arXiv:2301.00804v1 [math.AP] 2 Jan 2023

受迫欧拉方程中高于 Onsager 指数的凸积分

AYNUR BULUT、MANH KHANG HUYNH 和 STAN PALASEK

Abstract. 我们针对带外力的欧拉方程，在 $\mathbb{T}^d$ $(d \geq 3)$ 上建立了新的非唯一性结果。通过引入一种新颖的交替凸积分方案，我们构造出非唯一、几乎处处光滑且具有 H¨older 连续性的解，其正则性为$\frac{1}{2}-$，显著高于 1 3 的昂萨格阈值。

我们构造的解与近期 Vishik 的不稳定涡构造所产生的解在本质上有显著差异；具体而言，我们的解是真正的 d 维解（$d \geq 3$），并且对任意光滑数据都给出非唯一性结果。据我们所知，这是首个高于 Onsager 指数的凸积分构造。

1. Introduction

我们考虑带有外力 f 的不可压欧拉方程：$[0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$,

$$\begin{cases} \partial_t v + \operatorname{div} v \otimes v + \nabla p = f \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

在周期区域 $\mathbb{T}^d$ 上，其中 $d \geq 3$ 是空间维数，v：$[0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$是速度场，而 p：$[0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ 是压力。

当强迫项 f 具有足够的正则性时，经典理论表明，欧拉系统（1.1）的解在 $v \in C_t^0 C_x^{1+\alpha}$下具有良好的正则性。这包括初值问题的局部适定性以及能量守恒（即动能的变化由外力所做的功来平衡）等性质。

弱解理论与流体湍流中的一个核心问题是，这些性质是否会在较低正则性下仍然成立。为更精确地表述这一问题，在 Klainerman 于 [Kla16] 中提出的框架下（另见 [BV19],[BSV19]），固定一组函数空间的尺度 X^α后，会出现若干临界正则性阈值:

- 能量守恒的 Onsager 阈值 α_O；
- 区分灵活性与刚性的纳什阈值 α_N；
- 对于初值问题，保证解唯一性的正则性阈值 α_U；以及
- 使初值问题局部适定的正则性阈值 α_{WP}。

有了这些定义，我们有理由预期如下排序关系

$$\alpha_O \leq \alpha_N \leq \alpha_U \leq \alpha_{WP}$$

成立。

近年来，在采用常规选择 $X^\alpha = C^\alpha$ 的情况下，确定无外力欧拉系统的临界指数方面已取得重大进展。Bourgain-Li [BL15] 和 Elgindi-Masmoudi [EM20] 已证明 $\alpha_{WP} = 1$。在另一端，我们有 Constantin-E-Titi [CET94] 得到的 $\alpha_O \leq \frac{1}{3}$。这个等式 $\alpha_O = \frac{1}{3}$ 被称为 Onsager 猜想，最近由 Isett[Ise18] 采用凸积分方法证明。该方法最初由 De Lellis 和 Sz´ekelyhidi Jr. [DS07] 开创，之后又由许多其他作者加以发展；参见 [DS13、DS14、DS07、Buc+15、Ise17] 及其中的参考文献。$C^{\frac{1}{3}-}$ 中非守恒欧拉流的灵活构造也可用于展示非唯一性和 h-原理[Buc+19]，从而确立 $\min(\alpha_N, \alpha_U) \geq \frac{1}{3}$。

然而，确定 α_N 和 α_U 在无外力欧拉系统中的精确取值，仍然是一个困难且尚未解决的问题。事实上，为此，Klainerman 在 [Kla16]，

“能否扩展凸积分方法，以构造 Onsager 指数以上的解？”

本文针对受迫欧拉系统（1.1）肯定地回答了这个问题。我们的主要定理如下。

定理 1.1. 设 $d \geq 3$，令 $V_1, V_2, V_3 \in C^\infty(\mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d)$ 为任意满足 $\int_{\mathbb{T}^d} V_1 = \int_{\mathbb{T}^d} V_2 = \int_{\mathbb{T}^d} V_3$ 的无散向量场。
那么，对于每个 $\beta \in (0, \frac{1}{2})$，都存在 $u, v \in C_{t,x}^{\beta-}$，和 $F \in C_t^0 C_x^{2\beta-}$，使得

- u，v 是（1.1）的弱解，具有相同的初始数据 $u(0) = v(0) = V_1$以及外力 $f =$散度 F，
- $u(T) = V_3$, $v(T) = V_2$，以及
- u、v和 F 几乎在所有时刻都是光滑的。

特别是，对于任意选定的光滑数据，都存在某个外力，使得初值问题不满足唯一性。

注 1.2. 请注意，当 $\beta > \frac{1}{3}$ 时，速度场与力场的正则性结合起来足以保证能量平衡（附录 [CET94] 中给出了这一事实的一个证明，其思路与 C类似）。这证明了我们的解具有高于 Onsager 正则性阈值的正则性。此外，尽管外力仅仅不满足连续性（因为它是一个 C_x^1−张量场的散度），总功 $\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} f \cdot v \, dxdt$ 仍然有限。

为了证明定理 1.1，我们提出一种新颖的交替凸积分方案（见下文第 1.1 小节）。我们构造的解在性质上与 Vishik [Vis18a、Vis18b]所构造的不稳定涡所产生的解有显著差异；详情见下文第 1.2 小节。核心思路是，通过适当地选择外力，我们可以实施一个凸积分方案，其中例如 u 和 v 分别只在偶数步和奇数步受到扰动。因此，相继的扰动在频率空间中的间隔更大，从而驻相论证（例如引理 5.4，可得出满足更优估计的误差。

我们注意到，对于无外力欧拉系统，受 $\beta = \frac{1}{3}$ 的[CET94]所限，在之上进行凸积分会遇到严重障碍。事实上，凸积分方案的标准应用只能构造出能量守恒解，这与预期中选择扰动“慢”剖面的自由度相矛盾。在本研究中，我们通过引入精心构造的外力来平衡高频扰动注入的额外能量，从而避免了这一问题。

在讨论我们方法的细节之前，我们先就所构造解 u 和 v 的奇异时刻集合的界，以及所构造外力 f 的正则性，作两点说明。

注 1.3。令 $\mathcal{B} \subset [0,T]$ 为使 u、v、$F\big|_{\mathcal{B}^c \times \mathbb{T}^d}$光滑的最小闭时间集。我们的凸积分方案对该奇异集给出了定量界（参见[DH22、CL22、BHP22]）：

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{B}) \leq \left(\frac{1}{2(1-\beta)}\right)^{+}.$$

注 **1.4**。由于在我们的凸积分过程中，雷诺应力的物质导数满足良好的估计，因此可以预期外力在时间上也具有正则性，尤其是有 $F \in C_{t\,x}^{2\beta-}$ ，；不过我们在此不探讨这个问题。

1.1. 交替凸积分策略。现在我们概述将凸积分推进至正则性 $C_x^{1/2-}$所需的新思路。我们以[Buc+19]中证明 Onsager 猜想的方法作为参照，并采用其中如今已成标准的记号和术语。我们区分 R_{q+1}中出现的两类误差：扰动 w_{q+1}与自身相互作用所产生的振荡误差，以及扰动与粗尺度流 $\overline{v}_q$相互作用所产生的线性误差。

1.1.1. 振荡误差。仔细阅读昂萨格猜想的证明会发现，直到 $\frac{1}{2}-$，振荡误差都已经足够小。事实上， R_ℓ 主要支集于频率不超过 λ_q ，由此（大致）得到 $\|R_\ell\|_1 \lesssim \lambda_q \delta_{q+1}$ （参见界 $\|R_\ell\|_1 \lesssim \ell^{-1}\delta_{q+1}$ ，该界见于 [Buc+19]）。利用这个更紧的界，关于 div$(w_o \otimes w_o)$、 $w_o \otimes w_c$等的误差估计要求可由参数约束[1]

$$\lambda_{q+1}^{-1+O(\alpha)} \lambda_q \delta_{q+1} \lesssim \delta_{q+2} \tag{1.2}$$

该条件对所有 $\beta < \frac{1}{2}$ 都可以满足。因此，除了仔细追踪 v_q 和R_q前几个导数的最优估计外，无需作任何修改。Isett [Ise18] 所采用的“频率-能量层级”也体现了类似的策略。

我们还要指出，（1.2）似乎是任何包含一个空间导数的二次非线性系统的凸积分方案都无法回避的要求。我们将此视为对第1.2小节中猜想的进一步佐证，即 $\alpha_N = \frac{1}{2}$ 对于受迫欧拉方程，或者至少要超越这一阈值，就需要采用与凸积分截然不同的思路。

[1]回想一下， α 是一个正常数，其取值依赖于 β，并且选得足够小。

1.1.2. 线性误差。众所周知，线性误差将 Onsager方案限制在 $\alpha < \frac{1}{3}$。事实上，“Nash误差”的形式为 $\mathcal{R}(w_{q+1} \cdot \nabla \overline{v}_q)$，其一致有界于 $\lambda_{q+1}^{-1}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\|\overline{v}_q\|_{C^{1,\,\alpha}}$。欧拉方程的局部理论表明，拼接得到的解 $\overline{v}_q$ 满足 $\|\overline{v}_q\|_{C^{1,\,\alpha}} \lesssim \|v_q\|_{C^{1,\,\alpha}}$；因此，要完成迭代估计，必须满足

$$\lambda_{q+1}^{-1+O(\alpha)}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\|v_q\|_{C^{1,\alpha}} \lesssim \delta_{q+2}. \tag{1.3}$$

事实上，另一个线性误差也要求参数满足同一约束（1.3）。在 Onsager 方案中，我们无法期待比 $\|v_q\|_{C^{1\,\text{更好的界}\alpha}} \lesssim \lambda_q^{1+\alpha}\delta_q^{\frac{1}{2}}$；结合（1.3），可得 $\beta < \frac{1}{3}$。这促使我们致力于设计一种方案，使我们能够对 $\|v_q\|_{C^{1,\alpha}}$ 得到显著更好的估计。

策略如下：我们同时考虑两个速度场 u 和 v 对应的受迫Euler方程组，其中一个带有雷诺应力误差：

$$\begin{cases} \partial_t u_q + \operatorname{div} u_q \otimes u_q + \nabla \pi_q = \operatorname{div} F_q \\ \partial_t v_q + \operatorname{div} v_q \otimes v_q + \nabla p_q = \operatorname{div} F_q + \operatorname{div} R_q \\ \operatorname{div} u_q = \operatorname{div} v_q = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

暂且忽略与磨光和粘合有关的复杂性。在这个过度简化的情形下，只有 v_q 需要通过凸积分进行扰动，因为它带有雷诺应力。因此，构造扰动 w_{q+1} 来抵消 R_q，如 [Buc+19] 所示，我们可以令 $u_{q+1} \colon = u_q$ 以及 $v_{q+1} \colon = v_q + w_{q+1}$，它们满足$\widetilde{\ }$具有相同外力 $\operatorname{div} F_q$ 、但雷诺应力更小的同一方程组 R_{q+1}。关键思路是修改外力，将雷诺应力移至 u_{q+1} 方程中——通过$\widetilde{\ }$令 $F_{q+1} \colon = F_q + R_{q+1}$ 并令 $R_{q+1} \colon = -R_{q+1}$，我们得到新的方程组

$$\begin{cases} \partial_t u_{q+1} + \operatorname{div} u_{q+1} \otimes u_{q+1} + \nabla \pi_{q+1} = \operatorname{div} F_{q+1} + \operatorname{div} R_{q+1} \\ \partial_t v_{q+1} + \operatorname{div} v_{q+1} \otimes v_{q+1} + \nabla p_{q+1} = \operatorname{div} F_{q+1} \\ \operatorname{div} u_{q+1} = \operatorname{div} v_{q+1} = 0. \end{cases}$$

关键在于，由于在上一步中 u_q 没有受到扰动，我们得到了改进后的估计

$$\|u_{q+1}\|_{C^{1,\alpha}} \lesssim \|u_q\|_{C^{1,\alpha}}$$

这将放宽条件（1.3）。事实上，如果每隔一步才扰动一次速度场，我们应该[2]得到改进后的估计 $\|v_q\|_{C^{1,\,\alpha}} \lesssim \lambda_{q-1}^{1+\alpha}\delta_{q-1}^{\frac{1}{2}}$。因此，当我们对例如（1.4）执行一次凸积分步骤时，条件（1.3）变为 $\lambda_{q+1}^{-1+O(\alpha)}\lambda_{q-1}\delta_{q-1}^{\frac{1}{2}}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \lesssim \delta_{q+2}$，而这对所有 $\beta < \frac{1}{2}$ 都成立。

这种利用交替$\|v_q\|_{C^{1\text{凸积分}\alpha}}$ 方案改进 [BHP]，中界的方法，同样适用于二维Euler和无黏表面准地转方程。在即将发表的工作中 [BSV19]，我们证明了受迫弱解在比 [BSV19] 中所考虑的空间更强的空间里具有非唯一性。

[2]由于外力对局部存在性理论的影响（见引理 4.1），拼接场的估计略逊于 v_{q-1}。

1.1.3. 正则性时期与拼接。 为明确初始数据和最终数据，并获得几乎处处光滑性，我们采用所谓的“正则性时期”方法，正如先前在 [DH22、BHP22], 中所见；在该方法中，我们优化拼接区间，并尝试将较新的局部解与较旧的近似解拼接起来。然而，在这种情况下，外力实际上使我们能够完全控制初始数据和最终数据。这种方法也带来了新的复杂性，因为我们必须同时对两个方程组执行这一修正后的拼接过程。因此，有必要分离由此产生的误差，以免其破坏活跃方程组中凸积分的物质导数估计。第 1.1.1 小节中提到的优化导数估计，在估计拼接误差时起着关键作用，因为磨光尺度 ℓ_q 的唯一下界就是扰动的尺度。

1.2. 与先前结果的比较。 在开创性的工作中，Vishik [Vis18a、Vis18b]（另见笔记 [Alb+22]）构造了一个不稳定的二维涡旋；在自相似坐标下考察时，它导出了（1.1）的非唯一解，其涡量属于 $L_t^\infty L_x^p$，对任意大的 $p < \infty$均成立。特别地，这意味着对于定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的受迫欧拉方程（通过平凡延拓，也包括 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$），存在属于 $L_t^\infty C_x^{1-}$ 的非唯一解；因此 $\alpha_U = 1$。我们指出，近期 Bru´e 和 De Lellis [BD22] 也研究了零黏性极限下受迫纳维–斯托克斯方程的异常耗散结果（另见 [Bru+22]）。

虽然我们的凸积分方法只能证明 $\alpha_U \geq \frac{1}{2}$，但其优点是所构造的解确实是 d 维的（$d \geq 3$），而且从任意光滑数据出发都能展示非唯一性。[3] 我们认为，该方法在 $\alpha = \frac{1}{2}$ 以上失效本身就很有意义，可能表明 α_N对于受迫方程的价值。尽管 [Vis18a、Vis18b] 中的非唯一解具有比定理 1.1中的解更强的正则性，但它们似乎并未体现解空间具有任何灵活性或一般性。事实上，那里构造的解局限于某个涡旋族的不稳定流形附近。

另一方面，定理 1.1 是通过凸积分证明的。众所周知，凸积分是证明各种问题的 h-原理的一种工具。由凸积分在 $\alpha < \frac{1}{2}$ (命题2.1) 上的成功，以及在 $\alpha > \frac{1}{2}$ (见小节 1.1) 中遇到的一些显而易见的严重问题，可以推测 $\alpha_N = \frac{1}{2}$ 是受迫欧拉方程的精确阈值。De Lellis 和 Inauen [DI20] 以及 Cao 和 Inauen [CI20] 在相关的等距延拓问题中（在某种意义上）确定了 $\alpha_N = \frac{1}{2}$，这为该假设提供了支持。需要指出的是，受迫系统的 h-原理的精确定义尚不明确，而且或许并非唯一——允许外力在弱逼近中变化与否，可能会导致截然不同的结果。为方程（1.1）找到一种自然的 h-原理表述，并确定 α_N，颇有意义，也将是未来工作的主题。

[3]通过初等粘合论证，从某个特定初始数据出发的非唯一性意味着，在适当选择外力后，任意初始数据都存在非唯一性。然而，与定理 1.1不同的是，不能指望外力在时间上连续。此外，这种平凡的粘合论证无法像定理中那样自由指定 $u(T)$ 和 $v(T)$。

1.3. 论文结构。 本文结构如下：第 2 节介绍本文采用的记号约定，并阐述交替凸积分方案的迭代命题。第 3 节说明如何利用该迭代命题证明定理1.1。第 4 节开始证明迭代命题，具体实施磨光和拼接步骤（其中包含论证中精细的一部分：在“好-坏”与“坏-坏”界面上证明拼接场满足适当的估计）。第 5 节构造扰动，并对所得场证明估计，以完成迭代命题。第 6 节完成迭代命题的证明。简短的附录 A 汇总了凸积分构造中所用参数的若干比较估计。为方便读者，我们在附录 B 中证明了对受迫欧拉系统实施粘合所需的局部理论，并在附录 C 中证明了我们构造的弱解保持能量平衡。

致谢。我们感谢 Dallas Albritton 和陶哲轩进行了有益的讨论。第三作者感谢加州大学洛杉矶分校的论文写作年奖学金提供的支持。

2. Notation and formulation of the main iterative scheme

现在我们确立一些基本的记号约定。按照惯例，我们写作 $A \lesssim_{x,\neg y} B$ 表示 $A \leq CB$，其中 $C > 0$ 可以依赖于 x，但不依赖于 y。类似地，$A \sim_{x,\neg y} B$表示同时有$A \lesssim_{x,\neg y} B$ 和$B \lesssim_{x,\neg y} A$。对于 $x \in \mathbb{R}$，我们写作 $x+$ （或类似地， $x-$），表示给定表达式对所有 $y \in (x, x+\varepsilon)$都成立，其中$\varepsilon > 0$ 取值充分小。

当对论证而言无关紧要时，我们会省略对某些参数的依赖。

2.1. 函数空间与几何预备知识。对于每个 $N \in \mathbb{N}_0$ 和$\alpha \in (0,1)$，我们考虑以下范数和半范数

$$\|f\|_N = \|f\|_{C^N}, \quad [f]_N = \left\|\nabla^N f\right\|_0, \quad [f]_{N+\alpha} = \left[\nabla^N f\right]_{C^{0,\alpha}},$$

and

$$\|f\|_{N+\alpha} = \|f\|_{C^{N,\alpha}} := \|f\|_N + [f]_{N+\alpha},$$

其中$[\cdot]_{C^{0,\alpha}}$是赫尔德半范数。在此背景下，我们记录一个基本不等式

$$\|fg\|_r \lesssim \|f\|_0 [g]_r + [f]_r \|g\|_0 \quad \text{for any } r > 0.$$

与 [BHP22], 中一样，我们回顾霍奇分解

$$\mathrm{Id} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3$$

其中 $\mathcal{P}_1 := d(-\Delta)^{-1}\delta$和 $\mathcal{P}_2 := \delta(-\Delta)^{-1} d$，且 $\mathcal{P}_3$映射到调和形式（参见[Tay11，第5节.8]）。注意， $\mathcal{P}_1$和 $\mathcal{P}_2$是 Calder´on-Zygmund 算子。注意，$\delta = -\operatorname{div}$，其中 $(\operatorname{div} T)^{i_1\cdots i_k} = \nabla_j T^{j i_1 \cdots i_k}$适用于任意张量 T。由于音乐同构，Hodge投影 $\mathcal{P}_i$ 也定义在向量场上，为方便起见，我们也将 $\sharp \mathcal{P}_i \flat$ 记作 $\mathcal{P}_i$ （除非产生歧义）。此外，由于环面是平坦的，我们有以下恒等式

$$\delta\flat (X \cdot \nabla Y) = \delta\flat (Y \cdot \nabla X) \tag{2.1}$$

and

$$\mathcal{P}_1\left(X\cdot\nabla Y\right)=\mathcal{P}_1\left(Y\cdot\nabla X\right) \tag{2.2}$$

对于任意一对无散向量场 X、Y。我们还回顾一下，在环面上，调和 1-形式（或向量场）恰好是均值为零的形式（或向量场）。

2.2. Leray 投影、反散度算子和 Biot-Savart 算子。我们定义通常的 Leray 投影

$$\mathbb{P}:=\mathcal{P}_2+\mathcal{P}_3,$$

并注意到，不可压缩流体的速度场属于 $\mathbb{P}$ 的像。

我们将频繁使用反散度算子 $\mathcal{R}$：$C^\infty\left(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d\right)\to C^\infty\left(\mathbb{T}^d,\mathcal{S}_0^{d\times d}\right)$，其定义如下：

$$\left(\mathcal{R}v\right)_{ij}=\mathcal{R}_{ijk}v^k, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{R}_{ijk}:=-\frac{d-2}{d-1}\Delta^{-2}\partial_i\partial_j\partial_k-\frac{1}{d-1}\Delta^{-1}\partial_k\delta_{ij}+\Delta^{-1}\partial_i\delta_{jk}+\Delta^{-1}\partial_j\delta_{ik}. \tag{2.4}$$

我们还将频繁使用以下事实：对于任意向量场 v，$\operatorname{div}\mathcal{R}v=v-\fint_{\mathbb{T}^d}v=\left(1-\mathcal{P}_3\right)v$。此外，通过音乐同构，$\mathcal{R}$ 也定义在 1-形式上，为方便起见，我们也将 $\mathcal{R}\sharp$ 记作 $\mathcal{R}$。

我们定义 Biot-Savart 算子的高维类比为

$$\mathcal{B}:=\left(-\Delta\right)^{-1}d\flat, \tag{2.5}$$

一个从向量场映射到 2-形式的映射。注意，按照这个定义，我们有

$$\sharp\delta\mathcal{B}=\mathcal{P}_2,$$

这意味着，对于任意无散向量场 v，都有 $\sharp\delta\mathcal{B}v=v-\fint_{\mathbb{T}^d}v=\mathcal{P}_2v$。

2.3. 主要迭代方案的表述。 如引言中所述，为了证明定理1.1 我们引入一种新颖的迭代构造，其中交替运用凸积分技术。为进一步明确这一点，我们现在引入主要迭代引理。首先，我们说明若干参数。

固定 $\beta<\frac{1}{2}$ 和 $T\geq 1$。对于任意 $q\in\mathbb{Z}_{\geq -1}$，我们令

$$\lambda_q:=\left\lceil a^{(b^q)}\right\rceil \tag{2.6}$$

$$\delta_q:=\lambda_q^{-2\beta}, \tag{2.7}$$

其中 $a\gg 1$、$0<b-1\ll 1$（将在后文选定）。量 λ_q 将是频率参数（为相位函数取为整数），而 δ_q 将表示雷诺应力的逐点大小。

对于充分小的 $\alpha>0$（将在后续论证中具体说明）以及任意 $q\in\mathbb{N}_0$，我们定义

$$\epsilon_q:=\lambda_q^{-\sigma}, \tag{2.8}$$

$$\ell_q:=\lambda_q^{-\frac{1}{4}}\lambda_{q+1}^{-\frac{3}{4}}, \tag{2.9}$$

and

$$\tau_q:=C_q\delta_{q+1}^{-\frac{1}{2}}\lambda_q^{-1-3\alpha}, \tag{2.10}$$

其中， $C_q > 0$ 是一个普通的常数，选取它是为了使 $\epsilon_{q-1}\tau_{q-1}\tau_q^{-1}$ 为整数。注意，由于 $\epsilon_{q-1}\tau_{q-1}\tau_q^{-1} \gg 1$，我们可以选择 C_q 使其与 1 可比（且与 q 无关）；因此， C_q 不影响估计，后文将省略。

这里， ℓ_q 是磨光长度尺度，除非另有说明，为简洁起见记作 ℓ； τ_q 是局部存在性与拼接步骤的时间尺度，而$\epsilon_q\tau_q$ 是相邻时间截断之间重叠时段的较小时间尺度。

我们还令$\epsilon_{-1} = \lambda_{-1}^{-\sigma}$ 和 τ_{-1} 为满足下述条件的任意正数:

$$1 \le 15\epsilon_{-1}\tau_{-1} \le T.$$

注意， a、 b、 α和 σ 均不依赖于 q。

为了表述凸积分应用中的主要归纳假设，设对于某个 $q \in \mathbb{N}_0$ ，存在光滑场（u_q、 v_q、 F_q、 R_q），使得对于

- 一个几何常数 $M > 1$ 仅依赖于 d（而不依赖于 a， β， b， σ， α， q），将在第5节稍后选取，并且
- 一个正数列 $\mathcal{A} = (A_\kappa)_{\kappa\in\mathbb{N}_0}$ 以及一个序列 $(B_\kappa)_{\kappa\in\mathbb{N}_0}$ ，由 M （因此也由 d）完全确定，其中 (A_κ) 和 (B_κ) 均独立于 q,

满足以下判据:

(1) 存在光滑压力 p_q 和 π_q ，它们在1.4）上满足对偶欧拉-雷诺系统（$[0,T]\times\mathbb{T}^d$；(2) 我们有以下估计

$$\|v_q\|_0, \|u_q\|_0, \|F_q\|_0 \le 1 - \delta_q^{1/2}, \tag{2.11}$$

并且，当 $1 \le \jmath \le 12$ 时,

$$\|\nabla^\jmath u_q\|_0 \le M\lambda_q^\jmath \delta_q^{1/2}, \tag{2.12}$$

$$\|\nabla^\jmath v_q\|_0 \le M\lambda_{q-1}^\jmath \delta_{q-1}^{1/2}, \tag{2.13}$$

$$\|\nabla^\jmath F_q\|_0 \le M\epsilon_q\lambda_q^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+1}, \tag{2.14}$$

以及，当 $0 \le \jmath \le 12$ 时,

$$\|\nabla^\jmath R_q\|_0 \le M\epsilon_q\lambda_q^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+1}, \tag{2.15}$$

(3) 存在一个“坏”时刻集合 $\mathcal{B}_q = \bigcup_i I^{b,q}_i$ ，它是由互不相交的闭区间 $I^{b,q}_i$ 组成的并集，每个区间的长度为 $5\epsilon_{q-1}\tau_{q-1}$；定义“好”时刻

$$\mathcal{G}_q = [0,T] \setminus \mathcal{B}_q = \bigcup_i I_i^{g,q}$$

由互不相交的开区间 $I^{g,q}_i$ 组成，我们有

$$R_q\big|_{\mathcal{G}_q + B(0,\epsilon_{q-1}\tau_{q-1})} \equiv 0, \tag{2.16}$$

其中 $\mathcal{G}_q + B(0,\epsilon_{q-1}\tau_{q-1})$ 表示 $\mathcal{G}_q$ 的 $\epsilon_{q-1}\tau_{q-1}$-邻域；(4) 对于 $t \in \mathcal{G}_q + B(0,\epsilon_{q-1}\tau_{q-1})$，当 $1 \le \jmath \le 8$ 和 $\kappa \ge 0$时，我们有，

$$\|\nabla^{\jmath+\kappa} v_q\|_0 + \|\nabla^{\jmath+\kappa} u_q\|_0 \le (A_\kappa + B_\kappa)\,\ell_{q-1}^{-\kappa}\lambda_{q-1}^\jmath\delta_{q-1}^{1/2}, \tag{2.17}$$

并且，对于 $1 \le \jmath \le 10$ 和 $\kappa \ge 0$,

$$\|\nabla^{\jmath+\kappa} F_q\|_0 \le (A_\kappa + B_\kappa)\,\ell_{q-1}^{-\kappa}\lambda_{q-1}^{\jmath-3\alpha}\delta_q. \tag{2.18}$$

现在我们可以陈述主要的迭代命题了。

命题 2.1（迭代方案）。固定 $\beta < \frac{1}{2}$ 和 $T \geq 1$，并假设

$$0 < b - 1 \ll_{\beta} 1, \tag{2.19}$$

$$0 < \sigma < \frac{(b-1)(1-2b\beta)}{b+1}, \tag{2.20}$$

$$0 < \alpha \ll_{\sigma,b,\beta} 1, \tag{2.21}$$

and

$$a \gg_{\mathcal{A},\alpha,\sigma,b,\beta} 1.$$

固定 $q \in \mathbb{N}_0$，若 $(u_q, v_q, F_q, R_q, \mathcal{B}_q)$ 满足上述假设 (1)–(4)，则 n 存在满足下列条件的 $(u_{q+1}, v_{q+1}, F_{q+1}, R_{q+1}, \mathcal{B}_{q+1})$

$$\|v_{q+1}\|_0, \|u_{q+1}\|_0, \|F_{q+1}\|_0 \leq 1 - \delta_{q+1}^{1/2}, \tag{2.22}$$

并且，对于 $1 \leq \jmath \leq 12$,

$$\|\nabla^{\jmath} u_{q+1}\|_0 \leq M\lambda_q^{\jmath}\delta_q^{1/2}, \tag{2.23}$$

$$\|\nabla^{\jmath} v_{q+1}\|_0 \leq M\lambda_{q+1}^{\jmath}\delta_{q+1}^{1/2}, \tag{2.24}$$

$$\|\nabla^{\jmath} F_{q+1}\|_0 \leq M\epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+2}, \tag{2.25}$$

以及，对于 $0 \leq \jmath \leq 12$,

$$\|\nabla^{\jmath} R_{q+1}\|_0 \leq M\epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+2}. \tag{2.26}$$

此外，估计式（2.16）–（2.18）在将 q 替换为 $q+1$后仍然成立，并且有

$$\|v_q - v_{q+1}\|_0 + \lambda_{q+1}^{-1}\|v_q - v_{q+1}\|_1 \leq M\delta_{q+1}^{1/2}, \tag{2.27}$$

$$\|u_q - u_{q+1}\|_0 + \lambda_{q+1}^{-1}\|u_q - u_{q+1}\|_1 \leq M\delta_{q+1}^{1/2}, \tag{2.28}$$

$$\|F_q - F_{q+1}\|_0 + \lambda_{q+1}^{-1}\|F_q - F_{q+1}\|_1 \leq M\delta_{q+1}, \tag{2.29}$$

and

$$v_{q+1} = v_q,\ u_{q+1} = u_q,\ F_{q+1} = F_q \ \text{on}\ \mathcal{G}_q \times \mathbb{T}^d, \tag{2.30}$$

with

$$\mathcal{G}_q \subset \mathcal{G}_{q+1}, |\mathcal{B}_{q+1}| \leq \epsilon_q |\mathcal{B}_q|. \tag{2.31}$$

需要注意的是，在命题2.1的表述中，参数b、 σ、 α和 a 仅依赖于 β 和 d。特别地，它们不依赖于 q或 T（假设 $T \geq 1$）。我们将在下文第2.1 节的命题证明中，于第4 节至第6 节完成证明。

最后，我们对归纳假设 (1)–(4) 作几点说明。式（ ϵ_q （2.14）和（2.15）中的参数用于补偿我们拼接构造中的尖锐时间截断；此前 [DH22、BHP22] 也采用了这一策略，以获得具有正则性时期的凸积分构造。

关于 A_κ 和 B_κ 在（2.17）-（2.18）中的作用很微妙。加入 A_κ 这一界是为了确保初始迭代（当 $q = 0$时）满足这些界。另一方面， B_κ 由构造中的 M 确定。特别地， B_κ不能依赖于 $B_{\kappa+1}$ 或 $B_{\kappa+2}$ （这是导数损失问题），并且我们有如下图示：

M 由（2.12）-（2.15）$\rightsquigarrow$ 确定（ B_κ 中的每一个2.17）-（2.18）（有限个估计），其中将 q 替换为 $q+1$。有限个 $A_\kappa + B_\kappa \rightsquigarrow$ 从（ M 2.23）-（2.29）中恢复中的 2.17）-（2.18，其中将 q 替换为 $q+1$ （从而为 a给出有限个下界）。

注意，在确定序列 (B_κ)（见 (4.7)、(4.17)、(4.19)）时，我们需要跟踪常数，以避免导数损失。除这一问题外，我们将在记号 $\lesssim_\kappa$ 中省略对 A_κ 和 B_κ 的依赖。

3. Proof of Theorem 1.1

本节中，我们利用主要的迭代命题——命题 2.1——给出定理 1.1 的证明。事实上，这方面的第一个观察是，命题 2.1 有以下直接推论。

推论 3.1. 设 $(u_q, v_q, F_q, R_q, \mathcal{B}_q)$ 如命题 *2.1* 中所述，并设 $(u_{q+1}, v_{q+1}, F_{q+1}, R_{q+1}, \mathcal{B}_{q+1})$ 按命题 *2.1* 中的构造得到。于是，令

$$\widetilde{F}_{q+1} := F_{q+1} + R_{q+1}, \quad \widetilde{R}_{q+1} := -R_{q+1},$$

令 $(v_{q+2}, u_{q+2}, F_{q+2}, R_{q+2}, \mathcal{B}_{q+2})$ 为应用命题 *2.1* 所得的结果

$$(v_{q+1}, u_{q+1}, \widetilde{F}_{q+1}, \widetilde{R}_{q+1}, \mathcal{B}_{q+1}).$$

然后，令

$$F_{q+2} := \widetilde{F}_{q+2} + \widetilde{R}_{q+2} \quad \textit{and} \quad R_{q+2} := -\widetilde{R}_{q+2},$$

我们有（*1.4*）、（*2.11*）-（*2.15*）以及（*2.16*）-（*2.17*）在将 q 替换为 $q+2$后均成立。此外，（*2.27*）-（*2.29*）在将 q 替换为 $q+1$后也成立。

结合命题 2.1 和推论3.1，我们构造出一个闭合迭代循环，称之为交替凸积分。

定理 1.1 的证明。对所有 $t \in [0,T]$，定义 $V_1(t,x) := V_1(x)$，并注意到，根据光滑（无外力）欧拉解的通常局部存在性，我们可得到精确的欧拉解 $V_2(t,x)$ 和 $V_3(t,x)$，其定义在 $t \in [T-\varepsilon, T]$ 上，满足 $V_2(T,x) = V_2(x)$ 且 $V_3(T,x) = V_3(x)$，其中 $\varepsilon \in (0, \frac{T}{4})$ 取决于 V_2 和 V_3。

注意到

$$\int_{\mathbb{T}^d} \partial_t V_i = 0, \quad i \in \{2,3\},$$

因此，对于所有 t，$\int_{\mathbb{T}^d} V_1(t) = \int_{\mathbb{T}^d} V_2(t) = \int_{\mathbb{T}^d} V_3(t)$。

令 η 为定义在 $[0,T]$ 上的光滑时间截断，使得 $\mathbf{1}_{[0,T-\frac{3}{5}\varepsilon]} \geq \eta \geq \mathbf{1}_{[0,T-\frac{2}{5}\varepsilon]}$，并设

$$v_0 := \eta V_1 + (1-\eta) V_2, \quad u_0 := \eta V_1 + (1-\eta) V_3.$$

我们注意到

$$\begin{aligned} \partial_t u_0 + \operatorname{div}(u_0 \otimes u_0) = {} & \partial_t \eta (V_1 - V_3) + \eta (\partial_t V_1 + \operatorname{div}(V_1 \otimes V_1)) \\ & + (1-\eta)(\partial_t V_3 + \operatorname{div}(V_3 \otimes V_3)) \\ & + (\eta^2 - \eta) \operatorname{div}((V_1 - V_3) \otimes (V_1 - V_3)). \end{aligned}$$

注意， $\partial_t V_1 = 0$，并且由于 V_3 是一个精确的欧拉解，存在一个光滑的压力 P_3，使得 $\partial_t V_3 + \operatorname{div}(V_3 \otimes V_3) = -\nabla P_3$。

令 $\mathcal{R}$ 表示在 (2.3)–(2.4) 中定义的反散度算子，并定义

$$F_0 := \partial_t \eta \mathcal{R}(V_1 - V_3) + \eta V_1 \otimes V_1 - \eta(1-\eta)(V_1 - V_3) \otimes (V_1 - V_3),$$
$$R_0 := \partial_t \eta \mathcal{R}(V_1 - V_2) + \eta V_1 \otimes V_1 - \eta(1-\eta)(V_1 - V_2) \otimes (V_1 - V_2) - F_0.$$

那么，(u_0, v_0, F_0, R_0) 是 (1.4) 的一个光滑解。注意， $R_0 = 0$ 在 $[0, T - \frac{3}{5}\varepsilon] \cup [T - \frac{2}{5}\varepsilon, T]$ 上。因此我们可以令 $\mathcal{B}_0 = [T - \frac{2}{3}\varepsilon, T - \frac{1}{3}\varepsilon]$.

现在我们对时间进行重标度，令，对于 $\zeta > 0$,

$$u_0^\zeta(t,x) := \zeta u_0(\zeta t, x), \quad F_0^\zeta := \zeta^2 F_0(\zeta t, x)$$
$$v_0^\zeta(t,x) := \zeta v_0(\zeta t, x), \quad R_0^\zeta := \zeta^2 R_0(\zeta t, x)$$
$$\mathcal{B}_0^\zeta := \zeta^{-1}\mathcal{B}_0$$

当 ζ 足够小时（取决于 V_1、 V_2、 V_3 和 T），这五元组

$$(u_0^\zeta, v_0^\zeta, F_0^\zeta, R_0^\zeta, \mathcal{B}_0^\zeta)$$

满足区间 $[0, \zeta^{-1}T]$上的命题 2.1 的条件 (2.11)-(2.15)，其中 $\zeta^{-1}T \geq \zeta^{-1}\varepsilon \geq 1$。归纳法的第一步中，我们任取一个正的$\tau_{-1}$，使得 $5\epsilon_{-1}\tau_{-1} = \frac{1}{3}\zeta^{-1}\varepsilon$。于是 (2.16) 得以满足。我们还选取 $(A_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}_0}$，使得 (2.17)-(2.18) 得以满足。

通过迭代应用命题 2.1 和推论 3.1，我们得到一个序列

$$(u_q^\zeta, v_q^\zeta, F_q^\zeta, R_q^\zeta, \mathcal{B}_q^\zeta)$$

使得 $(u_q^\zeta)_{q \in \mathbb{N}_0}$ 在 $C_t^0 C_x^{\beta-}$ 中收敛到某个 u^ζ， $(v_q^\zeta)_{q \in \mathbb{N}_0}$ 在 $C_t^0 C_x^{\beta-}$ 中收敛到某个 v^ζ，且 $(F_q^\zeta)_{q \in \mathbb{N}_0}$ 在 $C_t^0 C_x^{2\beta-}$ 中收敛到某个 F^ζ，其中

$$R_q^\zeta \to 0 \quad \text{in} C_{t,x}^0,$$
$$\mathcal{B}_{q+1}^\zeta \subset \mathcal{B}_q^\zeta,$$

并且满足 $v^\zeta = v_q^\zeta$、 $u^\zeta = u_q^\zeta$ 和 $F^\zeta = F_q^\zeta$在 $\mathcal{G}_q^\zeta \times \mathbb{T}^d$上，因此是光滑的。

特别地， u^ζ 和 v^ζ 是方程（1.1）的弱解。然后，我们可以通过设定来撤销时间重标度

$$u_q(t,x) := \zeta^{-1} u_q^\zeta(\zeta^{-1}t, x), \qquad u(t,x) := \zeta^{-1} u^\zeta(\zeta^{-1}t, x),$$
$$v_q(t,x) := \zeta^{-1} v_q^\zeta(\zeta^{-1}t, x), \qquad v(t,x) := \zeta^{-1} v^\zeta(\zeta^{-1}t, x),$$
$$F_q(t,x) := \zeta^{-2} F_q^\zeta(\zeta^{-1}t, x), \qquad F(t,x) := \zeta^{-2} F^\zeta(\zeta^{-1}t, x),$$

$$\mathcal{B}_q := \zeta \mathcal{B}_q^\zeta.$$

极限中的坏时刻集为

$$\mathcal{B} := \bigcap_q \mathcal{B}_q.$$

通过与 [BHP22 中定理 1], 的证明相同的计算，我们得到

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{B}) \leq 1 - \frac{\sigma b}{(b-1)(1+3\alpha+\sigma-\beta)}.$$

先选取 α 充分小，再令 σ 充分接近 $\frac{(b-1)(1-2b\beta)}{b+1}$，最后令 $b>1$ 充分接近 1，我们得到

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{B}) \leq \left(\frac{1}{2(1-\beta)}\right)^{+}$$

如所需。

现在我们证明 u 的时间正则性（v 也类似）。令 $\beta > \beta_1 > \beta_2 \gg \mu > 0$。则 $u \in C_t^0 C_x^{\beta_1}$。令 ψ_ℓ 为长度为 ℓ 的光滑标准空间径向光滑化核。对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$，记

$$u^\varepsilon = u * \psi_\varepsilon \qquad (u\otimes u)^\varepsilon = (u\otimes u) * \psi_\varepsilon \qquad F^\varepsilon = F * \psi_\varepsilon$$

注意到 $\partial_t u^\varepsilon + \mathbb{P}\,\mathrm{div}\,(u\otimes u)^\varepsilon = \mathbb{P}\,\mathrm{div}\,F^\varepsilon$，因此

$$\begin{aligned}\|\partial_t u^\varepsilon\|_\mu &\lesssim_\mu \|\mathbb{P}\,(\mathrm{div}\,(u\otimes u)^\varepsilon)\|_\mu + \|\mathbb{P}\,\mathrm{div}\,F^\varepsilon\|_\mu \\ &\lesssim_{\beta_1,\mu} \varepsilon^{\beta_1-1-\mu}\|u\|_{\beta_1}^2 + \varepsilon^{2\beta_1-1-\mu}\|F\|_{2\beta_1}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left\|u^{2\varepsilon}-u^\varepsilon\right\|_{C_x^0 C_t^{\beta_2}} &\lesssim_{\beta_2,\mu} \left\|u^{2\varepsilon}-u^\varepsilon\right\|_0^{1-\beta_2}\left\|\partial_t u^{2\varepsilon}-\partial_t u^\varepsilon\right\|_\mu^{\beta_2} \\ &\lesssim_{\beta_1,\beta_2,\mu} \left(\varepsilon^{\beta_1}\|u\|_{\beta_1}\right)^{1-\beta_2}\left(\varepsilon^{\beta_1-1-\mu}\left(\|u\|_{\beta_1}^2+\|F\|_{2\beta_1}\right)\right)^{\beta_2}\end{aligned}$$

ε 的幂为 $\beta_1(1-\beta_2)+(\beta_1-1-\mu)\beta_2 = \beta_1-\beta_2-\mu\beta_2$。因此，如果我们将 $\mu = \mu(\beta_1,\beta_2)$ 取得足够小，则 $\beta_1-\beta_2-\mu\beta_2>0$，且 $\left(u^{2^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}_1}$ 由几何级数在 $C_x^0 C_t^{\beta_2}$ 中收敛。于是 $u \in C_t^{\beta_2,\,x}$，v 也一样。□

注。u 和 v 的时间正则性只需要 $F \in C_t^0 C_x^{\beta-}$。

4. Beginning of the proof of Proposition 2.1: mollification and gluing estimates

本节开始证明命题2.1。如引言中所述，该证明基于凸积分技术，包含几个步骤：首先进行初步磨光过程，随后仔细权衡粘合估计（在良区间与劣区间之间，如下文所述）和扰动估计，从而完成命题2.1的证明。本节将进行磨光过程并推导相关的拼接估计。随后将在第5 节建立扰动估计，而命题2.1 的证明将在第6节完成。

我们首先回顾一下，在第2.3小节所述的参数选取中，存在若干自然关系。我们在附录A中记录这些关系，并在下文中自由使用。

4.1. 磨光。现在介绍光滑化方案。取 ψ_ℓ 空间中的光滑径向光滑核，其长度尺度为 ℓ 在（2.9）中定义，令

$$u_\ell := \psi_\ell * u_q, \quad v_\ell := \psi_\ell * v_q.$$

由（2.12）和（2.13），我们可得

$$\|v_\ell\|_{J+\kappa} \lesssim_\kappa \lambda_{q-1}^J \delta_{q-1}^{\frac{1}{2}} \ell^{-\kappa} \tag{4.1}$$

$$\|u_\ell\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \lambda_q^\jmath \delta_q^{\frac{1}{2}} \ell^{-\kappa} \tag{4.2}$$

对任意 $1 \le \jmath \le 12$、$0 \le \kappa$ 均成立。此外，令

$$F_\ell := \psi_\ell * F_q - \psi_\ell * (u_q \otimes u_q) + u_\ell \otimes u_\ell \tag{4.3}$$

$$R_\ell := \psi_\ell * R_q + \psi_\ell * (u_q \otimes u_q) - u_\ell \otimes u_\ell - \psi_\ell * (v_q \otimes v_q) + v_\ell \otimes v_\ell, \tag{4.4}$$

我们注意到 $(u_\ell, v_\ell, F_\ell, R_\ell)$ 在压力π_ℓ, p_ℓ的适当选取下满足 (1.4)。

我们回顾常见的交换子估计；例如参见 [CDS12]。对于任意 $f, g \in C^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$ 以及 $l > 0, r \ge 0$，有

$$\|f - f * \psi_l\|_r \lesssim_r l^2 \|f\|_{r+2}$$

and

$$\|(f * \psi_l)(g * \psi_l) - (fg) * \psi_l\|_r \lesssim_r l^{2-r} \|f\|_1 \|g\|_1 . \tag{4.5}$$

此外，应用乘积法则可得

$$\begin{aligned}\|(f * \psi_l)(g * \psi_l) - (fg) * \psi_l\|_{\jmath+\kappa} &\lesssim_{\jmath,\kappa} l^{2-\kappa} \sum_{i=0}^{\jmath} \|f\|_{1+i} \|g\|_{1+\jmath-i} \\ &\lesssim_\jmath l^{2-\kappa} \left(\|f\|_1 \|g\|_{1+\jmath} + \|f\|_{1+\jmath} \|g\|_1\right)\end{aligned}$$

对于任意 $\jmath, \kappa \in \mathbb{N}_0$。

4.2. 初步估计。 在继续之前，我们先对这些磨光量建立若干初步估计，这些估计将在下文中频繁使用。对于 $0 \le \jmath \le 10$，由（2.12）和（A.4）可得

$$\|u_\ell - u_q\|_\jmath \lesssim \ell^2 \|u_q\|_{\jmath+2} \lesssim \ell^2 \lambda_q^{\jmath+2} \delta_q^{\frac{1}{2}} \lesssim \lambda_q^\jmath \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \delta_q^{\frac{1}{2}} \ll \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+2}^{\frac{1}{2}} \tag{4.6}$$

接下来，对于 $\kappa \ge 0$ 和 $1 \le \jmath \le 10$，我们有以下估计

$$\begin{aligned}\|F_\ell\|_{\jmath+\kappa} &\le C(\kappa)\ell^{-\kappa} \|F_q\|_\jmath + C(\kappa)\ell^{2-\kappa} \|u_q\|_{1+\jmath} \|u_q\|_1 \\ &\le C(\kappa)\ell^{-\kappa} M \epsilon_q \lambda_q^{\jmath-3\alpha} \delta_{q+1} + C(\kappa)\ell^{2-\kappa} M^2 \lambda_q^{2+\jmath} \delta_q \\ &\le B_{\kappa,1} \ell^{-\kappa} \epsilon_q \lambda_q^{\jmath-3\alpha} \delta_{q+1}\end{aligned} \tag{4.7}$$

只需充分增大 $B_{\kappa,\,1}$，因为由（2.12）、（2.14）和（A.2）可知。特别地，式（$B_{\kappa,}$ 1 4.7）中的常数不依赖于任何 $A_\kappa + B_\kappa$，这将有助于稍后确定式（ B_κ 2.17）– （2.18）中的参数。

另一方面，为了避免导数损失，对于 $\kappa \ge 0$ 和 $1 \le \jmath \le 12$，我们有

$$\begin{aligned}\|F_\ell\|_{\jmath+\kappa} &\lesssim_\kappa \ell^{-\kappa} \|F_q\|_\jmath + \ell^{2-(\jmath-1)-\kappa} \|u_q\|_2 \|u_q\|_1 \\ &\lesssim \ell^{-\kappa} \epsilon_q \lambda_q^{\jmath-3\alpha} \delta_{q+1} + \ell^{-\jmath-\kappa} \ell^3 \lambda_q^3 \delta_q \\ &\lesssim \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\jmath+\kappa-4\alpha} \delta_{q+2} + \ell^{-\jmath-\kappa} \left(\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\right)^{\frac{9}{4}} \delta_q \\ &\lesssim \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\jmath+\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}\end{aligned} \tag{4.8}$$

wh这里我们使用 d (A.5) 以过渡到 t he third li$^{\text{ne, an}}$ d (A.4) 转而进行 he last li

当 $0 \le \jmath \le 10$ 时，由（2.14）、（2.12）和（A.2）可得

$$\|(F_\ell - F_q)(t)\|_\jmath \lesssim \ell_q^2 \|F_q(t)\|_{\jmath+2} + \ell_q^2 \|u_q(t)\|_{1+\jmath} \|u_q(t)\|_1$$

$$\lesssim \ell_q^2 \epsilon_q \lambda_q^{\jmath+2-3\alpha}\delta_{q+1} + \ell_q^2\lambda_q^{2+\jmath}\delta_q$$
$$\lesssim \epsilon_q \lambda_q^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+1} \tag{4.9}$$

当 $0 \le \jmath \le 10$、$\kappa \ge 0$ 和 $t \in \mathcal{G}_q + B(0, \epsilon_{q-1}\tau_{q-1})$ 时，由（2.18）、（2.17）、（A.4）和（A.5）可得

$$\begin{aligned}\left\|(F_\ell - F_q)(t)\right\|_{\jmath+\kappa} &\lesssim_\kappa \ell_q^2 \left\|F_q(t)\right\|_{\jmath+\kappa+2} + \ell_q^{2-\kappa}\left\|u_q(t)\right\|_{1+\jmath}\left\|u_q(t)\right\|_1 \\ &\lesssim_\kappa \ell_q^2\ell_{q-1}^{-\kappa}\lambda_{q-1}^{2+\jmath-3\alpha}\delta_q + \ell_q^{2-\kappa}\lambda_{q-1}^{2+\jmath}\delta_{q-1} \\ &\lesssim \ell_{q-1}^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-3\alpha}\epsilon_q\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1} + \ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1} \\ &\lesssim \epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+1}\end{aligned} \tag{4.10}$$

对于 $0 \le \jmath \le 12$（无导数损失）和 $t \in \mathcal{G}_q + B(0, \epsilon_{q-1}\tau_{q-1})$：

$$\begin{aligned}\left\|(F_\ell - F_q)(t)\right\|_{\jmath} &\lesssim \ell_q^2\left\|F_q(t)\right\|_{\jmath+2} + \ell_q^{2-\jmath}\left\|u_q(t)\right\|_1^2 \\ &\lesssim \ell_q^2\ell_{q-1}^{-\jmath}\lambda_{q-1}^{2-3\alpha}\delta_q + \ell_q^{2-\jmath}\lambda_{q-1}^2\delta_{q-1} \\ &\lesssim \ell_{q-1}^{-\jmath}\frac{1}{\lambda_q\lambda_{q+1}}\lambda_q^{2-3\alpha}\delta_{q+1} + \lambda_{q+1}^{\jmath}\frac{1}{\lambda_q\lambda_{q+1}}\lambda_q^2\delta_{q+1} \\ &\lesssim \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-4\alpha}\delta_{q+2}\end{aligned} \tag{4.11}$$

这里我们用到了 (2.17)、(2.18)、(A.2) 和 (A.7)。

接下来，由 (2.12)、(2.11) 可得

$$\begin{aligned}\left\|F_\ell\right\|_0 &\le \left\|F_q\right\|_0 + C(d)\ell^2\left\|u_q(t)\right\|_1^2 \le 1 - \delta_q^{\frac{1}{2}} + C(d)\ell_q^2\lambda_q^2\delta_q \\ &\le 1 - \delta_q^{\frac{1}{2}} + C(d)\epsilon_q\delta_{q+1} \qquad (4.12) \\ &\ll 1 - \frac{3}{2}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \qquad (4.13)\end{aligned}$$

因为 (A.2)。

对于 $\kappa \ge 0$ 和 $0 \le \jmath \le 10$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|R_\ell\right\|_{\jmath+\kappa} &\lesssim_\kappa \ell^{-\kappa}\left\|R_q\right\|_\jmath + \ell^{2-\kappa}\left(\left\|u_q\right\|_{1+\jmath}\left\|u_q\right\|_1 + \left\|v_q\right\|_{1+\jmath}\left\|v_q\right\|_1\right) \\ &\lesssim \ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+1} + \ell^{2-k}\lambda_q^{2+\jmath}\delta_q + \ell^{2-k}\lambda_{q-1}^{2+\jmath}\delta_{q-1} \\ &\lesssim \ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+1}\end{aligned} \tag{4.14}$$

这是因为 (2.12)、(2.13)、(2.14)、(A.2) 以及 (A.4)。

4.3. 时间截断。现在我们继续进行主要构造。设 τ_q 由 (2.10) 定义，令 $t_j := j\tau_q$，并令 $\mathcal{J}$ 为所有满足以下条件的指标 j 的集合

$$[t_j - 2\epsilon_q\tau_q, t_j + 3\epsilon_q\tau_q] \subset \mathcal{B}_q.$$

集合 $\mathcal{J}$ 包含“坏”指标，其对应的时间区间将属于 $\mathcal{B}_{q+1}$。显然，我们有 $\#(\mathcal{J}) \sim \tau_q^{-1}\prod_{p=1}^{q-1}\epsilon_p$。

接下来我们定义

$$\mathcal{J}^* := \{j \in \mathcal{J} : j+1 \in \mathcal{J}\}.$$

该集合由我们将应用受迫欧拉方程局部存在性估计的指标组成。

回顾我们已有如下分解

$$\mathcal{B}_q = \bigcup_i I_i^{b,q}, \quad \mathcal{G}_q = \bigcup_i I_i^{g,q}$$

作为互不相交区间的并集。我们考虑一个单位分解 $\{\chi_j^b\}_j \cup \{\chi_i^g\}_i$ of $[0,T]$，满足

- 对于任意 $j \in \mathcal{J}^*$, $\mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}+\epsilon_q\tau_q]} \geq \chi_j^b \geq \mathbf{1}_{[t_j+\epsilon_q\tau_q, t_{j+1}]}$,
- χ_i^g 的支集包含于 $I^g{}_{,i}{}^q + B(\mathbf{0}, \tau_q + 6\epsilon_q\tau_q)$，并且
- 我们有以下界

$$\|\partial_t^N \chi_i^g\|_0 + \|\partial_t^N \chi_j^b\|_0 \lesssim_N (\epsilon_q\tau_q)^{-N} \quad \text{for all } N \geq 1. \tag{4.15}$$

我们注意到，(2.16) 以及 $\epsilon_q\tau_q \ll \tau_q \ll \epsilon_{q-1}\tau_{q-1}$ 意味着 $R_q = 0$ 在 $\operatorname{supp} \chi_i^g$ 上成立。关于这一时间截断方案的示意图，请参见 [BHP22] 中的图 3.1。

现在令 $\chi^g := \sum_i \chi_i^g$ 和 $\chi^b := \sum_{j\in\mathcal{J}^*} \chi_j^b$，并定义

$$\begin{aligned} u_{q+1} &= \overline{u}_q = \chi^g u_q + \chi^b u_\ell \\ F_{q+1} &= \overline{F}_q = \partial_t \chi^g \mathcal{R}(u_q - u_\ell) - \chi^g(1-\chi^g)(u_q-u_\ell)\otimes(u_q-u_\ell) \\ &\quad + \chi^g F_q + (1-\chi^g) F_\ell \end{aligned} \tag{4.16}$$

其中 $\mathcal{R}$ 如 (2.3) 中所定义。于是有

$$\partial_t \overline{u}_q + \operatorname{div} \overline{u}_q \otimes \overline{u}_q + \nabla \overline{\pi}_q = \operatorname{div} \overline{F}_q$$

对于适当的压力 $\overline{\pi}_q$。此外，对于 $1 \leq \jmath \leq 12$ 和 $\kappa \geq 0$，由 (2.12) 可得

$$\|u_\ell\|_{\jmath+\kappa} \leq C(\kappa)\ell_q^{-k} \|u_q\|_\jmath \leq C(\kappa)\ell_q^{-k} M \lambda_q^\jmath \delta_q^{\frac{1}{2}} \leq B_{\kappa,2}\ell_q^{-k}\lambda_q^\jmath \delta_q^{\frac{1}{2}} \tag{4.17}$$

当 B_κ取充分大时，$_2$。特别地，$B_{\kappa,\ 2}$ 不依赖于任何 $A_\kappa + B_\kappa$，并将在之后的 (2.17)-(2.18) 中用于确定 B_κ

现在陈述相关的局部存在性估计。

引理 4.1。设给定 $\alpha \in (0,1)$、无散光滑初值 v_0以及光滑外力 f。那么对于任意 $\tau \lesssim_\alpha \min\left(\|v_0\|_{C_x^{1+\alpha}}^{-1}, \|f\|_{C_t^0 C_x^{1+\alpha}}^{-1/2}\right)$，存在唯一的光滑解 v 满足方程 (1.1) 于 $[0,\tau]\times\mathbb{T}^d$，且满足 $v(0,\cdot) = v_0$ 并且

$$\|v\|_{N+\alpha} \lesssim_{N,\alpha} \|v_0\|_{N+\alpha} + \tau \|f\|_{C_t^0 C_x^{N+\alpha}} \quad \textit{for all } N \geq 1.$$

引理 4.1 的证明采用标准方法；我们在附录 B中给出详细说明。根据引理 4.1，对于任意 $j \in \mathcal{J}^*$，令 v_j 为受迫欧拉方程的解

$$\begin{aligned} \partial_t v_j + \operatorname{div} v_j \otimes v_j + \nabla p_j &= \operatorname{div} F_\ell \\ \operatorname{div} v_j &= 0 \\ v_j(t_j) &= v_\ell(t_j) \end{aligned}$$

在 $[t_j, t_{j+2}]\times\mathbb{T}^d$ 上。事实上，由于以下原因，在这个时间尺度上定义 v_j 是允许的

$$\begin{aligned} &\tau_q \|v_\ell(t_j)\|_{1+\alpha} + \tau_q \|\operatorname{div} F_\ell\|_{C_t^0 C_x^{1+\alpha}}^{1/2} \\ &\lesssim \tau_q \lambda_{q-1}^{1+\alpha}\delta_{q-1}^{\frac{1}{2}} + \tau_q \left(\lambda_q^{2-2\alpha}\delta_{q+1}\right)^{1/2} \\ &\lesssim \tau_q \lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} + \tau_q \lambda_q^{1-\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\ll 1$$

其中我们使用了（2.10）、（4.7）和（A.4）。[4]

对于 $1 \le \jmath \le 8$ 和 $\kappa \ge 0$，我们于是有

$$\begin{aligned}\|v_j\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\le C(\kappa)\|v_\ell(t_j)\|_{\jmath+\kappa+\alpha} + C(\kappa)\tau \|\operatorname{div} F_\ell\|_{C_t^0 C_x^{\jmath+\kappa+\alpha}} \\ &\le C(\kappa)M\ell^{-\kappa}\lambda_{q-1}^{\jmath+\alpha}\delta_{q-1}^{1/2} + C(\kappa)\tau B_{\kappa,1}\tau\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1} \\ &\le B_{\kappa,3}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.19}$$

当 B_κ取值足够大时，由于 (2.10)、(4.7)、(2.13) 和 (A.4)，可得, 3。特别地，$B_{\kappa,\ 3}$ 不依赖于任何 $A_\kappa + B_\kappa$。注意，这意味着

$$\|v_j\|_{\jmath+\kappa+\alpha} + \|v_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+\alpha}\delta_{q+1}^{1/2}. \tag{4.20}$$

现在我们定义

$$\overline{v}_q := \sum_i \chi_i^g v_q + \sum_{j\in\mathcal{J}^*} \chi_j^b v_j, \tag{4.21}$$

并令 $\mathcal{B}_{q+1}$ 为包含于 $\mathcal{B}_q$中的区间 $[t_j - 2\epsilon_q\tau_q, t_j + 3\epsilon_q\tau_q]$ 的并集。

立即可知，2.31)成立。此外，选择

$$B_\kappa = \max\{B_{\kappa,1}, B_{\kappa,2}, B_{\kappa,3}\},$$

(由（4.7）、（4.17）和（4.19））, 对于 $1 \le \jmath \le 8$ 和 $\kappa \ge 0$，有

$$\begin{aligned}\|\overline{u}_q\|_{\jmath+\kappa} &\le \chi^g \|u_q\|_{\jmath+\kappa} + \chi^b \|u_\ell\|_{\jmath+\kappa} \\ &\le (A_\kappa + B_\kappa)\,\ell_{q-1}^{-\kappa}\lambda_{q-1}^{\jmath}\delta_{q-1}^{\frac{1}{2}}\chi^g(t) + B_{\kappa,2}\ell_q^{-k}\lambda_q^{\jmath}\delta_q^{\frac{1}{2}}\chi^b(t) \\ &\le (A_\kappa + B_\kappa)\,\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\delta_q^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

由（2.17）、（4.17）和（A.4）可知。类似地，对于 $1 \le \jmath \le 8$ 和 $\kappa \ge 0$,

$$\begin{aligned}\|\overline{v}_q\|_{\jmath+\kappa} &\le \chi^g \|v_q\|_{\jmath+\kappa} + \chi^b\|v_j\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \\ &\le (A_\kappa + B_\kappa)\,\ell_{q-1}^{-\kappa}\lambda_{q-1}^{\jmath}\delta_{q-1}^{\frac{1}{2}}\chi^g(t) + B_{\kappa,3}\ell_q^{-k}\lambda_q^{\jmath-\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\chi^b(t) \\ &\le (A_\kappa + B_\kappa)\,\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

由（2.17）、（4.17）和（4.19）可知。因此，（4.7）、（4.22）和（4.23）推出（2.17)-（2.18），其中 q 改为 $q+1$。

在下文的第4.5 小节中，我们将构造一个合适的光滑张量场 $\overline{R}_q$，使得

$$\partial_t\overline{v}_q + \operatorname{div}(\overline{v}_q \otimes \overline{v}_q) + \nabla\overline{p}_q = \operatorname{div}\left(\chi^g F_q + \chi^b F_\ell\right) + \operatorname{div}\overline{R}_q \tag{4.24}$$

对于某个压力$\overline{p}_{q_0}$。

请注意，在本节余下部分及第 5 节中，我们将使用 $\chi^g F_q + \chi^b F_\ell$（而不是 $\overline{F}_q$）来构造应力。

[4]我们注意到，局部适定性允许持续的时间远长于昂萨格猜想的证明中所允许的时间。这一点对于第 5.2 节至关重要；另请参见第 1.1 小节中的讨论。

4.4. u 的拼接估计。现在我们为 u 建立拼接估计。

命题 4.2。对于任意 $0 \le \jmath \le 12$ 和 $\kappa \ge 0$，有

$$\begin{aligned} \|\overline{u}_q - u_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\le \mathbf{1}_{\operatorname{supp}\chi^g} \|u_q - u_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \\ &\lesssim_\kappa \epsilon_q \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\jmath+\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

and

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}\overline{u}_q - \mathcal{B}u_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\le \mathbf{1}_{\operatorname{supp}\chi^g} \|\mathcal{B}u_q - \mathcal{B}u_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \\ &\lesssim_\kappa (\epsilon_q \epsilon_{q+1})^{\frac{1}{2}} \lambda_{q+1}^{\jmath+\kappa-1-4\alpha} \delta_{q+2}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

其中 $\mathcal{B}$ 是式（2.5）中定义的 Biot-Savart 算子。此外，对于 $0 \le \jmath \le 12$，有

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \chi^g \mathcal{R}(u_q - u_\ell) - \chi^g(1-\chi^g)(u_q - u_\ell) \otimes (u_q - u_\ell)\|_{\jmath+\alpha} \\ &\le \frac{M}{2} \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\jmath-4\alpha} \delta_{q+2}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

命题 4.2 的证明。对于 $0 \le \jmath \le 12$，$\kappa \ge 0$ 和 $t \in \mathcal{G}_q + B(0, \epsilon_{q-1}\tau_{q-1})$，注意到

$$\begin{aligned} &\|u_q - u_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} + \|v_q - v_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \\ &\quad\lesssim_\kappa \ell_q^2 (\|u_q\|_{\jmath+\kappa+2+\alpha} + \|v_q\|_{\jmath+\kappa+2+\alpha}) \\ &\quad\lesssim_\kappa \ell_{q-1}^{-\kappa-\jmath} \frac{1}{\lambda_q \lambda_{q+1}} \lambda_{q-1}^{2+\alpha} \delta_{q-1}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\lesssim \ell_{q-1}^{-\kappa-\jmath} \frac{\lambda_q^{1+\alpha}}{\lambda_{q+1}} \epsilon_q \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\ll \min\left\{ \epsilon_q \lambda_q^{\jmath+\kappa-5\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}, \epsilon_q^2 \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\jmath+\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \tag{4.28}$$

其中，推导至第三行时用到了式（2.17）和（A.2），推导至第四行时用到了式（A.4），最后一个不等式中用到了式（A.6）。这就证明了式（4.25）。同理，由式（2.17）、（A.2）、（A.4）和（A.5）可得

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{B}u_q - \mathcal{B}u_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} + \|\mathcal{B}v_q - \mathcal{B}v_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \\ &\quad\lesssim_\kappa \ell_q^2 (\|\mathcal{B}u_q\|_{\jmath+\kappa+2+\alpha} + \|\mathcal{B}v_q\|_{\jmath+\kappa+2+\alpha}) \\ &\quad\lesssim_\kappa \ell_q^2 (\|u_q\|_{\jmath+\kappa+1+\alpha} + \|v_q\|_{\jmath+\kappa+1+\alpha}) \\ &\quad\lesssim_\kappa \ell_{q-1}^{-\kappa-\jmath} \lambda_q^{-\frac{1}{2}} \lambda_{q+1}^{-\frac{3}{2}} \lambda_{q-1}^{1+\alpha} \delta_{q-1}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\lesssim \ell_{q-1}^{-\kappa-\jmath} \lambda_{q+1}^{-\frac{3}{2}} \epsilon_q \lambda_q^{\frac{1}{2}+\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\ll \epsilon_q^{\frac{3}{2}} \epsilon_{q+1}^{\frac{1}{2}} \lambda_{q+1}^{\jmath+\kappa-1-4\alpha} \delta_{q+2}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.29}$$

对于 $0 \le \jmath \le 12$，$\kappa \ge 0$ 和 $t \in \mathcal{G}_q + B(0, \epsilon_{q-1}\tau_{q-1})$。因此，我们已经证明了式（4.25）和（4.26）。

对于 $0 \le \jmath \le 12$ 和 $\kappa \ge 0$，由（4.28）、（4.29）以及（A.7），我们得到

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \chi^g \mathcal{R}(u_q - u_\ell) - \chi^g(1-\chi^g)(u_q - u_\ell) \otimes (u_q - u_\ell)\|_{\jmath+\alpha} \\ &\quad\lesssim_\kappa (\epsilon_q \tau_q)^{-1} \|\mathcal{B}u_q - \mathcal{B}u_\ell\|_{\jmath+\alpha} + \|u_q - u_\ell\|_{\jmath+\alpha} \|u_q - u_\ell\|_\alpha \end{aligned}$$

$$\lesssim \left(\frac{\epsilon_{q+1}}{\epsilon_q}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lambda_q^{1+3\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)\lambda_{q+1}^{\jmath-1-4\alpha}\delta_{q+2}^{\frac{1}{2}} + \epsilon_q^2\epsilon_{q+1}^2\lambda_{q+1}^{\jmath-8\alpha}\delta_{q+2}$$
$$\lesssim \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-5\alpha}\delta_{q+2}$$

取 a 充分大，即完成了（4.27）的证明。 □

注 4.3。 估计式（4.29）是论证中对 ℓ_q 要求最严格上界的环节；特别是，正是这个估计要求 ℓ_q 小到（2.9）所定义的程度。

现在我们记录命题 4.2 的一些直接推论。注意，当 $1 \le \jmath \le 12$ 时，我们有

$$\|F_{q+1}\|_\jmath = \left\|\overline{F}_q\right\|_\jmath \lesssim \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-4\alpha}\delta_{q+2} \tag{4.30}$$

由（4.27）、（4.8）和（2.14）可知。对于 $0 \le \jmath \le 12$，力增量满足

$$\left\|\overline{F}_q - F_\ell\right\|_\jmath \lesssim \chi^g \|F_q - F_\ell\|_\jmath + \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-4\alpha}\delta_{q+2} \lesssim \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-4\alpha}\delta_{q+2} \tag{4.31}$$

由（4.27）和（4.11）可知。最后，

$$\begin{aligned}\|F_{q+1}\|_0 = \left\|\overline{F}_q\right\|_0 &\le C(d)\epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-4\alpha}\delta_{q+2} + \chi^g\|F_q\|_0 + (1-\chi^g)\|F_\ell\|_0 \\ &\ll \delta_{q+1} + 1 - \frac{3}{2}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \ll 1 - \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.32}$$

当足够大时 a，由于（2.11）、（4.27）和（4.13）。

4.5. v 的拼接估计。接下来我们讨论 v 的拼接估计。为简化记号，我们将使用

$$D_{t,\ell} := \partial_t + v_\ell \cdot \nabla,$$
$$D_{t,q} := \partial_t + \overline{v}_q \cdot \nabla.$$

表示沿相应粗尺度流的物质导数。

命题 4.4（ v 的拼接估计）。对于任意 $0 \le \jmath \le 7$ 和 $\kappa \ge 0$，我们有

$$\|\overline{v}_q - v_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \epsilon_q\tau_q\delta_{q+1}\lambda_q^{1+\jmath-2\alpha}\ell^{-\kappa}, \tag{4.33}$$
$$\|\overline{R}_q\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}, \tag{4.34}$$

并且，对于 $\jmath \le 6$,

$$\|D_{t,q}\overline{R}_q\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa (\epsilon_q\tau_q)^{-1}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}. \tag{4.35}$$

我们指出，在后续的凸积分步骤中，只会对 $t \in \bigcup_{j\in\mathcal{J}}[t_j - \epsilon_q\tau_q, t_j + 2\epsilon_q\tau_q]$ 扰动解。因此，

$$v_{q+1} = \overline{v}_q$$
$$\overline{R}_q = 0$$

对于所有其他时刻。

命题4.4 的证明分为三个步骤，分别处理：（I）良集附近的区域（远离拼接区间）、（II）坏集，以及（III）好区间-坏区间界面。

区域（I）：良集附近。考虑时间区域 $\{\chi^g = 1\}$。在此区域中，我们有

$$\overline{v}_q = v_q, \qquad \overline{F}_q = F_q, \qquad \overline{R}_q := 0$$

于是（4.28）推出（4.33），因此命题4.4 的结论在此区域成立。

区域（II）：在坏集中。考虑时间区域 $[t_j, t_j + 2\tau_q]$ where$j \in \mathcal{J}^*$ 使得 $j+1 \in \mathcal{J}^*$。注意，supp$(\chi_j^b \chi_{j+1}^b)$ 位于 $[t_{j+1}, t_{j+1} + \epsilon_q \tau_q]$ 中。此外，我们有

$$\partial_t \overline{v}_q + \operatorname{div} \overline{v}_q \otimes \overline{v}_q + \nabla \overline{p}_q = \operatorname{div} F_\ell + \operatorname{div} \overline{R}_q,$$

其中

$$\overline{R}_q = \partial_t \chi_j^b \mathcal{R}(v_j - v_{j+1}) - \chi_j^b (1 - \chi_j^b)(v_j - v_{j+1}) \otimes (v_j - v_{j+1}) \tag{4.36}$$

并且 $\mathcal{R}$ 是标准逆散度算子；参见（2.3）–（2.4）。为了估计 $v_j - v_{j+1}$，利用恒等式 $v_j - v_{j+1} = (v_j - v_\ell) - (v_{j+1} - v_\ell)$，只需证明 $v_j - v_\ell$ 的界。

回顾 [Buc+19 命题 3 中的输运估计，3], 该估计断言，对于 $\alpha \in (0,1)$，若 v 是一个光滑向量场，且 $t\|v\|_1 \le 1$，则有

$$\|f(t)\|_\alpha \le e^\alpha \left(\|f(0)\|_\alpha + \int_0^t \mathrm{d}s \ \|(\partial_t + \nabla_v) f(s)\|_\alpha \right). \tag{4.37}$$

命题 4.5。对于 $0 \le \jmath \le 7$、$\kappa \ge 0$ 和 $t \in [t_j, t_j + 2\tau_q]$,

$$\|v_j - v_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \tau_q \epsilon_q \ell^{-\kappa} \lambda_q^{\jmath+1-2\alpha} \delta_{q+1} \tag{4.38}$$

$$\|D_{t,\ell}(v_j - v_\ell)\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \epsilon_q \ell^{-\kappa} \lambda_q^{\jmath+1-2\alpha} \delta_{q+1}. \tag{4.39}$$

证明。注意到

$$(\partial_t + v_\ell \cdot \nabla)(v_\ell - v_j) = -(v_\ell - v_j) \cdot \nabla v_j - \nabla(p_\ell - p_j) + \operatorname{div} R_\ell \tag{4.40}$$

and

$$\nabla(p_\ell - p_j) = \mathcal{P}_1 \left(-(v_\ell - v_j) \cdot \nabla v_\ell - (v_\ell - v_j) \cdot \nabla v_j + \operatorname{div} R_\ell \right), \tag{4.41}$$

其中 $\mathcal{P}_1$ 的定义见第 2.1 小节，并且这里隐含地用到了恒等式（2.2）。接下来，照常利用输运估计（4.37），

$$\begin{aligned}
\|v_\ell - v_j\|_\alpha &\lesssim \int_{t_j}^t \mathrm{d}s \ \|(v_\ell - v_j) \cdot \nabla v_j(s)\|_\alpha + \|\nabla(p_\ell - p_j)(s)\|_\alpha + \|R_\ell(s)\|_{1+\alpha} \\
&\lesssim \tau_q \|R_\ell\|_{C_t^0 C_x^{1+\alpha}} + \int_{t_j}^t \mathrm{d}s \ \|(v_\ell - v_j)(s)\|_\alpha \left(\|v_j\|_{1+\alpha} + \|v_\ell\|_{1+\alpha} \right) \\
&\lesssim \tau_q \epsilon_q \lambda_q^{1-2\alpha} \delta_{q+1} + \int_{t_j}^t \mathrm{d}s \ \|(v_\ell - v_j)(s)\|_\alpha \lambda_q^{1+\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

其中我们用到了（4.14）、（4.19）、（4.1）和（A.4）。由 Gr¨onwall 不等式以及（2.10）、（4.19）、（4.1）和（4.14）可得

$$\|v_\ell - v_j\|_\alpha \lesssim \tau_q \epsilon_q \lambda_q^{1-2\alpha} \delta_{q+1} \exp\left(\tau_q \lambda_q^{1+\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \right) \lesssim \tau_q \epsilon_q \lambda_q^{1-2\alpha} \delta_{q+1},$$

$$\|\nabla(p_\ell - p_j)\|_\alpha \lesssim \tau_q \epsilon_q \lambda_q^{1-2\alpha} \delta_{q+1} \left(\lambda_q^{1+\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \right) + \epsilon_q \lambda_q^{1-2\alpha} \delta_{q+1} \lesssim \epsilon_q \lambda_q^{1-2\alpha} \delta_{q+1},$$

and

$$\left\|D_{t,\ell}\left(v_\ell-v_j\right)\right\|_\alpha \lesssim \tau_q\epsilon_q\lambda_q^{1-2\alpha}\delta_{q+1}\left(\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)+\epsilon_q\lambda_q^{1-2\alpha}\delta_{q+1}\lesssim \epsilon_q\lambda_q^{1-2\alpha}\delta_{q+1}.$$

设 θ 是一个多重指标，满足 $|\theta|=\jmath+\kappa$ 对任意 $1\le\jmath\le 7$， $\kappa\ge 0$；则由（4.14）、（2.10）和（4.41）可得

$$\begin{aligned}\left\|\partial^\theta\nabla\left(p_\ell-p_j\right)\right\|_\alpha &\lesssim \left\|R_\ell\right\|_{1+\jmath+\kappa+\alpha}+\left\|v_\ell-v_j\right\|_\alpha\left(\left\|v_j\right\|_{1+\jmath+\kappa+\alpha}+\left\|v_\ell\right\|_{1+\jmath+\kappa+\alpha}\right)\\ &\quad+\left\|v_\ell-v_j\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\left(\left\|v_j\right\|_{1+\alpha}+\left\|v_\ell\right\|_{1+\alpha}\right)\\ &\lesssim \ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}+\tau_q\epsilon_q\lambda_q^{1-2\alpha}\delta_{q+1}\left(\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\quad+\left\|v_\ell-v_j\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\left(\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\lesssim \ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}+\left\|v_\ell-v_j\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\left(\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

因此，由（4.40）可得

$$\left\|\partial^\theta D_{t,\ell}\left(v_\ell-v_j\right)\right\|_\alpha \lesssim \ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}+\left\|v_\ell-v_j\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\left(\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right).$$

再次应用输运估计，可得

$$\begin{aligned}\left\|\partial^\theta\left(v_\ell-v_j\right)\right\|_\alpha &\lesssim \int_{t_0}^t \mathrm{d}s\ \left\|D_{t,\ell}\partial^\theta\left(v_\ell-v_j\right)(s)\right\|_\alpha\\ &\lesssim \int_{t_0}^t \mathrm{d}s\ \left\|\left[D_{t,\ell},\partial^\theta\right]\left(v_\ell-v_j\right)(s)\right\|_\alpha+\ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}\\ &\quad+\left\|\left(v_\ell-v_j\right)(s)\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\left(\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

由插值以及（2.10）和（4.19），可得

$$\begin{aligned}\left\|\left[D_{t,\ell},\partial^\theta\right]\left(v_\ell-v_j\right)(s)\right\|_\alpha &\lesssim \left\|v_\ell\right\|_{1+\alpha}\left\|\left(v_\ell-v_j\right)(s)\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\\ &\quad+\left\|v_\ell\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\left\|v_\ell-v_j\right\|_{1+\alpha}\\ &\lesssim \left\|v_\ell\right\|_{1+\alpha}\left\|\left(v_\ell-v_j\right)(s)\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\\ &\quad+\left\|v_\ell\right\|_{1+\jmath+\kappa+\alpha}\left\|v_\ell-v_j\right\|_\alpha\\ &\lesssim \left(\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)\left\|\left(v_\ell-v_j\right)(s)\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\\ &\quad+\left(\ell^{-\kappa}\lambda_q^{1+\jmath+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)\tau_q\epsilon_q\lambda_q^{1-2\alpha}\delta_{q+1}\\ &\lesssim \ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}\\ &\quad+\left\|\left(v_\ell-v_j\right)(s)\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\left(\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

结合这些估计并利用 Gr¨onwall 不等式，可得

$$\left\|v_\ell-v_j\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim \tau_q\epsilon_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}\exp\left(\tau\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)\lesssim \tau_q\epsilon_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}$$

and

$$\left\|\partial^\theta D_{t,\ell}\left(v_\ell-v_j\right)\right\|_\alpha \lesssim \epsilon_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}.$$

至此，命题的证明4.5完成。 □

上述命题证明了，对于任意 $t\in[t_j,t_j+2\tau_q]$，式 $z_j:=\mathcal{B}v_j$ 以及 $z_\ell:=\mathcal{B}v_\ell$均成立，其中 $\mathcal{B}$ 是式 2.5中定义的 Biot-Savart 算子。接下来，我们定义势，并建立类似的估计。

命题 4.6. 对于 $0\le\jmath\le 7$, $\kappa\ge 0$ 和 $t\in[t_j,t_j+2\tau_q]$:

$$\|z_j-z_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim_\kappa \tau_q\epsilon_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1} \tag{4.42}$$

$$\|D_{t,\ell}\left(z_j-z_\ell\right)\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim_\kappa \epsilon_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1} \tag{4.43}$$

证明。 设 $\widetilde{z}:=z_\ell-z_j$。 由（4.41）可推得

$$\partial_t\widetilde{z}+\nabla_{v_\ell}\widetilde{z}=(-\Delta)^{-1}d\circ\operatorname{div}\left(\nabla v_{j,\ell}*\widetilde{z}+R_\ell\right)+(-\Delta)^{-1}\delta\circ\operatorname{div}\left(\nabla v_\ell*\widetilde{z}\right)$$

其中 $v_{j,\ell}$ 可能是 v_j 或 v_ℓ，而 $*$ 表示一次张量缩并，其具体细节并不重要；计算过程见 [BHP22，命题 11] 。

设 $0\le\jmath\le 7$ 和 $\kappa\ge 0$ 已给定。由于 $(-\Delta)^{-1}d\circ\operatorname{div}$ 和 $(-\Delta)^{-1}\delta\circ\operatorname{div}$ 是 Calderón-Zygmund 算子，我们估计

$$\begin{aligned}\|D_{t,\ell}\widetilde{z}(s)\|_{\jmath+\kappa+\alpha}&\lesssim\|\nabla v_{j,\ell}\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\|\widetilde{z}(s)\|_\alpha+\|\nabla v_{j,\ell}\|_\alpha\|\widetilde{z}(s)\|_{\jmath+\kappa+\alpha}+\|R_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\\&\lesssim\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac12}\|\widetilde{z}(s)\|_\alpha+\lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac12}\|\widetilde{z}(s)\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\\&\quad+\ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}.\end{aligned} \tag{4.44}$$

再次利用输运估计，我们得到

$$\begin{aligned}\|\widetilde{z}(t)\|_\alpha&\lesssim\int_{t_j}^t\mathrm{d}s\ \|D_{t,\ell}\widetilde{z}(s)\|_\alpha\\&\lesssim\int_{t_j}^t\mathrm{d}s\ \lambda_q^{1+\alpha}\delta_q^{\frac12}\|\widetilde{z}(s)\|_\alpha+\epsilon_q\lambda_q^{-2\alpha}\delta_{q+1}.\end{aligned} \tag{4.45}$$

由 Gr¨onwall 不等式，我们得到

$$\|\widetilde{z}(t)\|_\alpha\lesssim\epsilon_q\tau_q\lambda_q^{-2\alpha}\delta_{q+1}.$$

对于 $1\le\jmath\le 7$ 和 $\kappa\ge 0$，由于 $\nabla\mathcal{B}$ 是 Calder´on-Zygmund，我们有

$$\begin{aligned}\|z_j-z_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha}&\lesssim\|\nabla\left(z_j-z_\ell\right)\|_{\jmath-1+k+\alpha}=\|\nabla\mathcal{B}\left(v_j-v_\ell\right)\|_{\jmath-1+k+\alpha}\\&\lesssim\|v_j-v_\ell\|_{\jmath-1+k+\alpha}\lesssim\tau_q\epsilon_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}.\end{aligned}$$

我们得出

$$\|D_{t,\ell}\widetilde{z}(s)\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim\ell^{-\kappa}\epsilon_q\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}$$

对于 $1\le\jmath\le 7$ 和 $\kappa\ge 0$。 □

还需建立关于 $\overline{R}_q$的估计。这正是下一条命题的内容。

命题 4.7。 令$\overline{R}_q$ 定义于（*4.36*）中，则有以下界

$$\|\overline{R}_q\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim_\kappa\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1} \tag{4.46}$$

$$\|(\partial_t+\overline{v}_q\cdot\nabla)\overline{R}_q\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim_\kappa\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1} \tag{4.47}$$

对于 $0\le\jmath\le 7$、 $\kappa\ge 0$ 和 $t\in[t_{j+1},t_{j+1}+\epsilon_q\tau_q]$。

在命题的证明中4.7，我们会用到回顾一个由 [Con15，引理 1] 以及 [Buc+19，命题 D.1]。

引理 4.8. 设 $\alpha \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{T}$是一个 Calder´on-Zygmund 算子，并且 $b \in C^{N+1,\alpha}$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的无散向量场。那么对于任意 $f \in C^{N+\alpha}(\mathbb{T}^d)$，我们有

$$\|[\mathcal{T}, b\cdot\nabla] f\|_{N+\alpha} \lesssim_{N,\alpha,\mathcal{T}} \|b\|_{1+\alpha}\|f\|_{N+\alpha} + \|b\|_{N+1+\alpha}\|f\|_{\alpha}.$$

有了这个引理，我们就能证明该命题。

命题的证明 4.7。注意，结合式（4.15）、（2.10）、（4.42）和（4.38），以及 Calder´on-Zygmund 算子 $\mathcal{R}\delta$，我们得到

$$\|\partial_t \chi_j^b \mathcal{R}(v_j - v_{j+1})\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \epsilon_q^{-1}\tau_q^{-1}\|z_j - z_{j+1}\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1} \tag{4.48}$$

and

$$\begin{aligned}\|\chi_j^b(1-\chi_j^b)(v_j - v_{j+1})\otimes(v_j - v_{j+1})\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\lesssim_\kappa (\epsilon_q\tau_q\lambda_q\delta_{q+1})^2\lambda_q^{\jmath}\ell^{-\kappa}\\ &\lesssim \epsilon_q^2\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-5\alpha}\delta_{q+1}\end{aligned} \tag{4.49}$$

对于 $0 \le \jmath \le 7$、$\kappa \ge 0$ 和 $t \in [t_{j+1}, t_{j+1}+\epsilon_q\tau_q]$。

现在注意到，式（4.36）、（4.48）和（4.49）意味着

$$\|\overline{R}_q\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}$$

对于 $0 \le \jmath \le 7$ 和 $\kappa \ge 0$。然后，(4.46) 可由 (A.1) 得出。对于物质导数，我们有

$$\left\|\left(\partial_t + \nabla_{\overline{v}_q}\right)\overline{R}_q\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \le \left\|D_{t,\ell}\overline{R}_q\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha} + \left\|\nabla_{\overline{v}_q - v_\ell}\overline{R}_q\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}.$$

可以计算得出

$$\begin{aligned}D_{t,\ell}\overline{R}_q &= \left(\partial_t^2\chi_j^b\right)\mathcal{R}\delta\left(z_j - z_{j+1}\right)\\ &\quad + \left(\partial_t\chi_j^b\right)\mathcal{R}\delta D_{t,\ell}\left(z_j - z_{j+1}\right) + \left(\partial_t\chi_j^b\right)\left[v_\ell\cdot\nabla, \mathcal{R}\delta\right]\left(z_j - z_{j+1}\right)\\ &\quad + \partial_t\left(\left(\chi_j^b\right)^2 - \chi_j^b\right)\left(v_j - v_{j+1}\right)\otimes\left(v_j - v_{j+1}\right)\\ &\quad + \left(\left(\chi_j^b\right)^2 - \chi_j^b\right)\Big(D_{t,\ell}\left(v_j - v_{j+1}\right)\otimes\left(v_j - v_{j+1}\right)\\ &\qquad\qquad + \left(v_j - v_{j+1}\right)\otimes D_{t,\ell}\left(v_j - v_{j+1}\right)\Big).\end{aligned}$$

含有 $[v_\ell\cdot\nabla, \mathcal{R}\delta]$ 的项可由引理 4.8 处理。然后由（4.15）、（4.46）、（2.10）、命题4.5 和 4.6，我们得出

$$\begin{aligned}\left\|\left[v_\ell\cdot\nabla, \mathcal{R}\delta\right]\left(z_j - z_{j+1}\right)\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\lesssim_\kappa \|v_\ell\|_{1+\alpha}\|z_j - z_{j+1}\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\\ &\quad + \|v_\ell\|_{\jmath+\kappa+1+\alpha}\|z_j - z_{j+1}\|_{\alpha}\\ &\lesssim \lambda_q^{1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\left(\epsilon_q\tau_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}\right) \lesssim \epsilon_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-4\alpha}\delta_{q+1},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|(\partial_t + \overline{v}_q\cdot\nabla)\overline{R}_q\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\lesssim_\kappa (\epsilon_q\tau_q)^{-1}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1} + \tau_q^{-1}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}\\ &\quad + \epsilon_q\tau_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{2+\jmath-4\alpha}\delta_{q+1}^2 + \epsilon_q^2\tau_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{2+\jmath-4\alpha}\delta_{q+1}^2\\ &\lesssim (\epsilon_q\tau_q)^{-1}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}.\end{aligned}$$

□

区域（III）：好区间-坏区间界面。还需在第三个区域中证明命题4.4，该区域覆盖好区间与坏区间之间的界面。为此，我们考虑满足 i 和 j 的指标对 $\chi_i^g\chi_j^b\neq 0$。回顾一下，$\operatorname{supp}(\chi_i^g\chi_j^b)$ 是一个长度为 $\sim\epsilon_q\tau_q$ 的区间，其中 $R_q\equiv 0$。在这样的区间内，拼接解满足

$$\begin{aligned}\overline{v}_q-v_\ell&=\chi_i^g\left(v_q-v_\ell\right)+\chi_j^b\left(v_j-v_\ell\right)\\ \partial_t\overline{v}_q+\operatorname{div}\overline{v}_q\otimes\overline{v}_q+\nabla\overline{p}_q&=\operatorname{div}\left(\chi^gF_q+\chi^bF_\ell\right)+\operatorname{div}\overline{R}_q\\ \overline{R}_q&\coloneqq\partial_t\chi_i^g\mathcal{R}(v_q-v_j)-\chi_i^g(1-\chi_i^g)(v_q-v_j)\otimes(v_q-v_j).\end{aligned}$$

对 v_j-v_ℓ 的估计与上文处理的区域（II）完全相同。因此，我们将重点放在 v_q-v_ℓ 上。

命题 4.9。对于 $\jmath\geq 0$、$\kappa\geq 0$ 和 $t\in\mathcal{G}_q+B\left(0,\epsilon_{q-1}\tau_{q-1}\right)$，我们有

$$\left\|v_q-v_\ell\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim\tau_q\epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}\tag{4.50}$$

对于 $\jmath\leq 12$，且

$$\left\|D_{t,\ell}\left(v_q-v_\ell\right)\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim\epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1}\tag{4.51}$$

对于 $\jmath\leq 6$。

证明。由（4.28）可得

$$\left\|v_q-v_\ell\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\lesssim\epsilon_q\ell_{q-1}^{-\kappa-\jmath}\frac{\lambda_q^{1+\alpha}}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ll\epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-5\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}$$

因此，（4.50）得证。接着，由于 $R_q=0$ 在此时间区域内，我们有（类似于（4.40）–（4.41））,

$$\begin{aligned}\left(\partial_t+v_\ell\cdot\nabla\right)\left(v_\ell-v_q\right)=&-\left(v_\ell-v_q\right)\cdot\nabla v_q-\nabla\left(p_\ell-p_q\right)\\&+\operatorname{div}\left(F_\ell-F_q+R_\ell\right)\end{aligned}\tag{4.52}$$

and

$$\nabla\left(p_\ell-p_q\right)=\mathcal{P}_1\left(-\left(v_\ell-v_q\right)\cdot\nabla v_\ell-\left(v_\ell-v_q\right)\cdot\nabla v_q+\operatorname{div}R_\ell\right).\tag{4.53}$$

对于 $0\leq\jmath\leq 6$，$\kappa\geq 0$和 $t\in\mathcal{G}_q+B\left(0,\epsilon_{q-1}\tau_{q-1}\right)$，由（4.10）、（4.50）和（4.14）可得

$$\begin{aligned}\left\|D_{t,\ell}\left(v_q-v_\ell\right)\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}&\lesssim\left\|v_q-v_\ell\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\left\|\nabla v_q\right\|_\alpha+\left\|v_q-v_\ell\right\|_\alpha\left\|\nabla v_q\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}\\&\quad+\left\|F_\ell-F_q\right\|_{1+\jmath+\kappa+\alpha}+\left\|R_\ell\right\|_{1+\jmath+\kappa+\alpha}\\&\lesssim\epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1-2\alpha}\delta_{q+1},\end{aligned}$$

正如所需。 □

上述命题完成了该区域内（4.33）的证明。接下来定义势 $z_q\colon=\mathcal{B}v_q$，$z_\ell\colon=\mathcal{B}v_\ell$ 以及 $\widetilde{z}=z_\ell-z_q$。那么（4.29）意味着

$$\begin{aligned}\left\|z_\ell-z_q\right\|_{\jmath+\kappa+\alpha}&\lesssim\ell_{q-1}^{-\kappa-\jmath}\lambda_{q+1}^{-\frac{3}{2}}\epsilon_q\lambda_q^{\frac{1}{2}+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\\&\ll\epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-1-5\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\\&\sim\tau_q\epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}\end{aligned}$$

对于 $0\leq\jmath\leq 12$、$\kappa\geq 0$ 和 $t\in\mathcal{G}_q+B\left(0,\epsilon_{q-1}\tau_{q-1}\right)$。

与命题的证明4.6中一样，我们注意到
$\partial_t \widetilde{z} + \nabla_{v_\ell} \widetilde{z} = (-\Delta)^{-1} d \circ$ 散度 $(\nabla v_{j,\ell} * \widetilde{z} + F_\ell - F_q + R_\ell) + (-\Delta)^{-1} \delta \circ$ 散度 $($
$\nabla v_\ell * \widetilde{z})$，使得

$$\begin{aligned}\|D_{t,\ell}\widetilde{z}(s)\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\lesssim \|\nabla v_{q,\ell}\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \|\widetilde{z}(s)\|_\alpha + \|\nabla v_{q,\ell}\|_\alpha \|\widetilde{z}(s)\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \\ &\quad + \|F_\ell - F_q\|_{\jmath+\kappa+\alpha} + \|R_\ell\|_{\jmath+\kappa+\alpha} \\ &\lesssim \ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1+\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\left(\epsilon_q\lambda_q^{-1-5\alpha}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right) + \epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1} \\ &\lesssim \epsilon_q\ell_q^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1}\end{aligned}$$

对于 $0 \le \jmath \le 6$、 $\kappa \ge 0$ 和 $t \in \mathcal{G}_q + B(0, \epsilon_{q-1}\tau_{q-1})$。

那么，与（4.48）和（4.49）一样，我们有

$$\begin{aligned}\|\partial_t \chi_i^g \mathcal{R}(v_q - v_{j+1})\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\lesssim_\kappa \ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-2\alpha}\delta_{q+1} \\ \|\chi_i^g(1-\chi_i^g)(v_q - v_{j+1}) \otimes (v_q - v_{j+1})\|_{\jmath+\kappa+\alpha} &\lesssim_\kappa \epsilon_q^2\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-5\alpha}\delta_{q+1}\end{aligned}$$

对于任意 $0 \le \jmath \le 7$、 $\kappa \ge 0$ 和 $t \in \operatorname{supp}(\chi_i^g \chi_j^b)$。

由此，4.33）、（4.34）和（4.35）便可立即得到。这就建立了命题 4.7 关于 $t \in \operatorname{supp}(\chi_i^g \chi_j^b)$ 的类似结论，从而完成了命题 4.4的证明。

5. Perturbation estimates: the convex integration construction

本节将给出扰动估计，以完成命题2.1的证明。具体而言，在通过粘合将雷诺应力局部化到时间上之后，下一步是对 $\overline{v}_q$ 进行高频扰动，以消去 $\overline{R}_q$。这一凸积分过程的结果如下。

命题 5.1. 存在一对光滑函数 $\left(v_{q+1}, \widetilde{R}_{q+1}\right)$，使得

$$\partial_t v_{q+1} + \operatorname{div}(v_{q+1} \otimes v_{q+1}) + \nabla p_{q+1} = \operatorname{div}\left(\chi^g F_q + \chi^b F_\ell\right) + \operatorname{div}\widetilde{R}_q$$

~对于某个压力 p_{q+1}. 。此外，在时间区域 $[t_j - \epsilon_q\tau_q, t_j + 2\epsilon_q\tau_q]$ $(j \in \mathcal{J})$ 之外，$v_{q+1} = \overline{v}_q$、 $R_{q+1} = 0$，并且有如下估计

$$\|v_{q+1} - \overline{v}_q\|_\jmath \le \frac{M}{2}\lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \tag{5.1}$$

$$\left\|\widetilde{R}_{q+1}\right\|_\jmath \le \frac{M}{2}\epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\jmath-3\alpha}\delta_{q+2} \tag{5.2}$$

对于 $0 \le \jmath \le 12$，其中 $M > 1$ 是一个取决于 d 、但不取决于a、 β、 b、 σ、 α和 q 的几何常数。

该命题的证明包含一次精细迭代，以避免在“良好”时期与“糟糕”时期之间的阈值处出现导数损失问题。

我们凸积分过程的几何构造与[BHP22], 中的构造基本相同，更多细节和解释可参见该文。我们回顾一下 [Buc+19引理 5 中 Mikado流的定义。1], 该定义适用于任意维数 $d \ge 3$ （另见[CL22，第 4 节。1]）。事实上，对于任意紧子集 $\mathcal{N} \subset\subset \mathcal{S}_+^{d\times d}$，存在一个光滑向量场 W： $\mathcal{N} \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ 使得

$$\operatorname{div}_\xi W(R,\xi) \otimes W(R,\xi) = 0, \tag{5.3}$$

$$\operatorname{div}_\xi W(R,\xi)=0,$$

$$\fint_{\mathbb{T}^d} W(R,\xi)\ \mathrm{d}\xi=0,$$

and

$$\fint_{\mathbb{T}^d} W(R,\xi)\otimes W(R,\xi)\,\mathrm{d}\xi=R.$$

除非另有说明，我们令 $\mathcal{N}=B_{1/2}(\mathrm{Id})$。可以定义光滑系数函数 $a_k:\mathcal{N}\to\mathbb{C}$, $C_k:\mathcal{N}\to\mathbb{C}^{d\times d}$，使得我们有傅里叶级数

$$W(R,\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} a_k(R)\,e^{i2\pi\langle k,\xi\rangle}$$
$$W(R,\xi)\otimes W(R,\xi)=R+\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} C_k(R)\,e^{i2\pi\langle k,\xi\rangle}$$

并且满足

$$\|\nabla_R^N a_k\|_0+\|\nabla_R^N b_k\|_0\lesssim_{N,M}\langle k\rangle^{-M}.$$

按照标准方式，我们引入局部时间拉格朗日坐标。我们将反向输运流 Φ_i 定义为以下方程的解:

$$(\partial_t+\overline{v}_q\cdot\nabla)\,\Phi_i=0 \tag{5.4}$$
$$\Phi_i(t_i,\cdot)=\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d} \tag{5.5}$$

以及正向特征流 X_i，将其定义为由 $\overline{v}_q$生成的流:

$$\partial_{\underline{t}}X_i(\underline{t},\underline{x})=\overline{v}_q(\underline{t},X_i(\underline{t},\underline{x}))$$
$$X_i(t_i,\cdot)=\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d}.$$

通过定义它们的时空版本

$$\mathbf{\Phi}_i(t,x)\coloneqq(t,\Phi_i(t,x))$$
$$\mathbf{X}_i(\underline{t},\underline{x})\coloneqq(\underline{t},X_i(\underline{t},\underline{x}))$$

我们可以得出 $\mathbf{X}_i=(\mathbf{\Phi}_i)^{-1}$，并且 $\mathbf{X}_i$ 将映射拉格朗日时空（$\underline{t},\underline{x}$）到欧拉时空（$t,x$）。

与 [Buc+19中的命题 3 一样，1], 对于任意 $1\le\jmath\le 6$, $\kappa\ge 0$, 以及 $|t-t_i|\lesssim\tau_q$, 我们有

$$\|\nabla\Phi_i(t)-\mathrm{Id}\|_0\lesssim|t-t_i|\,\|\nabla\overline{v}_q\|_0\lesssim\tau_q\lambda_q\delta_{q+1}^{\frac12}\lesssim\lambda_q^{-3\alpha}\ll 1 \tag{5.6}$$
$$\|\nabla\Phi_i(t)\|_{\jmath+\kappa}\lesssim|t-t_i|\,\|\nabla\overline{v}_q\|_{\jmath+\kappa}\lesssim\tau_q\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath+1}\delta_{q+1}^{\frac12}\lesssim\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath-3\alpha} \tag{5.7}$$

这里我们用到了（4.23）。

现在我们定义

$$\underline{R_i}\coloneqq\mathbf{X}_i^*\left(\mathrm{Id}-\frac{\overline{R}_q}{\delta_{q+1}}\right)$$

其中我们将 $\overline{R}_q$ 视为一个 (2, 0) 型张量（更明确地说，我们注意到有如下恒等式

$$\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i=\nabla\Phi_i\left(\mathrm{Id}-\frac{\overline{R}_q}{\delta_{q+1}}\right)\nabla\Phi_i^T \tag{5.8}$$

并且我们注意到，对于 $|t-t_i| \lesssim \tau_q$，有 $\underline{R_i} \in B_{1/2}(\mathrm{Id})$，因为 $\nabla\Phi_i$ 接近 Id，且 $\left\|\frac{\overline{R}_q}{\delta_{q+1}}\right\|_0 \lesssim \lambda_q^{-2\alpha}$根据（4.34）。

对于每个 i，令 ρ_i 为一个光滑的截断函数，使其

$$\mathbf{1}_{[t_i,t_i+\epsilon_q\tau_q]} \leq \rho_i \leq \mathbf{1}_{[t_i-\epsilon_q\tau_q,t_i+2\epsilon_q\tau_q]}$$

满足以下界

$$\left\|\partial_t^N \rho_i\right\|_0 \lesssim (\epsilon_q\tau_q)^{-N} \ \forall N \in \mathbb{N}_0.$$

现在定义扰动

$$w^{(o)} := \sum_i \delta_{q+1}^{1/2}\rho_i(t)\nabla\Phi_i^{-1}W(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i, \lambda_{q+1}\Phi_i).$$

对于 $t \in [t_i-\epsilon_q\tau_q, t_i+2\epsilon_q\tau_q]$，在局部时间拉格朗日坐标中，

$$\underline{w^{(o)}} := \mathbf{X}_i^* w^{(o)},$$

我们有

$$\begin{aligned}\underline{w^{(o)}} &= \delta_{q+1}^{1/2}\rho_i(\underline{t})W(\underline{R_i}, \lambda_{q+1}\underline{x}) \\ &= \sum_{k\neq 0} \underbrace{\delta_{q+1}^{1/2}\rho_i(\underline{t})a_k(\underline{R_i})}_{:=\underline{b_{i,k}}} e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\underline{x}\rangle} = \sum_{k\neq 0}\underline{b_{i,k}}e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\underline{x}\rangle}\end{aligned}$$

因此，定义 $b_{i,\ k} := \mathbf{\Phi}_i^* b_{i,\ k}$（在 $\underline{\text{supp}}\ \rho_i$ 之外延拓为零），我们有

$$w^{(o)} = \sum_i\sum_{k\neq 0} b_{i,k}e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\Phi_i\rangle}.$$

为了解决 $\operatorname{div} w^{(o)} \neq 0$ 这一问题，我们引入一个不可压缩性校正项。具体而言，对于 $t \in [t_i-\epsilon_q\tau_q, t_i+2\epsilon_q\tau_q]$，在局部时间拉格朗日坐标中，我们定义

$$\underline{w^{(c)}} := \sum_{k\neq 0} \underbrace{\delta_{q+1}^{1/2}\rho_i(\underline{t})\operatorname{div}_{\underline{x}}\left(\frac{k\wedge a_k\left(\underline{R_i}\right)}{i2\pi\lambda_{q+1}|k|^2}\right)}_{:=\underline{c_{i,k}}} e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\underline{x}\rangle} = \sum_{k\neq 0}\underline{c_{i,k}}e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\underline{x}\rangle}.$$

在欧拉坐标中，我们定义 $c_{i,\ k} := \mathbf{\Phi}_i^* c_{i,\ k}$（同样在 $\underline{\text{supp}}\ \rho_i$ 之外延拓为零），以及

$$w^{(c)} := \sum_i\sum_{k\neq 0} c_{i,k}e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\Phi_i\rangle}$$

从而得到 $\underline{w^{(c)}} = \mathbf{X}_i^* w^{(c)}$，其中 $t \in [t_i-\epsilon_q\tau_q, t_i+2\epsilon_q\tau_q]$。有了这个校正项，我们现在终于可以定义

$$v_{q+1} := \overline{v}_q + w_{q+1}.$$

注意，完整的扰动

$$w_{q+1} := w^{(o)} + w^{(c)}$$

是无散的。此外，

$$\begin{aligned}\partial_t v_{q+1} + \operatorname{div}(v_{q+1}\otimes v_{q+1}) &= (\partial_t\overline{v}_q + \operatorname{div}(\overline{v}_q\otimes\overline{v}_q)) + \operatorname{div}(w_{q+1}\otimes w_{q+1}) \\ &\quad + \partial_t w_{q+1} + \operatorname{div}(\overline{v}_q\otimes w_{q+1}) + \operatorname{div}(w_{q+1}\otimes\overline{v}_q) \\ &= -\nabla\overline{p}_q + \operatorname{div}\left(\overline{R}_q + w_{q+1}\otimes w_{q+1}\right) \\ &\quad + D_{t,q}w_{q+1} + w_{q+1}\cdot\nabla\overline{v}_q + \operatorname{div}\left(\chi^g F_q + \chi^b F_\ell\right)\end{aligned}$$

因此我们可以将应力定义为

$$\widetilde{R}_{q+1} \coloneqq R_{\mathrm{osc}} + R_{\mathrm{trans}} + R_{\mathrm{Nash}}$$

其中

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{osc}} &\coloneqq \mathcal{R}\,\mathrm{div}\left(\overline{R}_q + w_{q+1}\otimes w_{q+1}\right)\\ R_{\mathrm{trans}} &\coloneqq \mathcal{R}D_{t,q}w_{q+1}\\ R_{\mathrm{Nash}} &\coloneqq \mathcal{R}\left(w_{q+1}\cdot\nabla\overline{v}_q\right). \end{aligned}$$

现在我们可以开始证明 5.1 和 5.2，即命题 5.1.

5.1. 证明 **5.1**：扰动估计。 现在我们建立一组主要的扰动估计。

命题 5.2. 在本小节中，我们始终假设 $t\in[t_i-\epsilon_q\tau_q, t_i+2\epsilon_q\tau_q]$ 和 $N\in\mathbb{N}_0$。那么对于 $\kappa\geq 0$ 和 $k\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}$，有：

$$\|\nabla\Phi_i\|_N + \left\|\nabla\Phi_i^{-1}\right\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath \tag{5.9}$$

$$\left\|\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath \tag{5.10}$$

$$\|b_{i,k}\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath\,|k|^{-2d} \tag{5.11}$$

$$\|c_{i,k}\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath\,|k|^{-2d} \tag{5.12}$$

$$\|D_{t,q}\left(\nabla\Phi_i\right)\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \lambda_q\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath \tag{5.13}$$

$$\left\|D_{t,q}\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath \tag{5.14}$$

$$\|D_{t,q}b_{i,k}\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath\,|k|^{-2d} \tag{5.15}$$

对于 $0\leq\jmath\leq 6$，并且

$$\|D_{t,q}c_{i,k}\|_{\jmath+\kappa} \lesssim_\kappa \left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath\,|k|^{-2d} \tag{5.16}$$

对于 $0\leq\jmath\leq 5$。

证明。 估计式（5.9）是（5.6）和（5.7）的标准推论。接下来，注意到（5.9）和（4.34）推出（5.10）：

$$\begin{aligned} \left\|\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa} &\lesssim_\kappa \|\nabla\Phi_i\|_0^2\left\|\mathrm{Id}-\frac{\overline{R}_q}{\delta_{q+1}}\right\|_{\jmath+\kappa} + \|\nabla\Phi_i\|_{\jmath+\kappa}\|\nabla\Phi_i\|_0\left\|\mathrm{Id}-\frac{\overline{R}_q}{\delta_{q+1}}\right\|_0\\ &\lesssim \ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath. \end{aligned}$$

为了证明（5.11），我们使用（5.10），并结合 a_k 及其导数的快速衰减，得到

$$\begin{aligned} \|b_{i,k}\|_{\jmath+\kappa} &= \left\|\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\rho_i(t)\nabla\Phi_i^{-1}a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\lesssim \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\nabla\Phi_i^{-1}\right\|_{\jmath+\kappa}\left\|a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right\|_0 + \left\|\nabla\Phi_i^{-1}\right\|_0\left\|a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right\|_{\jmath+\kappa}\right)\\ &\lesssim \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^\jmath\,|k|^{-2d}. \end{aligned}$$

类似地，我们得到估计式（5.12）：

$$\begin{aligned}\left\|c_{i,k}\right\|_{\jmath+\kappa} &= \left\|\delta_{q+1}^{1/2}\rho_i(t)\nabla\Phi_i^{-1}\operatorname{div}_{\underline{x}}\left(\frac{k\wedge a_k\left(\underline{R_i}\right)}{i2\pi\lambda_{q+1}\left|k\right|^2}\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\lesssim \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\left|k\right|^{-1}\lambda_{q+1}^{-1}\Big(\left\|\nabla\Phi_i^{-1}\right\|_{\jmath+\kappa}\left\|\nabla\left(a_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_0\\ &\quad+\left\|\nabla\Phi_i^{-1}\right\|_0\left\|\nabla\left(a_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|z_{\jmath+\kappa}\Big)\\ &\lesssim \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d}\end{aligned}$$

运用了链式法则之后

$$\nabla\left(a_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i=\nabla\left(a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right)\left(\nabla\Phi_i\right)^{-1}. \tag{5.17}$$

接下来，我们计算

$$\begin{aligned}\left\|D_{t,q}\nabla\Phi_i\right\|_{\jmath+\kappa} &= \left\|\nabla_{\overline{v}_q}\left(\nabla\Phi_i\right)+\nabla\partial_t\Phi_i\right\|_{\jmath+\kappa}=\left\|\left[\nabla_{\overline{v}_q},\nabla\right]\Phi_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\lesssim \left\|\nabla\overline{v}_q\right\|_{\jmath+\kappa}\left\|\nabla\Phi_i\right\|_0+\left\|\nabla\overline{v}_q\right\|_0\left\|\nabla\Phi_i\right\|_{\jmath+\kappa}\lesssim\lambda_q\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\end{aligned}$$

这证明了（5.13），其中我们用到了（4.23）。

那么（5.13）、（5.8）、（4.34）和（4.35）通过以下估计推出（5.14）

$$\begin{aligned}&\left\|D_{t,q}\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\lesssim\left\|D_{t,q}\left(\nabla\Phi_i\right)\left(\mathrm{Id}-\frac{\overline{R}_q}{\delta_{q+1}}\right)\nabla\Phi_i^T+\nabla\Phi_i\left(\mathrm{Id}-\frac{\overline{R}_q}{\delta_{q+1}}\right)D_{t,q}\nabla\Phi_i^T\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\quad+\delta_{q+1}^{-1}\left\|\nabla\Phi_i\left(D_{t,q}\overline{R}_q\right)\nabla\Phi_i^T\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\lesssim\lambda_q\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}+\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\lesssim\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}.\end{aligned}$$

我们回顾以下恒等式

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{t}}\left(w\circ\mathbf{X}_i\right)&=\left(D_{t,q}w\right)\circ\mathbf{X}_i\\ \partial_{\underline{t}}\underline{w}\circ\mathbf{\Phi}_i&=D_{t,q}\left(\underline{w}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\end{aligned}$$

对于任意张量 w， $\underline{w}$。接着，我们利用（5.14）、（5.10）和（5.9）通过以下估计证明（5.15）

$$\begin{aligned}\left\|D_{t,q}b_{i,k}\right\|_{\jmath+\kappa} &= \left\|\partial_{\underline{t}}\left(\mathbf{\Phi}_i^*\underline{b_{i,k}}\circ\mathbf{X}_i\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &= \left\|\partial_{\underline{t}}\left(\left(\nabla X_i\right)\underline{b_{i,k}}\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &= \delta_{q+1}^{1/2}\left\|\partial_{\underline{t}}\left(\left(\nabla X_i\right)\rho_i\left(\underline{t}\right)a_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\lesssim \delta_{q+1}^{1/2}\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\left\|\left(\left(\nabla X_i\right)a_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\quad+\delta_{q+1}^{1/2}\left\|\partial_{\underline{t}}\left(\left(\nabla X_i\right)a_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\lesssim \delta_{q+1}^{1/2}\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\left\|\left(\nabla\Phi_i\right)^{-1}a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\quad+\delta_{q+1}^{1/2}\left\|\left(\nabla\left(\overline{v}_q\circ\mathbf{X}_i\right)a_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\quad+\delta_{q+1}^{1/2}\left\|\left(\nabla X_i\right)\left(\nabla a_k\left(\underline{R_i}\right)\partial_{\underline{t}}\left(\underline{R_i}\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\ &\lesssim \left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\delta_{q+1}^{1/2}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\delta_{q+1}^{1/2}\left\|\left(\nabla\overline{v}_q\right)\left(\nabla\Phi_i\right)^{-1}a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right\|_{\jmath+\kappa}\\
&+\delta_{q+1}^{1/2}\left\|\left(\nabla\Phi_i\right)^{-1}\left(\nabla a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)D_{t,q}\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right)\right\|_{\jmath+\kappa}\\
\lesssim&\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\delta_{q+1}^{1/2}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d}\\
&+\delta_{q+1}^{1/2}\lambda_q\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d}\\
&+\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\delta_{q+1}^{1/2}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d}\\
\lesssim&\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\delta_{q+1}^{1/2}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d}.
\end{aligned}
$$

最后，再次利用（5.17），并令符号 $*$ 再次表示任意张量缩并，我们得到估计

$$
\begin{aligned}
&\left\|D_{t,q}c_{i,k}\right\|_N\\
\lesssim&\,\delta_{q+1}^{1/2}\lambda_{q+1}^{-1}\left|k\right|^{-1}\left\|\partial_{\underline{t}}\left(\rho_i(\underline{t})\left(\nabla X_i\right)*\nabla\left(a_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\right)\circ\mathbf{\Phi}_i\right\|_{\jmath+\kappa}\\
\lesssim&\,\delta_{q+1}^{1/2}\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\lambda_{q+1}^{-1}\left|k\right|^{-1}\left\|\left(\nabla\Phi_i\right)^{-1}*\nabla\left(a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right)*\nabla\Phi_i^{-1}\right\|_{\jmath+\kappa}\\
&+\delta_{q+1}^{1/2}\lambda_{q+1}^{-1}\left|k\right|^{-1}\left\|\nabla\overline{v}_q*\nabla\Phi_i^{-1}*\nabla\left(a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right)*\nabla\Phi_i^{-1}\right\|_{\jmath+\kappa}\\
&+\delta_{q+1}^{1/2}\lambda_{q+1}^{-1}\left|k\right|^{-1}\left\|\left(\nabla\Phi_i\right)^{-1}*\nabla\left(\nabla a_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)D_{t,q}\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\right)*\nabla\Phi_i^{-1}\right\|_{\jmath+\kappa}\\
\lesssim&\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1}^{1/2}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d}+\left(\lambda_q\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1}^{1/2}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d}\\
\lesssim&\left(\epsilon_q\tau_q\right)^{-1}\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1}^{1/2}\ell^{-\kappa}\lambda_q^{\jmath}\left|k\right|^{-2d},
\end{aligned}
$$

这证明了（5.16）。 □

推论 5.3。存在一个普适几何常数 $M=M(d)>1$（不依赖于 a、β、b、σ、α、q），使得对任意 $0\le\jmath\le 12$,

$$
\left\|w^{(c)}\right\|_{\jmath}\lesssim_{d,\neg q}\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\lambda_{q+1}^{\jmath}\delta_{q+1}^{1/2} \tag{5.18}
$$

$$
\left\|w^{(o)}\right\|_{\jmath}\le\frac{M}{4}\lambda_{q+1}^{\jmath}\delta_{q+1}^{1/2} \tag{5.19}
$$

$$
\left\|w_{q+1}\right\|_{\jmath}\le\frac{M}{2}\lambda_{q+1}^{\jmath}\delta_{q+1}^{1/2}. \tag{5.20}
$$

证明。通过选取 a 充分大，我们可以使得 $\left\|\nabla\Phi_i\right\|_0\le 2$。由（5.11）的证明可知，存在 $M=M$（d）和 $\overline{M}=M$（d）（不依赖于 a、β、b、σ、α、q），使得

$$
\begin{aligned}
\left\|b_{i,k}\right\|_0\le&\overline{M}\left|k\right|^{-2d}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\\
\sum_{k\neq 0}\left\|b_{i,k}\right\|_0\le&\sum_{k\neq 0}\overline{M}\left|k\right|^{-2d}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\le\frac{M}{10}\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

事实上，M 和$\overline{M}$ 仅取决于 W：$\mathcal{N}\times\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}^d$。因此，当5.19式成立。$\jmath=0$。

对于高阶导数 $\partial^\theta w^{(o)}$，其中 $|\theta| = \jmath \le 12$，唯一有问题的项是

$$\sum_{k\neq 0} b_{i,k}\partial^\theta\left(e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\Phi_i\rangle}\right)$$

因为这将得到 $\sum_{k\neq0}\lambda_{q+1}^{\jmath}\overline{M}\,|k|^{-2d}\,\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}$（必要时增大 $\overline{M}$ 和 M）。$\partial^\theta w^{(o)}$ 中的所有其他项都将涉及 $b_{i,k}$ 的导数，从而得到 $C(d)\ell^{-1}$；当 a 足够大时，我们有 $C(d)\ell^{-1} \ll \frac{M}{100}\lambda_{q+1}$。因此，只需增大 a，就可以吸收 $C(d)$ 的所有出现项。其余不等式同样显然。□

至此，(5.1) 的证明完成。

5.2. **(5.2)** 的证明：新雷诺应力的估计。同样，在本小节中，我们始终假设 $t \in [t_i - \epsilon_q\tau_q, t_i + 2\epsilon_q\tau_q]$。为得到 (5.2)，只需证明

$$\left\|\widetilde{R}_{q+1}\right\|_{\kappa+\alpha} \lesssim_{\kappa,d,\neg q} \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha}\delta_{q+2}. \tag{5.21}$$

我们使用以下关于反散度算子的标准驻相引理；例如参见 [Buc+19，命题C。2]。

引理 5.4. 对任意 $N \ge 1$、向量场 $u \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{T}^d\right)$ 和相位函数 $\phi \in C^\infty\left(\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d\right)$，满足 $\frac{1}{2} \le |\nabla\phi| \le 2$，

$$\left\|\mathcal{R}\left(u(x)e^{i2\pi\langle k,\phi\rangle}\right)\right\|_\alpha \lesssim_N |k|^{\alpha-1}\|u\|_0 + |k|^{\alpha-N}\left(\|u\|_0\|\phi\|_{N+\alpha} + \|u\|_{N+\alpha}\right). \tag{5.22}$$

(5.22) 中的误差项可以通过选取足够大的 N 来压低（且与 q无关）。特别地，我们可以使得

$$\ell_q^{N+100\alpha}\lambda_{q+1}^{N-1-100\alpha} > 1, \tag{5.23}$$

只要

$$-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}b + b\left(\frac{N-1-100\alpha}{N+100\alpha}\right) > 0$$

当 $N = N(b,\beta,\sigma,\alpha)$ 足够大时，这一条件成立。除非另有说明，我们将采用这样的 N 取值。

我们指出，对于任意 $\kappa \ge 0$，都有一个平凡估计

$$\left\|e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\Phi_i\rangle}\right\|_\kappa \lesssim_\kappa \lambda_{q+1}^\kappa. \tag{5.24}$$

5.2.1. Nash误差。利用（5.22）和命题5.2，我们得到

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{R}\left(w^{(o)}\cdot\nabla\overline{v}_q\right)\right\|_\alpha &\lesssim \sum_{k\neq0}\left\|\mathcal{R}\left(b_{i,k}\cdot\nabla\overline{v}_q e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\Phi_i\rangle}\right)\right\|_\alpha \\
&\lesssim_N \sum_{k\neq0}|\lambda_{q+1}k|^{\alpha-1}|k|^{-2d}\,\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\left(\lambda_q\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right)\lambda_{q+1}^{3\alpha} \\
&\quad + |\lambda_{q+1}k|^{\alpha-N}|k|^{-2d}\left(\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\lambda_q\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\ell^{-N-2\alpha}\right) \\
&\lesssim \lambda_{q+1}^{4\alpha}\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1} \lesssim \epsilon_{q+1}\delta_{q+2}\lambda_{q+1}^{-4\alpha}
\end{aligned}$$

其中，最后一行用到了（5.23），最后一个不等式用到了（A.5）。此外，对于任意 $\kappa \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{R}\left(w^{(o)} \cdot \nabla \overline{v}_q\right)\right\|_{\kappa+\alpha} &\lesssim_\kappa \sum_{k \neq 0}\left\|b_{i,k} \cdot \nabla \overline{v}_q e^{i2\pi\langle \lambda_{q+1} k, \Phi_i\rangle}\right\|_{\kappa-1+\alpha} \\ &\lesssim \lambda_{q+1}^{\kappa-1+3\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\left(\lambda_q \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \lambda_{q+1}^{\kappa+3\alpha} \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \delta_{q+1} \\ &\lesssim \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}\end{aligned}$$

其中再次使用了（A.5），并用于最后一个不等式。类似地，对于任意 $\kappa \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{R}\left(w^{(c)} \cdot \nabla \overline{v}_q\right)\right\|_{\alpha} &\lesssim \sum_{k \neq 0}\left\|\mathcal{R}\left(c_{i,k} \cdot \nabla \overline{v}_q e^{i2\pi\langle \lambda_{q+1} k, \Phi_i\rangle}\right)\right\|_{\alpha} \\ &\lesssim \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \epsilon_{q+1} \delta_{q+2} \lambda_{q+1}^{-4\alpha}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{R}\left(w^{(c)} \cdot \nabla \overline{v}_q\right)\right\|_{\kappa+\alpha} &\lesssim \sum_{k \neq 0}\left\|c_{i,k} \cdot \nabla \overline{v}_q e^{i2\pi\langle \lambda_{q+1} k, \Phi_i\rangle}\right\|_{\kappa-1+\alpha} \\ &\lesssim \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}\end{aligned}$$

这通过小因子 $\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}$ 得到了改进。因此我们有

$$\|R_{\text{Nash}}\|_{\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}$$

对于任意 $\kappa \geq 0$。

5.2.2. 输运误差。根据 Φ 的构造（见（5.5）及其周围的讨论），我们有关键恒等式 $D_{t,\ q}\left(e^{i2\pi\langle \lambda_{q+1} k,\ \Phi_i\rangle}\right) = 0$，借此我们可以在估计中避免出现 λ_{q+1} 因子。

与 $\mathcal{R}\left(w^{(o)} \cdot \nabla \overline{v}_q\right)$相比，$\mathcal{R}D_t$ 的估计 $_q w^{(o)}$ 会多出一个因子 $\epsilon_q^{-1}\lambda_q^{3\alpha}$，因为 $\nabla \overline{v}_q$ 的代价为 $\lambda_q \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}$，而 D_t 的代价为 $_q$，其代价为 $\epsilon_q^{-1}\tau_q^{-1}$。否则计算完全相同，并利用（A.5）可得，

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{R}D_{t,q} w^{(o)}\right\|_{\alpha} &\lesssim \lambda_{q+1}^{7\alpha} \epsilon_q^{-1} \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \delta_{q+1} \lesssim \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{-4\alpha} \delta_{q+2}, \\ \left\|\mathcal{R}D_{t,q} w^{(o)}\right\|_{\kappa+\alpha} &\lesssim \lambda_{q+1}^{\kappa+6\alpha} \epsilon_q^{-1} \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \delta_{q+1} \lesssim \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}, \\ \left\|\mathcal{R}D_{t,q} w^{(c)}\right\|_{\alpha} &\lesssim \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{-4\alpha} \delta_{q+2},\end{aligned}$$

and

$$\left\|\mathcal{R}D_{t,q} w^{(c)}\right\|_{\kappa+\alpha} \lesssim \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}$$

对于 $\kappa \geq 1$。因此我们有

$$\|R_{\text{trans}}\|_{\kappa+\alpha} \lesssim_\kappa \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha} \delta_{q+2}$$

对于任意 $\kappa \geq 0$。

5.2.3. 振荡误差。我们采用分解

$$R_{\mathrm{osc}} = \mathcal{R}\,\mathrm{div}\left(\overline{R}_q + w_{q+1} \otimes w_{q+1}\right) = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &:= \mathcal{R}\,\mathrm{div}\left(\overline{R}_q + w^{(o)} \otimes w^{(o)}\right), \\
\mathcal{O}_2 &:= \mathcal{R}\,\mathrm{div}\left(w^{(c)} \otimes w^{(o)} + w^{(o)} \otimes w^{(c)} + w^{(c)} \otimes w^{(c)}\right).
\end{aligned}$$

利用 $\mathcal{R}\mathrm{div}$ 是一个 Calder´on-Zygmund 算子，并结合推论 5.3中的界，对于任意 $\kappa \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{O}_2\|_{\kappa+\alpha} &\lesssim \left\|w^{(c)}\right\|_{\kappa+\alpha}\left\|w^{(o)}\right\|_{\alpha} + \left\|w^{(c)}\right\|_{\alpha}\left\|w^{(o)}\right\|_{\kappa+\alpha} + \left\|w^{(c)}\right\|_{\kappa+\alpha}\left\|w^{(c)}\right\|_{\alpha} \\
&\lesssim \frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\lambda_{q+1}^{\kappa+2\alpha}\delta_{q+1} \lesssim \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha}\delta_{q+2}
\end{aligned}$$

其中我们再次使用参数关系式（A.5）。接下来，利用（5.3）计算可得

$$\mathcal{O}_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \delta_{q+1}\rho_i^2\mathcal{R}\left(\mathrm{div}\left(\mathbf{\Phi}_i^*\left(C_k\left(\underline{R_i}\right)\right)\right)e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\Phi_i\rangle}\right),$$

详细计算见 [BHP22] 第 5.3.3 节。由此，(5.22) 和 (A.5) 可以用来估计

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{O}_1\|_{\alpha} &\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \left\|\delta_{q+1}\mathcal{R}\left(\mathrm{div}\left(\nabla\Phi_i^{-1}C_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\nabla\Phi_i^{-T}\right)e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\Phi_i\rangle}\right)\right\|_{\alpha} \\
&\lesssim_N \sum_{k\neq 0} |\lambda_{q+1}k|^{\alpha-1}|k|^{-2d}\lambda_q\delta_{q+1} + |\lambda_{q+1}k|^{\alpha-N}|k|^{-2d}\left(\lambda_q\delta_{q+1}\right)\ell^{-N-4\alpha} \\
&\lesssim \lambda_{q+1}^{\alpha}\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}}\delta_{q+1} \lesssim \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{-4\alpha}\delta_{q+2}
\end{aligned}$$

类似地，对于任意 $\kappa \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{O}_1\|_{\kappa+\alpha} &\lesssim \delta_{q+1}\left\|\mathrm{div}\left(\nabla\Phi_i^{-1}C_k\left(\underline{R_i}\circ\mathbf{\Phi}_i\right)\nabla\Phi_i^{-T}\right)e^{i2\pi\langle\lambda_{q+1}k,\Phi_i\rangle}\right\|_{\kappa-1+\alpha} \\
&\lesssim \delta_{q+1}\lambda_{q+1}^{\kappa+4\alpha}\frac{\lambda_q}{\lambda_{q+1}} \lesssim \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha}\delta_{q+2}.
\end{aligned}$$

我们得出，对于任意 $\kappa \geq 0$,

$$\|R_{\mathrm{osc}}\|_{\kappa+\alpha} \lesssim_{\kappa} \epsilon_{q+1}\lambda_{q+1}^{\kappa-4\alpha}\delta_{q+2}$$

这就完成了对 (5.21) 的证明。

至此，我们完成了命题 5.1 的证明。

6. Conclusion of the proof of Proposition 2.1

在本节中，我们完成命题2.1的证明。

命题 2.1的证明。 注意,

$$\begin{cases} \partial_t \overline{u}_q + \operatorname{div} \overline{u}_q \otimes \overline{u}_q + \nabla \overline{\pi}_q = \operatorname{div} \overline{F}_q \\ \partial_t v_{q+1} + \operatorname{div} v_{q+1} \otimes v_{q+1} + \nabla p_{q+1} = \operatorname{div} \overline{F}_q + \operatorname{div} \left(\chi^g F_q + \chi^b F_\ell - \overline{F}_q + \widetilde{R}_{q+1} \right). \end{cases} \tag{6.1}$$

定义 $u_{q+1} \colon = \overline{u}_q$, $F_{q+1} \colon = \overline{F}_q$, 以及 $R_{q+1} \colon = \chi^g F_q + \chi^b F_\ell - \overline{F}_q + \widetilde{R}_{q+1}$, 显然可得（2.16）, 其中 q 替换为 $q+1$, 以及（2.30）。利用（2.11）、（5.1）和（4.33）, 于是可得

$$\|u_{q+1}\|_0 \le \|u_q\|_0 \le 1 - \delta_q^{\frac{1}{2}} \le 1 - \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\begin{aligned} \|v_{q+1}\|_0 &\le \|v_{q+1} - \overline{v}_q\|_0 + \|\overline{v}_q - v_\ell\|_0 + \|v_\ell\|_0 \\ &\le \frac{M}{2} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} + C(d) \epsilon_q \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} + 1 - \delta_q^{\frac{1}{2}} \ll 1 - \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

只要 a 选取得足够大即可。结合（4.32）, 因此我们证明了（2.22）。

同样, 对于任意 $1 \le \jmath \le 12$, 由（2.12）、（5.1）和（4.23）可得

$$\|u_{q+1}\|_\jmath = \left\| \chi^g u_q + \chi^b u_\ell \right\|_\jmath \le \|u_q\|_\jmath \le M \lambda_q^\jmath \delta_q^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\|v_{q+1}\|_\jmath \le \|v_{q+1} - \overline{v}_q\|_\jmath + \|\overline{v}_q\|_\jmath \le \frac{M}{2} \lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} + C(d) \ell^{-(\jmath-1)} \lambda_q^{1-\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \ll M \lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}$$

当 a足够大时, 因此结合（4.30）, 我们证明了（2.23）、（2.24）和（2.25）。

转向 R_{q+1}, 注意到对于任意 $0 \le \jmath \le 12$, 我们有

$$\|R_{q+1}\|_\jmath \le \left\| \widetilde{R}_{q+1} \right\|_\jmath + \left\| \chi^g F_q + \chi^b F_\ell - \overline{F}_q \right\|_\jmath \le M \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\jmath - 3\alpha} \delta_{q+2}$$

由（5.2）和（4.27）可知; 因此我们证明了（2.26）。

最后, 对于 $\jmath \in \{0, 1\}$, 由（4.6）、（5.1）、（4.33）、（2.13）、（4.9）和（4.31）, 我们得到:

$$\|u_{q+1} - u_q\|_\jmath = \chi^b \|u_\ell - u_q\|_\jmath \le C(d) \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+2}^{\frac{1}{2}} \ll M \lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} \|v_{q+1} - v_q\|_\jmath &\le \|v_{q+1} - \overline{v}_q\|_\jmath + \|\overline{v}_q - v_\ell\|_\jmath + \|v_\ell - v_q\|_\jmath \\ &\le \frac{M}{2} \lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} + C(d) \epsilon_q \lambda_q^\jmath \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} + \ell C(d) \lambda_{q-1}^{1+\jmath} \delta_{q-1}^{\frac{1}{2}} \\ &\ll M \lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|F_{q+1} - F_q\|_\jmath &\le \left\| \overline{F}_q - F_\ell \right\|_\jmath + \|F_\ell - F_q\|_\jmath \\ &\le C(d) \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{\jmath - 4\alpha} \delta_{q+2} + C(d) \epsilon_q \lambda_q^{\jmath - 3\alpha} \delta_{q+1} \ll M \lambda_{q+1}^\jmath \delta_{q+1} \end{aligned}$$

这证明了（2.27）、（2.28）和（2.29）。注意, 常数 $C(d)$ 可通过增大 a来吸收。

最后, 我们指出, 关于 $\mathcal{B}_{q+1}$ 的所有性质均已在小节4.3中证明。□

Appendix A. Parameter comparisons

在本附录中，我们记录凸积分构造中所用参数之间的一些有用关系。这些关系在第 4–7 节中经常用到。我们首先指出这些“本质转换”

$$\tau_q \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \lambda_q \ll 1, \tag{A.1}$$

$$\ell_q = \lambda_q^{-\frac{1}{4}} \lambda_{q+1}^{-\frac{3}{4}} \ll (\lambda_q \lambda_{q+1})^{-\frac{1}{2}} \ll \epsilon_q^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_{q+1}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_q^{1+\frac{3\alpha}{2}} \delta_q^{\frac{1}{2}}}, \tag{A.2}$$

and

$$\lambda_q^{1+4\alpha} \ll \ell_q^{-1} \ll \lambda_{q+1}^{1-4\alpha} \ll \lambda_q^{\frac{3}{2}}. \tag{A.3}$$

注意到，(A.1)由 $\alpha > 0$得出。另一方面，由于 α 可通过（2.21）变得任意小，因此（A.2）由此得出。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} - \frac{b}{2} &< -\frac{\sigma}{2} - 1 - b\beta + \beta \\ \iff \sigma &< (b-1)(1-2\beta) \end{aligned}$$

这由（2.20）推出。最后，（A.3）显而易见。

此外，我们还有“跳跃两步”迭代

$$\lambda_{q-1}^{1+20\alpha} \delta_{q-1}^{\frac{1}{2}} \ll \epsilon_q \lambda_q^{1-20\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \ll \epsilon_q \lambda_q^{1-20\alpha} \delta_q^{\frac{1}{2}} \tag{A.4}$$

因为

$$\begin{aligned} 1 - \beta &< -b\sigma + b - b^2\beta \\ \iff \sigma &< \frac{(b-1)(1-\beta b-\beta)}{b} \end{aligned}$$

这由（2.20）推出。

最后，我们记录迭代不等式

$$\epsilon_q^{-1} \lambda_q^{1+20\alpha} \delta_{q+1} \ll \epsilon_{q+1} \delta_{q+2} \lambda_{q+1}^{1-20\alpha}, \tag{A.5}$$

$$\epsilon_q^{-1} \lambda_q^{1+20\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \ll \epsilon_{q+1} \delta_{q+2}^{\frac{1}{2}} \lambda_{q+1}^{1-20\alpha}, \tag{A.6}$$

and

$$\lambda_{q-1}^{1+20\alpha} \delta_q^{\frac{1}{2}} \ll \lambda_q^{1+20\alpha} \delta_{q+1}^{\frac{1}{2}} \ll \epsilon_q \epsilon_{q+1} \lambda_{q+1}^{1-20\alpha} \delta_{q+2}^{\frac{1}{2}}. \tag{A.7}$$

事实上，我们注意到（A.5）源于

$$-2b\beta - b + 1 + \sigma \leq -b\sigma - b^2(2\beta)$$

这正是（2.20）。因此，A.6）立即成立，因为 $\frac{\delta_{q+2}}{\delta_{q+1}} < 1$。界（A.7）也立即成立。

Appendix B. Local existence estimates

在本附录中，我们给出引理 4.1 的证明。首先，我们回顾 LaSalle 提出的非线性 Gr¨onwall 不等式 [LaS49]。

引理 B.1. 假设 A、$C>0$ 和 f 是连续的非负函数，满足

$$f(t)\leq A+C\int_0^t f(s)^2\,\mathrm{d}s$$

那么，对于 $t\in\left(0,\ \frac{1}{2AC}\right)$，有

$$f(t)\leq\frac{1}{A^{-1}-Ct}\leq\frac{2}{A^{-1}}=2A$$

证明。令 $F(t)=\int_0^t f(s)^2\,\mathrm{d}s$。则 $F'(t)\leq(A+CF(t))^2$,，或等价地

$$\partial_t\left((A+CF)^{-1}\right)\geq -C,$$

这意味着 $(A+CF(t))^{-1}-A^{-1}\geq -Ct$。因此，对 $t\in\left(0,(2AC)^{-1}\right)$，我们有

$$f\leq A+CF\leq\frac{1}{A^{-1}-Ct}.$$

□

现在考虑欧拉方程

$$\begin{cases}\partial_t v+\operatorname{div}(v\otimes v)+\nabla p=f\\ \operatorname{div}v=0\\ v(0)=v_0\end{cases}$$

其中 f 和 v_0 均为光滑函数。

众所周知（参见 [Tem76]），存在一个光滑解 v 于 $[0,T^*)$，其中 T^* 是最大存在时间，并且对于 $m>\frac{d}{2}+1$，若 $\|v(t)\|_{H^m}$在 $[0,T)$ 上保持有界，对某个 $T\in(0,\infty)$，则 $T^*>T$。由此可知，若$\|v(t)\|_{C^m}$在 $[0,T)$ 上保持有界，则 $T^*>T$。

设 θ 是一个多重指标，且 $|\theta|=N\in\mathbb{N}_1$。那么我们有

$$(\partial_t+\nabla_v)\,\partial^\theta v+\left[\partial^\theta,\nabla_v\right]v+\nabla\partial^\theta p=\partial^\theta f$$

设 $\varepsilon>0$ 足够小。那么根据输运估计：

$$\left\|\partial^\theta v(t)\right\|_\varepsilon\lesssim_\varepsilon\|v(0)\|_{N+\varepsilon}+\int_0^t\mathrm{d}s\ \left\|\left[\partial^\theta,\nabla_v\right]v(s)\right\|_\varepsilon+\|p(s)\|_{N+1+\varepsilon}+\|f(s)\|_{N+\varepsilon}$$

我们观察到

$$\left\|\left[\partial^\theta,\nabla_v\right]v(s)\right\|_\varepsilon\lesssim\|v(s)\|_{1+\varepsilon}\|v(s)\|_{N+\varepsilon}$$

而

$$\begin{aligned}\|p(s)\|_{N+1+\varepsilon}&\lesssim\left\|(-\Delta)^{-1}(\nabla v*\nabla v)(s)\right\|_{N+1+\varepsilon}+\left\|(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}f(s)\right\|_{N+1+\varepsilon}\\&\lesssim\|v(s)\|_{N+\varepsilon}\|v(s)\|_{1+\varepsilon}+\|f(s)\|_{N+\varepsilon}\end{aligned}$$

因此，对于 $t\in[0,T)$，我们有

$$\|v(t)\|_{N+\varepsilon}\lesssim_{N,\varepsilon}\|v(0)\|_{N+\varepsilon}+t\|f\|_{L_t^\infty C_x^{N+\varepsilon}}+\int_0^t\mathrm{d}s\ \|v(s)\|_{N+\varepsilon}\|v(s)\|_{1+\varepsilon}\tag{B.1}$$

引理 B.2. 设 $\varepsilon>0$ 足够小且 $T>0$。如果 $\|v(t)\|_{1+\varepsilon}$ 在 $[0,T)$ 上有界，则 $T^*>T$。

证明。设 $N > \frac{d}{2} + 1$ 且 $\|v(t)\|_{1+\varepsilon} \le B$ 在 $[0,T)$ 上。由（B.1），根据 Gr¨onwall 不等式，我们有

$$\|v(t)\|_{N+\varepsilon} \lesssim_{N,\varepsilon} \left(\|v(0)\|_{N+\varepsilon} + T \|f\|_{L_t^\infty C_x^{N+\varepsilon}} \right) e^{TB}$$

对于 $t \in [0,T)$。因此，$T^* > T$。 □

不失一般性，我们可以假设 $\|v(0)\|_{N+\varepsilon} + T\|f\|_{L_t^\infty C_x^{N+\varepsilon}} > 0$（否则解就是零解）。那么，对于 $|\theta| = 1$，根据引理 B.1，对于任意 $T \in [0,T^*)$ 且

$$0 \le t < \min\left\{ T, \frac{1}{2} \left(C^2 \|v(0)\|_{1+\varepsilon} + C^2 T \|f\|_{L_t^\infty C_x^{1+\varepsilon}} \right)^{-1} \right\}$$

其中 $C = C(N,\varepsilon)$，我们有

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{1+\varepsilon} &\le \frac{1}{\left(C\|v(0)\|_{1+\varepsilon} + CT\|f\|_{L_t^\infty C_x^{1+\varepsilon}} \right)^{-1} - Ct} \\ &\le 2C\|v(0)\|_{1+\varepsilon} + 2CT\|f\|_{L_t^\infty C_x^{1+\varepsilon}} \end{aligned}$$

因此，若令

$$\tau \lesssim \min\left\{ \|v(0)\|_{1+\varepsilon}^{-1}, \|f\|_{L_t^\infty C_x^{1+\varepsilon}}^{-1/2} \right\}$$

那么 $\|v(t)\|_{1+\varepsilon}$ 在 $[0, \min\{T^*, \tau\})$ 上保持有界，并且

$$\|v(t)\|_{1+\varepsilon} \lesssim_\varepsilon \|v(0)\|_{1+\varepsilon} + \tau\|f\|_{L_t^\infty C_x^{1+\varepsilon}}$$

这意味着 $T^* > \min\{T^*, \tau\}$ 且 $T^* > \tau$。因此，引理 4.1 对 $N = 1$ 得证。

对于 $N > 1$，由 Gr¨onwall 不等式，(B.1) 可推出

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{N+\varepsilon} &\lesssim_{N,\varepsilon} \left(\|v(0)\|_{N+\varepsilon} + \tau\|f\|_{L_t^\infty C_x^{N+\varepsilon}} \right) \exp\left(2C\tau\|v(0)\|_{1+\varepsilon} + 2C\tau^2\|f\|_{L_t^\infty C_x^{1+\varepsilon}} \right) \\ &\lesssim \|v(0)\|_{N+\varepsilon} + \tau\|f\|_{L_t^\infty C_x^{N+\varepsilon}} \end{aligned}$$

在 $[0,\tau]$. 因此，引理 4.1 得证。

Appendix C. Onsager exponent

在本附录中，我们将说明（为使论述完整），当正则性高于 $1\ 3$ 时，能量平衡守恒。

命题 C.1。假设 $\beta > \frac{1}{3}$，$u \in C_t^\beta{}_{,\ x}$ 和 $F \in C_{t\ x}^{2\beta}{}_{,}$ 其中

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathbb{P}\operatorname{div}(u \otimes u) &= \mathbb{P}\operatorname{div} F \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

记 $\langle\langle U, V\rangle\rangle := \int_{\mathbb{T}^d} \langle U, V\rangle$ 为向量场 U, V（或秩相同的张量），则有

$$\frac{1}{2}\langle\langle u(t), u(t)\rangle\rangle - \frac{1}{2}\langle\langle u(0), u(0)\rangle\rangle = \int_0^t \langle\langle \operatorname{div} F(s), u(s)\rangle\rangle \, \mathrm{d}s$$

.

注。右端定义良好，并且

$$\begin{aligned} |\langle\langle \operatorname{div} F(s), u(s)\rangle\rangle| &\lesssim_{\beta,\mu} \|\operatorname{div} F(s)\|_{B_{2,2}^{2\beta-1-\mu}} \|u(s)\|_{B_{2,2}^{\mu+1-2\beta}} \\ &\lesssim_{\beta,\mu} \|F(s)\|_{B_{\infty,\infty}^{2\beta}} \|u(s)\|_{B_{\infty,\infty}^{\beta}}, \end{aligned}$$

其中 $\mu \in (0, 3\beta - 1)$ 和 $B_{p,q}^s$ 是通常的 Besov 空间（例如参见 [Tri10]）。

证明。与第 4.1 小节中一样，令 ψ_ℓ 为一个光滑的标准径向光滑化核，其空间长度为 ℓ。对于任意 $\varepsilon > 0$ 小的量，我们记为

$$u^\varepsilon = u * \psi_\varepsilon \qquad (u \otimes u)^\varepsilon = (u \otimes u) * \psi_\varepsilon \qquad F^\varepsilon = F * \psi_\varepsilon.$$

注意到 $\partial_t u^\varepsilon + \mathbb{P}$ 散度 $(u \otimes u)^\varepsilon = \mathbb{P}$ 散度 F^ε。于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\langle\langle u(t), u(t)\rangle\rangle - \frac{1}{2}\langle\langle u(0), u(0)\rangle\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\langle\langle u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)\rangle\rangle - \frac{1}{2}\langle\langle u^\varepsilon(0), u^\varepsilon(0)\rangle\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \langle\langle \partial_t u^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)\rangle\rangle \ \mathrm{d}s \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \langle\langle (u\otimes u)^\varepsilon(s), \nabla u^\varepsilon(s)\rangle\rangle \ \mathrm{d}s + \int_0^t \langle\langle \operatorname{div} F^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)\rangle\rangle \ \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}
&|\langle\langle (u\otimes u)^\varepsilon(s), \nabla u^\varepsilon(s)\rangle\rangle| = |\langle\langle (u\otimes u)^\varepsilon(s) - u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon(s), \nabla u^\varepsilon(s)\rangle\rangle| \\
\lesssim &\|(u\otimes u)^\varepsilon(s) - u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon(s)\|_0 \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_0 \lesssim \varepsilon^{2\beta} \|u(s)\|_\beta^2 \varepsilon^{\beta-1} \|u(s)\|_\beta
\end{aligned}$$

这里用到了对易子估计（4.5）。因此 $\beta > \frac{1}{3}$ 我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \langle\langle u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon(s), \nabla u^\varepsilon(s)\rangle\rangle \ \mathrm{d}s = 0.$$

于是，令 $\mu \in (0, 3\beta - 1)$，我们注意到

$$\begin{aligned}
&|\langle\langle \operatorname{div} F^\varepsilon, u^\varepsilon\rangle\rangle - \langle\langle \operatorname{div} F, u\rangle\rangle| \\
\le &|\langle\langle \operatorname{div}(F^\varepsilon - F), u^\varepsilon\rangle\rangle| + |\langle\langle \operatorname{div} F, u^\varepsilon - u\rangle\rangle| \\
\lesssim_{\beta,\mu} &\|F^\epsilon - F\|_{B^{2\beta-\mu}_{2,2}} \|u\|_{B^{-2\beta+1+\mu}_{2,2}} + \|F\|_{B^{2\beta-\mu}_{2,2}} \|u^\varepsilon - u\|_{B^{-2\beta+1+\mu}_{2,2}} \\
\lesssim_{\beta,\mu} &\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}\mu} + \varepsilon^{\frac{1}{2}(3\beta-1-\mu)}\right) \|F\|_{B^{2\beta}_{\infty,\infty}} \|u\|_{B^{\beta}_{\infty,\infty}}
\end{aligned}$$

因此，我们得出

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \langle\langle \operatorname{div} F^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)\rangle\rangle \ \mathrm{d}s = \int_0^t \langle\langle \operatorname{div} F(s), u(s)\rangle\rangle \ \mathrm{d}s,$$

如所需。 □

References

[Alb+22] D. Albritton、E. Bru´e、M. Colombo、C. De Lellis、V. Giri、M. Janisch 和 H. Kwon。《涡量形式的欧拉方程的不稳定性与非唯一性》（据 M. Vishik 的工作）。预印本（2021），arXiv:2112.04943。[BL15] J. Bourgain 和 D. Li。《整数阶空间中不可压欧拉方程的强适定性缺失》。《几何与泛函分析》25（2015），第 1 期，1–86。[Bru+22] E. Bru´e、M. Colombo、G. Crippa、C. De Lellis 和 M. Sorella。《受迫纳维–斯托克斯方程的 Onsager 临界解》。预印本（2022），arXiv:2212.08413。[BD22] E. Bru´e 和 C. De Lellis。《受迫三维纳维–斯托克斯方程的反常耗散》。预印本（2022），arXiv:2207.06301。[BSV19] T. Buckmaster、S. Shkoller 和 V. Vicol。《表面准地转方程弱解的非唯一性》。《纯粹与应用数学通讯》72（2019），第 9 期，1809–1874。[Buc+15] T. Buckmaster、C. De Lellis、P. Isett 和 L. Sz´ekelyhidi Jr.《1/5-H¨older 欧拉流的反常耗散》。《数学年刊》182（2015），第 1 期，127–172。[Buc+19] T. Buckmaster、C. De Lellis、L. Sz´ekelyhidi Jr 和 V. Vicol。《可容许弱解的 Onsager 猜想》。《纯粹与应用数学通讯》72（2019），第（2）期，229–274。

[BV19] T. Buckmaster 和 V. Vicol。《凸积分与湍流现象学》。《EMS 数学科学综述》6（2019），第 1–2 期，173–263。[BHP22] A. Bulut 、 M. K. Huynh 和 S. Palasek。《次耗散纳维 – 斯托克斯系统 H¨older 连续野解的正则性时期》。预印本（2022），arXiv:2201.05600。[BHP] A. Bulut、M. K. Huynh 和 S. Palasek。《表面准地转方程受迫弱解的非唯一性》。准备中。[CI20] W. Cao 和 D. Inauen。《等距扩张的刚性与柔性》。预印本（2020），arXiv:2010.00418。[CL22] A. Cheskidov 和 X. Luo。《纳维–斯托克斯方程的尖锐非唯一性》。《发明数学》229（2022），第 3 期，987–1054。[Con15] P. Constantin。《水动力系统唯一性问题的拉格朗日–欧拉方法》。《数学进展》278（2015），67–102。[CET94] P. Constantin、W. E 和 E. S. Titi。《关于欧拉方程解能量守恒的 Onsager 猜想》。《数学物理通讯》165（1994），第 1 期，207–209。[CDS12] S. Conti、C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi Jr.《 h原理与 $C^{1,\alpha}$ 等距嵌入的刚性》。《非线性偏微分方程》，83–116, Abel 研讨会，7，施普林格，海德堡，2012。[DI20] C. De Lellis 和 D. Inauen。《 $C^{1,\alpha}$ 极冠的等距嵌入》。《数学进展》363（2020），106996。[DS13] C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi Jr。《耗散连续欧拉流》。《发明数学》193（2013），第 2 期，377–407。[DS07] C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi Jr。《作为微分包含的欧拉方程》。《数学年刊》170（2009），第 3 期，1417–1436。[DS14] C. De Lellis 和 L´aszl´o Sz´ekelyhidi Jr。《耗散欧拉流与 Onsager 猜想》。《欧洲数学会杂志》16（2014），第 7 期，1467–1505。[DH22] L. De Rosa 和 S. Haffter。《不可压欧拉方程 H¨older 解的奇异集维数》。《非线性》35（2022），第 10 期，5150–5192。[EM20] T. M. Elgindi 和 N. Masmoudi。《流体力学中一类方程的 L^∞ 适定性缺失》。《理性力学与分析档案》235（2020），第 3 期，1979–2025。[Ise17] P. Isett。《具有时间紧支撑的三维 H¨older 连续欧拉流》。《数学研究讲义》，196。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2017。[Ise18] P. Isett。《昂萨格猜想的证明》。《数学年刊》188（2018），第 3 期，871–963。[Kla16] S. Klainerman。《Nash 在其三篇论文中对分析学的独特贡献》。《美国数学会通报》54（2017），第 2 期，283–305。[LaS49] J. LaSalle。《唯一性定理与逐次逼近》。《数学年刊》50（1949），722–730。[Tay11] M. E. Taylor。《偏微分方程 I：基础理论》。第 2 版。《应用数学科学》115，施普林格纽约，2011。[Tem76] R. Temam。《不可压理想流体欧拉方程解的局部存在性》，载于《湍流与纳维–斯托克斯方程》，《数学讲义》565，184–194。施普林格柏林海德堡，1976。[Tri10] H. Triebel。《函数空间理论》。《现代比克豪泽经典著作》。施普林格巴塞尔，2010。[Vis18a] M. Vishik。《理想不可压流体欧拉方程柯西问题的不稳定性与非唯一性。第一部分》。预印本（2018），arXiv:1805.09426。[Vis18b] M. Vishik。《理想不可压流体欧拉方程柯西问题的不稳定性与非唯一性。第二部分》。预印本（2018），arXiv:1805.09440。

Louisiana State University, 303 Lockett Hall, Baton Rouge, LA 70803
Email address: aynurbulut@lsu.edu

Georgia Institute of Technology Department of Mathematics
Email address: mhuynh41@gatech.edu

UCLA Department of Mathematics
Email address: palasek@math.ucla.edu