\to 0$ 时，根据关于 ϕ 的假设，显然可得：

$$h\sum_{j\in\mathbb{Z}}\phi_j^0\rho_j^0\to\int_{\mathbb{R}}\rho_0(x)\phi(0,x)\,dx, \tag{2.17}$$

$$h\tau\sum_{n\geq 1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{\phi_j^n-\phi_j^{n-1}}{\tau}\rho_j^n\to\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\rho^*(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,dxdt. \tag{2.18}$$

我们需要证明：

$$h\tau\sum_{n\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{h}g(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n,q_j^n,q_{j+1}^n)\to\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\rho^*(t,x)v(\rho^*(t,x))\partial_x\phi(t,x)\,dxdt.$$

利用总变差估计（2.13），可得

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|g(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n,q_j^n,q_{j+1}^n)-\rho_j v(q_j^n)|=\sum_{j\in\mathbb{Z}}|g(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n,q_j^n,q_{j+1}^n)-g(\rho_j^n,\rho_j^n,q_j^n,q_j^n)|$$

$$\leq\|\nabla g\|_\infty\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_{j+1}^n-\rho_j^n|+|q_{j+1}^n-q_j^n|\leq 2\|\nabla g\|_\infty \mathrm{TV}(\rho_0), \tag{2.19}$$

and

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_j v(q_j^n)-\rho_j v(\rho_j^n)|\leq\sum_{j\in\mathbb{Z}}|q_j^n-\rho_j^n|\leq\sum_{k=0}^{m-1}w_k\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_{j+k}^n-\rho_j^n|$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{m-1}kw_k\right)\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_{j+1}^n-\rho_j^n|\leq\frac{mw(0)}{2}\mathrm{TV}(\rho_0).$$

因此，求和之间的差

$$\left|h\tau\sum_{n\geq0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{h}g(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n,q_j^n,q_{j+1}^n)-h\tau\sum_{n\geq0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{h}\rho_j^n v(\rho_j^n)\right|$$

$$\leq C(\phi)\left(2\|\nabla g\|_\infty\mathrm{TV}(\rho_0)h+\frac{w(0)}{2}\mathrm{TV}(\rho_0)\delta\right)\to 0,$$

为 $\delta\to 0h\to 0$，其中 $C(\phi)>0$ 是一个仅依赖于 ϕ 的常数。接着我们可以令 lim it

$$h\tau\sum_{n\geq0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{h}\rho_j^n v(\rho_j^n)\to\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\rho^*(t,x)v(\rho^*(t,x))\partial_x\phi(t,x)\,dxdt$$

如 $h\to 0$ 利用 $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}$ 收敛性，从 $\rho^{\delta,\,h}$ 到 ρ^*，以及 **(1.34)** 中给出的先验 $\mathbf{L}^\infty$ 有界性，便可推出 ρ^* 满足 (1.9)。

对于熵条件，考虑通过线性插值而非按 (2.15) 中定义的分片常数重构构造的数值解 $\tilde{\rho}^{\delta,\,h}$。根据引理 4.3，$\tilde{\rho}^{\delta,\,h}$ 满足单侧 Lipschitz 估计：

$$-\frac{\tilde{\rho}^{\delta,h}(t,y)-\tilde{\rho}^{\delta,h}(t,x)}{y-x}\leq\frac{1}{2t}\quad\forall x\neq y\in\mathbb{R},\,t>0. \tag{2.20}$$

注意到 $\tilde{\rho}^{\delta,\,h}$ 逐点收敛到同一个极限函数 ρ^*，我们可以证明 ρ^* 满足 Oleinik 熵条件（1.10），绕过了对（2.20）取极限。 □

为证明定理 3，我们先证明以下引理。

LEMMA 4.5. *在假设 1-5 以及 δ 满足条件 (1.33) 的情况下，当 $\delta\to\delta_*>0$ 和 $h\to 0$时，由格式 (1.21)-(1.22) 得到的数值解 $\rho^{\delta,h}$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ 中收敛于命题 1 中定义的非局部 LWR 模型 (1.2) 的弱解 ρ^{δ_*}。*

证明。与定理 2 的证明类似，在取极限 $\delta\to\delta_*$ 和 $h\to 0$时，存在一个序列 $\{\rho^{\delta_l,h_l}\}$ 收敛到极限函数 ρ^{**}，并且在 $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}$ 范数下有 $\delta_l\to\delta_*$，$h_l\to 0$。

注意到命题 1 已经给出了解的唯一性，因此我们只需证明极限函数 ρ^{**} 满足弱形式（1.6）。

按照定理 2证明中的类似计算，对于 ρ^{**}，我们有 (2.16)-(2.18)。但这里我们只使用 (2.19) 以及收敛性：

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n=0}^{\infty} q_j^n \mathbf{1}_{\mathcal{C}_j\times\mathcal{T}^n}(t,x) \to \int_0^{\delta} \rho^{\delta,h}(t,x+s)w_\delta(s)\,ds, \tag{2.21}$$

在 $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}$ 范数下。(2.21) 的证明与 [5], 中的证明类似，这里省略细节。于是有

$$\begin{aligned} &h\tau\sum_{n\geq 0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{h}g(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n,q_j^n,q_{j+1}^n)\\ &\quad\to\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\rho^{**}(t,x)v\left(\int_0^{\delta}\rho^{**}(t,x+s)w_\delta(s)\,ds\right)\partial_x\phi(t,x)\,dxdt, \end{aligned}$$

这意味着 ρ^{**} 满足 (1.6)。 □

现在给出定理 3的证明。

定理 3的证明。对于任意有界集 $U\subset[0,+\infty)\times\mathbb{R}$，假设 (1.36) 不成立，则存在一个 δ_l 序列和 h_l，其中 $\delta_l\in(0,\delta_0]$ 且 $h_l\to 0$ 当 $l\to\infty$时趋于 $\varepsilon>0$，使得

$$\left\|\rho^{\delta_l,h_l}-\rho^{\delta_l}\right\|_{\mathbf{L}^1(U)}\geq\varepsilon.$$ □

通过适当选取子列，不妨设 $\delta_l\to\delta_*\in[0,\delta_0]$。若 $\delta_l\to 0$，则 ρ^{δ_l,h_l} 和 ρ^{δ_l} 均收敛到 ρ^0；若 $\delta_l\to\delta_*>0$，由引理 4.5， $\rho^{\delta_l,h_l}\to\rho^{\delta_*}$，并对连续解应用相同的论证，可得 $\rho^{\delta_l}\to\rho^{\delta_*}$。两种情况下均会导致矛盾。

2.4. 数值离散的局部极限。现在给出定理4的证明。

定理4的证明。对于任意有界集 $U\subset[0,+\infty)\times\mathbb{R}$，假设（1.37）不成立，则存在一个 δ_l 和 h_l 序列，其中 $h_l\in(0,h_0]$ 且 $\delta_l\to 0$ 当 $l\to\infty$时，并且 $\varepsilon>0$，使得

$$\left\|\rho^{\delta_l,h_l}-\rho^{0,h_l}\right\|_{\mathbf{L}^1(U)}\geq\varepsilon.$$

通过适当选取子序列，不妨设 $h_l\to h_*\in[0,h_0]$。若 $h_l\to 0$，则 ρ^{δ_l,h_l} 和 ρ^{0,h_l}均收敛至 ρ^0；若 $h_l\to h_*>0$，由命题 4 可知，当 l 足够大时，有 $\rho^{\delta_l,h_l}=\rho^{0,h_l}$。两种情形均导出矛盾。 □

3. 数值实验。本节通过若干数值实验测试所提出的数值格式 (1.21)-(1.22)，以展示已建立的结果。在实现格式 (1.21)-(1.22) 时，数值通量函数 g 选自 (1.24a)-(1.24c) 中给出的函数，数值求积权重 $\{w_k\}_{0\leq k\leq m-1}$ 选自 (1.17)-(1.38)-(1.19) 中给出的权重。我们固定 CFL 比 $\lambda=0.25$。对于 Lax-Friedrichs 型数值通量函数 (1.24a) 和 (1.24c)，我们固定数值黏性常数 $\alpha=2$。除最后一组实验外，我们均采用线性递减核 $w_\delta(s)=\frac{2}{\delta^2}(\delta-s)$。假设 $\delta=mh$，其中 m 为正整数，则根据 (1.17)-(1.38)-(1.19) 计算得到的线性递减核数值求积权重分别为

- (Left endpoint) $w_k = \frac{2(m-k)}{m^2}$ for $0 \le k \le m-1$, with $\sum_{k=0}^{m-1} w_k = 1 + \frac{1}{m}$;
- (Normalized left endpoint) $w_k = \frac{2(m-k)}{m(m+1)}$ for $0 \le k \le m-1$, with $\sum_{k=0}^{m-1} w_k = 1$;
- (Exact quadrature) $w_k = \frac{2(m-k)-1}{m^2}$ for $0 \le k \le m-1$, with $\sum_{k=0}^{m-1} w_k = 1$.

速度函数选为 $v(\rho) = 1 - \rho$。采用两组初始数据 ρ_0，其中一组为钟形曲线：

$$\rho_0(x) = 0.4 + 0.4\exp\big(-100(x-0.5)^2\big), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

而另一个表示黎曼数据：

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_L, & x < 0.5 \\ \rho_R, & x > 0.5 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

我们取 $\rho_L = 0.1$ 和 $\rho_R = 0.6$ 用于所有实验。数值解展示在空间域 $x \in [0,1]$ 和时间区间 $t \in [0,1]$ 内，尽管数值计算是在更大的空间域上进行的，并在两侧采用常值延拓。在前三个实验中，我们考察具有不同数值求积权重的格式（1.21)-(1.22)的渐近相容性和一致数值收敛。在最后一个实验中，我们测试采用不同非局部核的格式。

实验 1. 我们首先展示使用 Lax-Friedrichs 数值通量函数 (1.24a) 和不同数值求积权重计算得到的数值解 $\rho^{\delta,h}$。对于每组初始数据和每组数值求积权重，我们在 $\delta = 0.005, h = 0.001$ 下计算数值解 $\rho^{\delta,h}$，并绘制其在选定时刻 $t = 0$、0.5、1 的快照。此外，将时刻 $t = 1$ 的数值解 $\rho^{\delta,h}$ 的快照与局部模型 (1.1) 的解 ρ^0 进行比较。在本实验中，由于解析解并非总是可得，我们也对局部解 ρ^0 进行数值计算。数值计算在具有 $h = 0.0002$的细网格上进行，并使用 Lax-Friedrichs 格式求解 (1.1)，其数值通量函数为

$$g_{\text{local}}(\rho_L, \rho_R) = \frac{1}{2}(\rho_L v(\rho_L) + \rho_R v(\rho_R)) + \frac{\alpha}{2}(\rho_L - \rho_R), \tag{3.3}$$

即（1.24a）的局部对应模型。局部解的快照 ρ^0 在时刻 $t = 1$ 以虚线绘出。见图 3.1。

对于钟形初始数据，从图3.1 上排可以看出，非局部模型的数值解保留了初始数据的光滑性，而局部解则形成了激波。在时刻 $t = 1$，采用归一化左端点求积权重和精确求积权重计算得到的非局部模型数值解与局部解接近，尤其是在远离局部解激波的区域。这意味着当 $\rho^{\delta,h}$ 且 δ，h 较小时，数值解能很好地逼近局部解 ρ^0，这验证了定理2的结论。我们还从图 3.1 左上图中观察到，在时刻 $t = 1$，采用左端点求积权重计算得到的非局部模型数值解与局部解差异很大。尽管在时刻 $t = 1$，非局部模型的数值解仍近似于一个激波剖面，但激波位置不正确。三组数值求积权重的比较凸显了数值求积权重的归一化条件（1.26）的重要性。

对于黎曼初始数据，局部解 ρ^0 是以恒定速度 $v = 1 - (\rho_L + \rho_R) = 0.3$传播的行波。我们从图 3.1 的底行可以观察到，数值

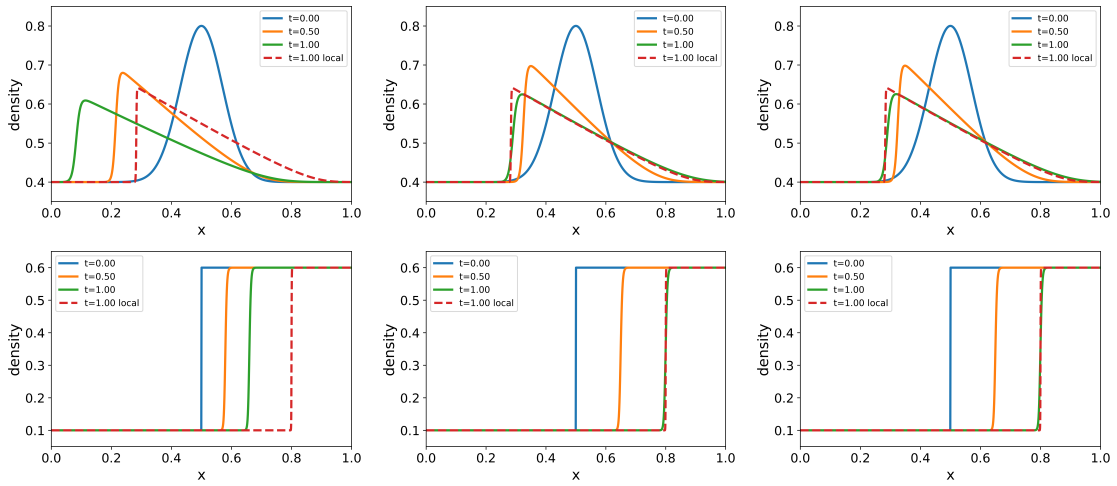

图 3.1：实验 1：钟形初始数据（上）和黎曼初始数据（下）对应的计算解快照，其中分别采用左端点求积权重（左）、归一化左端点求积权重（中）和精确求积权重（右）。

采用归一化左端点求积权重和精确求积权重计算得到的非局部模型解，在时刻 $t = 1$与局部解接近。与此同时，与局部解的不连续性不同，非局部解因非局部效应而变得平滑。我们还从图3.1 左下图观察到，采用左端点求积权重计算得到的非局部模型数值解在时刻 $t = 1$与局部解有很大差异。尽管前者在时刻 $t = 1$仍近似于黎曼数据，但从 $\rho_L = 0.1$ 到 $\rho_R = 0.6$ 的跳跃位置并不正确。此比较再次凸显了归一化条件（1.26）对于数值求积权重的重要性。

实验 2。接下来，我们通过绘制 $\left\|\rho^{\delta,h} - \rho^0\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 与 $\delta \propto h \to 0$，检验格式 (1.21)-(1.22) 的渐近相容性。我们取 $\delta = mh$，其中 $m = 1$、2、5，且 $h = 0.01 \times 2^{-l}$ 取$l = 0$、1、2、3，并使用 Lax-Friedrichs 数值通量函数 (1.24a) 和不同的数值求积权重计算数值解 $\rho^{\delta,h}$。局部解 ρ^0 在细网格上通过对方程 (1.1) 使用 Lax-Friedrichs 格式和数值通量函数 (3.3) 进行数值求解，其中 $h = 0.01 \times 2^{-5}$。对于每组初始数据和每组数值求积权重，我们通过将 $\rho^{\delta,h}$ 插值到计算 ρ^0 所用的细网格上，计算 $\mathbf{L}^1$ 误差 $\left\|\rho^{\delta,h} - \rho^0\right\|_{\mathbf{L}^1}$，并在双对数坐标中绘制 $\left\|\rho^{\delta,h} - \rho^0\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 相对于 h^{-1} 的图像，其中 $\delta = h$, $\delta = 2h$，且 $\delta = 5h$ 以不同颜色表示。我们还绘制了一条斜率为 -1 的虚线，以表示线性收敛率。结果见图 3.2。

我们从图3.2 中观察到：对于归一化左端点求积权重和精确求积权重，误差 $\left\|\rho^{\delta,\,h} - \rho^0\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 相对于 h 呈线性衰减率，初始数据和 $\delta = mh$ 分别对应 $m = 1$、2、5。这意味着 $\rho^{\delta,\,h}$ 沿着极限路径 ρ^0 收敛至 $\delta = mh \to 0$，其中 $m = 1$、2、5，这验证了定理2的结论。此外，数值结果表明，对于特定的初始数据和极限路径，收敛为一阶。相比之下，对于左端点数值求积权重，

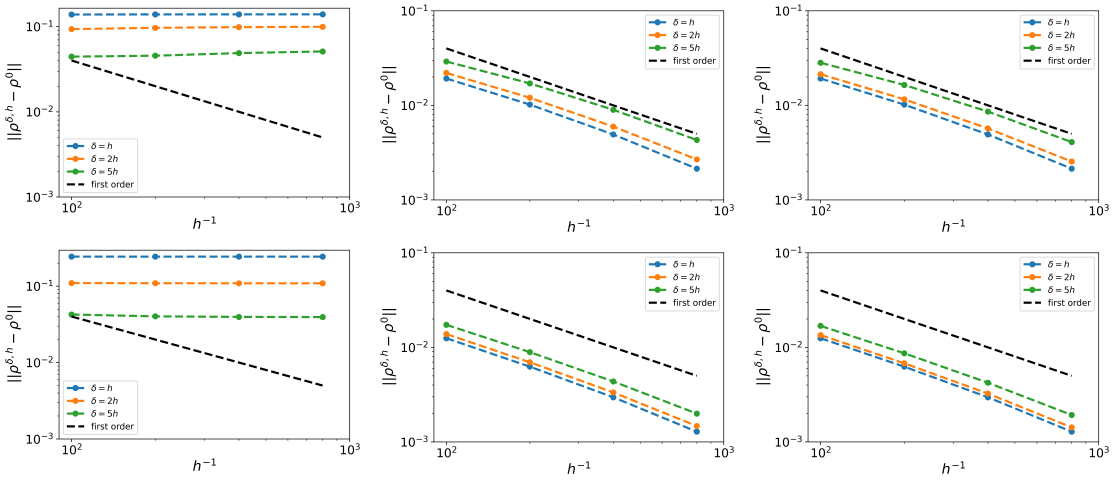

图 3.2：实验 2：钟形初始数据（上）和黎曼初始数据（下）对应的左端点求积权重（左）、归一化左端点求积权重（中）和精确求积权重（右）下，从 $\rho^{\delta,\,h}$ 到 ρ^0 的收敛。

误差 $\left\|\rho^{\delta,\,h}-\rho^0\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 停滞在 10^{-1} 的尺度上，初始数据和 $\delta=mh$ 分别对应 $m=1$，2、5。这是由于当 $\rho^{\delta,\,h}$ 收敛到错误解，进一步凸显了通过归一化条件（1.26）实现渐近相容性的重要性。

实验 3。现在，我们通过绘制不同 δ 取值下的 $\left\|\rho^{\delta,\,h}-\rho^{\delta}\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 随 $h\to 0$ 的变化，来检验格式 (1.21)-(1.22) 关于 δ 的一致收敛。对于 $l=0$，我们取 $\delta=0.01\times 2^{-l}$，其中 $l=0$ 为 1、2；对于 $l=0$，我们取 $h=0.01\times 2^{-l}$，其中 $l=0$ 为 1、2、3，并使用 Lax-Friedrichs 数值通量函数 (1.24a) 和不同的数值求积权重计算数值解 $\rho^{\delta,\,h}$。参考解 ρ^{δ} 使用相同的格式，在具有 $h=0.01\times 2^{-5}$ 的细网格上进行数值求解。对于每种初始数据和每组数值求积权重，我们将 $\rho^{\delta,\,h}$ 插值到细网格上，计算 $\mathbf{L}^1$ 误差 $\left\|\rho^{\delta,\,h}-\rho^{\delta}\right\|_{\mathbf{L}^1}$，并在双对数坐标中绘制 $\left\|\rho^{\delta,\,h}-\rho^{\delta}\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 关于 h^{-1} 的图，其中 $\delta=0.01$、$\delta=0.005$ 和 $\delta=0.0025$ 用不同颜色表示。此外还给出了斜率为 -1 的虚线。结果见图 3.3。

从图 3.3 可以看出，对于归一化左端点求积权重和精确求积权重，无论初始数据如何，也无论 δ 取何值，误差 $\left\|\rho^{\delta,h}-\rho^{\delta}\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 都会随着 h 呈线性衰减。此外，$\left\|\rho^{\delta,h}-\rho^{\delta}\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 关于 h^{-1} 的图像在 $\delta=0.01$, $\delta=0.005$ 和 $\delta=0.0025$ 下几乎没有变化。这意味着，当 $h\to 0$ 趋于 δ 时，$\rho^{\delta,\,h}$ 关于 ρ^{δ} 一致收敛，这验证了定理 3 的结论。此外，数值结果表明，对于特定的初始数据和参数 δ，收敛是一阶的。相比之下，对于左端点数值求积权重，无论初始数据如何，也无论 δ 取何值，当 $h\geq\delta$ 时，误差 $\left\|\rho^{\delta,h}-\rho^{\delta}\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 停滞在 10^{-1} 的量级。这可能是因为，当 δ 较小时，ρ^{δ} 能很好地近似 ρ^0；而当 $h\geq\delta$ 且 ρ^0 时，$\rho^{\delta,h}=\rho^{0,h}$ 并不是对 ρ^0 的相容数值近似。我们还观察到，在每种情况下，当 $h<\delta$ 时误差都会衰减。然而，对于任意固定的网格尺寸 h，当 δ 从 0.01 减小到 0.0025 时，误差会增大。由此可以推断，当 $h\to 0$ 时，从 $\rho^{\delta,h}$ 到 ρ^{δ} 的收敛将会变慢，并且

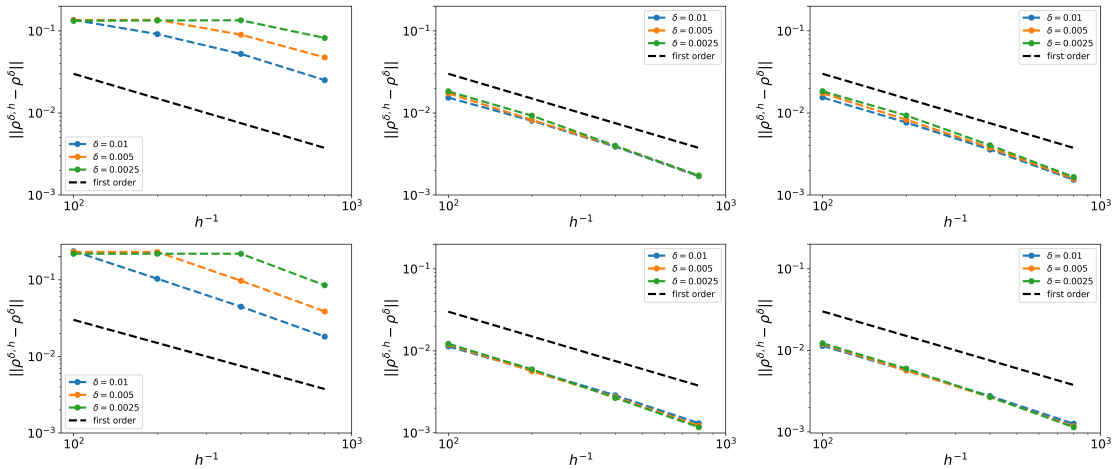

图 3.3：实验 3：对于钟形初始数据（上）和黎曼初始数据（下），对应左端点求积权重（左）、归一化左端点求积权重（中）和精确求积权重（右）时，从 $\rho^{\delta,h}$ 到 ρ^{δ} 的收敛。

随着 $\delta \to 0$，一致收敛无法成立，这再次表明归一化条件（1.26）对于格式（1.21）-（1.22）的一致收敛至关重要。

实验 4。最后，我们测试采用不同非局部核的格式 (1.21)-(1.22)。除之前考虑的线性递减核外，我们还使用指数核 $w_\delta(s) = \frac{e^{-\frac{s}{\delta}}}{\delta(1-e^{-1})}$ 和常数核 $w_\delta(s) = \frac{1}{\delta}$，并采用精确求积权重 (1.19)。我们取 $\delta = mh$，其中 $m = 1$、2、5，且 $h = 0.01 \times 2^{-l}$，其中 $l = 0$、1、2、3，并使用 Lax-Friedrichs 数值通量函数 (1.24a) 和不同的数值求积权重计算数值解 $\rho^{\delta,h}$。局部解 ρ^0 通过在细网格上数值求解得到，其中 $h = 0.01 \times 2^{-5}$；求解方程 (1.1) 时采用 Lax-Friedrichs 格式及数值通量函数 (3.3)。对于每种初始数据和每种非局部核，我们计算 $\mathbf{L}^1$ 误差 $\left\|\rho^{\delta,h} - \rho^0\right\|_{\mathbf{L}^1}$。再次给出了斜率为 -1 的虚线。结果见图 3.4。

我们从图 3.4 中观察到：对于这三个非局部核，误差 $\left\|\rho^{\delta,h} - \rho^0\right\|_{\mathbf{L}^1}$ 关于 h，在两组初始数据及所有情形下均具有线性衰减率 $\delta = mh$ 当 $m = 1$、2、5时。此外，三个非局部核对应的图几乎没有差异。对于线性递减核和指数核，收敛结果验证了定理 2的结论。对于常数核，它不满足 $w = w_\delta(s)$ 严格递减的条件，并且 1.25不成立，因为 $w_{k-1} - w_k = 0$ 对于所有 $k = 1, \cdots, m-1$。在这种情况下，定理 1 证明中所采用的分析无法对数值解给出必要的估计，但数值结果表明，定理 2 的结论可能仍然成立。

4. 结论与未来工作。本文研究了用于求解非局部 LWR 模型（1.21）-（1.22）的有限体积数值格式（1.2），其中参数 δ 用于衡量信息交换的范围。一个重要发现是，基于数值分析和计算实验，某些数值求积权重在给定 $\delta > 0$ 的情况下能够提供一致的近似，但可能使格式（1.21）-（1.22）

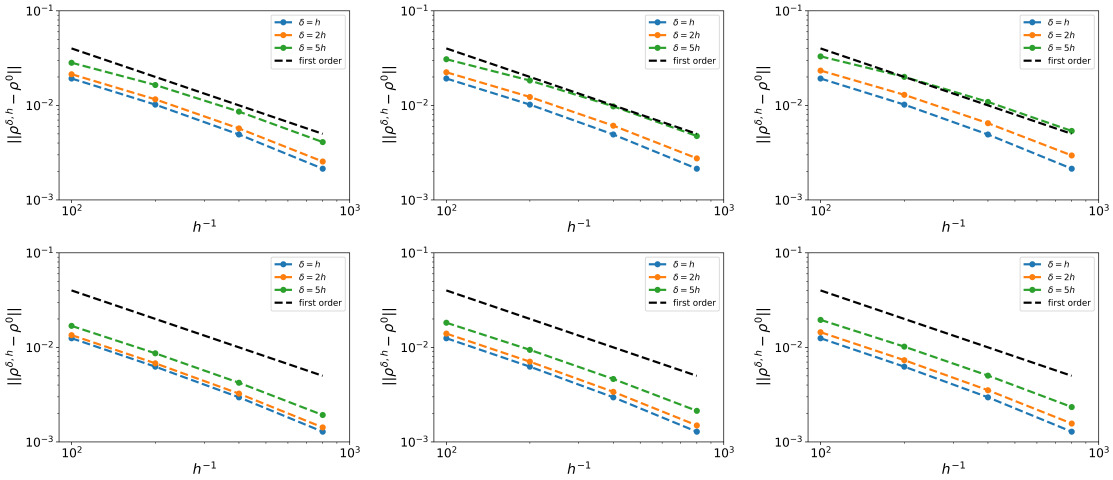

图 3.4：实验 4：钟形初始数据（上方）和黎曼初始数据（下方）对应线性递减核（左侧）、指数核（中间）和常数核（右侧）时，从 $\rho^{\delta,\ h}$ 到 ρ^0 的收敛。

与非局部模型（1.2）的局部极限（1.1）之间在 $\delta \to 0$ 且 $h \to 0$时保持一致。通过恰当选取数值求积权重，我们能够在合理假设下证明：当 $\delta > 0$ 固定且 $h \to 0$时，非局部模型的数值解收敛到该非局部模型的连续介质解；而当 $\delta \to 0$ 且 $h \to 0$ 同时成立时，数值解则收敛到局部连续介质模型（1.1）的熵解。也就是说，这类格式与其局部极限渐近相容。由于当 δ 的取值处于适当范围内时具有一致收敛性，我们能够证明，这些渐近相容格式在 δ 变化时仍可提供稳健的数值模拟。

我们建立的结果基于定理 1中给出的数值解先验估计，并依赖于上述假设。正如计算实验所示，数值求积权重的归一化条件对于格式（1.21）-（1.22）的渐近相容性至关重要。实验还表明，本文结果可能推广到更一般的非局部核和数值通量函数情形。也有可能对更一般的速度函数 $v = v(\rho)$（而非本文采用的线性速度函数 $v(\rho)) \quad = 1 - \rho$以及可能具有负跳跃的更一般初始数据建立这些结果。此外，结合数值解的先验界和精确解的已知估计，可以在连续解正则性满足适当条件的前提下推导先验误差估计。这些问题以及非局部交通流模型的进一步推广和应用，将是未来研究的主题。

参考文献

[1] A. Aggarwal, R. M. Colombo, and P. Goatin, *Nonlocal systems of conservation laws in several space dimensions* 53 2015 963 983 ,SIAM 数值分析杂志, ( ), 第 – 页。

[2] P. Amorim, R. M. Colombo, and A. Teixeira, *On the numerical integration of scalar nonlocal conservation*

laws, ESAIM：数学建模与数值分析, 49 (2015), 第 19–37 页。[3] F. Berthelin, , P. Goatin, and and, *Regularity results for the solutions of a non-local model of traffic flow*, 离散与连续动力系统 A辑, 39 (2019), 第 3197–3213 页。[4] F. Betancourt, R. Bürger, K. H. Karlsen, and E. M. Tory, *On nonlocal conservation laws modelling sedimentation* 24 2011 855 , 非线性, ( ), 第 页。[5] S. Blandin and P. Goatin, *Well-posedness of a conservation law with non-local flux arising in traffic flow modeling* 132 2016 217 241 , 数值数学, ( ), 第 – 页。[6] Y. Brenier and S. Osher, *The discrete one-sided lipschitz condition for convex scalar conservation laws*, SIAM 数值分析杂志, 25 (1988), 第 8–23 页。[7] A. Bressan and W. Shen, *Entropy admissibility of the limit solution for a nonlocal model of traffic flow*, arXiv 预印本 arXiv:2011.05430, (2020)。[8] , *On traffic flow with nonlocal flux: a relaxation representation*, 理性力学与分析档案, 237 (2020), 第 1213–1236 页。[9] R. Bürger, P. Goatin, D. Inzunza, and L. M. Villada, *A non-local pedestrian flow model accounting for anisotropic interactions and walking domain boundaries*, 数学生物科学与工程, 17 (2020), 第 5883–5906 页。[10] C. Chalons, P. Goatin, and L. M. Villada, *High-order numerical schemes for one-dimensional nonlocal conservation laws* 40 2018 288 305 , SIAM 科学计算杂志, ( ), 第 A –A 页。[11] F. A. Chiarello, P. Goatin, and E. Rossi, *Stability estimates for non-local scalar conservation laws*, 非线性分析：真实世界应用, 45 (2019), 第 668–687 页。[12] G. M. Coclite, J.-M. Coron, N. De Nitti, A. Keimer, and L. Pflug, *A general result on the approximation of local conservation laws by nonlocal conservation laws: The singular limit problem for exponential kernels*, 昂利·庞加莱研究所年刊 C 辑 , (2022)。[13] M. Colombo, G. Crippa, M. Graff, and L. V. Spinolo, *On the role of numerical viscosity in the study of the local limit of nonlocal conservation laws*, ESAIM：数学建模与数值分析, 55 (2021), 第 2705–2723 页。[14] M. Colombo, G. Crippa, E. Marconi, and L. V. Spinolo, *Local limit of nonlocal traffic models: convergence results and total variation blow-up*, 昂利·庞加莱研究所年刊 C辑, 非线性分析, 38 (2021), 第 1653–1666 页。[15] , *Nonlocal traffic models with general kernels: singular limit, entropy admissibility, and convergence rate*, arXiv 预印本 arXiv:2206.03949, (2022)。[16] M. Colombo, G. Crippa, and L. V. Spinolo, *On the singular local limit for conservation laws with nonlocal fluxes* 233 2019 1131 1167 , 理性力学与分析档案, ( ), 第 – 页。[17] R. M. Colombo, M. Garavello, and M. Lécureux-Mercier, *A class of nonlocal models for pedestrian traffic* 22 2012 1150023 , 应用科学中的数学模型与方法, ( ), 第 页。[18] R. M. Colombo and E. Rossi, *Nonlocal conservation laws in bounded domains*, SIAM 数学分析杂志, 50 (2018), 第 4041–4065 页。[19] L. C. Evans and R. F. Garzepy, *Measure theory and fine properties of functions*, 劳特利奇, 2018。[20] F. Filbet and S. Jin, *A class of asymptotic-preserving schemes for kinetic equations and related problems with stiff sources* 229 2010 7625 7648 , 计算物理学杂志, ( ), 第 – 页。[21] J. Friedrich, S. Göttlich, and M. Herty, *Lyapunov stabilization for nonlocal traffic flow models*, arXiv 预印本 arXiv:2209.05256, (2022)。[22] J. Friedrich, S. Göttlich A. Keimer and L. Pflug *Conservation laws with nonlocal velocity–the singular* , , , , arXiv 预印本 *limit problem* 2210 12141, 2022 arXiv: . ( )。[23] J. Friedrich and O. Kolb, *Maximum principle satisfying cweno schemes for nonlocal conservation laws*, SIAM 科学计算杂志, 41 (2019), 第 A973–A988 页。[24] J. Friedrich, O. Kolb, and S. Göttlich, *A godunov type scheme for a class of lwr traffic flow models with non-local flux* 1802 07484, 2018 , arXiv 预印本 arXiv: . ( )。[25] P. Goatin and E. Rossi, *Well-posedness of IBVP for 1D scalar non-local conservation laws*, ZAMM 应用数学与力学杂志/应用数学与力学杂志, 99 (2019), 第 e201800318 页。[26] P. Goatin and S. Scialanga, *Well-posedness and finite volume approximations of the LWR traffic flow model with non-local velocity* 11 2016 107 121 , 网络与异质介质, ( ), 第 – 页。[27] S. Göttlich, S. Hoher, P. Schindler, V. Schleper, and A. Verl, *Modeling simulation and validation of* , , 应用数学建模, ( ), 第 *material flow on conveyor belts* 38 2014 3295 3313 – 页。[28] K. Huang and Q. Du, *Stability of a nonlocal traffic flow model for connected vehicles*, SIAM 应用数学杂志 , 82 (2022), 第 221–243 页。[29] S. Jin, *Efficient asymptotic-preserving (ap) schemes for some multiscale kinetic equations*, SIAM 数学分析杂志

《科学计算》, 21 (1999), 第 441–454 页。[30] ,
Asymptotic preserving (ap) schemes for multiscale kinetic and hyperbolic equations: a review,《动理学理论方法与模型暑期学校讲义》(M&MKT), 意大利格罗塞托省埃尔科莱港, (2010), 第 177–216 页。[31] I. Karafyllis, D. Theodosis, and M. Papageorgiou, *Analysis and control of a non-local PDE traffic flow model* 0 2020 1 34 ,《国际控制杂志》, ( ), 第 – 页。[32] A. Keimer and L. Pflug, *On approximation of local conservation laws by nonlocal conservation laws*,《数学分析与应用杂志》, 475 (2019), 第 1927–1955 页。[33] ,
On the singular limit problem for a discontinuous nonlocal conservation law,arXiv 预印本 arXiv:2212.12598 (2022).
[34] P. G. LeFloch,*Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The theory of classical and nonclassical shock waves* 2002 ,施普林格科学与商业媒体, 。[35] R. J. LeVeque et al., *Finite volume methods for hyperbolic problems*,第 31 卷, 剑桥大学出版社, 2002。[36] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, *On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads*,《伦敦皇家学会学报A辑》, 229 (1955), 第 317–345 页。[37] P. I. Richards, *Shock waves on the highway*,《运筹学》, 4 (1956), 第 42–51 页。[38] J. Ridder and W. Shen, *Traveling waves for nonlocal models of traffic flow*,《离散与连续动力系统A辑》, 39 (2019), 第 4001 页。[39] E. Rossi, J. Weissen, P. Goatin, and S. Göttlich, *Well-posedness of a non-local model for material flow on conveyor belts* 54 2020 679 704 ,ESAIM：数学建模与数值分析, ( ), 第 – 页。[40] W. Shen, *Traveling waves for conservation laws with nonlocal flux for traffic flow on rough roads*,《网络与异质介质》, 14 (2019), 第 709–732 页。[41] E. Tadmor, *The large-time behavior of the scalar, genuinely nonlinear lax-friedrichs scheme*,《计算数学》, 43 (1984), 第 353–368 页。[42] X. Tian and Q. Du, *Asymptotically compatible schemes and applications to robust discretization of nonlocal models* 52 2014 1641 1665 ,SIAM 数值分析杂志, ( ), 第 – 页。[43] ,*Asymptotically compatible schemes for robust discretization of parametrized problems with applications to nonlocal models* 62 2020 199 227 ,《SIAM评论》, ( ), 第 – 页。