arXiv:2301.00839v1 [math-ph] 2 Jan 2023

利用二次第一积分研究可积与超可积三维牛顿势：综述

Antonios Mitsopoulos[1]、[a)] 和 Michael Tsamparlis[2]、[3]、[b)]

[1]物理学院，天文学—天体物理学—力学系，雅典大学，雅典 Panepistemiopolis，邮编 157 83，希腊[2]NITheCS，国家理论与计算科学研究所，彼得马里茨堡 3201，夸祖鲁-纳塔尔省，南非[3]TCCMMP，理论与计算凝聚态及材料物理组，化学与物理学院，夸祖鲁-纳塔尔大学，彼得马里茨堡 3201，夸祖鲁-纳塔尔省，南非

[a)]通讯作者：antmits@phys.uoa.gr[b)]电子邮箱：mtsampa@phys.uoa.gr

摘要

以系统化方式求解动力系统的第一积分（FIs），并进一步判断其可积性或超可积性，仍是一个尚未解决的问题。针对具有动力学方程$\ddot{q}^a = -\Gamma^a_{bc}(q)\dot{q}^b\dot{q}^c - Q^a(q)$的完整自治动力系统，一种沿此思路发展出的方法称为直接方法；其中，$\Gamma^a_{bc}(q)$是由系统的动能度量定义的黎曼联络系数，$-Q^a(q)$是广义力。根据该方法，先假设第一积分 I 的一般函数形式，并要求其沿动力学方程满足条件$\frac{dI}{dt} = 0$。由此得到一个偏微分方程组（PDEs），并需为其中涉及的标量添加必要的可积条件。研究发现，最终的偏微分方程组分为两组：a. 仅包含几何元素的一组；b. 包含几何量和动力学量的另一组。随后，只要几何量已知或能够求得，就可以利用第二组方程求出第一积分，并据此判断动力系统的可积性。近期一篇论文（M. Tsamparlis 和 A. Mitsopoulos，《数学物理杂志》61，122701（2020））给出了二次第一积分（QFIs）对应偏微分方程组的“解”。本文将这一“解”应用于具有三个自由度的牛顿自治保守动力系统，求出可积势和超可积势 $V(x, y, z)$，其可积性通过自治和/或含时二次第一积分确定。这些系统的几何元素取自已知的欧几里得空间 E^3。通过为决定几何元素的参数设定不同取值，我们系统地求得了 E^3中所有已知的可积势和超可积势，以及本文得到的新势。为便于查阅，结果汇总于表格中，因此本文可作为关于具有三个自由度的牛顿自治保守动力系统二次第一积分的更新综述。需要强调的是，其他作者通过对参数采用不同取值，或许还能发现此类系统的更多可积势。

关键词：可积势；超可积势；三维牛顿势；二次第一积分；含时第一积分；自治保守动力系统；Killing张量。

1 引言

根据刘维尔可积性定理 [1]，，三维（3d）牛顿自治保守系统若存在三个（函数上）独立且两两对合的第一积分（FIs），则该系统是（刘维尔）可积的。

存在五个独立第一积分的可积系统称为最大超可积系统，而存在四个独立第一积分的则称为最小超可积系统。超可积势必定是可积的；然而，有些作者 [2, 3, 4, 5] 定义超可积性时并不要求系统可积，也就是说，他们只寻找独立第一积分的数量超过系统自由度的集合。

对于三维牛顿自治保守系统，一个二次第一积分（QFI）是哈密顿量 H；因此，为确立可积性，还需要两个彼此对合的额外独立自治[1] 首次积分。如果除这些首次积分外，还存在一个/两个额外的独立自治或含时首次积分，那么该系统就是最小/最大超可积的。除确立超可积性外，只要含时第一积分彼此对合，它们也可用于确立动力系统的可积性（例如参见[6, 7]）。

具有 n 自由度的哈密顿动力系统的独立自治首次积分的最大数量为 $2n-1$。然而，如果考虑含时第一积分，则可以超过这一最大限制。例如，三维势 $V=-kr^2$（其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和 k 是任意常数）允许存在六个（五个即已足够）含时线性第一积分（LFIs） $I_{3a\pm}$、 $a=1$、2、3（见 [8]中的表V）：

$$k>0 \quad : \quad I_{3a\pm}=e^{\pm\sqrt{2k}t}\left(\dot{q}_a\mp\sqrt{2k}q_a\right)$$
$$k<0 \quad : \quad I_{3a\pm}=e^{\pm i\sqrt{-2k}t}\left(\dot{q}_a\mp i\sqrt{-2k}q_a\right)$$

它们函数独立。由于三个 LFI I_{3a+} （或 I_{3a-}）也彼此对合，因此所考虑的三维势是超可积的。

关于定义三维超可积势的自由参数数量，采用以下术语（例如参见 [5]）：

a. 简并（或三参数）势，以及
b. 非简并（或四参数）势。

许多文献 [3, 4, 5, 9], 将仅因二次第一积分而超可积的势称为二阶超可积势。这类势具有以下特殊性质 [3, 4]:

1) 多重可积性。它们可以通过多种方式实现可积，而对这些积分方式进行比较会为系统带来新的认识。

2）它们是多重可分离的。
3）由二阶 Killing 张量（KT）表示的二阶对称性会生成一个封闭的二次代数。在量子情形下，该代数的表示可得出关于 Schr¨odinger 算子及其他对称算子的谱分解的结果。

E^3 中的可积势分为两类：可分解势（或 $2+1$ 可分离可积势），由 E^2 中的可积势生成；以及不可分解势。

设 $V(x,y)$ 是 E^2 中的一个二维可积势，并且存在一个额外的自治首次积分 I_1。那么，¯三维牛顿 z-可分离势 $V(x,y,z)=V(x,y)+F(z)$，其中 F 是 z 的任意光滑函数，是 E^3 中的一个 $2+1$ 可分离可积势。这些势之所以可积，是因为存在三个相互对合的独立首积分 H、I_1 和 $I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$。若 $V(x,y)$ 相对于两个额外的首积分（记作 J_1 和 J_2）是超可积的，那么 $V(x,y,z)$ 是最小超可积的，因为它有四个独立首积分 H、J_1、J_2 和 I_2。若二维超可积势 $V(x,y)$ 除了 J_1 和 J_2 之外，还存在一个含时第一积分 J_3，那么 $V(x,y,z)$ 就是最大超可积的。例如， [2] 中表 II 的第二个势并非最小超可积，而是最大超可积的，因为除了 [10] 最后一张表中的含时第一积分 I_{73a} 和 I_{73b} 之外，它还具有其他第一积分。

不可分解（即不可分离）的三维牛顿可积势 $V(x,y,z)$ 无法写成¯ $V(x,y,z)=V(x,y)+F(z)$ 的形式，其中 $V(x,y)$ 是二维牛顿可积势。一般而言，求解这类势更加困难，因此人们提出了复杂程度逐步提高的各种方法。此外，现有结果仅涉及自治首次积分，且数量有限。本文旨在提供一种系统化（即算法式）方法，利用自治和时间依赖量子费舍尔信息来求解 E^3 中的可积势与超可积势。该方法基于定理 1 [11] （见第3节），此定理揭示了动力系统的量子费舍尔信息与动力学元素（即势）以及由系统动能所定义的几何之间的关系。本文结构如下。

[1]这些额外的首次积分必须是自治的，因为哈密顿量与任意时变第一积分 $J(t,q,\dot{q})$ 的泊松括号（PB）不为零。事实上，我们有 $\{H,J\}=\frac{\partial J}{\partial t}\neq 0$。

在第2节中，我们直接根据参考文献 [10] 和 [12]中列出的著名二维可积/超可积势，求出三维可积/超可积 2+1 可分解势。结果以表格形式呈现，其中列出了已知势及其相应参考文献，以及本文求得的新势。在第3节中，我们陈述定理1；由此可知，需要考虑三类二次第一积分，分别记为 $I_{(1,\ell)}$、$I_{(2,\ell)}$、$I_{(3)}$，它们以动能度量的几何元素和势函数表示。在第4节中，我们陈述应用定理1所需的 E^3 几何量。可以看出，Killing 张量分量引入的参数数量很多。鉴于这一点，且相关偏微分方程组是超定的，只有假设几何参数取特定值，才能找到特殊解。在第5节中，我们考察二次第一积分 $I_{(1,1)}$ ($\ell = 1$)及此情形下相关的偏微分方程。我们考察参数的各种取值，并找出所有现有结果以及新结果。为便于查阅，各种势汇总于表4–7。在第6节中，我们考察具有 $I_{(2,0)}$($\ell = 0$)类型二次第一积分的势。这些结果列于表8–10。在第7节中，我们考察 $I_{(3)}$ 类型的含时线性/二次第一积分，结果汇总于表11–13。在第8节中，我们将表中所列结果与文献中的现有结果进行比较和讨论。最后，在第9节中，我们总结全文。

缩略语及记号／约定列表

为方便读者，我们列出全文中使用的缩略语和记号。缩略语:

- 第一积分 = 第一积分
- HV =相似向量
- KT = Killing 张量
- KV = Killing 向量
- LFI = 线性第一积分
- Nd = N维
- ODE = 常微分方程
- PB = 泊松括号
- PDE = 偏微分方程
- QFI = 二次第一积分

数学记号/约定:

- $E^n = n$维欧几里得空间
- $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$、$R = \sqrt{x^2+y^2}$、$\tan\theta = \frac{y}{x}$ 和 $w = x + iy = Re^{i\theta}$。
- 角动量 $\mathbf{M} \equiv M_i = (M_1, M_2, M_3) = (y\dot{z} - z\dot{y}, z\dot{x} - x\dot{z}, x\dot{y} - y\dot{x})$，其平方大小为 $\mathbf{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$。
- 动力系统的动能度量 $\gamma_{ab}(q)$ 用于降指标和升指标。
- 逗号表示偏导数，分号表示黎曼协变导数。

E^3的坐标系:

- 笛卡尔坐标：(x, y, z)。
- 球坐标：(r, θ, ϕ)，其中 $x = r\sin\theta\cos\phi$，$y = r\sin\theta\sin\phi$ 且 $z = r\cos\theta$。
- 抛物柱坐标：(λ', μ', z)，其中 $\lambda' = R + y$ 且 $\mu' = R - y$。
- 旋转抛物坐标：(ζ, η, ϕ)，其中 $\zeta = r + z$, $\eta = r - z$, $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ or，等价地，$x = \sqrt{\zeta\eta}\cos\phi$, $y = \sqrt{\zeta\eta}\sin\phi$, $z = \frac{1}{2}(\zeta - \eta)$。

2 可积/超可积 2+1可分离势

正如所指出的， E^3 中的 $2+1$ 可分离可积/超可积势，是用 E^2中的可积/超可积势 $\Phi(x,y)$ 表示的。在后者中，允许存在 LFIs/QFIs 的势汇总于综述论文 [10] 和 [12]。利用这些结果， E^3中的 $2+1$ 可分离势

$$V(x,y,z)=\Phi(x,y)+F(z) \tag{1}$$

其中 $F(z)$ 是任意光滑函数；由于存在额外的二次第一积分 $I=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$，且它与 $\Phi(x,y)$ 的首次积分对合，因此这些势是可积/超可积的。

将上述过程应用于 [10, 12], 的结果，我们得到 E^3 中的可积势和超可积势，列于表1—表3。表格中未列出哈密顿量 H 的二次第一积分。在表2和表3中，我们与 [2]的结果进行了比较。由于 [2] 中只考虑超可积势，因此无法在表1中进行类似比较。关于记号，我们设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$、 $R=\sqrt{x^2+y^2}$，并将角动量记为 $M_i=(y\dot{z}-z\dot{y},z\dot{x}-x\dot{z},x\dot{y}-y\dot{x})$。

可积的 $2+1$ 可分离势	
势	线性第一积分和二次第一积分
$V=F_1\left(\frac{R^2}{2}+b_1y-b_2x\right)+F_2(z)$	$I_1=M_3-b_1\dot{x}-b_2\dot{y},\ I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_2(z)$
$V=\frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2}+F_2(R)+F_3(z)$	$I_1=M_3^2+2F_1\left(\frac{y}{x}\right),\ I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$
$V=\frac{k}{x^2+\ell y^2}+F_1(R)+F_2(z)$	$I_1=M_3^2+\frac{2k\left(1-\ell\ y^2\right)}{x^2+\ell y^2},\quad I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_2\ (z)$
$V=\frac{F_1(u)-F_2(v)}{u^2-v^2}+F_3(z)$ $u^2=R^2+A+\left[(R^2+A)^2-4Ax^2\right]^{1/2}$ and $v^2=R^2+A-\left[(R^2+A)^2-4Ax^2\right]^{1/2}$	$I_1=M_3^2+A\dot{x}^2+\frac{v^2F_1(u)-u^2F_2(v)\ u^2-v^2}{}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$
$V=\frac{F_1(u)-F_2(v)}{u^2-v^2}+F_3(z)$ $u^2=R^2+\left[R^4-4A(x\pm iy)^2\right]^{1/2}$ and $v^2=R^2-\left[R^4-4A(x\pm iy)^2\right]^{1/2}$	$I_1=M_3^2+A(\dot{x}\pm i\dot{y})^2+\frac{v^2F_1(u)-u^2F_2(v)\ u^2-v^2}{}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$
$V=\frac{F_1(R+y)+F_2(R-y)}{R\qquad\qquad+F_3(z)}$	$I_1=-M_3\dot{x}+\frac{(R+y)F_2(R-y)-(R-y)F_1(R+y)\ R}{}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3\ (z)$
$V=\bar{w}^{-1/2}\left[F_1\ (w+\sqrt{\bar{w}})\ +F_2\ (w-\sqrt{\bar{w}})\ \right]+F_3\ (z)$ $w=x+iy$ 和 $\bar{w}=x-iy$	$I_1=-M_3\frac{(\dot{x}+i\dot{y})}{}+\frac{i}{8}\ (\dot{x}-i\dot{y})\ ^2+$ $+i\left(1-\frac{w}{\sqrt{\bar{w}}}\right)F_1(w+\sqrt{\bar{w}})\ +$ $+i\left(-1-\frac{w}{\sqrt{\bar{w}}}\right)F_2\ (w-\sqrt{\bar{w}})$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$
$V=\frac{w}{F_1(x\qquad}+F_{2)}(w)\ +F_3(z)$ $F_2'=\frac{dF_2}{dw}$ 和 $w=x\pm iy$	$I_1=-M_3(\dot{x}\pm i\dot{y})\ -iwV+iF_2(w)$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$
$V=F_1(x)\ +F_2(y)+F_3(z)$	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+F_1,\ I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+F_2,\ I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3$
$V=F_1\left(y+b_0x+\sqrt{b_0^2+1}x\right)+$ $+F_2\left(y+b_0x-\sqrt{b_0^2+1}x\right)+F_3(z)$ 其中 $b_0\equiv\frac{A-B}{2C}$	$I_1=A\dot{x}^2+B\dot{y}^2+2C\dot{x}\dot{y}+(A+B)(F_1+F_2)+$ $+2C\sqrt{b_0^2+1}(F_1-F_2)$ $I_2=\frac{1}{2}z+F_3(z)$
$V(b_0=0)\ =F_1(y+x)\ +F_2(y-x)\ +F_3(z)$	$I_1=\dot{x}\dot{y}+F_1-F_2,\ I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$

表1：可积势 $V(x,y,z)\ =\Phi(x,y)\ +F(z)$，位于 E^3 中，其中 $\Phi(x,y)$ 是 E^2 中的可积势。

最小超可积 $2+1$ 可分离势		
势	参考文献	线性第一积分和二次第一积分
$V=cx+F_1(y-bx)+F_2(z)$ $c\neq 0,\ \frac{d^2F_1}{dw^2}\neq 0$ 和 $w\equiv y-bx$	[2] New	$I_1=\dot{x}+b\dot{y}+ct$ $I_2=(\dot{x}+b\dot{y})^2+2c(x+by)$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_2(z)$
$V=F_1(y-bx)+F_2(z)$ $\frac{d^2F_1}{dw^2}\neq 0$ 和 $w\equiv y-bx$	New	$I_1=\dot{x}+b\dot{y}$ $I_2=t(\dot{x}+b\dot{y})-(x+by)$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_2(z)$
$V=\frac{k_1}{2}(x^2+4y^2)+\frac{k_2}{x^2}+k_3y+F(z)$	表 II $k_3=0$ $x\leftrightarrow y$	$I_1=M_3\dot{x}+k_1yx^2-\frac{2k_2y}{x^2}+\frac{k_3}{2}x^2$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+2k_1\frac{y^2}{x^2}+k_3\frac{y}{x^2}$ $I_4=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F\ z$ ( )
$V=\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{R}+\frac{k_3y}{Rx^2}+F(z)$	表 II $x\leftrightarrow y$	$I_1=M_3^2+2k_1\frac{y^2}{x^2}+2k_3\frac{Ry}{x^2}$ $I_2=M_3\dot{x}-2k_1\frac{y}{x^2}-k_2\frac{y}{R}-k_3\frac{x^2+2y^2}{Rx^2}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$
$V=\frac{k_1}{R}+k_2\frac{\sqrt{R+y}}{R}+k_3\frac{\sqrt{R-y}}{R}+F(z)$	表 II	$I_1=M_3\dot{x}-\frac{k_1y}{R}-\frac{k_3(R+y)\sqrt{R-y}-k_2(\quad R-y\ \sqrt{R+y})}{R}$ $I_2=M_3\dot{y}+G(x,y)$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$ $G_{,x}=-yV_{,y}$ 和 $G_{,y}=2xV_{,y}-yV_{,x}$
$V=F_1(x)+\frac{k}{(y+c)^2}+F_2(z)$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+F_1$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{k}{(y+c)^2}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_2$ $I_4=-\frac{t^2}{2}\dot{y}^2+t(y+c)\,\dot{y}-t^2\ \frac{k}{(y+c)^2}-\frac{1}{2}y^2-cy$
$V=\frac{\lambda}{2}R^2+b_1y-b_2x+F(z)$ $\lambda\neq 0$	New	$I_1=\lambda M_3-b_1\dot{x}-b_2\dot{y}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\lambda x^2-b_2x$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{1}{2}\lambda y^2+b_1y$ $I_4=\dot{x}\dot{y}+\lambda xy+b_1x-b_2y$ $I_5=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$

表 2：最小超可积势 $V(x,y,z)=\Phi(x,y)+F(z)$，位于 E^3 中，其中 $\Phi(x,y)$ 是 E^2 中的超可积势。

最大超可积 $2+1$ 可分离势		
势	参考文献 [2]	线性第一积分和二次第一积分
$V=cx+\lambda y+F(z)$	New	$I_1=\dot{x}+ct,\ I_2=\dot{y}+\lambda t,\ I_3=\frac{1}{2}\dot{x}^2+cx,$ $I_4=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\lambda y,\ I_5=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$
$V=cx-\frac{1}{2}\lambda^2y^2+F(z)$ $\lambda\neq 0$	New	$I_1=\dot{x}+ct,\ I_2=e^{\lambda t}(\dot{y}-\lambda y),\ I_3=\frac{1}{2}\dot{x}^2+cx,$ $I_4=\frac{1}{2}\dot{y}^2-\frac{1}{2}\lambda^2y^2,\ I_5=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$
$V=-\frac{k^2}{2}R^2+F(z)$ $k\neq 0$	New	$I_1=M_3,\ I_2=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}k^2x^2,\ I_3=\frac{1}{2}\dot{y}^2-\frac{1}{2}k^2y^2,$ $I_4=\dot{x}\dot{y}-k^2xy,\ I_5=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$ ，$I_{6\pm}=e^{\pm kt}\,(\dot{x}\mp kx)$，$I_{7\pm}=e^{\pm kt}\,(\dot{y}\mp ky)$， $4I_2I_3=I_4^2-k^2M_3^2$
$V=\frac{k}{2}R^2+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{y^2}+F(z)$	表 II	$I_1=M_3^2+2b\frac{y^2}{x^2}+2c\frac{x^2}{y^2},\ I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2+\frac{b}{x},\quad I_4=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{k}{2}y^2+\frac{c}{y^2}$ - 对于 $k=0$: $I_5=-\frac{t^2}{2}\dot{y}^2+ty\dot{y}-t^2\frac{c}{y^2}-\frac{1}{2}y^2$ $I_6=-\frac{t^2}{2}\dot{x}^2+tx\dot{x}-t^2\frac{b}{x^2}-\frac{1}{2}x^2$ - 对于 $k=-\frac{\lambda^2}{4}\neq 0$: $I_5=e^{\lambda t}\left[-\dot{x}^2+\lambda x\dot{x}-\frac{\lambda^2}{4}x^2-\frac{2b}{x^2}\right]$ $I_6=e^{\lambda t}\left[-\dot{y}^2+\lambda y\dot{y}-\frac{\lambda^2}{4}y^2-\frac{2c}{y^2}\right]$
$V=\frac{k_1}{(x+c_1)^2}+\frac{k_2}{(y+c_2)^2}+F(z)$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{k_1}{(x+c_1)^2}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{k_2}{(y+c_2)^2}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$ $I_4=-\frac{t^2}{2}\dot{y}^2+t\,(y+c_2)\,\dot{y}-t^2\,\frac{k_2}{(y+c_2)^2}-\frac{1}{2}y^2-c_2y$ $I_5=-\frac{t^2}{2}\dot{x}^2+t(x+c_1)\,\dot{x}-t^2\,\frac{k_1}{(x+c_1)^2}-\frac{1}{2}x^2-c_1x$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}R^2-\frac{\lambda^2}{4}(c_1x+c_2y)-$ $-\frac{k_1}{(x+c_1)^2}-\frac{k_2}{(y+c_2)^2}+F(z)$ $\lambda\neq 0$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{\lambda^2}{8}x^2-\frac{c_1\lambda^2}{4}x-\frac{k_1}{(x+c_1)^2}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2-\frac{\lambda^2}{8}y^2-\frac{c_2\lambda^2}{4}y-\frac{k_2}{(y+c_2)^2}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$ $I_4=e^{\lambda t}\left[-\dot{x}^2+\lambda(x+c_1)\,\dot{x}-\frac{\lambda^2}{4}(x+c_1)^2+\frac{2k_1}{(x+c_1)^2}\right]$ $I_5=e^{\lambda t}\left[-\dot{y}^2+\lambda(y+c_2)\,\dot{y}-\frac{\lambda^2}{4}(y+c_2)^2+\frac{2k_2}{(y+c_2)^2}\right]$

表3： E^3中的极大超可积势 $V(x,y,z)=\Phi(x,y)+F(z)$，其中 $\Phi(x,y)$ 是 E^2中的超可积势。

注1：表2和表3中标注为“新”的结果未出现在 [2] 中，因为其中只考虑自治二次第一积分。

注2： [2], 中表 II 的势（见表3）

$$V=\frac{k}{2}R^2+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{y^2}+F(z) \tag{2}$$

其中 k、b、c 是任意常数， F（z）是任意光滑函数；由于具有以下四个相互独立的自治二次第一积分，因此称其为最小超可积:

$$I_1=M_3^2+2b\frac{y^2}{x^2}+2c\frac{x^2}{y^2},\ I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z),\ I_3=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2+\frac{b}{x^2},\ I_4=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{k}{2}y^2+\frac{c}{y^2}.$$

然而，此外使用含时守恒量:

$$\text{For } k=0:\quad I_5=-\frac{t^2}{2}\dot{y}^2+ty\dot{y}-t^2\frac{c}{y^2}-\frac{1}{2}y^2,\ I_6=-\frac{t^2}{2}\dot{x}^2+tx\dot{x}-t^2\frac{b}{x^2}-\frac{1}{2}x^2$$

and

$$\text{For } k=-\frac{\lambda^2}{4}\neq 0:\quad I_5=e^{\lambda t}\left[-\dot{x}^2+\lambda x\dot{x}-\frac{\lambda^2}{4}x^2-\frac{2b}{x^2}\right],\ I_6=e^{\lambda t}\left[-\dot{y}^2+\lambda y\dot{y}-\frac{\lambda^2}{4}y^2-\frac{2c}{y^2}\right]$$

可以看出，对于这些 k 值，势 (2) 是最大超可积的。

此外，假设正则变换为 $x\to x+c_1$ 和 $y\to y+c_2$，其中 c_1 和 c_2 为任意常数，则可证明势 (2) 经正则变换后变为表3中的最后两个势。事实上，对于 $k=0$、$b=k_1$ 和 $c=k_2$，可得势

$$V=\frac{k_1}{(x+c_1)^2}+\frac{k_2}{(y+c_2)^2}+F(z)$$

而对于 $k=-\frac{\lambda^2}{4}$、$b=-k_1$ 和 $c=-k_2$，可得势

$$V=-\frac{\lambda^2}{8}R^2-\frac{\lambda^2}{4}\left(c_1x+c_2y\right)-\frac{k_1}{(x+c_1)^2}-\frac{k_2}{(y+c_2)^2}-\frac{\lambda^2}{8}(c_1^2+c_2^2)+F(z).$$

常数项 $-\frac{\lambda^2}{8}(c_1^2+c_2^2)$ 被忽略，因为它对动力学方程没有贡献

注 3：从表 2 可见，最小超可积势

$$V=\frac{k_1}{R}+k_2\frac{\sqrt{R+y}}{R}+k_3\frac{\sqrt{R-y}}{R}+F(z) \tag{3}$$

其中 k_1、k_2、k_3 为任意常数，且 $F(z)$为任意光滑函数，它具有两个自治二次第一积分：

$$I_1 = M_3\dot{x}-\frac{k_1y}{R}+\frac{k_2(R-y)\sqrt{R+y}}{R}-\frac{k_3(R+y)\sqrt{R-y}}{R} \tag{4}$$

$$I_2 = M_3\dot{y}+G(x,y). \tag{5}$$

函数 $G(x,y)$必须满足以下偏微分方程组：

$$G_{,x}+yV_{,y} = 0 \tag{6}$$

$$G_{,y}+yV_{,x}-2xV_{,y} = 0. \tag{7}$$

使用抛物柱坐标(λ',μ',z)（见 [2]中的方程（3.19）和（3.51））， 其中 $\lambda'=R+y$ and$\mu'=R-y$，二次第一积分 (4) 变为[2]

$$I_1=M_3\dot{x}-\frac{2}{\lambda'+\mu'}\left[\frac{k_1}{2}(\lambda'-\mu')-k_2\mu'\sqrt{\lambda'}+k_3\lambda'\sqrt{\mu'}\right]. \tag{8}$$

[2] 中方程（3.57）的二次第一积分 I_2 有误，应替换为二次第一积分 (8).

在抛物柱坐标(u,v,z)中，其中 $u=R+x$, $v=R-x$ and[3] $x,y>0$，偏微分方程组 (6) - (7) 变为 $G_{,v}=uV_{,v}$ and $G_{,u}=-vV_{,u}$。该方程组的解为

$$G(u,v)=\frac{2}{u+v}\left[\frac{k_1}{2}(u-v)-(k_2+k_3)v\sqrt{\frac{u}{2}}+(k_2-k_3)u\sqrt{\frac{v}{2}}\right]$$

或者，等价地，用笛卡尔坐标表示

$$G(x,y)=\frac{1}{R}\left[k_1x-(k_2+k_3)(R-x)\sqrt{\frac{R+x}{2}}+(k_2-k_3)(R+x)\sqrt{\frac{R-x}{2}}\right].$$

于是，二次第一积分 (5) 为

$$I_2=M_3\dot{y}+\frac{2}{u+v}\left[\frac{k_1}{2}(u-v)-(k_2+k_3)v\sqrt{\frac{u}{2}}+(k_2-k_3)u\sqrt{\frac{v}{2}}\right]. \tag{9}$$

[2]我们回顾一下，坐标 λ'、μ' 要么为正，要么为零，因为 $\lambda'+\mu'=2R$、$\lambda'-\mu'=2y$和 $\lambda'\mu'=x^2$。[3]对于 x、$y>0$，我们有：$\sqrt{R+x}+\sqrt{R-x}=\sqrt{2}\sqrt{R+y}$和 $\sqrt{R+x}-\sqrt{R-x}=\sqrt{2}\sqrt{R-y}$。

[2]中的方程（3.57）的二次第一积分 I_3 存在印刷错误；正确答案是二次第一积分（9）。

注4: [4] 方程（17）中给出的两个超可积势是该势的子情形（见表 2）

$$V=\frac{\lambda}{2}R^2+b_1y-b_2x+F(z) \tag{10}$$

对于 $F(z)=\frac{\lambda}{2}z^2+b_3z$和 $F(z)=\frac{\lambda}{8}z^2+\frac{b_3}{z^2}$，其中 b_3是任意常数。

注5：该势（见表 2）

$$V_1=cx+F_1(y-bx)+F_2(z) \tag{11}$$

其中 c 是任意非零常数， $w\equiv y-bx$ 和 $\frac{d^2F_1}{dw^2}\neq 0$，除了哈密顿量 H之外，具有以下线性第一积分/二次第一积分：

$$I_1=\dot{x}+b\dot{y}+ct,\ \ I_2=t(\dot{x}+b\dot{y})-(x+by)+\frac{c}{2}t^2,\ \ I_3=(\dot{x}+b\dot{y})^2+2c(x+by),\ \ I_4=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_2(z).$$

我们计算泊松括号：

$$\{H,I_1\}=c,\ \ \{H,I_2\}=I_1,\ \ \{I_1,I_2\}=1+b^2,\ \ \{I_1,I_3\}=-2c(1+b^2),\ \ \{I_2,I_3\}=-2(1+b^2)I_1.$$

三个第一积分 H、I_3、I_4 （函数）独立且彼此对合；因此，势（11）是可积的。五个第一积分 H、I_1、I_2、I_3、I_4并不独立，因为 $I_1^2=I_3+2cI_2$。然而，四个第一积分 H、I_3、I_4、I_1，或 H、I_3、I_4、I_2，是独立的，因此，势（11）是最小超可积的。

3 二次首次积分定理

为了系统地计算不可分解势的二次第一积分，我们需要回顾一个在 [11] 中证明的定理。

定理1 n 维自治完整动力系统的独立二次第一积分 m

$$\ddot{q}^a=-\Gamma^a_{bc}(q)\dot{q}^b\dot{q}^c-Q^a(q) \tag{12}$$

其中， q^a 是位形空间的坐标， $\dot{q}^a=\frac{dq^a}{dt}$、 t 是时间变量， $\Gamma^a_{bc}(q)$ 是由系统的动能定义的动能度量 $\gamma_{ab}(q)$ 的黎曼联络系数，而 $-Q^a(q)$ 是广义力，它们如下：

积分 1。

$$\begin{aligned}I_{(1,\ell)} &= \left(-\frac{t^{2\ell}}{2\ell}L_{(2\ell-1)(a;b)}-...-\frac{t^4}{4}L_{(3)(a;b)}-\frac{t^2}{2}L_{(1)(a;b)}+C_{ab}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b+t^{2\ell-1}L_{(2\ell-1)a}\dot{q}^a+...+t^3L_{(3)a}\dot{q}^a+\\ &+tL_{(1)a}\dot{q}^a+\frac{t^{2\ell}}{2\ell}L_{(2\ell-1)a}Q^a+...+\frac{t^4}{4}L_{(3)a}Q^a+\frac{t^2}{2}L_{(1)a}Q^a+G(q)\end{aligned}$$

其中，对于 $M=1$、3、.....、$2\ell-1$，[4] $C_{ab}(q)$ 和 $L_{(M)(a;b)}(q)$ 是 Killing 张量；$\left(L_{(2\ell-1)b}Q^b\right)_{,\,a}=-2L_{(2\ell-1)(a;b)}Q^b$、$\left(L_{(k-1)b}Q^b\right)_{,\,a}=-2L_{(k-1)(a;b)}Q^b-k(k+1)L_{(k+1)a}$对于 $k=2$、4、.....、$2\ell-2$，而 $G_{,\,a}=2C_{ab}Q^b-L_{(1)a}$。积分 2。

$$\begin{aligned}I_{(2,\ell)} &= \left(-\frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1}L_{(2\ell)(a;b)}-...-\frac{t^3}{3}L_{(2)(a;b)}-tL_{(0)(a;b)}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b+t^{2\ell}L_{(2\ell)a}\dot{q}^a+...+t^2L_{(2)a}\dot{q}^a+\\ &+L_{(0)a}\dot{q}^a+\frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1}L_{(2\ell)a}Q^a+...+\frac{t^3}{3}L_{(2)a}Q^a+tL_{(0)a}Q^a\end{aligned}$$

[4]我们注意到，对于 $\ell=0$ 二次第一积分 $I_{(1,0)}$，其条件由将所有向量 $L_{(M)a}$置零给出。

其中，对于 $M=0$、2、.....、2ℓ， $L_{M(a;b)}(q)$ 是 KT，$\left(L_{(2\ell)b}Q^b\right)_{,\,a}=-2L_{(2\ell)(a;b)}Q^b$，并且对于 $k=1$、3、.....、$2\ell-1$，$\left(L_{(k-1)b}Q^b\right)_{,\,a}=-2L_{(k-1)(a;b)}Q^b-k(k+1)L_{(k+1)a}$。

积分3。

$$I_{(3)}=e^{\lambda t}\left(-L_{(a;b)}\dot{q}^a\dot{q}^b+\lambda L_a\dot{q}^a+L_aQ^a\right)$$

其中向量 $L_a(q)$ 满足： $L_{(a;b)}$ 是一个 Killing 张量，且 $\left(L_bQ^b\right)_{,\,a}=-2L_{(a;b)}Q^b-\lambda^2L_a$。

记号：本文采用爱因斯坦求和约定，圆括号（方括号）表示对括起的指标进行对称化（反对称化）；竖线括起的指标不参与反对称化或对称化符号的运算；逗号表示偏导数，分号表示黎曼协变导数。

在继续之前，我们先回顾定理1所需的欧几里得空间 E^3 的几何量。

4 E^3 的几何量

- E^3 存在三个梯度Killing向量（KVs） ∂_x、∂_y、∂_z，其生成函数分别为 x、y、z；另有三个非梯度Killing向量 $y\partial_x-x\partial_y$、 $z\partial_y-y\partial_z$、 $z\partial_x-x\partial_z$。这些向量统称为

$$L_a=\begin{pmatrix}b_1-b_4y+b_5z\\ b_2+b_4x-b_6z\\ b_3-b_5x+b_6y\end{pmatrix}\tag{13}$$

其中 b_1、b_2、...、b_6 为任意常数。

- E^3 中的一般二阶 Killing 张量具有以下独立分量：

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{a_6}{2}y^2+\frac{a_1}{2}z^2+a_4yz+a_5y+a_2z+a_3\\
C_{12} &= \frac{a_{10}}{2}z^2-\frac{a_6}{2}xy-\frac{a_4}{2}xz-\frac{a_{14}}{2}yz-\frac{a_5}{2}x-\frac{a_{15}}{2}y+a_{16}z+a_{17}\\
C_{13} &= \frac{a_{14}}{2}y^2-\frac{a_4}{2}xy-\frac{a_1}{2}xz-\frac{a_{10}}{2}yz-\frac{a_2}{2}x+a_{18}y-\frac{a_{11}}{2}z+a_{19}\\
C_{22} &= \frac{a_6}{2}x^2+\frac{a_7}{2}z^2+a_{14}xz+a_{15}x+a_{12}z+a_{13}\\
C_{23} &= \frac{a_4}{2}x^2-\frac{a_{14}}{2}xy-\frac{a_{10}}{2}xz-\frac{a_7}{2}yz-(a_{16}+a_{18})x-\frac{a_{12}}{2}y-\frac{a_8}{2}z+a_{20}\\
C_{33} &= \frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_7}{2}y^2+a_{10}xy+a_{11}x+a_8y+a_9
\end{aligned}\tag{14}$$

其中 a_K、2、...、20 为任意常数。

- 生成可约 Killing 张量 $C_{ab}=L_{(a;b)}$ 的向量 L_a 为

$$L_a=\begin{pmatrix}-a_{15}y^2-a_{11}z^2+a_5xy+a_2xz+2(a_{16}+a_{18})yz+a_3x+2a_4y+2a_1z+a_6\\ -a_5x^2-a_8z^2+a_{15}xy-2a_{18}xz+a_{12}yz+2(a_{17}-a_4)x+a_{13}y+2a_7z+a_{14}\\ -a_2x^2-a_{12}y^2-2a_{16}xy+a_{11}xz+a_8yz+2(a_{19}-a_1)x+2(a_{20}-a_7)y+a_9z+a_{10}\end{pmatrix}\tag{15}$$

生成的 Killing 张量为

$$C_{ab}=\begin{pmatrix}a_5y+a_2z+a_3 & -\frac{a_5}{2}x-\frac{a_{15}}{2}y+a_{16}z+a_{17} & -\frac{a_2}{2}x+a_{18}y-\frac{a_{11}}{2}z+a_{19}\\ -\frac{a_5}{2}x-\frac{a_{15}}{2}y+a_{16}z+a_{17} & a_{15}x+a_{12}z+a_{13} & -(a_{16}+a_{18})x-\frac{a_{12}}{2}y-\frac{a_8}{2}z+a_{20}\\ -\frac{a_2}{2}x+a_{18}y-\frac{a_{11}}{2}z+a_{19} & -(a_{16}+a_{18})x-\frac{a_{12}}{2}y-\frac{a_8}{2}z+a_{20} & a_{11}x+a_8y+a_9\end{pmatrix}\tag{16}$$

这是 $a_1=a_4=a_6=a_7=a_{10}=a_{14}=0$ 时一般 Killing 张量 (14) 的一个子情形。

5 当 $\ell=1$ 时的二次第一积分 $I_{(1,1)}$

我们令 $L_{(1)a}=L_a$，则 $\ell=1$ 的二次第一积分 $I_{(1,\ell)}$ 变为

$$I_{(1,1)}=\left(-\frac{t^2}{2}L_{(a;b)}+C_{ab}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b+tL_a\dot{q}^a+\frac{t^2}{2}L_aV^{,a}+G(x,y,z)\tag{17}$$

其中， C_{ab} 是由公式（14）给出的二阶 Killing 张量，向量 L_a 由公式（15）给出，生成的 Killing 张量 $L_{(a;b)}$ 为公式（16），并且必须满足以下条件:

$$\left(L_b V^{,b}\right)_{,a} = -2L_{(a;b)}V^{,b} \tag{18}$$

$$G_{,a} = 2C_{ab}V^{,b} - L_a. \tag{19}$$

方程（18）和（19）必须补充函数 G 的三个可积条件以及函数 $L_a V$ 的三个可积条件[a]。

最后，我们得到一个含有十二个偏微分方程的超定方程组，未知量为两个函数 $G(x,y,z)$ 和$V(x,y,z)$，以及四十个自由参数。显然，不可能求得一般解，因此我们必须通过引入简化假设来寻找特殊解。

5.1 $L_a = 0$ 情形

在这种情形下，二次第一积分（17）是众所周知的自治二次首积分

$$I_{(1,1)}(L_a = 0) = C_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b + G(x,y,z) \tag{20}$$

其中二阶 Killing 张量 C_{ab} 的独立分量为

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{a_6}{2}y^2 + \frac{a_1}{2}z^2 + a_4yz + a_5y + a_2z + a_3 \\
C_{12} &= \frac{a_{10}}{2}z^2 - \frac{a_6}{2}xy - \frac{a_4}{2}xz - \frac{a_{14}}{2}yz - \frac{a_5}{2}x - \frac{a_{15}}{2}y + a_{16}z + a_{17} \\
C_{13} &= \frac{a_{14}}{2}y^2 - \frac{a_4}{2}xy - \frac{a_1}{2}xz - \frac{a_{10}}{2}yz - \frac{a_2}{2}x + a_{18}y - \frac{a_{11}}{2}z + a_{19} \\
C_{22} &= \frac{a_6}{2}x^2 + \frac{a_7}{2}z^2 + a_{14}xz + a_{15}x + a_{12}z + a_{13} \\
C_{23} &= \frac{a_4}{2}x^2 - \frac{a_{14}}{2}xy - \frac{a_{10}}{2}xz - \frac{a_7}{2}yz - (a_{16} + a_{18})x - \frac{a_{12}}{2}y - \frac{a_8}{2}z + a_{20} \\
C_{33} &= \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_7}{2}y^2 + a_{10}xy + a_{11}x + a_8y + a_9
\end{aligned} \tag{21}$$

参数 $a_1, ..., a_{20}$ 是任意常数，函数 $G(x,y,z)$ 满足条件

$$G_{,a} = 2C_{ab}V^{,b}. \tag{22}$$

可积条件 $G_{,[ab]} = 0$ 给出:

$$\begin{aligned}
0 &= C_{12}\left(V_{,yy} - V_{,xx}\right) + \left[\frac{a_6(y^2 - x^2)}{2} + \frac{(a_1 - a_7)z^2}{2} - (a_{14}x - a_4y)z - a_{15}x + a_5y + (a_2 - a_{12})z + \right. \\
&\left. + a_3 - a_{13}\right]V_{,xy} + C_{13}V_{,yz} - C_{23}V_{,xz} + \frac{3}{2}(a_6y + a_4z + a_5)V_{,x} - \frac{3}{2}(a_6x + a_{14}z + a_{15})V_{,y} + \\
&+ \left(\frac{3a_{14}}{2}y - \frac{3a_4}{2}x + 2a_{18} + a_{16}\right)V_{,z}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
0 &= C_{13}\left(V_{,zz} - V_{,xx}\right) + \left[\frac{a_1(z^2 - x^2)}{2} + \frac{(a_6 - a_7)y^2}{2} - (a_{10}x - a_4z)y - a_{11}x + (a_5 - a_8)y + a_2z + \right. \\
&\left. + a_3 - a_9\right]V_{,xz} + C_{12}V_{,yz} - C_{23}V_{,xy} + \frac{3}{2}(a_4y + a_1z + a_2)V_{,x} + \left(\frac{3a_{10}}{2}z - \frac{3a_4}{2}x + 2a_{16} + a_{18}\right)V_{,y} - \\
&- \frac{3}{2}(a_1x + a_{10}y + a_{11})V_{,z}
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
0 &= C_{23}\left(V_{,zz} - V_{,yy}\right) + \left[\frac{a_7(z^2 - y^2)}{2} + \frac{(a_6 - a_1)x^2}{2} - (a_{10}y - a_{14}z)x + (a_{15} - a_{11})x - a_8y + a_{12}z + \right. \\
&\left. + a_{13} - a_9\right]V_{,yz} + C_{12}V_{,xz} - C_{13}V_{,xy} + \left(\frac{3a_{10}}{2}z - \frac{3a_{14}}{2}y + a_{16} - a_{18}\right)V_{,x} + \frac{3}{2}(a_{14}x + a_7z + a_{12})V_{,y} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{3}{2}(a_{10}x+a_7y+a_8)V_{,z}. \tag{25}$$

我们注意到，对于二维牛顿势，可积条件 $G_{,[ab]}=0$ 只导出一个方程，即著名的伯特兰–达布偏微分方程（参见 [10] 中的方程 (28) 和 [12]中的方程 (3.2.5)）。

为求得允许具有形式（20）的自治二次第一积分的势 $V(x,y,z)$，必须求解偏微分方程组（23）—（25）。将这些势代入剩余的条件（22）后，我们得到函数 $G(x,y,x)$，它们确定了相关二次一级积分（20）。由于一般解 $V(x,y,z)$ 不可行，我们再次针对二十个自由参数 a_1、a_2、.....、a_{20} 的各种取值考虑若干情形。

5.1.1 Killing 张量 C_{ab} 的分量为常数

在此情形下，可能非零的参数为 a_3、a_9、a_{13}、a_{17}、a_{19} 和 a_{20}。详细研究得出以下五种情形（仅列出非零参数）。

1) $a_3=a$、$a_{17}=\frac{b}{2}$ 和 $a_{19}=\frac{c}{2}$，其中 a、b、c 为任意常数[5]。势为

$$V(x,y,z)=F_1\left(cz+by+(\sqrt{a^2+b^2+c^2}+a)x\right)+F_2\left(cz+by-(\sqrt{a^2+b^2+c^2}-a)x\right)+F_3(bz-cy) \tag{26}$$

其中，F_1、F_2和 F_3 是各自参数的任意光滑函数。

相关二次一级积分 (20) 为

$$I_{(1,1)}=(a\dot{x}+b\dot{y}+c\dot{z})\,\dot{x}+a(F_1+F_2)+\sqrt{a^2+b^2+c^2}(F_1-F_2). \tag{27}$$

我们注意到，常数 a、b和 c 是势 (26) 的参数；因此，它们无法生成三个不同的二次第一积分。

2)$a_3=a$、$a_{13}=-a$和 $a_{17}=ia$，其中 a 是任意常数。

势为

$$V(x,y,z)=F_1(w,z)+F_2(w)\bar{w} \tag{28}$$

其中 $w=x+iy$、$\bar{w}=x-iy$ 和 F_1、F_2 是其自变量的任意光滑函数。

相应的自治二次首积分 (20) 为

$$I_{(1,1)}=(\dot{x}+i\dot{y})^2+4\int F_2(w)dw. \tag{29}$$

若 $F_1(w,z)=F_3(w)+F_4(z)$，则

$$V(x,y,z)=F_2(w)\bar{w}+F_3(w)+F_4(z) \tag{30}$$

是一个新的可积势，因为还存在额外的二次第一积分$I=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_4(z)$。

3) $a_3=a$、$a_{13}=-a$和 $a_{17}=-ia$，其中 a 是一个任意常数。

势

$$V(x,y,z)=F_1(\bar{w},z)+F_2(\bar{w})w \tag{31}$$

以及相关二次一级积分

$$I_{(1,1)}=(\dot{x}-i\dot{y})^2+4\int F_2(\bar{w})d\bar{w}. \tag{32}$$

如果 $F_1(\bar{w},z)=F_3(\bar{w})+F_4(z)$，那么

$$V(x,y,z)=F_2(\bar{w})w+F_3(\bar{w})+F_4(z) \tag{33}$$

由于额外的二次第一积分 $I=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_4(z)$，这是一个新的可积势。

4) $a_{19}\neq 0$ 和 $a_{20}=ia_{19}$。势为

$$V(x,y,z)=F_2'z^2+F_3(w)z+F_4(w)+F_2(w)\bar{w} \tag{34}$$

[5]如果不采用三元组 a_3,a_{17},a_{19}，而是将三元组 a_{13},a_{17},a_{20}或 a_9,a_{19},a_{20}作为非零参数，则所得势关于坐标 x,y,z的循环置换是对称的。

其中 $w=x+iy$、 $\bar{w}=x-iy$、 F_2、 F_3、 F_4 是其自变量的任意光滑函数，且 $F_2'\equiv\frac{dF_2}{dw}$。相应的自治二次首积分 (20) 为

$$I_{(1,1)}=\frac{1}{2}\dot{z}\left(\dot{x}+i\dot{y}\right)+F_2(w)z+\frac{1}{2}\int F_3(w)dw. \tag{35}$$

由于势 (34) 对于 $F_1(w,z)=F_2'z^2+F_3(w)z+F_4(w)$ 具有一般形式 (28)，因此它具有额外的二次第一积分 (29)。因此，它是可积的，因为独立的二次第一积分 H、(29) 和 (35) 两两对合[6]。

对于 $F_2=k_1w+k_2$ 和 $F_3=k_3$，其中 k_1、 k_2、 k_3 为任意常数，势 (34) 变为

$$V(x,y,z)=k_1r^2+k_2\bar{w}+k_3z+F_4(w). \tag{36}$$

这是一个新的最小超可积势，因为它在坐标 z 中可分离。

5) $a_{19}\neq0$ 和 $a_{20}=-ia_{19}$。

该势为

$$V(x,y,z)=F_2'z^2+F_3(\bar{w})z+F_4(\bar{w})+F_2(\bar{w})w. \tag{37}$$

其中 $w=x+iy$ 和 $F_2'\equiv\frac{dF_2}{d\bar{w}}$。

相应的自治二次首积分 (20) 为

$$I_{(1,1)}=\frac{1}{2}\dot{z}\left(\dot{x}-i\dot{y}\right)+F_2(\bar{w})z+\frac{1}{2}\int F_3(\bar{w})d\bar{w}. \tag{38}$$

势 (37) 对于 $F_1(\bar{w},z)=F_2'z^2+F_3(\bar{w})z+F_4(\bar{w})$ 属于一般形式 (31)；因此，由于存在额外的二次第一积分 (32)，它是可积的。

此外，对于 $F_2=k_1\bar{w}+k_2$ 和 $F_3=k_3$，势 (37) 变为

$$V(x,y,z)=k_1r^2+k_2w+k_3z+F_4(\bar{w}). \tag{39}$$

这是一个新的最小超可积势，因为它在坐标 z 下可分离。

5.1.2 Killing 张量 C_{ab} 的分量是关于 x,y,z 的线性函数

可能非零的参数为 $a_2,a_5,a_8,a_{11},a_{12},a_{15},a_{16}$ 和 a_{18}。在这种情形下，有六种不同的组合可得出新结果。

1) $a_2=a$ 和 $a_5=b$，其中 a、 b 为任意常数。

该势为

$$V(x,y,z)=(a^2+b^2)x^2+4(az+by)^2+\frac{k_1}{x^2}+k_2(az+by)+F(ay-bz) \tag{40}$$

其中 F 是其自变量的任意光滑函数， k_1、 k_2 为任意常数。对于 $a=0$，势 (40) 化为如下形式的最小超可积势（见表 2）

$$V(x,y,z)=\frac{k_1}{2}(x^2+4y^2)+\frac{k_2}{x^2}+k_3y+F(z). \tag{41}$$

相关二次第一积分 (20) 为

$$I_{(1,1)}=(aM_2-bM_3)\dot{x}-\frac{k_2}{2}(a^2+b^2)x^2-2(a^2+b^2)(az+by)x^2+\frac{2k_1(az+by)}{x^2} \tag{42}$$

其中 $M_i=(y\dot{z}-z\dot{y},z\dot{x}-x\dot{z},x\dot{y}-y\dot{x})$ 是角动量。

由于势 (40) 在坐标 x 中可分离，因此它还存在额外的二次第一积分

$$I=\frac{1}{2}\dot{x}^2+(a^2+b^2)x^2+\frac{k_1}{x^2}.$$

[6]三次第一积分 (29) 和 (35) 的泊松括号为零，因为对于形式为 $M(w)=\int F(w)dw$ 且满足 $w=x+iy$ 的可积函数，有：$M'\equiv\frac{dM}{dw}=F$、 $M,_x=F$以及 $M,_y=iF$。

然而，它并不可积，因为泊松括号 $\{I_{(1,1)}, I\} \neq 0$。

2) $a_2 = a$ 和 $a_{12} = b$，其中 a、b 为任意常数。

我们得到完全可分势

$$V(x,y,z) = k_1(x^2+y^2+4z^2) + \frac{k_2}{x^2} + \frac{k_3}{y^2} + k_4 z \tag{43}$$

其中 k_1、k_2、k_3和 k_4为任意常数。我们注意到，[2] 的表 I 中的势是 $k_4 = 0$ 时势 (43) 的一个子情形。

相关二次一级积分 (20) 由以下两个独立的二次第一积分组成:

$$J_1 = M_2\dot{x} + 2z\left(\frac{k_2}{x^2} - k_1 x^2\right) - \frac{k_4}{2}x^2 \tag{44}$$

$$J_2 = -M_1\dot{y} + 2z\left(\frac{k_3}{y^2} - k_1 y^2\right) - \frac{k_4}{2}y^2. \tag{45}$$

此外，势 (43) 具有可积形式 $V = F_1\left(\frac{y}{x}\right)_{R^2} + F_2(R) + F_3(z)$（见表1），适用于

$$F_1\left(\frac{y}{x}\right) = k_2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] + k_3\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right],\ F_2(R) = k_1(x^2+y^2),\ F_3(z) = 4k_1z^2 + k_4 z.$$

因此，它还具有额外的二次第一积分

$$J_3 = \frac{1}{2}M_3^2 + k_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + k_3\left(\frac{x}{y}\right)^2. \tag{46}$$

为了将二次第一积分 (44)、(45)、(46) 与 [2], 中方程 (3.43) 的二次第一积分 $I_3 I_4$ 进行比较，我们令 $k_4 = 0$，并采用旋转抛物坐标（参见 [2] 中的方程 (3.8) 和 (3.9)）：

$$\zeta = r + z,\ \eta = r - z,\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

或等价地

$$x = \sqrt{\zeta\eta}\cos\phi,\ y = \sqrt{\zeta\eta}\sin\phi,\ z = \frac{1}{2}(\zeta - \eta).$$

我们计算（对于 $k_4 = 0$）：

$$J_1 = M_2\dot{x} + (\zeta-\eta)\left(\frac{k_2}{\zeta\eta\cos^2\phi} - k_1\zeta\eta\cos^2\phi\right) \tag{47}$$

$$J_2 = -M_1\dot{y} + (\zeta-\eta)\left(\frac{k_3}{\zeta\eta\sin^2\phi} - k_1\zeta\eta\sin^2\phi\right) \tag{48}$$

$$J_3 = \frac{1}{2}M_3^2 + \frac{k_2}{\cos^2\phi} + \frac{k_3}{\sin^2\phi} - k_2 - k_3. \tag{49}$$

于是，$J_3 = I_3 - k_2 - k_3$ 以及

$$J_1 + J_2 = M_2\dot{x} - M_1\dot{y} - (\zeta-\eta)\left(k_1\zeta\eta - \frac{k_2}{\zeta\eta\cos^2\phi} - \frac{k_3}{\zeta\eta\sin^2\phi}\right) = I_4.$$

[2] 的方程 (3.43) 中关于二次第一积分 I_4 的首项有一处印刷错误。正确形式应为 $L_2P_1 - L_1P_2$。由此我们得出，势 (43) 是最大超可积的。然而，在七个二次第一积分中（即二次第一积分 H、J_1、J_2、J_3，以及由 x、y、z 的可分离性产生的三个二次第一积分），只有五个函数独立。3) $a_2 = a$ 和 $a_8 = b$，其中 a、b 为任意常数。

我们求得可分离势

$$V(x,y,z) = \frac{k_1}{4}(x^2+16y^2+4z^2) + \frac{k_2}{x^2} + k_3 y \tag{50}$$

其中 k_1、k_2 和 k_3 为任意常数。

相关二次一级积分 (20) 由以下两个独立量子费舍尔信息组成：

$$J_1 = M_2\dot{x} + z\left(\frac{2k_2}{x^2} - \frac{k_1}{2}x^2\right) \tag{51}$$

$$J_2 = M_1\dot{z} - z^2\left(2k_1 y + \frac{k_3}{2}\right). \tag{52}$$

因此，可分离势 (50) 是一种新的最大超可积势 l.

4) $a_2 = a$ 和 $a_{16} = -a_{18} = \frac{b}{2}$，其中 a、b 是任意常数。

该势为

$$V(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{(ax+by)^2 + (a^2+b^2)z^2}} \tag{53}$$

其中 k 是任意常数。

相关二次一级积分 (20) 为

$$I_{(1,1)} = aM_2\dot{x} - bM_1\dot{x} + azV. \tag{54}$$

为了证明势 (53) 可积，我们还需要一个与之对合的独立第一积分。5) $a_2 = a_{12} \neq 0$

在这种情况下，我们得到以下三个势[7]：

$$V_1(x,y,z) = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + k(R^2 + 4z^2) \tag{55}$$

$$V_2(x,y,z) = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + \frac{k_1 z}{rR^2} - \frac{k_2}{r} \tag{56}$$

$$V_3(x,y,z) = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + kz \tag{57}$$

其中 k、k_1、k_2 为任意常数，$R = \sqrt{x^2+y^2}$ 和 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$。前两个势，即 V_1 和 V_2，已列于 [2], 的表 II 中，而第三个势 V_3 未列入其中。

相关二次第一积分 (20) 为：

- 对于势[8] (55)：

$$\begin{aligned} I_{(1,1)} &= M_2\dot{x} - M_1\dot{y} + \frac{2zF_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2} - 2kz(x^2+y^2) \\ &= M_2\dot{x} - M_1\dot{y} + (\zeta-\eta)\left(\frac{F_1(\tan\phi)}{\zeta\eta} - k\zeta\eta\right). \end{aligned} \tag{58}$$

- 对于势 (56)：

$$\begin{aligned} I_{(1,1)} &= M_2\dot{x} - M_1\dot{y} + \frac{2zF_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2} + \frac{2k_1 z^2}{r(x^2+y^2)} + \frac{k_1}{r} - \frac{k_2 z}{r} \\ &= M_2\dot{x} - M_1\dot{y} + \frac{(\zeta-\eta)F_1(\tan\phi)}{\zeta\eta} + \frac{k_1(\zeta^2+\eta^2)}{\zeta\eta(\zeta+\eta)} - \frac{k_2(\zeta-\eta)}{\zeta+\eta}. \end{aligned} \tag{59}$$

- 对于势 (57)：

$$I_{(1,1)} = M_2\dot{x} - M_1\dot{y} + \frac{2zF_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2} - k\frac{R^2}{2}. \tag{60}$$

我们注意到，势（55）和（57）均为最小超可积，因为它们具有形式$V = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + F_2(R) + F_3(z)$（见表1）。

[7]我们注意到，这些势的任意线性组合都是方程组 (23)–(25) 的解，适用于 $a_2 = a_{12} \neq 0$。[8] [2], 的表 II 中，与势 (55) 和 (56) 相关的二次第一积分 I_3 存在一处印刷错误。I_3 的首项应为 $L_2P_1 - P_2L_1$。

此外，根据下文第5.1.3小节中的情形2）和3），势（56）成为最小超可积势，因为它具有额外二次第一积分（75）和（81），且二者也互为对合。

6) $a_2 \neq 0$、 $a_{12} = -a_2$、 $a_{16} = ia_2$ 和 $a_{18} = -i\frac{a_2}{2}$。

势为

$$V(x,y,z) = k_1(R^2 + 4z^2) + k_2 z + \frac{k_3}{w^2} + k_4 \frac{\bar{w}}{w^3} \tag{61}$$

其中 k_1、 k_2、 k_3、 k_4 为任意常数， $w = x + iy$，且 $\bar{w} = x - iy$。若施加正则变换 $x \to y$、 $y \to z$ 和 $z \to x$，此结果与 [4] 中方程（14）给出的势一致。

相应的自治二次首积分（20）为

$$I_1 = \frac{1}{2}(\dot{x} + i\dot{y})\,(M_2 - iM_1) - k_1 z w^2 - \frac{k_2}{4} w^2 - k_4 \frac{z}{w^2}. \tag{62}$$

此外，势（61）还具有额外二次第一积分:

$$I_2 = \frac{1}{2}(\dot{x} + i\dot{y})^2 + k_1 w^2 - \frac{k_4}{w^2} \tag{63}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + 4k_1 z^2 + k_2 z \tag{64}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}M_3^2 + k_3 e^{-2i\theta} + k_4 e^{-4i\theta} \tag{65}$$

$$I_5 = \frac{1}{2}(M_2\dot{x} - M_1\dot{y}) + k_3 \frac{z}{w^2} + k_4 \frac{z\bar{w}}{w^3} - k_1 z R^2 - k_2 \frac{R^2}{4} \tag{66}$$

因为对于 $F_1 = 4k_1 z^2 + k_2 z + \frac{k_3}{w^2}$ 和 $F_2 = k_1 w + \frac{k_4}{w^3}$，它具有形式（28），而且具有形式（参见第5.1.2小节和表6）

$$V(x,y,z) = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + k_1(R^2 + 4z^2) + k_2 z \tag{67}$$

对于 $F_1\left(\frac{y}{x}\right) = k_3 e^{-2i\theta} + k_4 e^{-4i\theta}$，其中 $\tan\,\theta = \frac{y}{x}$。因此，势（61）是最大超可积的。

5.1.3 Killing 张量 C_{ab} 的分量取决于 xy、 xz、 yz、 x^2、 y^2、 z^2

在此情形下，可能非零的参数为 a_1、 a_4、 a_6、 a_7、 a_{10} 和 a_{14}。以下六种情形给出了新结果。

1） $a_1 = a$、 $a_6 = b$ 和 $a_7 = c$，其中 a、 b、 c 为任意常数。

势为（见 [2] 中的表 II）

$$V(x,y,z) = \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{y^2} + \frac{k_3}{z^2} + F(r) \tag{68}$$

其中 k_1、 k_2、 k_3 为任意常数，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 和 F 是 r 的任意光滑函数。相关二次一级积分（20）由以下三个独立首积分组成（每个参数 a、 b、 c 对应一个）：

$$I_1 = \frac{1}{2}M_1^2 + k_2 \frac{z^2}{y^2} + k_3 \frac{y^2}{z^2} \tag{69}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}M_2^2 + k_1 \frac{z^2}{x^2} + k_3 \frac{x^2}{z^2} \tag{70}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}M_3^2 + k_1 \frac{y^2}{x^2} + k_2 \frac{x^2}{y^2}. \tag{71}$$

使用球坐标 $x = r\sin\,\theta\cos\phi$、 $y = r\sin\,\theta\sin\,\phi$ 和 $z = r\cos\theta$，二次第一积分 (69)–(71) 与 [2] 的表 II 中所列出的结果一致。此外，通过将上述二次第一积分相加，我们得到二次第一积分

$$I_4 = \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{k_1}{\sin^2\theta\cos^2\phi} + \frac{k_2}{\sin^2\theta\sin^2\phi} + \frac{k_3}{\cos^2\theta} \tag{72}$$

其中，$\mathbf{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$是角动量的模平方。

尽管势 (68) 存在四个独立的二次第一积分 H、I_1、I_2 和 I_3，但由于泊松括号 $\{I_i, I_j\} \neq 0$，它并不可积。

对于 $F(r) = kr^2$，其中 k 是任意常数，势 (68) 变为（见 [2]中的表 I）

$$V(x,y,z) = k\left(x^2+y^2+z^2\right) + \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{y^2} + \frac{k_3}{z^2} \tag{73}$$

该系统是最大超可积的（见表 1 和表 3）。

2) $a_6 \neq 0$。

该势为

$$V(x,y,z) = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + F_2(R,z) \tag{74}$$

其中 F_1 和 F_2 是各自自变量的任意光滑函数。

相关二次第一积分 (20) 为

$$I_{(1,1)} = \frac{1}{2}M_3^2 + F_1\left(\frac{y}{x}\right). \tag{75}$$

如果 $F_2(R,z) = F_3(R) + F_4(z)$，其中 F_3 和 F_4 是任意光滑函数，那么势 (74) 是可积的（见表1）。

3) $a_1 = a_6 = a_7 \neq 0$。

势为

$$V(x,y,z;m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{F_j\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} N_j\left(\frac{z}{R}\right) + F(r) \tag{76}$$

其中 F_j、N_j和 F是其自变量的光滑函数，$j = 1$、2、...、m。

相关二次一级积分 (20) 为

$$I_{(1,1)} = \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{r^2 F_j\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} N_j\left(\frac{z}{R}\right). \tag{77}$$

我们注意到，对于

a. $m = 2$, $N_1 = F_2 = 1$, $N_2 = k_2\frac{R^2}{z^2}$, $F(r) = k_1 r^2$; 以

及 b. $m = 2$, $N_1 = F_2 = 1$, $N_2 = \frac{k_1\frac{z}{R}}{\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}}$, $F(r) = -\frac{k_2}{r}$

t势（76）分别化简为以下势（参见 [2]中的表 II）：

$$V_1(x,y,z) = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2} + k_1(x^2+y^2+z^2) + \frac{k_2}{z^2} \tag{78}$$

$$V_2(x,y,z) = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2} + \frac{k_1 z}{r(x^2+y^2)} - \frac{k_2}{r} \tag{79}$$

其中 k_1 和 k_2 是任意常数。上述两个势也都具有一般形式（74）。

相关二次第一积分（77）如下:

- 对于势（78）:

$$I_{(1,1)} = \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{r^2 F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2} + \frac{k_2(x^2+y^2)}{z^2}. \tag{80}$$

-对于势（79）:

$$I_{(1,1)} = \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{r^2 F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2} + \frac{k_1 z r}{x^2+y^2}. \tag{81}$$

我们注意到，势（78）是最小超可积的，因为它在坐标 z 中可分离，而且也具有形式（74）。

4) $a_1 \neq 0$、$a_7 = -a_1$ 和 $a_{10} = ia_1$。

势为

$$V(x,y,z) = F_3(w) + \frac{z^2}{w}F_2(w) + \frac{F_4\left(\frac{z}{w}\right)}{w^2} + F_2(w)\bar{w} \tag{82}$$

其中 $w=x+iy$、 $\bar{w}=x-iy$ 和 F_2、 F_3、 F_4 是各自自变量的任意光滑函数。

相关二次一级积分 (20) 为

$$I_1=\frac{1}{2}\left(M_2-iM_1\right)^2+F_4\left(\frac{z}{w}\right). \tag{83}$$

此外，势 (82) 还具有额外的二次第一积分

$$I_2=\left(\dot{x}+i\dot{y}\right)^2+4\int F_2(w)dw \tag{84}$$

因为它具有 (28) 的形式，其中 $F_1=F_3(w)+\frac{z^2}{w}F_2(w)+F_4\left(\frac{z}{w}\right)w^2$。由于泊松括号 $\{I_1,I_2\}=0$，势 (82) 是（刘维尔）可积的。

最后，对于 $F_2=k_1w$ 和 $F_4=k_2\frac{w^2}{z^2}$，势 (82) 变为

$$V(x,y,z)=k_1r^2+\frac{k_2}{z^2}+F_3(w) \tag{85}$$

它是 一个新的最小超可积势，这归因于其在 z 坐标下的可分离性。

5) $a_1\neq 0$、 $a_7=-a_1$ 和 $a_{10}=-ia_1$。

与前面的情形 4) 类似，我们得到可积势

$$V(x,y,z)=F_3(\bar{w})+\frac{z^2}{\bar{w}}F_2(\bar{w})+\frac{F_4\left(\frac{z}{\bar{w}}\right)}{\bar{w}^2}+F_2(\bar{w})w \tag{86}$$

以及相关二次一级积分

$$I_1=\frac{1}{2}\left(M_2+iM_1\right)^2+F_4\left(\frac{z}{\bar{w}}\right). \tag{87}$$

此外，势 (86) 还具有额外的二次第一积分

$$I_2=\left(\dot{x}-i\dot{y}\right)^2+4\int F_2(\bar{w})d\bar{w} \tag{88}$$

因为它对于 $F_1=F_3(\bar{w})+\frac{z^2}{\bar{w}}F_2(\bar{w})+F_4\left(\frac{z}{\bar{w}}\right)\bar{w}^2$ 的形式为 (31)。

最后，对于 $F_2=k_1\bar{w}$ 和 $F_4=k_2\frac{\bar{w}^2}{z^2}$，势 (86) 变为

$$V(x,y,z)=k_1r^2+\frac{k_2}{z^2}+F_3(\bar{w}) \tag{89}$$

这是一个新的最小超可积势，源于在 z 坐标中的可分离性。

6) $a_4\neq 0$ 和 $a_{14}=-ia_4$。

该势为（见 [4]的公式（12））

$$V(x,y,z)=k_1r^2+\frac{k_2}{w^2}+k_3\frac{z}{w^3}+k_4\frac{R^2-3z^2}{w^4} \tag{90}$$

其中 k_1、 k_2、 k_3、 k_4 是任意常数，且 $w=x+iy$。

相关二次一级积分（20）为

$$I_1=M_3\left(iM_1-M_2\right)+k_3\frac{y}{w}-2ik_2\frac{z}{w}-\frac{3ik_3}{2}\frac{z^2}{w^2}-4ik_4\frac{z(x^2+y^2-z^2)}{w^3}. \tag{91}$$

此外，势（90）还具有以下额外二次第一积分：

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(M_2-iM_1\right)^2+k_3\frac{z}{w}-4k_4\frac{z^2}{w^2} \tag{92}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\dot{z}\left(\dot{x}+i\dot{y}\right)+k_1zw-\frac{k_3}{4w^2}+k_4\frac{z}{w^3}. \tag{93}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\left(\dot{x}+i\dot{y}\right)^2+k_1w^2-\frac{k_4}{w^2} \tag{94}$$

$$I_5 \quad = \quad \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + k_2\frac{r^2}{w^2} + k_3\frac{zr^2}{w^3} + k_4\frac{r^2(x^2+y^2-3z^2)}{w^4}. \tag{95}$$

具体而言，我们有：

1) 它存在二次第一积分 (92)，因为它对 $F_2 = k_1 w + \frac{k_4}{w^3}$、 $F_3 = \frac{k_2}{w^2}$ 和 $F_4 = k_3\frac{z}{w} - 4k_4\frac{z^2}{w^2}$ 属于形式 (82)。2) 它存在二次第一积分 (93)，因为它对 $F_2 = k_1 w + \frac{k_4}{w^3}$、 $F_3 = \frac{k_3}{w^3}$ 和 $F_4 = \frac{k_2}{w^2}$属于形式 (34)。3) 它存在二次第一积分 (94)，因为它对 $F_1 = k_1 z^2 + \frac{k_2}{w^2} + k_3\frac{z}{w^3} - 3k_4\frac{z^2}{w^4}$ 和 $F_2 = k_1 w + \frac{k_4}{w^3}$ 属于形式 (28)。4) 它存在二次第一积分 (95)，因为它对 $m = 4$、 $N_1 = 1$、 $F_1 = k_2 e^{-2i\theta}$、 $N_2 = \frac{z}{R}$、 $F_2 = k_3 e^{-3i\theta}$、$N_3 = 1$、 $F_3 = k_4 e^{-4i\theta}$、 $N_4 = \frac{z^2}{R^2}$、 $F_4 = -3k_4 e^{-4i\theta}$ 和 $F\ (r)\ = k_1 r^2$ 属于形式 (76)。

我们注意到变量 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$；因此， $w = x + iy = Re^{i\theta}$和 $R^2 = w\bar{w}$。

我们得出结论，势 (90) 是最大超可积的。具体而言，由于三元组 H, I_2, I_4，它是可积的；由于它具有五个独立的二次第一积分 H, I_1, I_2, I_3, I_4，它是超可积的。

5.1.4 Killing 张量 C_{ab} 的分量取决于 x、 y、 z 的混合次数乘积 e

在本小节中，我们继续考察二十个参数 $a_1, ..., a_{20}$ 的混合组合，使得 Killing 张量 C_{ab} 的分量包含 x、 y、 z 的混合次数乘积。我们注意到，并未穷尽所有可能的情形；因此，其他作者可以考察其他情形，并在 E^3 中确定新的不可分解可积/超可积势。

1) 唯一非零的参数是 $a_3 = \frac{iB}{4}$、 $a_5 = B$、 $a_{13} = -\frac{iB}{4}$、 $a_{17} = -\frac{B}{4}$ 和 $a_{15} = iB$，其中 B 是一个任意常数。

Killing 张量 (21) 为

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} By + \frac{iB}{4} & -\frac{B}{2}x - \frac{iB}{2}y - \frac{B}{4} & 0 \\ -\frac{B}{2}x - \frac{iB}{2}y - \frac{B}{4} & iBx - \frac{iB}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{96}$$

对于 Killing 张量 (96)，偏微分方程组 (23) - (25) 给出的势为

$$V(x,y,z) = 4k_1\left(R^2 - \frac{\bar{w}^3}{2}\right) + k_2\left(2w - 3\bar{w}^2\right) + k_3\bar{w} + F(z) \tag{97}$$

其中 k_1、 k_2、 k_3 为任意常数， $F(z)$ 是一个任意光滑函数。

相关二次一级积分 (20) 为

$$\begin{aligned} I_1 \quad = \quad & \frac{1}{4}\left(\dot{x} + i\dot{y}\right)^2 + iM_3\left(\dot{x} - i\dot{y}\right) - 2k_1\left(\frac{3}{4}\bar{w}^4 - w^2 + R^2\bar{w}\right) - \\ & -2k_2\left(\bar{w}^3 + 2R^2\right) + k_3\left(\frac{\bar{w}^2}{2} + w\right). \end{aligned} \tag{98}$$

此外，势 (97) 还存在以下额外二次第一积分：

$$I_2 \quad = \quad \frac{1}{8}\left(\dot{x} - i\dot{y}\right)^2 + k_1\bar{w}^2 + k_2\bar{w} \tag{99}$$

$$I_3 \quad = \quad \frac{1}{2}\dot{z}^2 + F(z) \tag{100}$$

因为对于 $F_1 = -2k_1\bar{w}^3 - 3k_2\bar{w}^2 + k_3\bar{w} + F\ (z)$ 和 $F_2 = 4k_1\bar{w} + 2k_2$，它具有形式（31），并且在 z 坐标上可分离。因此，由于存在四个独立的二次第一积分 H、I_1、 I_2、 I_3，它是最小超可积的。

我们注意到， [4] 中公式（15）给出的势是（97）在 $F\ (z)\ = k_1 z^2 + \frac{k_4}{z^2}$ 下的一个子情形，其中 k_4 是任意常数。如下文所示，在这个特殊情形下，所得势还具有额外二次第一积分，使其成为极大超可积势。2）Th

e onl y 非零 非零参数为 $a_1 = C$、 $a_7 = -C$、 $a_8 = -iD + 2iC$、 $a_{10} = -iC$ 和 $a_{11} = D$ ，其中 C, D 是任意 常数。

Killing 张量（21）为

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{C}{2}z^2 & -\frac{iC}{2}z^2 & -\frac{C}{2}xz + \frac{iC}{2}yz - \frac{D}{2}z \\ -\frac{iC}{2}z^2 & -\frac{C}{2}z^2 & \frac{iC}{2}xz + \frac{C}{2}yz + i\left(\frac{D}{2} - C\right)z \\ -\frac{C}{2}xz + \frac{iC}{2}yz - \frac{D}{2}z & \frac{iC}{2}xz + \frac{C}{2}yz + i\left(\frac{D}{2} - C\right)z & \frac{C}{2}(x^2 - y^2) + iCy(2-x) + D(x - iy) \end{pmatrix}. \tag{101}$$

对于 Killing 张量（101），偏微分方程组（23）–（25）给出势（见 [4] 的公式（15））

$$V(x,y,z)=4k_1\left(R^2-\frac{\bar{w}^3}{2}+\frac{z^2}{4}\right)+k_2\left(2w-3\bar{w}^2\right)+k_3\bar{w}+\frac{k_4}{z^2} \tag{102}$$

其中，k_1、k_2、k_3和 k_4 为任意常数。

相关二次一级积分 (20) 由以下独立的二次第一积分组成：

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\left(M_2+iM_1\right)^2+2i\dot{z}M_1+k_1z^2\left(3\bar{w}^2-4iy\right)+2k_2z^2\left(2\bar{w}+1\right)- \\ &\quad -k_3z^2+\frac{k_4}{z^2}\left(\bar{w}^2+4iy\right) \qquad (103) \\ I_2 &= \frac{1}{2}\dot{z}\left(M_2+iM_1\right)+k_1z^2\bar{w}+k_2z^2-k_4\frac{\bar{w}}{z^2}. \qquad (104) \end{aligned}$$

此外，势 (102) 具有三个额外二次第一积分 (98)–(100)，因为对于 $F(z)=k_1z^2+\frac{k_4}{z^2}$，它具有形式 (97)。因此，它是最大超可积的。

3) 唯一非零的参数为：

$$a_1=-2C,\ \ a_2=iB-C,\ \ a_5=a_8=iA,\ \ a_7=2C,\ \ a_9=\frac{iB}{4}-\frac{C}{4},\ \ a_{10}=-2iC,\ \ a_{11}=a_{15}=A,$$

$$a_{12}=-iB+2C,\ \ a_{13}=\frac{C}{4},\ \ a_{16}=-B-\frac{3iC}{2},\ \ a_{18}=\frac{B}{2}+\frac{3iC}{2},\ \ a_{20}=\frac{iA}{4}$$

其中，A、B和 C 为任意常数。

Killing 张量 (21) 具有以下独立分量：

$$\begin{aligned} C_{11} &= -Cz^2+iAy+(iB-C)z \\ C_{12} &= -iCz^2-\frac{iA}{2}\bar{w}-\left(B+\frac{3iC}{2}\right)z \\ C_{13} &= Cxz--iCyz-\frac{iB-C}{2}x+\frac{1}{2}(B+3iC)y-\frac{A}{2}z \qquad (105) \\ C_{22} &= Cz^2+Ax-(iB-2C)z-\frac{C}{4} \\ C_{23} &= iCxz-Cyz+\frac{B}{2}x+\frac{iB-2C}{2}y-\frac{iA}{2}z+\frac{iA}{4} \\ C_{33} &= -Cx^2+Cy^2-2iCxy+Aw+\frac{iB-C}{4} \end{aligned}$$

其中 $w=x+iy$。

对于 Killing 张量 (105)，偏微分方程组 (23) - (25) 给出的势为（见 [4] 的式 (16)）

$$V(x,y,z)=k_1w+k_2\left(3w^2+z\right)+k_3\left(4w^3+3wz+\frac{\bar{w}}{4}\right)+k_4\left(\frac{5}{2}w^4+\frac{r^2}{2}+3w^2z\right) \tag{106}$$

其中 k_1、k_2、k_3 和 k_4 是任意常数。

相关二次一级积分（20）由以下独立量子费舍尔信息组成：

$$\begin{aligned} I_1 &= M_3\dot{w}-\left(M_1+iM_2\right)\dot{z}-\frac{1}{2}\dot{y}\dot{z}+\frac{ik_1}{2}\left(w^2-z\right)+ik_2\left(2w^3-zw+\frac{i}{2}y\right)-\frac{ik_3}{8}\left(w^2-z\right)+ \\ &\quad +ik_3\left(3w^4-z^2+iyw\right)-\frac{k_4}{2}y\left(w^2+z\right)+ik_4w\left(2w^4+zw^2-z^2\right) \qquad (107) \\ I_2 &= M_1\left(2\dot{x}+i\dot{y}\right)+iM_2\dot{x}+M_3\dot{z}+\frac{i}{4}\dot{z}^2+\frac{ik_2}{2}\left(z-w^2\right)+ik_3w\left(z-w^2\right)+ \\ &\quad +\frac{ik_4}{4}\left(z^2+2zw^2-3w^4\right) \qquad (108) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 \;=\;& (M_1+iM_2)^2+(2iM_1-M_2)\,\dot{w}-iM_3\dot{z}+\frac{1}{4}\left(\dot{y}^2-\dot{z}^2\right)+k_1zw+\frac{ik_1}{2}y+\\
&+2k_2w\,(2zw+iy)+\frac{k_2}{2}\left(w^2-z\right)+k_3w^3(6z+1)+k_3zw\left(2z-\frac{1}{4}\right)+\\
&+ik_3y\left(3w^2-\frac{1}{8}\right)-k_3xz+k_4w^4\left(4z+\frac{3}{4}\right)+2ik_4yw^3+\\
&+k_4z^2\left(3w^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{k_4}{2}\left(\frac{y^2}{2}-zR^2\right). \qquad (109)
\end{aligned}
$$

我们注意到，参数 A 产生二次第一积分 I_1，B 产生 I_2，而 C 产生 I_3。

此外，势 (106) 还具有以下额外二次第一积分：

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \dot{w}^2+k_3w+k_4w^2 \qquad (110)\\
I_5 &= \dot{z}\dot{w}+\left(k_4w+\frac{k_3}{2}\right)z+k_4w^3+\frac{3k_3}{2}w^2+k_2w \qquad (111)
\end{aligned}
$$

因为它对 $F_1=k_1w+k_2(3w^2+z)+k_3w(4w^2+3z)+k_4\left(\frac{5}{2}w^4+3w^2z+\frac{z^2}{2}\right)$ 和 $F_2=\frac{k_4}{2}w+\frac{k_3}{4}$具有形式 (28)，且对 $F_2=\frac{k_4}{2}w+\frac{k_3}{4}$、$F_3=3k_4w^2+3k_3w+k_2$和 $F_4=\frac{5k_4}{2}w^4+4k_3w^3+3k_2w^2+k_1w$具有形式 (34)。我们计算泊松括号 $\{I_2,I_4\}=0$；因此，势 (106) 是最大超可积的。

5.1.5 特殊超可积势

在本小节中，我们构造其形式属于前述两个或更多一般结果的势。我们有以下情形：

1) 考虑势（见 [2] 中的表 I）

$$
V(x,y,z)=-\frac{c_1}{r}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{y^2} \qquad (112)
$$

其中 c_1、c_2 和 c_3 是任意常数。对于 $F(r)=-\frac{c_1}{r}$、$k_1=c_2$、$k_2=c_3$ 和 $k_3=0$，此势具有一般形式 (68)；对于 $k_1=0$、$k_2=c_1$ 和 $F_1\left(\frac{y}{x}\right)=c_2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]+c_3\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$，则具有形式 (56)。因此，它还具有以下额外二次第一积分：

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}M_1^2+c_3\frac{z^2}{y^2} \qquad (113)\\
I_2 &= \frac{1}{2}M_2^2+c_2\frac{z^2}{x^2} \qquad (114)\\
I_3 &= \frac{1}{2}M_3^2+c_2\frac{y^2}{x^2}+c_3\frac{x^2}{y^2} \qquad (115)\\
I_4 &= M_2\dot{x}-M_1\dot{y}-2z\left(\frac{c_1}{2r}-\frac{c_2}{x^2}-\frac{c_3}{y^2}\right). \qquad (116)
\end{aligned}
$$

我们得出结论，势 (112) 是最大超可积的，因为二次第一积分 H、I_3、I_4 两两对合，且五个二次第一积分 H、I_1、I_2、I_3、I_4 函数独立。

2）考虑势（见 [2] 中的表 I）

$$
V(x,y,z)=\frac{c_1y}{x^2R}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{z^2} \qquad (117)
$$

其中 c_1、c_2 和 c_3 为任意常数。对于 $k_1=c_2$、$k_2=0$、$k_3=c_1$ 和 $F(z)=\frac{c_3}{z^2}$，该势的形式为 $V=\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{R}+\frac{k_3y}{Rx^2}+F(z)$（见表 2）；对于 $k_1=0$、$k_2=c_3$ 和 $F_1\left(\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{c_1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}+c_2\right)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$，其形式为（78）。因此，它具有额外二次第一积分：

$$
I_1 = \frac{1}{2}\dot{z}^2+\frac{c_3}{z^2} \qquad (118)
$$

$$I_2 = \frac{1}{2}M_3^2 + c_2\frac{y^2}{x^2} + c_1\frac{yR}{x^2} \tag{119}$$

$$I_3 = M_3\dot{x} - 2c_2\frac{y}{x^2} - c_1\frac{x^2+2y^2}{x^2R} \tag{120}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + c_1\frac{yr^2}{Rx^2} + c_2\frac{r^2}{x^2} + c_3\frac{R^2}{z^2} \tag{121}$$

并且它是最大超可积的。

3）另一个极大超可积势为（见 [2] 中的表 I）

$$V(x,y,z) = \frac{c_1 y}{x^2 R} + \frac{c_2}{x^2} + c_3 z \tag{122}$$

其中 c_1、c_2 和 c_3 为任意常数。对于 $k_1 = c_2$、$k_2 = 0$、$k_3 = c_1$ 和 $F(z) = c_3 z$，该势的形式为 $V = \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{R} + \frac{k_3 y}{Rx^2} + F(z)$（见表 2）；对于 $k = c_3$ 和 $F_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{c_1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}} + c_2\Bigg)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$，其形式为（57）。

因此，它具有以下额外二次第一积分：

$$I_1 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + c_3 z \tag{123}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}M_3^2 + c_2\frac{y^2}{x^2} + c_1\frac{yR}{x^2} \tag{124}$$

$$I_3 = M_3\dot{x} - 2c_2\frac{y}{x^2} - c_1\frac{x^2+2y^2}{x^2R} \tag{125}$$

$$I_4 = M_2\dot{x} - M_1\dot{y} + c_1\frac{2yz}{x^2R} + c_2\frac{2z}{x^2} - c_3\frac{R^2}{2}. \tag{126}$$

4）考虑势（见 [4] 的公式（11））

$$V(x,y,z) = k_1 r^2 + k_2\frac{\bar{w}}{w^3} + \frac{k_3}{w^2} + \frac{k_4}{z^2} \tag{127}$$

其中 k_1、k_2、k_3、k_4 为任意常数，$w = x + iy$ 和 $\bar{w} = x - iy$。

该势具有以下额外二次第一积分：

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(M_2 - iM_1\right)^2 + k_4\frac{w^2}{z^2} - k_2\frac{z^2}{w^2}. \tag{128}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{x} + i\dot{y}\right)^2 + k_1 w^2 - \frac{k_2}{w^2} \tag{129}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}M_3^2 + k_2 e^{-4i\theta} + k_3 e^{-2i\theta} = \frac{1}{2}M_3^2 + k_2\left(\frac{\bar{w}}{w}\right)^2 + k_3\frac{\bar{w}}{w} \tag{130}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + k_1 z^2 + \frac{k_4}{z^2} \tag{131}$$

$$I_5 = \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + k_2\frac{r^2\bar{w}}{w^3} + k_3\frac{r^2}{w^2} + k_4\frac{r^2}{z^2} \tag{132}$$

因为对于 $F_2 = k_1 w + \frac{k_2}{w^3}$、$F_3 = \frac{k_3}{w^2}$ 和 $F_4 = -k_2\frac{z^2}{w^2} + k_4\frac{w^2}{z^2}$，它具有式 (82) 的形式；对于 $F_1 = k_1 z^2 + \frac{k_3}{w^2} + \frac{k_4}{z^2}$ 和 $F_2 = k_1 w + \frac{k_2}{w^3}$，具有式 (28) 的形式；对于 $F_1 = k_2 e^{-4i\theta} + k_3 e^{-2i\theta}$ 和 $F_2 = k_1 r^2 + \frac{k_4}{z^2}$，具有式 (74) 的形式；在 z 坐标下可分离；并且对于 $m = 2$、$F_1 = N_2 = 1$、$N_1 = k_4\frac{R^2}{z^2}$、$F_2 = k_2 e^{-4i\theta} + k_3 e^{-2i\theta}$ 和 $F\left(r\right) = k_1 r^2$，具有式 (76) 的形式。

变量 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$，因此 $w = x + iy = Re^{i\theta}$。我们回顾一下，

$$w = Re^{i\theta} \implies e^{in\theta} = \left(\frac{w}{R}\right)^n \implies e^{in\theta} = \left(\frac{1+i\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\right)^n$$

其中 n 是任意实常数。若 $n = 2k \in \mathbb{R}$，则 $e^{2ik\theta} = \left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^k$，因为 $R^2 = w\bar{w}$。由此我们得出结论，势 (127) 是最大超可积的。

我们将本节的结果汇总于表 4–7 中。

势	线性第一积分和二次第一积分
$V=F_1\left(cz+by+(\sqrt{a^2+b^2+c^2}+a)x\right)+$ $+F_2\left(cz+by-(\sqrt{a^2+b^2+c^2}-a)x\right)+$ $+F_3(bz-cy)$	$I_1=(a\dot{x}+b\dot{y}+c\dot{z})\ \dot{x}+a(F_1+F_2)+$ $+\sqrt{a^2+b^2+c^2}(F_1-F_2)$
$V=(a^2+b^2)x^2+4(az+by)^2+\frac{k_1}{x^2}+$ $+k_2(az+by)\ +F(ay-bz)$	$I_1=aM_2\dot{x}-bM_3\dot{x}-\frac{k_2}{2}(a^2+b^2)x^2-$ $-2(a^2+b^2)(az+by)x^2+\ \frac{2k_1(az+by)}{x^2}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{x}^2+(a^2+b^2)x^2+\frac{k_1}{x^2}$
$V=\frac{k}{\sqrt{(ax+by)^2+(a^2+b^2)z^2}}$	$I_1=aM_2\dot{x}-bM_1\dot{x}+azV$
$V=\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{y^2}+\frac{k_3}{z^2}+F(r)$	$I_1=\frac{1}{2}M_1^2+k_2\frac{z^2}{y^2}+k_3\frac{y^2}{z^2}$ $I_2=\frac{1}{2}M_2^2+k_1\frac{z^2}{x^2}+k_3\frac{x^2}{z^2}$ $I_3=\frac{1}{2}M_3^2+k_1\frac{y^2}{x^2}+k_2\frac{x^2}{y^2}$
$V=\frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y_2}+F_2(x^2+y^2,z)$	$I_1=\frac{1}{2}M_3^2+F_1\left(\frac{y}{x}\right)$
$V=\sum_{j=1}^{m}\frac{F_j\left(\frac{y}{z}\right)}{R^2}N_j\left(\frac{z}{R}\right)+F(r)$	$I=\frac{1}{2}\mathbf{M}^2+\sum_{j=1}^{m}\frac{F_j\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2}N_j\left(\frac{z}{R}\right)$
$V=F_1(w,z)\ +F_2(w)\ \bar{w}$	$I_1=(\dot{x}+i\dot{y})^2+4\int F_2(w)dw$
$V=F_1(\bar{w},z)\ +F_2(\bar{w})w$	$I_1=(\dot{x}-i\dot{y})^2+4\int F_2(\bar{w})d\bar{w}$

表4：可能不可积的势 $V(x,y,z)$ 在 E^3 中承认一个或多个不处于对合关系的 $I_{(1,1)}$ 型二次第一积分。

可积势	
势	线性第一积分和二次第一积分
$V=F_2(w)\bar{w}+F_3(w)\ +F_4(z)$	$I_1=(\dot{x}+i\dot{y})^2+4\int F_2(w)dw$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_4(z)$
$V=F_2(\bar{w})w+F_3(\bar{w})\ +F_4(z)$	$I_1=(\dot{x}-i\dot{y})^2+4\int F_2(\bar{w})d\bar{w}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_4(z)$
$V=F_2'z^2+F_3(w)z+F_4(w)\ +F_2(w)\ \bar{w}$	$I_1=\frac{1}{2}z(\dot{x}+i\dot{y})\ +F_2(w)z+\frac{1}{2}\int F_3(w)dw$ $I_2=(\dot{x}+i\dot{y})^2+4\int F_2(w)dw$
$V=F_2'z^2+F_3(\bar{w})z+F_4(\bar{w})\ +F_2(\bar{w})w$	$I_1=\frac{1}{2}z(\dot{x}-i\dot{y})\ +F_2(\bar{w})z+\frac{1}{2}\int F_3(\bar{w})dw$ $I_2=(\dot{x}-i\dot{y})^2+4\int F_2(\bar{w})d\bar{w}$
$V=F_3(w)+\ \frac{z^2}{w}F_2(w)\ +\frac{F_4\left(\frac{z}{w}\right)}{w^2}+F_2(w)\bar{w}$	$I_1=\frac{1}{2}(M_2-iM_1)^2+F_4\left(\frac{z}{w}\right)$ $I_2=(\dot{x}+i\dot{y})^2+4\int F_2(w)dw$
$V=F_3(\bar{w})\ +\frac{z^2}{\bar{w}}F_2(\bar{w})\ +\ \frac{F_4\left(\frac{z}{\bar{w}}\right)}{\bar{w}^2}+F_2(\bar{w})w$	$I_1=\frac{1}{2}(M_2+iM_1)^2+F_4\left(\frac{z}{\bar{w}}\right)$ $I_2=(\dot{x}-i\dot{y})^2+4\int F_2(\bar{w})d\bar{w}$

表 5：在 E^3 中，允许存在类型为 $I_{(1,1)}$的二次第一积分的可积势 $V(x,y,z)$。

最小超可积势		
势	参考文献	线性第一积分和二次第一积分
$V=\frac{F_1(\frac{y}{x})}{R^2}+k_1(R^2+4z^2)+k_2z$	[2] 表 II $k_2=0$	$I_1=\frac{1}{2}\dot{z}^2+4k_1z^2+k_2z$ $I_2=\frac{1}{2}M_3^2+F_1\left(\frac{y}{x}\right)$ $I_3=M_2\dot{x}-M_1\dot{y}+\frac{2zF_1(\frac{y}{x})}{R^2}-2k_1zR^2-k_2\frac{R^2}{2}$
$V=\frac{F_1(\frac{y}{x})}{R^2}+\frac{k_1z}{rR^2}-\frac{k_2}{r}$	表 II	$I_1=\frac{1}{2}M_3^2+F_1\left(\frac{y}{x}\right)$ $I_2=\frac{1}{2}\mathrm{M}^2+\frac{r^2F_1(\frac{y}{x})}{R^2}+\frac{k_1zr}{R^2}$ $I_3=M_2\dot{x}-M_1\dot{y}+\frac{2zF_1(\frac{y}{x})}{R^2}+\frac{2k_1z^2}{rR^2}+\frac{k_1}{r}-\frac{k_2z}{r}$
$V=\frac{F_1(\frac{y}{x})}{R^2}+k_1r^2+\frac{k_2}{z^2}$	表 II	$I_1=\frac{1}{2}\dot{z}^2+k_1z^2+\frac{k_2}{z^2}$ $I_2=\frac{1}{2}M_3^2+F_1\left(\frac{y}{x}\right)$ $I_3=\frac{1}{2}\mathrm{M}^2+\frac{r^2F_1(\frac{y}{x})}{R^2}+\frac{k_2R^2}{z^2}$
$V=4k_1\left(R^2-\frac{\bar{w}^3}{2}\right)+k_2\left(2w-3\bar{w}^2\right)+$ $+k_3\bar{w}+F(z)$	New	$I_1=\frac{1}{8}(\dot{x}-i\dot{y})^2+k_1\bar{w}^2+k_2\bar{w}$ $I_2=\frac{1}{4}\dot{w}^2+iM_3(\dot{x}-i\dot{y})-2k_1\left(\frac{3}{4}\bar{w}^4-w^2+R^2\bar{w}\right)-$ $-2k_2\left(\bar{w}^3+2R^2\right)+k_3\left(\frac{\bar{w}^2}{2}+w\right)$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$
$V=k_1r^2+k_2\bar{w}+k_3z+F_4(w)$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{z}(\dot{x}+i\dot{y})+k_1wz+k_2z+\frac{k_3}{2}w$ $I_2=(\dot{x}+i\dot{y})^2+2k_1w^2+4k_2w$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+k_1z^2+k_3z$
$V=k_1r^2+k_2w+k_3z+F_4(\bar{w})$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{z}(\dot{x}-i\dot{y})+k_1\bar{w}z+k_2z+\frac{k_3}{2}\bar{w}$ $I_2=(\dot{x}-i\dot{y})^2+2k_1\bar{w}^2+4k_2\bar{w}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+k_1z^2+k_3z$
$V=k_1r^2+\frac{k_2}{z^2}+F_3(w)$	New	$I_1=\frac{1}{2}(M_2-iM_1)^2+k_2\frac{w^2}{z^2}$ $I_2=(\dot{x}+i\dot{y})^2+2k_1w^2$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+k_1z^2+\frac{k_2}{z^2}$
$V=k_1r^2+\frac{k_2}{z^2}+F_3(\bar{w})$	New	$I_1=\frac{1}{2}(M_2+iM_1)^2+k_2\frac{\bar{w}^2}{z^2}$ $I_2=(\dot{x}-i\dot{y})^2+2k_1\bar{w}^2$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+k_1z^2+\frac{k_2}{z^2}$

表6：在 E^3 中具有 $I_{(1,1)}$类型二次第一积分的最小超可积势 $V(x,y,z)$。

极大超可积势			
势	参考文献 [2]	参考文献 [4]	线性第一积分和二次第一积分
$V = k_1(R^2 + 4z^2) + \frac{k_2}{x^2} + \frac{k_3}{y^2} + k_4 z$	表 I $k_4 = 0$	式 (13) $z \leftrightarrow x$	$I_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + k_1 x^2 + \frac{k_2}{x^2}$ $I_2 = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + k_1 y^2 + \frac{k_3}{y^2}$ $I_3 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + 4k_1 z^2 + k_4 z$ $I_4 = M_2\dot{x} + 2z\left(\frac{k_2}{x^2} - k_1 x^2\right) - \frac{k_4}{2}x^2$ $I_5 = -M_1\dot{y} + 2z\left(\frac{k_3}{y^2} - k_1 y^2\right) - \frac{k_4}{2}y^2$ $I_6 = \frac{1}{2}M_3^2 + k_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + k_3\left(\frac{x}{y}\right)^2$
$V = \frac{k_1}{4}\left(x^2 + 16y^2 + 4z^2\right) + \frac{k_2}{x^2} + + k_3 y$	New	New	$I_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{k_1}{4}x^2 + \frac{k_2}{x^2}$ $I_2 = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + 4k_1 y^2 + k_3 y$ $I_3 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + k_1 z^2$ $I_4 = M_2\dot{x} + z\left(\frac{2k_2}{x^2} - \frac{k_1}{2}x^2\right)$ $I_5 = M_1\dot{z} - z^2\left(2k_1 y + \frac{k_3}{2}\right)$
$V = kr^2 + \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{y^2} + \frac{k_3}{z^2}$	表 I	式 (10)	$I_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + kx^2 + \frac{k_1}{x^2}$ $I_2 = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + ky^2 + \frac{k_2}{y^2}$ $I_3 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + kz^2 + \frac{k_3}{z^2}$ $I_4 = \frac{1}{2}M_1^2 + k_2\frac{z^2}{y^2} + k_3\frac{y^2}{z^2}$ $I_5 = \frac{1}{2}M_2^2 + k_1\frac{z^2}{x^2} + k_3\frac{x^2}{z^2}$ $I_6 = \frac{1}{2}M_3^2 + k_1\frac{y^2}{x^2} + k_2\frac{x^2}{y^2}$
$V = -\frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{y^2}$	表 I	not 包含	$I_1 = \frac{1}{2}M_1^2 + c_3\frac{z^2}{y^2}$ $I_2 = \frac{1}{2}M_2^2 + c_2\frac{z^2}{x^2}$ $I_3 = \frac{1}{2}M_3^2 + c_2\frac{y^2}{x^2} + c_3\frac{x^2}{y^2}$ $I_4 = M_2\dot{x} - M_1\dot{y} - 2z\left(\frac{c_1}{2r} - \frac{c_2}{x^2} - \frac{c_3}{y^2}\right)$
$V = \frac{c_1 y}{x^2 R} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{z^2}$	表 I $x \leftrightarrow y$	not 包含	$I_1 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{c_3}{z^2}$ $I_2 = \frac{1}{2}M_3^2 + c_2\frac{y^2}{x^2} + c_1\frac{yR}{x^2}$ $I_3 = M_3\dot{x} - 2c_2\frac{y}{x^2} - c_1\frac{x^2+2y^2}{x^2R}$ $I_4 = \frac{1}{2}\mathbb{M}^2 + c_1\frac{yr^2}{Rx^2} + c_2\frac{r^2}{x^2} + c_3\frac{R^2}{z^2}$
$V = \frac{c_1 y}{x^2 R} + \frac{c_2}{x^2} + c_3 z$	表 I $x \leftrightarrow y$	not 包含	$I_1 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + c_3 z$ $I_2 = \frac{1}{2}M_3^2 + c_2\frac{y^2}{x^2} + c_1\frac{yR}{x^2}$ $I_3 = M_3\dot{x} - 2c_2\frac{y}{x^2} - c_1\frac{x^2+2y^2}{x^2R}$ $I_4 = M_2\dot{x} - M_1\dot{y} + c_1\frac{2yz}{x^2R} + c_2\frac{2z}{x^2} - c_3\frac{R^2}{2}$
$V = k_1 r^2 + k_2\frac{\bar{w}}{w^3} + \frac{k_3}{w^2} + \frac{k_4}{z^2}$ $w = x + iy = Re^{i\theta}$ $\bar{w} = x - iy$	not 包含	公式 (11)	$I_1 = \frac{1}{2}(M_2 - iM_1)^2 + k_4\frac{w^2}{z^2} - k_2\frac{z^2}{w^2}$ $I_2 = \frac{1}{2}\ \dot{x} + i\dot{y}\ ^2 + k_1 w^2 - \frac{k_2}{w^2}$ ( ) $I_3 = \frac{1}{2}M_3^2 + k_2 e^{-4i\theta} + k_3 e^{-2i\theta}$ $= \frac{1}{2}M_3^2 + k_2\left(\frac{\bar{w}}{w}\right)^2 + k_3\frac{\bar{w}}{w}$ $I_4 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + k_1 z^2 + \frac{k_4}{z^2}$ $I_5 = \frac{1}{2}\mathbb{M}^2 + k_2\frac{r^2\bar{w}}{w^3} + k_3\frac{r^2}{w^2} + k_4\frac{r^2}{z^2}$
$V = k_1 r^2 + \frac{k_2}{w^2} + k_3\frac{z}{w^3} + + k_4\frac{R^2 - 3z^2}{w^4}$	not 包含	公式 (12)	$I_1 = \frac{1}{2}(M_2 - iM_1)^2 + k_3\frac{z}{w} - 4k_4\frac{z^2}{w^2}$ $I_2 = M_3(iM_1 - M_2) + k_3\frac{y}{w} - 2ik_2\frac{z}{w} - - \frac{3ik_3}{2}\frac{z^2}{w^2} - 4ik_4\frac{z(x^2+y^2-z^2)}{w^3}$ $I_3 = \frac{1}{2}(\dot{x} + i\dot{y})^2 + k_1 w^2 - \frac{k_4}{w^2}$ $I_4 = \frac{1}{2}\dot{z}(\dot{x} + i\dot{y}) + k_1 z w - \frac{k_3}{4w^2} + k_4\frac{z}{w^3}$ $I_5 = \frac{1}{2}2\mathbb{M}^2 + k_2\frac{r^2}{w^2} + k_3\frac{zr^2}{w^3} + k_4\frac{r^2(x^2+y^2-3z^2)}{w^4}$

$V = k_1(R^2 + 4z^2) + k_2 z + \frac{k_3}{w^2} + + k_4 \frac{\bar{w}}{w^3}$	not 包含	方程（14）	$I_1 = \frac{1}{2}(\dot{x} + i\dot{y})^2 + k_1 w^2 - \frac{k_4}{w^2}$ $I_2 = \frac{1}{2}(\dot{x} + i\dot{y})(M_2 - iM_1) - k_1 z w^2 - -\frac{k_2}{4} w^2 - k_4 \frac{z}{w^2}$ $I_3 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + k_1 z^2 + k_2 z$ $I_4 = \frac{1}{2}(M_2 + iM_1)^2 + 2i\dot{z}M_1 + k_1 z^2(3\bar{w} - 4iy) + 2k_2 z^2(2\bar{w} + 1) - -k_3 z^2 + \frac{k_4}{z^2}(\bar{w}^2 + 4iy)$ $I_5 = \frac{1}{2}\dot{z}(M_2 + iM_1) + k_1 z^2 \bar{w} + k_2 z^2 - k_4 \frac{\bar{w}}{z^2} - -k_1 z R^2 - k_2 \frac{R^2}{4}$
$V = 4k_1\left(R^2 - \frac{\bar{w}^3}{2} + \frac{z^2}{4}\right) + +k_2(2w - 3\bar{w}^2) + k_3\bar{w} + +\frac{k_4}{z^2}$	not 包含	公式（15）	$I_1 = \frac{1}{8}(\dot{x} - i\dot{y})^2 + k_1\bar{w}^2 + k_2\bar{w}$ $I_2 = \frac{1}{4}\dot{w}^2 + iM_3\dot{\bar{w}} - 2k_1\left(\frac{3}{4}\bar{w}^4 - w^2 + R^2\bar{w}\right) - -2k_2\left(\bar{w}^3 + 2R^2\right) + k_3\left(\frac{\bar{w}^2}{2} + w\right)$ $I_3 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + k_1 z^2 + \frac{k_4}{z^2}$ $I_4 = \frac{1}{2}(M_2 + iM_1)^2 + 2i\dot{z}M_1 + +k_1 z^2(3\bar{w}^2 - 4iy) + 2k_2 z^2(2\bar{w} + 1) - -k_3 z^2 + \frac{k_4}{z^2}(\bar{w}^2 + 4iy)$ $I_5 = \frac{1}{2}\dot{z}(M_2 + iM_1) + k_1 z^2\bar{w} + k_2 z^2 - k_4\frac{\bar{w}}{z^2}$
$V = k_1 w + k_2(3w^2 + z) + +k_3\left(4w^3 + 3wz + \frac{\bar{w}}{4}\right) + +k_4\left(\frac{5}{2}w^4 + \frac{r^2}{2} + 3w^2 z\right)$	not 包含	式（16）	$I_1 = M_3\dot{w} - (M_1 + iM_2)\dot{z} - \frac{1}{2}\dot{y}\dot{z} + +\frac{ik_1}{2}(w^2 - z) + ik_2\left(2w^3 - zw + \frac{i}{2}y\right) - -\frac{ik_3}{8}(w^2 - z) + ik_3(3w^4 - z^2 + iyw) - -\frac{k_4}{2}y(w^2 + z) + ik_4 w(2w^4 + zw^2 - z^2)$ $I_2 = M_1(2\dot{x} + i\dot{y}) + iM_2\dot{x} + M_3\dot{z} + \frac{i}{4}\dot{z}^2 + +\frac{ik_2}{2}(z - w^2) + ik_3 w(z - w^2) + +\frac{ik_4}{4}(z^2 + 2zw^2 - 3w^4)$ $I_3 = (M_1 + iM_2)^2 + (2iM_1 - M_2)\dot{w} - -iM_3\dot{z} + \frac{1}{4}(\dot{y}^2 - \dot{z}^2) + k_1 zw + +\frac{ik_1}{2}y + 2k_2 w(2zw + iy) + +\frac{k_2}{2}(w^2 - z) + k_3 w^3(6z + 1) + +k_3 zw\left(2z - \frac{1}{4}\right) + ik_3 y\left(3w^2 - \frac{1}{8}\right) - -k_3 xz + k_4 w^4\left(4z + \frac{3}{4}\right) + 2ik_4 yw^3 + +k_4 z^2\left(3w^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{k_4}{2}\left(\frac{y^2}{2} - zR^2\right)$ $I_4 = \dot{w}^2 + k_3 w + k_4 w^2$ $I_5 = \dot{z}\dot{w} + \left(k_4 w + \frac{k_3}{2}\right)z + k_4 w^3 + +\frac{3k_3}{2}w^2 + k_2 w$

表7：在 E^3 中允许具有 $I_{(1,1)}$类型二次第一积分的极大超可积势 V（x，y，z）。

备注：势（68）具有四个独立量子费舍尔信息 H、I_1、I_2 和 I_3（见表4）；然而，它并非二阶可积，因为对于 $i \neq j$，泊松括号 $\{I_i, I_j\} \neq 0$。在 [2], 的表 II 中声称此势是最小超可积的，因为该文对超可积性的定义不要求可积性（即泊松括号为零）。事实上，我们有：

$$I_4 \equiv \{I_1, I_3\} = \{I_2, I_1\} = \{I_3, I_2\} = M_1\left(x^2\dot{y}\dot{z} + 2k_1\frac{yz}{x^2}\right) + M_2\left(y^2\dot{x}\dot{z} + 2k_2\frac{xz}{y^2}\right) + M_3\left(z^2\dot{x}\dot{y} + 2k_3\frac{xy}{z^2}\right). \quad (133)$$

三阶（立方）函数独立积分 I_4 不能用于确立可积性，因为泊松括号 $\{I_i, I_4\} \neq 0$，其中i、$j = 1$、2、3。

6 当 $\ell = 0$ 时的二次第一积分 $I_{(2,0)}$

我们令 $L_{(0)a} = L_a$，则 $\ell = 0$ 的二次第一积分 $I_{(2,\ell)}$ 变为

$$I_{(2,0)} = -tL_{(a;b)}\dot{q}^a\dot{q}^b + L_a\dot{q}^a + tL_aV^{,a} \quad (134)$$

其中，向量 L_a 由式 (15) 给出，生成的 Killing 张量 $L_{(a;b)}$ 由式 (16) 给出，并满足以下条件

$$\left(L_b V^{,b}\right)_{,a} = -2L_{(a;b)}V^{,b}. \tag{135}$$

条件 (135) 是一般条件 (22) 的一个子情形，此时函数 $G = -L_a V^{,a}$ 和一般二阶 Killing 张量 $C_{ab} = L_{(a;b)}$ 均为可约形式。在第 5.1 节中，我们已经计算出（但并非全部）满足条件 (22) 的函数对 (G, V)。因此，为了求出允许具有 (134) 形式的二次第一积分的势 $V(x, y, z)$，只需解以下约束条件

$$G = -L_a V^{,a} \tag{136}$$

对所有 KT C_{ab} 具有可约形式 (16) 的函数对 (G, V) 均成立。如果某些函数对 (G, V) 不满足约束条件 (136)，那么这些函数对所对应的势 V 就不允许存在类型为 $I_{(2,0)}$ 的二次第一积分。

此外，二次第一积分 (134) 可写为

$$I_{(2,0)} = -Jt + L_a \dot{q}^a$$

其中 J 是对应的自治二次第一积分 (20)。泊松括号 $\{H, I_{(2,0)}\} = \frac{\partial I_{(2,0)}}{\partial t} = -J$。因此：时间依赖二次第一积分 $I_{(2,0)}$ 会生成一个类型为 $I_{(1,0)}$ 的自治二次第一积分。这是（一次）时间依赖二次第一积分与自治二次第一积分之间一个有趣的联系。

我们考虑以下情形。

1) 在第 5.1.2 节中，我们确定了函数：

$$V(x,y,z) = (a^2+b^2)x^2 + 4(az+by)^2 + \frac{k_1}{x^2} + k_2(az+by) + F(ay-bz) \tag{137}$$

$$G(x,y,z) = -\frac{k_2}{2}(a^2+b^2)x^2 - 2ab(ay+bz)x^2 - 2(a^3z+b^3y)x^2 + \frac{2k_1(by+az)}{x^2}. \tag{138}$$

那么，向量

$$L_a = \begin{pmatrix} bxy + axz + 2b_2y + 2b_1z + b_3 \\ -bx^2 - 2b_2x + 2b_4z + b_6 \\ -ax^2 - 2b_1x - 2b_4y + b_5 \end{pmatrix} \tag{139}$$

其中 $b_1, b_2, ..., b_6$ 是任意常数。将 (137)、(138) 和 (139) 代入条件 (136)，我们得到：

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, \;\; a = \pm ib, \;\; b_5 = \pm b_6.$$

因此，势 (137) 变为[9]（见表 2 中的势 $V = F_1(y - bx) + F_2(z)$）

$$V(x,y,z) = \frac{k_1}{x^2} + \underbrace{4b(y \pm iz)^2 + bk_2(y \pm iz) + F(y \pm iz)}_{=F_1(y \pm iz)} = \frac{k_1}{x^2} + F_1(y \pm iz) \tag{140}$$

以及向量

$$L_a = \begin{pmatrix} bx(y \pm iz) \\ -bx^2 + b_6 \\ \pm i(-bx^2 + b_6) \end{pmatrix}. \tag{141}$$

相应的时间依赖量子费舍尔信息（134）为

$$\begin{aligned} I_{(2,0)} &= -bt(y \pm iz)\dot{x}^2 + btx\dot{x}(\dot{y} \pm i\dot{z}) + b(y \pm iz)x\dot{x} - (bx^2 - b_6)\dot{y} \mp i(bx^2 - b_6)\dot{z} - \frac{2k_1 bt(y \pm iz)}{x^2} \\ &= b_6 J_1 - bJ_2 \end{aligned} \tag{142}$$

其中包含独立首积分：

$$J_1 = \dot{y} \pm i\dot{z}, \;\; J_2 = t\left(\dot{x}^2 + \frac{2k_1}{x^2}\right)(y \pm iz) - x\dot{x}(y \pm iz) - J_1 x(t\dot{x} - x).$$

[9]函数 $F(iz \pm y)$ 要么是 $F(y + iz)$，要么是 $F(y - iz)$。因此，我们可以写成 $F(y \pm iz)$。

根据第 5.1.2 节，势（140）还具有以下自治二次第一积分：

$$J_3 = (\pm iM_2 - M_3)\dot{x} + \frac{2k_1(y \pm iz)}{x^2},\ \ J_4 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{k_1}{x^2}.$$

我们注意到 $J_2 = J_3 t - x\dot{x}(y \pm iz) + J_1 x^2$。

势 (140) 因五个线性独立的第一积分 H、J_1、J_2、J_3 和 J_4 而为最大超可积。自治首次积分 H、J_1、J_4 两两对合。由于额外的时间依赖量子费舍尔信息 J_2，这一新结果无法在 [2] 中找到。

泊松括号为：

$$\{H, J_2\} = \frac{\partial J_2}{\partial t} = J_3,\ \ \{J_1, J_2\} = \{J_1, J_3\} = \{J_1, J_4\} = 0,\ \ \{J_3, J_4\} = -J_1\left(\dot{x}^2 + \frac{2k_1}{x^2}\right),$$

$$\{J_2, J_3\} = -2(M_3 \mp iM_2)^2 - \frac{4k_1}{x^2}(y \pm iz)^2,\ \ \{J_2, J_4\} = -\left(J_1 t + y \pm iz\right)\left(\dot{x}^2 + \frac{2k_1}{x^2}\right) + 2J_1 x\dot{x}.$$

2）在第 5.1.2 节中，我们确定了以下函数：

$$V(x,y,z) \ \ = \ \ \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + \frac{k_1 z}{rR^2} - \frac{k_2}{r} \tag{143}$$

$$G(x,y,z) \ \ = \ \ a_2\frac{2zF_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + a_2\frac{2k_1 z^2}{rR^2} + a_2\frac{k_1}{r} - a_2\frac{k_2 z}{r}. \tag{144}$$

于是，向量

$$L_a = \begin{pmatrix} axz + 2b_2 y + 2b_1 z + b_3 \\ ayz - 2b_2 x + 2b_4 z + b_6 \\ -aR^2 - 2b_1 x - 2b_4 y + b_5 \end{pmatrix}. \tag{145}$$

将 (143)、(144) 和 (145) 代入条件 (136)，得到：

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0,\ \ k_2 = 0.$$

因此，势（143）变为

$$V(x,y,z) = \frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} + \frac{k_1 z}{rR^2} = R^{-2}\left[F_1\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{k_1 z}{r}\right] \tag{146}$$

以及向量 $L_b = a\left(xz, yz, -R^2\right)$。

相应的时间依赖量子费舍尔信息（134）为

$$I_{(2,0)} = -J_1 t + z(x\dot{x} + y\dot{y}) - (x^2 + y^2)\dot{z} \tag{147}$$

其中 J_1 是自治二次第一积分

$$J_1 = M_2\dot{x} - M_1\dot{y} + \frac{2zF_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2} + \frac{2k_1 z^2}{r(x^2 + y^2)} + \frac{k_1}{r}.$$

由表6可知，势（146）还具有以下自治二次第一积分：

$$J_2 = \frac{1}{2}M_3^2 + F_1\left(\frac{y}{x}\right),\ \ J_3 = \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{r^2 F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2} + \frac{k_1 zr}{x^2 + y^2}.$$

因此，由于存在五个独立的二次第一积分 H, J_1, J_2, J_3 和（147），（146）是一个新的极大超可积势。我们注意到，由于当时只考虑了自治二次第一积分，这个势曾被认为是最小超可积的（例如参见 [2]）。

泊松括号为 $\{H, I_{(2,0)}\} = -J_1$ 和 $\{I_{(2,0)}, J_2\} = 0$。

3）在第 5.1.1 节中，我们确定了以下函数：

$$V(x,y,z) \ \ = \ \ F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) \tag{148}$$

$$G(x,y,z) \quad = \quad 2a_3F_1(x)+2a_{13}F_2(y)+2a_9F_3(z). \tag{149}$$

然后，向量

$$L_a=\begin{pmatrix} a_3x+2b_2y+2b_1z+b_3 \\ a_{13}y-2b_2x+2b_4z+b_6 \\ a_9z-2b_1x-2b_4y+b_5 \end{pmatrix}. \tag{150}$$

将（148）、（149）和（150）代入条件（136），我们得到以下常微分方程（ODE）：

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & a_3\left[xF_1'+2F_1(x)\right]+b_3F_1'+a_{13}\left[yF_2'+2F_2(y)\right]+b_6F_2'+a_9\left[zF_3'+2F_3(z)\right]+b_5F_3'+ \\ & +2b_2\left(F_1'y-F_2'x\right)+2b_1\left(F_1'z-F_3'x\right)+2b_4\left(F_2'z-F_3'y\right) \end{aligned} \tag{151}$$

其中 $F_1'=\frac{dF_1}{dx}$、 $F_2'=\frac{dF_2}{dy}$和 $F_3'=\frac{dF_3}{dz}$。

我们考虑以下子情形：

3.1. 子情形 $b_1=b_2=b_4=0$，且各对（a_3， b_3）、（a_{13}， b_6）、（a_9， b_5）均不为原点（0, 0）。

于是，常微分方程（151）给出：

$$a_3\left[xF_1'+2F_1(x)\right]+b_3F_1' \quad = \quad \lambda_1 \tag{152}$$

$$a_{13}\left[yF_2'+2F_2(y)\right]+b_6F_2' \quad = \quad \lambda_2 \tag{153}$$

$$a_9\left[zF_3'+2F_3(z)\right]+b_5F_3' \quad = \quad -\lambda_1-\lambda_2 \tag{154}$$

其中 λ_1 和 λ_2 为任意常数，且向量为 $L_a=\begin{pmatrix} a_3x+b_3 \\ a_{13}y+b_6 \\ a_9z+b_5 \end{pmatrix}$。

求解常微分方程组 (152)–(154)，得到以下函数：

$$F_1(x)=\frac{\lambda_1\left(\frac{a_3}{2}x^2+b_3x\right)+c_1}{(a_3x+b_3)^2},\ \ F_2(y)=\frac{\lambda_2\left(\frac{a_{13}}{2}y^2+b_6y\right)+c_2}{(a_{13}y+b_6)^2},\ \ F_3(z)=-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{a_9}{2}z^2+b_5z\right)+c_3}{(a_9z+b_5)^2}$$

其中， c_1、 c_2 和 c_3 是任意常数。

于是，势 (148) 变为

$$V(x,y,z)=\frac{\lambda_1\left(\frac{a_3}{2}x^2+b_3x\right)+c_1}{(a_3x+b_3)^2}+\frac{\lambda_2\left(\frac{a_{13}}{2}y^2+b_6y\right)+c_2}{(a_{13}y+b_6)^2}-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{a_9}{2}z^2+b_5z\right)+c_3}{(a_9z+b_5)^2}. \tag{155}$$

相应的时间依赖量子费舍尔信息 (134) 为

$$I_{(2,0)}=-Jt+(a_3x\dot{x}+a_{13}y\dot{y}+a_9z\dot{z})+b_3\dot{x}+b_6\dot{y}+b_5\dot{z} \tag{156}$$

其中， $J=2a_3I_1+2a_{13}I_2+2a_9I_3$ 是三个分离的量子Fisher信息之和：

$$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+F_1(x),\ \ I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+F_2(y),\ \ I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z). \tag{157}$$

因此，由于存在四个独立的二次第一积分 I_1、 I_2、 I_3 和 (156)，(155) 是一种新的最小超可积势。注意，(155) 依赖于十一个参数 a_3、 a_9、 a_{13}、 b_3、 b_5、 b_6、 c_1、 c_2、 c_3、 λ_1 和 λ_2；因此，时间依赖量子费舍尔信息 (156) 是不可约的。

- 对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 和 $a_3a_{13}a_9\neq 0$，我们得到势[10]

$$V(x,y,z)=\frac{k_1}{(x+m_1)^2}+\frac{k_2}{(y+m_2)^2}+\frac{k_3}{(z+m_3)^2} \tag{158}$$

其中 k_1、 k_2、 k_3、 m_1、 m_2 和 m_3 是新的任意常数。

然后，相应的时间依赖量子费舍尔信息 (156) 由以下独立量子费舍尔信息组成：

$$I_4=-2I_1t+(x+m_1)\dot{x},\ \ I_5=-2I_2t+(y+m_2)\dot{y},\ \ I_6=-2I_3t+(z+m_3)\dot{z}.$$

[10]由于 $a_3a_{13}a_9\neq 0$，我们可以令 $b_3=m_1a_3$, $b_6=m_2a_{13}$, $b_5=m_3a_9$, $k_1=\frac{c_1}{a_3^2}$, $k_2=\frac{c_2}{a_{13}^2}$和 $k_3=\frac{c_3}{a_9^2}$。

因此，势 (158) 因独立的二次第一积分 $I_1, I_2, ..., I_6$ 而是最大超可积的。由于考虑了含时第一积分，独立第一积分的最大数量为六个（即大于五个）。

3.2. 子情形 $b_1 = b_2 = b_4 = 0$、 $a_3 \neq 0$ 和 $a_9 = a_{13} = b_5 = b_6 = 0$ （即子情形 3.1 中两对参数为零）。

由常微分方程组（152）—（154），我们发现 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，且势（148）变为

$$V(x, y, z) = \frac{k_1}{(x + m_1)^2} + F_2(y) + F_3(z) \tag{159}$$

其中 k_1、 m_1 为任意常数， F_2（y）、 F_3（z）为任意光滑函数。

相应的时间依赖量子费舍尔信息（134）为

$$I_{(2,0)} = -2I_1 t + (x + m_1)\dot{x} \tag{160}$$

w此处二次第一积分 $I_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underline{\quad}^{k_1}{}_{(x+m_1)^2}$。因此，势（159）是最小超可积的（见表 2）。3.3. 子情形 $b_1 = b_2 = b_4 = 0$、 $a_9 = b_5 = 0$，且各对（a_3、 b_3）、（a_{13}、 b_6）均不在原点（0, 0）。

从 s ystem 常微分方程组 (152) - (154) 中，我们发现 $\lambda_2 = -\lambda_1$，且势 (148) 变为

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda_1\left(\frac{a_3}{2}x^2 + b_3 x\right) + c_1}{(a_3 x + b_3)^2} - \frac{\lambda_1\left(\frac{a_{13}}{2}y^2 + b_6 y\right) + c_2}{(a_{13} y + b_6)^2} + F_3(z) \tag{161}$$

其中 $F_3(z)$ 是任意光滑函数。

相应的时间依赖量子费舍尔信息 (134) 为

$$I_{(2,0)} = -2(a_3 I_1 + a_{13} I_2)t + (a_3 x + b_3)\dot{x} + (a_{13} y + b_6)\dot{y} \tag{162}$$

其中二次第一积分 I_1 和 I_2 由 (157) 给出。我们注意到，势 (161) 是一个最小超可积势。

- 对于 $\lambda_1 = 0$ 和 $a_3 a_{13} \neq 0$，我们得到极大超可积势（见表3）

$$V(x, y, z) = \frac{k_1}{(x + m_1)^2} + \frac{k_2}{(y + m_2)^2} + F_3(z) \tag{163}$$

它还存在以下含时守恒量:

$$I_4 = -2I_1 t + (x + m_1)\dot{x}, \;\; I_5 = -2I_2 t + (y + m_2)\dot{y}.$$

3.4. 子情形 $a_3 = a_9 = a_{13} = 0$ （自治线性首次积分， $L_{(a;b)} = 0$ 和 $G = 0$）。

常微分方程 (151) 变为

$$2b_2\left(F_1' y - F_2' x\right) + 2b_1\left(F_1' z - F_3' x\right) + 2b_4\left(F_2' z - F_3' y\right) + b_3 F_1' + b_6 F_2' + b_5 F_3' = 0 \tag{164}$$

以及向量

$$L_a = \begin{pmatrix} 2b_2 y + 2b_1 z + b_3 \\ -2b_2 x + 2b_4 z + b_6 \\ -2b_1 x - 2b_4 y + b_5 \end{pmatrix}. \tag{165}$$

常微分方程 (164) 存在如下形式的解:

$$F_1(x) = kx^2 + k_1 x, \;\; F_2(y) = ky^2 + k_2 y, \;\; F_3(z) = kz^2 + k_3 z \tag{166}$$

其中 k、 k_1、 k_2 和 k_3 是任意常数。于是，我们得到可分离势

$$V(x, y, z) = kr^2 + k_1 x + k_2 y + k_3 z. \tag{167}$$

将（166）代入（164），可得以下方程组:

$$k_1 b_3 + k_2 b_6 + k_3 b_5 = 0 \tag{168}$$

$$k b_3 - k_2 b_2 - k_3 b_1 = 0 \tag{169}$$

$$kb_6 + k_1b_2 - k_3b_4 = 0 \tag{170}$$
$$kb_5 + k_1b_1 + k_2b_4 = 0. \tag{171}$$

我们考虑以下情形。

- 情形 $k = 0$。

势 (167) 变为

$$V(x, y, z) = k_1x + k_2y + k_3z \tag{172}$$

其中 $k_1k_2k_3 \neq 0$，以得到三维势。

对 $k = 0$ 求解方程组 (168) - (171)，得到：

$$b_1 = -\frac{k_2}{k_1}b_4,\ \ b_2 = \frac{k_3}{k_1}b_4,\ \ b_3 = -\frac{k_2}{k_1}b_6 - \frac{k_3}{k_1}b_5.$$

相关二次一级积分 (134) 化简为线性第一积分

$$I = L_a\dot{q}^a = -2b_4\sum_{i=1}^{3} k_iM_i - b_5(k_3\dot{x} - k_1\dot{z}) - b_6(k_2\dot{x} - k_1\dot{y})$$

它由以下线性第一积分组成：

$$J_1 = \sum_{i=1}^{3} k_iM_i,\ \ J_2 = k_3\dot{x} - k_1\dot{z},\ \ J_3 = k_2\dot{x} - k_1\dot{y}.$$

因此，可分离势（172）是最大超可积的。

- 情形 $k \neq 0$。

方程组（168）—（171）意味着 $b_3 = \frac{k_2}{k}b_2 + \frac{k_3}{k}b_1$、$b_5 = -\frac{k_1}{k}b_1 - \frac{k_2}{k}b_4$ 和 $b_6 = \frac{k_3}{k}b_4 - \frac{k_1}{k}b_2$。

类似地，我们得到 LFI：

$$J_1 = 2kM_1 + k_2\dot{z} - k_3\dot{y},\ \ J_2 = 2kM_2 + k_3\dot{x} - k_1\dot{z},\ \ J_3 = 2kM_3 + k_1\dot{y} - k_2\dot{x}.$$

因此，可分离势（167）是最大超可积的。我们注意到，$k \neq 0$ 引入了 kr^2 这一振子项；因此，第一积分中相应的变化是增加角动量的分量。

6.1 情形 L_a 是一个 Killing 向量

我们认为 L_a 是 E^3 中的一个 Killing 向量。于是，$L_{(a;b)} = 0$，时间依赖量子费舍尔信息 (134) 变为时间依赖 LFI

$$I = L_a\dot{q}^a + st \tag{173}$$

其中，任意常数 s 满足条件

$$L_aV^{,a} = s. \tag{174}$$

将式 (13) 给出的一般凯利向量 L_a 代入式 (174)，可得偏微分方程

$$(b_1 - b_4y + b_5z)\frac{\partial V}{\partial x} + (b_2 + b_4x - b_6z)\frac{\partial V}{\partial y} + (b_3 - b_5x + b_6y)\frac{\partial V}{\partial z} = s \tag{175}$$

其中 b_1、...、b_6 是任意常数。

我们考虑以下情形。

1) 情形 $b_1 \neq 0$ 和 $b_4 = b_5 = b_6 = 0$。

于是，偏微分方程 (175) 给出势

$$V = c_1x + F(y - c_2x, z - c_3x) \tag{176}$$

其中 $c_1 = \frac{s}{b_1}$、$c_2 = \frac{b_2}{b_1}$、$c_3 = \frac{b_3}{b_1}$ 和 F 是其自变量的任意光滑函数。

相关线性一级积分 (173) 为

$$I = \dot{x} + c_2\dot{y} + c_3\dot{z} + c_1 t. \tag{177}$$

2) 情形 $b_2 \neq 0$、 $b_1 = 0$ 和 $b_4 = b_5 = b_6 = 0$。
我们找到了势 (176) 在 $x \leftrightarrow y$ 和 $c_2 = 0$ 下的一个子情形。
3) 情形 $b_3 \neq 0$、 $b_1 = b_2 = 0$ 和 $b_4 = b_5 = b_6 = 0$。
我们找到了势 (176) 在 $c_1 = c$、 $c_2 = c_3 = 0$ 和 $x \leftrightarrow z$ 下的一个子情形。
4) 情形 $b_4 \neq 0$ 和 $b_5 = b_6 = 0$。
于是，偏微分方程 (175) 给出了如下势

$$V = c_0 \tan^{-1}\left(\frac{x + c_2}{y + c_1}\right) + F\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_2 x + c_1 y, z + c_3 \tan^{-1}\left(\frac{x + c_2}{y + c_1}\right)\right] \tag{178}$$

其中 $c_0 = \frac{s}{b_4}$、 $c_1 = -\frac{b_1}{b_4}$、 $c_2 = \frac{b_2}{b_4}$、 $c_3 = -\frac{b_3}{b_4}$ 和 F 是其自变量的任意函数。Th
e assoc iated LFI (173) i s

$$I = M_3 - c_1\dot{x} + c_2\dot{y} - c_3\dot{z} + c_0 t. \tag{179}$$

5) 情形 $b_4 \neq 0$、 $b_6 = 0$ 和 $b_2 = b_3 = 0$。
于是，偏微分方程（175）给出势

$$V = \frac{c_0}{\sqrt{1 + c_1^2}} \tan^{-1}\left(\frac{y + c_1 z + c_2}{\sqrt{1 + c_1^2}\, x}\right) + F\left(z - c_1 y, x^2 + (1 - c_1^2)y^2 + 2c_2 y + 2c_1 yz\right) \tag{180}$$

其中 $c_0 = \frac{s}{b_4}$、 $c_1 = -\frac{b_5}{b_4}$、 $c_2 = -\frac{b_1}{b_4}$ 和 F 是其自变量的任意函数。
相关线性一级积分（173）为

$$I = M_3 - c_1 M_2 - c_2\dot{x} + c_0 t. \tag{181}$$

6）情形 $b_1 = b_2 = b_3 = s = 0$ 和 $b_6 \neq 0$。
于是，偏微分方程（175）给出势

$$V = F(r, x - c_1 y - c_2 z) \tag{182}$$

其中 $c_1 = -\frac{b_5}{b_6}$、 $c_2 = -\frac{b_4}{b_6}$和 F是其自变量的任意函数。
相关线性一级积分（173）为

$$I = M_1 - c_1 M_2 - c_2 M_3. \tag{183}$$

我们在表 8–10 中汇总了第6节的结果。

最小超可积势		
势	参考文献	线性第一积分和二次第一积分
$V=\frac{\lambda_1\left(\frac{a_3}{2}x^2+b_3x\right)+c_1}{(a_3x+b_3)^2}+\frac{\lambda_2\left(\frac{a_{13}}{2}y^2+b_6y\right)+c_2}{(a_{13}y+b_6)^2}-$ $-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{a_9}{2}z^2+b_5z\right)+c_3}{(a_9z+b_5)^2}$	[2] New	$I=-Jt+(a_3x\dot{x}+a_{13}y\dot{y}+a_9z\dot{z})+$ $+b_3\dot{x}+b_6\dot{y}+b_5\dot{z}$ $J=2a_3I_1+2a_{13}I_2+2a_9I_3$ $I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{\lambda_1\left(\frac{a_3}{2}x^2+b_3x\right)+c_1}{(a_3x+b_3)^2}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{\lambda_2\left(\frac{a_{13}}{2}y^2+b_6y\right)+c_2}{(a_{13}y+b_6)^2}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{a_9}{2}z^2+b_5z\right)+c_3}{(a_9z+b_5)^2}$
$V=\frac{k_1}{(x+m_1)^2}+F_2(y)+F_3(z)$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{k_1}{(x+m_1)^2}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+F_2(y)$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$ $I_4=-2I_1t+(x+m_1)\dot{x}$
$V=\frac{\lambda_1\left(\frac{a_3}{2}x^2+b_3x\right)+c_1}{(a_3x+b_3)^2}-$ $-\frac{\lambda_1\left(\frac{a_{13}}{2}y^2+b_6y\right)+c_2}{(a_{13}y+b_6)^2}+F_3(z)$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{\lambda_1\left(\frac{a_3}{2}x^2+b_3x\right)+c_1}{(a_3x+b_3)^2}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2-\frac{\lambda_1\left(\frac{a_{13}}{2}y^2+b_6y\right)+c_2}{(a_{13}y+b_6)^2}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$ $I_4=-2(a_3I_1+a_{13}I_2)t+(a_3x+b_3)\dot{x}+$ $+(a_{13}y+b_6)\dot{y}$

表8：在 E^3 中存在形式为 $I_{(2,0)}$的含时守恒量的最小超可积势 $V(x,y,z)$。

极大超可积势		
势	参考文献	线性第一积分和二次第一积分
$V=\frac{k_1}{x^2}+F_1(y\pm iz)$	[2] New	$J_1=\dot{y}\pm i\dot{z}$ $J_2=J_3t-x\dot{x}(y\pm iz)+J_1x^2$ $J_3=(\pm iM_2-M_3)\dot{x}+\frac{2k_1(y\pm iz)x^2}{}$ $J_4=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{k_1}{x^2}$
$V=R^{-2}\left[F_1\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{k_1z}{r}\right]$	New	$J_1=M_2\dot{x}-M_1\dot{y}+\frac{2zF_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2}+\frac{2k_1z^2}{r(x^2+y^2)}+\frac{k_1}{r}$ $J_2=\frac{1}{2}M_3^2+F_1\left(\frac{y}{x}\right)$ $J_3=\frac{1}{2}M^2+\frac{r^2F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2+y^2}+\frac{k_1zr}{x^2+y^2}$ $J_4=-J_1t+z(x\dot{x}+y\dot{y})-(x^2+y^2)\dot{z}$
$V=\frac{k_1}{(x+m_1)^2}+\frac{k_2}{(y+m_2)^2}+\frac{k_3}{(z+m_3)^2}$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{k_1}{(x+m_1)^2}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{k_2}{(y+m_2)^2}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+\frac{k_3}{(z+m_3)^2}$ $I_4=-2I_1t+(x+m_1)\dot{x}$ $I_5=-2I_2t+(y+m_2)\dot{y}$ $I_6=-2I_3t+(z+m_3)\dot{z}$
$V=\frac{k_1}{(x+m_1)^2}+\frac{k_2}{(y+m_2)_2}+F_3(z)$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{k_1}{(x+m_1)^2}$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\frac{k_2}{(y+m_2)^2}$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z)$ $I_4=-2I_1t+(x+m_1)\dot{x}$ $I_5=-2I_2t+(y+m_2)\dot{y}$
$V=k_1x+k_2y+k_3z$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+k_1x$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+k_2y$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+k_3z$ $I_4=\sum_{i=1}^{3}k_iM_i$ $I_5=k_3\dot{x}-k_1\dot{z}$ $I_6=k_2\dot{x}-k_1\dot{y}$
$V=kr^2+k_1x+k_2y+k_3z$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2+kx^2+k_1x$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+ky^2+k_2y$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+kz^2+k_3z$ $I_4=2kM_1+k_2\dot{z}-k_3\dot{y}$ $I_5=2kM_2+k_3\dot{x}-k_1\dot{z}$ $I_6=2kM_3+k_1\dot{y}-k_2\dot{x}$

表9：满足 $I_{(2,0)}$形式的二次第一积分的 E^3 中的极大超可积势 $V(x,y,z)$。

势	线性第一积分和二次第一积分
$V=c_1x+F(y-c_2x,z-c_3x)$	$I=\dot{x}+c_2\dot{y}+c_3\dot{z}+c_1t$
$V=c_0\tan^{-1}\left(\frac{x+c_2}{y+c_1}\right)+$ $+F\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)+c_2x+c_1y,z+c_3\tan^{-1}\left(\frac{x+c_2}{y+c_1}\right)\right]$	$I=M_3-c_1\dot{x}+c_2\dot{y}-c_3\dot{z}+c_0t$
$V=\frac{c_0}{\sqrt{1+c_1^2}}\tan^{-1}\left(\frac{y+c_1z+c_2}{\sqrt{1+c_1^2}x}\right)+$ $+F\left(z-c_1y,x^2+(1-c_1^2)y^2+2c_2y+2c_1yz\right)$	$I=M_3-c_1M_2-c_2\dot{x}+c_0t$
$V=F(r,x-c_1y-c_2z)$	$I=M_1-c_1M_2-c_2M_3$

表10：可能不可积的势 $V(x,y,z)$ 在 E^3 中允许存在形式为 $I=L_a\dot{q}^a+st$ 的线性第一积分。

7 二次第一积分 $I_{(3)}$

在本节中，我们考虑二次第一积分

$$I_{(3)} = e^{\lambda t}\left(-L_{(a;b)}\dot{q}^a\dot{q}^b + \lambda L_a\dot{q}^a + L_aV^{,a}\right)$$

其中，向量 L_a 由式（15）给出，生成的 Killing 张量 $L_{(a;b)}$ 由式（16）给出，并且满足以下条件

$$\left(L_bV^{,b}\right)_{,a} = -2L_{(a;b)}V^{,b} - \lambda^2 L_a. \tag{184}$$

我们考虑若干种 涉及参数 a_1、a_2、.....、a_{20} 的情形，这些参数定义了式（15）中给出的向量 L_a .

7.1 情形 co 包含 Killing 向量和齐次向量：参数 $a_1, a_3, a_4, a_6, a_7, a_9, a_{10}, a_{13}, a$ 14

在此情形下，式 (15) 中给出的向量 L_a 具有以下一般形式

$$L_a = \begin{pmatrix} k_1x \\ k_2y \\ k_3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 - b_4y + b_5z \\ b_2 + b_4x - b_6z \\ b_3 - b_5x + b_6y \end{pmatrix} \tag{185}$$

其中，k_1、...、k_3、b_1、...、b_6 为任意常数，生成的 Killing 张量为 $L_{(a;b)} = diag(k_1, k_2, k_3)$。

我们假设 $k_1 = k_2 = k_3 = k$ 为任意常数。那么，向量 (185) 是相似向量 (HV) 与梯度和非梯度 Killing 向量的线性组合。KT $L_{(a;b)} = k\delta_{ab}$ 和时间依赖量子费舍尔信息 $I_{(3)}$ 变为

$$I = e^{\lambda t}\left(-k\dot{q}^a\dot{q}_a + \lambda L_a\dot{q}^a + L_aV^{,a}\right). \tag{186}$$

条件 (184) 为

$$\left(L_bV^{,b} + 2kV\right)_{,a} + \lambda^2 L_a = 0. \tag{187}$$

由式 (187) 的可积条件可得：

$$L_{a,b} - L_{b,a} = 0 \implies L_{a,b} = k\delta_{ab} \implies b_4 = b_5 = b_6 = 0.$$

这意味着 只有齐次向量和梯度Killing向量得以保留，也就是说，向量（185）变为

$$L_a = \begin{pmatrix} kx + b_1 \\ ky + b_2 \\ kz + b_3 \end{pmatrix}. \tag{188}$$

我们考虑以下特殊情形。

1）情形 $k = 0$, $b_3 = 0$ 和 $b_1 \neq 0$。

向量 $L_a = (b_1, b_2, 0)$。于是，方程（187）给出势

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda^2}{2}\left(c_1^2 - 1\right)x^2 + c_2x - c_1\lambda^2xy + F(y - c_1x, z) \tag{189}$$

其中 $c_1 \equiv \frac{b_2}{b_1}$, c_2 为任意常数， F 是其自变量的任意光滑函数。

相应的时变 LFI 为

$$I = e^{\lambda t}\left(\lambda\dot{x} + c_1\lambda\dot{y} - \lambda^2x - c_1\lambda^2y + c_2\right). \tag{190}$$

我们注意到 $\{H, I\} = \frac{\partial I}{\partial t} = \lambda I$。

- 对于 $c_1 = 0$，势（189）变为

$$V(x, y, z) = -\frac{\lambda^2}{2}x^2 + c_2x + F(y, z) \tag{191}$$

且相关线性一级积分（190）为

$$I = e^{\lambda t}\left(\lambda\dot{x} - \lambda^2x + c_2\right). \tag{192}$$

当 $F(y,z) = F_1(y) + F_2(z)$ 时，势（191）可分离；因此，由于额外的独立线性首次积分（192），它是最小超可积的。

2）情形 $k = 0$ 和 $b_1 = b_2 = b_3$。我们有 $L_a = (1, 1, 1)$。势（经过变换 $x \leftrightarrow z$）

$$V(x,y,z) = \frac{\lambda^2}{2}x^2 + kx - \lambda^2(y+z)x + F(x-z, y-z) \tag{193}$$

其中 k 是任意常数，F 是其自变量的任意光滑函数。

相关线性一级积分为

$$I = e^{\lambda t}\left[\lambda(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}) - \lambda^2(x+y+z) + k\right]. \tag{194}$$

3）情形 $k \neq 0$。我们得到势

$$V(x,y,z) = -\frac{\lambda^2}{8}r^2 - \frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{b_1}{k}x + \frac{b_2}{k}y + \frac{b_3}{k}z\right) + \frac{1}{\left(z+\frac{b_3}{k}\right)^2}F\left(\frac{y+\frac{b_2}{k}}{x+\frac{b_1}{k}}, \frac{z+\frac{b_3}{k}}{x+\frac{b_1}{k}}\right) \tag{195}$$

其中 F 是其自变量的任意函数。

相关二次一级积分为

$$\begin{aligned} I \;=\; & e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x} - \frac{\lambda}{2}x\right)^2 + \left(\dot{y} - \frac{\lambda}{2}y\right)^2 + \left(\dot{z} - \frac{\lambda}{2}z\right)^2 - \lambda\left(\frac{b_1}{k}\dot{x} + \frac{b_2}{k}\dot{y} + \frac{b_3}{k}\dot{z}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{b_1}{k}x + \frac{b_2}{k}y + \frac{b_3}{k}z + \frac{b_1^2}{2k^2} + \frac{b_2^2}{2k^2} + \frac{b_3^2}{2k^2}\right) + \frac{2F}{\left(z+\frac{b_3}{k}\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{196}$$

3.1. 对于 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$。

势

$$V(x,y,z) = -\frac{\lambda^2}{8}r^2 + \frac{F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)}{z^2} \tag{197}$$

且相关二次一级积分为

$$I = e^{\lambda t}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \lambda(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + \frac{\lambda^2}{4}r^2 + \frac{2F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)}{z^2}\right]. \tag{198}$$

3.2. 对于 $b_1 = k$ 和 $b_2 = b_3 = 0$。

势

$$V(x,y,z) = -\frac{\lambda^2}{8}r^2 - \frac{\lambda^2}{4}x + \frac{F\left(\frac{y}{x+1}, \frac{z}{x+1}\right)}{z^2} \tag{199}$$

且相关二次一级积分为

$$I = e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x} - \frac{\lambda}{2}x\right)^2 + \left(\dot{y} - \frac{\lambda}{2}y\right)^2 + \left(\dot{z} - \frac{\lambda}{2}z\right)^2 - \lambda\dot{x} + \frac{\lambda^2}{2}x + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{2F}{z^2}\right]. \tag{200}$$

3.3. 对于 $b_1 = b_2 = k$ 和 $b_3 = 0$。

势

$$V(x,y,z) = -\frac{\lambda^2}{8}r^2 - \frac{\lambda^2}{4}(x+y) + \frac{1}{z^2}F\left(\frac{y+1}{x+1}, \frac{z}{x+1}\right) \tag{201}$$

且相关二次一级积分为

$$I = e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x} - \frac{\lambda}{2}x\right)^2 + \left(\dot{y} - \frac{\lambda}{2}y\right)^2 + \left(\dot{z} - \frac{\lambda}{2}z\right)^2 - \lambda(\dot{x}+\dot{y}) + \frac{\lambda^2}{2}(x+y+1) + \frac{2F}{z^2}\right]. \tag{202}$$

3.4. 对于 $b_1=b_2=b_3=k$。

势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}(x+y+z)+\frac{1}{(z+1)^2}F\left(\frac{y+1}{x+1},\frac{z+1}{x+1}\right) \tag{203}$$

且相关二次一级积分为

$$\begin{aligned} I &= e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2+\left(\dot{y}-\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2-\lambda(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z})+\right. \\ &\left.+\frac{\lambda^2}{2}\left(x+y+z+\frac{3}{2}\right)+\frac{2F}{(z+1)^2}\right]. \end{aligned} \tag{204}$$

3.5. 对于 $F\left(\frac{y+\frac{b_2}{k}}{x+\frac{b_1}{k}},\frac{z+\frac{b_3}{k}}{x+\frac{b_1}{k}}\right)=F_1\left(\frac{y+\frac{b_2}{k}}{x+\frac{b_1}{k}}\frac{x+\frac{b_1}{k}}{z+\frac{b_3}{k}}\right)+\frac{c_0}{\left(x+\frac{b_1}{k}\right)^2}=F_1\left(\frac{y+\frac{b_2}{k}}{z+\frac{b_3}{k}}\right)+\frac{c_0}{\left(x+\frac{b_1}{k}\right)^2}$，其中 c_0为任意常数。势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}(c_1x+c_2y+c_3z)+\frac{c_0}{(x+c_1)^2}+\frac{1}{(z+c_3)^2}F_1\left(\frac{y+c_2}{z+c_3}\right) \tag{205}$$

其中 $c_i=\frac{b_i}{k}$。

相关二次一级积分由以下独立量子费舍尔信息组成:

$$I_1 = e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2-\lambda c_1\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda c_1}{4}\right)+\frac{2c_0}{(x+c_1)^2}\right] \tag{206}$$

$$I_2 = e^{\lambda t}\left[\left(\dot{y}-\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2-\lambda(c_2\dot{y}+c_3\dot{z})+\frac{\lambda^2}{2}\left(c_2y+c_3z+\frac{c_2^2}{2}+\frac{c_3^2}{2}\right)+\frac{2F_1}{(z+c_3)^2}\right]. \tag{207}$$

4) 情形 $k_1=k_2=k_3=k$ 和 $L_a=V,\ a=0$

我们得到势

$$V(x,y,z)=\frac{k}{2}r^2+b_1x+b_2y+b_3z. \tag{208}$$

于是，方程（187）给出 $k=-\frac{\lambda^2}{4}$，而势（208）变为

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{8}r^2+b_1x+b_2y+b_3z. \tag{209}$$

相关二次一级积分为

$$I=e^{\lambda t}\left[\frac{\lambda^2}{4}\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{q}^i-\frac{\lambda}{2}q^i\right)^2+\lambda(b_i\dot{q}^i)-\frac{\lambda^2}{2}b_iq^i+\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right]. \tag{210}$$

该二次第一积分由以下独立的二次第一积分组成:

$$I_1=e^{\lambda t}\left[\frac{\lambda^2}{4}\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2+\lambda b_1\dot{x}-\frac{\lambda^2}{2}b_1x+b_1^2\right],\ I_2=e^{\lambda t}\left[\frac{\lambda^2}{4}\left(\dot{y}-\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\lambda b_2\dot{y}-\frac{\lambda^2}{2}b_2y+b_2^2\right],$$

$$I_3=e^{\lambda t}\left[\frac{\lambda^2}{4}\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2+\lambda b_3\dot{z}-\frac{\lambda^2}{2}b_3z+b_3^2\right].$$

因此，势（209）是最大超可积的（见表3）。

5) 情形 $k_1k_2k_3\neq 0$ 和 $b_4=b_5=b_6=0$。

势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{b_1}{k_1}x+\frac{b_2}{k_2}y+\frac{b_3}{k_3}z\right)+\frac{c_1}{\left(x+\frac{b_1}{k_1}\right)^2}+\frac{c_2}{\left(y+\frac{b_2}{k_2}\right)^2}+\frac{c_3}{\left(z+\frac{b_3}{k_3}\right)^2} \tag{211}$$

其中 c_1、 c_2 和 c_3 是任意常数。

相关二次一级积分给出以下三个独立的二次第一积分

$$I_i=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{q}^i-\frac{\lambda}{2}q^i\right)^2-\lambda\frac{b_i}{k_i}\left(\dot{q}^i-\frac{\lambda}{2}q^i-\frac{\lambda b_i}{4k_i}\right)+\frac{2c_i}{\left(q^i+\frac{b_i}{k_i}\right)^2}\right] \tag{212}$$

其中 $i=1$、2、3 和 $q^i=$（x、 y、 z）。

因此，可分离势 (211) 是最大超可积的（见表3）

我们注意到，正如预期的那样，对于 $k_1=k_2=k_3=k$ ，所得势 (211) 属于势能族 (195)，如果我们令

$$F\left(\frac{y+\frac{b_2}{k}}{x+\frac{b_1}{k}},\frac{z+\frac{b_3}{k}}{x+\frac{b_1}{k}}\right)=c_1\left(\frac{z+\frac{b_3}{k}}{x+\frac{b_1}{k}}\right)^2+c_2\left(\frac{y+\frac{b_2}{k}}{x+\frac{b_1}{k}}\right)^{-2}\left(\frac{z+\frac{b_3}{k}}{x+\frac{b_1}{k}}\right)^2+c_3.$$

6）情形 $k_1b_2\neq 0$、 $k_2=k_3=0$ 和 $b_4=b_5=b_6=0$。

向量 $L_a=(k_1x+b_1,b_2,b_3)$。

势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{8}\left[x^2+4(1-c_1^2)y^2\right]-\frac{\lambda^2}{4}\left(c_2x+4c_1yz\right)+c_3y+\frac{c_4}{(x+c_2)^2}+F(z-c_1y) \tag{213}$$

其中 $c_1=\frac{b_3}{b_2}$, $c_2=\frac{b_1}{k_1}$, c_3, c_4 为任意常数， F 是其自变量的任意光滑函数。我们得到以下独立首积分:

$$I_1 = e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2-\lambda c_2\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{4}c_2\right)+\frac{2c_4}{(x+c_2)^2}\right] \tag{214}$$

$$I_2 = e^{\lambda t}\left[\dot{y}+c_1\dot{z}-\lambda(y+c_1z)+\frac{c_3}{\lambda}\right]. \tag{215}$$

我们注意到，对于 $c_1=0$ ，可得到可分离势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{8}\left(x^2+4y^2\right)-\frac{\lambda^2}{4}c_2x+c_3y+\frac{c_4}{(x+c_2)^2}+F(z) \tag{216}$$

由于额外的含时第一积分 (214) 和 (215)，它是一个新的最大超可积势。势（见表7）

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{8}\left(R^2+4z^2\right)+\frac{c_4}{x^2}+\frac{c_0}{y^2}+c_3z. \tag{217}$$

是（216）在 $y\leftrightarrow z$、 $c_2=0$和 F（z） $=-\frac{\lambda^2}{8}z^2+\frac{c_0}{z^2}$ 下的一个子情形。

7.2 参数 a_{17}、 a_{19}、 a_{20}：分量 $L_{(a;b)}$为常数且非对角

在以下情形中，唯一的非零参数是 a_{17}、 a_{19}和 a_{20}。

1）情形 $a_{17}\neq 0$、 $a_{20}=0$ 和 a_{19} 是自由的。

向量 $L_a=(0,2a_{17}x,2a_{19}x)$ 和 Killing 张量 $L_{(a;b)}=\begin{pmatrix}0&a_{17}&a_{19}\\a_{17}&0&0\\a_{19}&0&0\end{pmatrix}$。

于是，方程 (184) 给出势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{2}x^2+F\left(z-cy\right) \tag{218}$$

其中，$c=\frac{a_{19}}{a_{17}}$ 和 F 是任意光滑函数。

相关二次一级积分为

$$I=e^{\lambda t}(\dot{x}-\lambda x)(\dot{y}+c\dot{z}). \tag{219}$$

由表 2 可知，势 (218) 具有额外的自治首次积分：$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{\lambda^2}{2}x^2$ 和 $I_2=\dot{y}+c\dot{z}$。因此，二次第一积分 (219) 包含独立线性首次积分 $I_3=e^{\lambda t}(\dot{x}-\lambda x)$。

我们得出结论：(218) 是一种新的最小超可积势。

2) 情形 $a_{17}=\frac{\alpha}{2}\neq 0$、$a_{19}=0$ 和 $a_{20}=\frac{\beta}{2}$。

向量 $L_a=(0,\alpha x,\beta y)$，其中 α 和 β 是任意常数，且 KT 为 $L_{(a;b)}=\begin{pmatrix}0&\frac{\alpha}{2}&0\\ \frac{\alpha}{2}&0&\frac{\beta}{2}\\ 0&\frac{\beta}{2}&0\end{pmatrix}$。

势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{2(1+c_1^2)}\left(x^2+c_1^2y^2\right)-\frac{\lambda^2}{2(1+c_1^2)}\left(z-2c_1x\right)^2+c_2\left(z-2c_1x\right) \tag{220}$$

其中 $c_1=\frac{\beta}{\alpha}$ 和 c_2 是任意常数。

相关二次第一积分为

$$I=e^{\lambda t}\left[(\dot{x}-\lambda x)\dot{y}+c_1(\dot{y}-\lambda y)\dot{z}-\frac{\lambda^2c_1}{1+c_1^2}(c_1x-z)y-c_1c_2y\right]. \tag{221}$$

此外，势 (220) 还存在额外的自治二次首积分 $I_1=\frac{1}{2}\dot{y}^2-{}_2^{\lambda^2c_1^2}{}_{(1+c_1^2)}y^2$，因为$y$坐标与坐标 x 和 z分离。

7.3 参数 $a_2, a_5, a_8, a_{11}, a_{12}, a_{15}, a_{16}, a_{18}$：分量 $L_{(a;b)}$ 关于x, y, z呈线性

我们考虑以下情形：

1) a_{15} 是唯一非零的参数。

向量 $L_a=a_{15}(-y^2,xy,0)$ 和 Killing 张量 $L_{(a;b)}=a_{15}\begin{pmatrix}0&-\frac{y}{2}&0\\ -\frac{y}{2}&x&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}$。

势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{2}R^2+\frac{c_1x}{y^2R}+\frac{c_2}{y^2}+F(z) \tag{222}$$

其中 c_1, c_2 是任意常数，而 $F(z)$ 是任意光滑函数。

相关二次一级积分为

$$I=e^{\lambda t}\left[M_3(\dot{y}-\lambda y)+\frac{2c_2x}{y^2}+\frac{c_1(y^2+2x^2)}{y^2R}\right]. \tag{223}$$

注意到，势 (222) 具有可积形式（见表1） $V={}^{F_1}(\frac{y}{x})_{R^2}+F_2(R)+F_3(z)$，其中

$$F_1\left(\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{c_1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}+c_2\right)\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right),\ F_2(R)=-\frac{\lambda^2}{2}R^2. \tag{224}$$

因此，由于存在额外的自治二次第一积分，它是一个新的最小超可积势：

$$I_1=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_3(z),\ I_2=\frac{1}{2}M_3^2+\frac{(c_1R+c_2x)x}{y^2}.$$

此外，对于 $F(z)=-\frac{\lambda^2}{2}z^2+\frac{c_3}{z^2}$，其中 c_3 是一个任意常数，所得势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{2}r^2+\frac{c_1x}{y^2R}+\frac{c_2}{y^2}+\frac{c_3}{z^2} \tag{225}$$

是最小超可积势（78）的一个子情形，其中 $F_1\left(\frac{y}{x}\right)$ 如（224）所示。因此，由于额外的自治二次首积分，（225）是一个新的极大超可积势（见表6）。

$$I_3=\frac{1}{2}\mathbf{M}^2+\frac{c_1xr^2}{y^2R}+c_2\frac{r^2}{y^2}+\frac{c_3R^2}{z^2}. \tag{226}$$

2）a_2 和 a_{12} 是仅有的非零参数。
向量 $L_a=(a_2xz、a_{12}yz、-\frac{a_2}{2}x^2-a_{12}y^2)$ 和 Killing 张量
$L_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a_2z & 0 & -\frac{a_2}{2}x \\ 0 & a_{12}z & -\frac{a_{12}}{2}y \\ -\frac{a_2}{2}x & -\frac{a_{12}}{2}y & 0 \end{pmatrix}$。
势（见表3）

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{2}r^2+\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{y^2} \tag{227}$$

其中 k_1 和 k_2 为任意常数。

相关二次一级积分由以下独立量子费舍尔信息组成：

$$I_1=e^{\lambda t}\left[M_2(\dot{x}-\lambda x)+\frac{2k_1z}{x^2}\right],\ I_2=e^{\lambda t}\left[M_1(\dot{y}-\lambda y)-\frac{2k_2z}{y^2}\right].$$

因此，可分离势 (227) 是最大超可积的。
3) 情形 $a_2=a_{12}$。
向量 $L_a=a_2(xz,yz,-R^2)$ 和 KT $L_{(a;b)}=a_2\begin{pmatrix} z & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & z & -\frac{y}{2} \\ -\frac{x}{2} & -\frac{y}{2} & 0 \end{pmatrix}$。

势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{2}r^2+\frac{c_1z}{rR^2}+\frac{F\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} \tag{228}$$

其中 c_1 是任意常数，$F\left(\frac{y}{x}\right)$ 是任意光滑函数。

相关二次一级积分为

$$I_1=e^{\lambda t}\left[M_2\left(\dot{x}-\lambda x\right)-M_1\left(\dot{y}-\lambda y\right)+\frac{c_1}{r}+\frac{2c_1z^2}{rR^2}+\frac{2zF\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2}\right]. \tag{229}$$

注意到，势（228）属于一般势能族（74）；因此，它具有额外的自主二次首次积分（见表4）

$$I_2=\frac{1}{2}M_3^2+F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{230}$$

如果 $c_1=0$，所得势

$$V(x,y,z)=-\frac{\lambda^2}{2}r^2+\frac{F\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2} \tag{231}$$

是一个新的最大超可积势 由于存在额外的自治二次第一积分（见表6）):

$$I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2-\frac{\lambda^2}{2}z^2,\ I_4=\frac{1}{2}\mathbf{M}^2+\frac{r^2F\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2}.$$

注意，势 (231) 对于 $k_1=-\frac{\lambda^2}{2}$ 和 $k_2=0$ 具有形式 (78)。)
4 a_3、a_6、a_{10}、a_{14} 均非零，且 $a_2a_{13}=0$。 /

The vector $L_a = \begin{pmatrix} a_2xz + a_3x + a_6 \\ a_{13}y + a_{14} \\ -a_2x^2 + a_{10} \end{pmatrix}$ and the KT $L_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a_2z + a_3 & 0 & -\frac{a_2}{2}x \\ 0 & a_{13} & 0 \\ -\frac{a_2}{2}x & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

The potential (see Table 3)

$$V(x,y,z) = -\frac{\lambda^2}{8}(4x^2 + 4z^2 + y^2) - \lambda^2 c_1 z - \frac{\lambda^2}{4}c_2 y + \frac{k}{(y+c_2)^2} \tag{232}$$

其中 k、$c_1 = \frac{a_3}{a_2}$和 $c_2 = \frac{a_{14}}{a_{13}}$ 为任意常数。

相关二次一级积分由以下独立首积分组成:

$$I_1 = e^{\lambda t}(\dot{x} - \lambda x) \tag{233}$$

$$I_2 = e^{\lambda t}\left\{\left[\dot{y} - \frac{\lambda}{2}(y + c_2)\right]^2 + \frac{2k}{(y+c_2)^2}\right\} \tag{234}$$

$$I_3 = e^{\lambda t}[\dot{z} - \lambda(z + c_1)] \tag{235}$$

$$I_4 = M_2 + c_1\dot{x}. \tag{236}$$

We 注意, $\{I_2, I_p\} = 0$其中 $p = 1$、2、3、4、$\{I_1, I_3\} = 0$、$\{I_1, I_4\} = I_3$和 $\{I_4, I_3\} = I_1$.

势 (232) 是可积的，因为独立首积分 I_1、I_2、I_3 彼此对合；或者直接说，因为它是可分离的。它也是最大超可积的，因为还存在额外的独立首积分 I_4 和 H，其中 H是哈密顿量。

5) 情形 $a_2 \neq 0$ 和 a_3、a_{13} 均非零。

The vector $L_a = \begin{pmatrix} a_2xz + a_3x \\ a_{13}y \\ -a_2x^2 \end{pmatrix}$ and the KT $L_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a_2z + a_3 & 0 & -\frac{a_2}{2}x \\ 0 & a_{13} & 0 \\ -\frac{a_2}{2}x & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

The potential

$$V(x,y,z) = -\frac{\lambda^2}{2}\left(x^2 + z^2\right) - \frac{\lambda^2}{8}y^2 + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{y^2} - \lambda^2 c_3 z + \frac{k(z+c_3)}{x^2\sqrt{(z+c_3)^2 + x^2}} \tag{237}$$

其中 k、c_1、c_2和 $c_3 = \frac{a_3}{a_2}$均为任意常数。

相关二次第一积分由以下独立的二次第一积分组成:

$$I_1 = e^{\lambda t}\left[\left(\dot{y} - \frac{\lambda}{2}y\right)^2 + \frac{2c_2}{y^2}\right] \tag{238}$$

$$I_2 = e^{\lambda t}\left[(M_2 + c_3\dot{x})(\dot{x} - \lambda x) + \frac{2c_1(z+c_3)}{x^2} + k\frac{x^2 + 2(z+c_3)^2}{x^2\sqrt{x^2 + (z+c_3)^2}}\right]. \tag{239}$$

众所周知，对于正则拉格朗日系统，若满足以下条件，则其动力学方程（以及相关的第一积分）保持不变:

a. 在系统的势 V中添加任意常数 c。

b. 进行正则变换。

那么，势（237）是最小超可积势（222）的一个子情形。事实上，在（237）中添加常数 $c = -\frac{\lambda^2}{2}c_3^2$ 后，我们得到等价的势

$$V(x,y,z) = -\frac{\lambda^2}{2}\left[x^2 + (z+c_3)^2\right] + \frac{k(z+c_3)}{x^2\sqrt{(z+c_3)^2 + x^2}} + \frac{c_1}{x^2} - \frac{\lambda^2}{8}y^2 + \frac{c_2}{y^2}. \tag{240}$$

如果我们进行 正则变换 $x \to y$、 $y \to z$ 和 $z \to x - c_3$，势 (240) 变为

$$V(x,y,z) = -\frac{\lambda^2}{2}R^2 + \frac{kx}{y^2R} + \frac{c_1}{y^2} - \frac{\lambda^2}{8}z^2 + \frac{c_2}{z^2} \tag{241}$$

这是（222）在 F（z）$= -\frac{\lambda^2}{8}z^2 + \frac{c_2}{z^2}$ 下的一个子情形。

势（241）是一个新的极大超可积势，其独立的二次第一积分如下:

$$I_1 = e^{\lambda t}\left[\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2+\frac{2c_2}{z^2}\right] \tag{242}$$

$$I_2 = e^{\lambda t}\left[M_3(\dot{y}-\lambda y)+\frac{2c_1x}{y^2}+\frac{k(y^2+2x^2)}{y^2R}\right]. \tag{243}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\dot{z}^2-\frac{\lambda^2}{8}z^2+\frac{c_2}{z^2} \tag{244}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}M_3^2+\frac{(kR+c_1x)x}{y^2}. \tag{245}$$

我们回顾一下，势 (225) 是另一个极大超可积势，也是 (222) 的一个子情形，但函数 $F(z)$ 的选取不同。若将 $\lambda \to 2\lambda$ 重新命名，则势 (225) 也具有二次第一积分 (242)，因为 z 坐标与 x 和 y 分离。

我们将第 7 节的结果汇总于表 11–13。

势	线性第一积分和二次第一积分
$V=\frac{\lambda^2}{2}\left(c_1^2-1\right)x^2+c_2x-$ $-c_1\lambda xy+F(y-c_1x,z)$	$I=e^{\lambda t}\left(\lambda\dot{x}+c_1\lambda\dot{y}-\lambda^2x-c_1\lambda^2y+c_2\right)$
$V=\frac{\lambda^2}{2}x^2+kx-\lambda^2(y+z)x+$ $+F(x-z,y-z)$	$I=e^{\lambda t}\left[\lambda(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z})-\lambda^2(x+y+z)+k\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}\left(c_1x+c_2y+c_3z\right)+$ $+\frac{1}{z^2}F\left(\frac{y+c_2}{x+c_1},\frac{z+c_3}{x+c_1}\right)$	$I=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2+\left(\dot{y}-\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2-\right.$ $-\lambda(c_1\dot{x}+c_2\dot{y}+c_3\dot{z})+$ $\left.+\frac{\lambda^2}{2}\left(c_1x+c_2y+c_3z+\frac{c_1^2}{2}+\frac{c_2^2}{2}+\frac{c_3^2}{2}\right)+\frac{2F}{z+c_3()^2}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}r^2+F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)z^2$	$I=e^{\lambda t}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2-\lambda(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})+\frac{\lambda^2}{4}r^2+\frac{2F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)}{z^2}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}x+\frac{F\left(\frac{y}{x+1},\frac{z}{x+1}\right)}{z^2}$	$I=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2+\left(\dot{y}-\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2-\lambda\dot{x}+\right.$ $\left.+\frac{\lambda^2}{2}x+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{2F}{z^2}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}(x+y)+$ $+\frac{1}{z^2}F\left(\frac{y+1}{x+1},\frac{z}{x+1}\right)$	$I=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2+\left(\dot{y}-\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2-\right.$ $\left.-\lambda(\dot{x}+\dot{y})+\frac{\lambda^2}{2}(x+y+1)+\frac{2F}{z^2}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}(x+y+z)+$ $+\frac{1}{z^2}F\left(\frac{y+1}{x+1},\frac{z+1}{x+1}\right)$	$I=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2+\left(\dot{y}-\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2-\lambda\left(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}\right)+\right.$ $\left.+\frac{\lambda^2}{2}\left(x+y+z+\frac{3}{2}\right)+\frac{2F}{(z+1)^2}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}(c_1x+c_2y+c_3z)+$ $+\frac{c_0}{(x+c_1)^2}+\frac{1}{z^2}F_1\left(\frac{y+c_2}{z+c_3}\right)$	$I_1=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2-\lambda c_1\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda c_1}{4}\right)+\frac{2c_0}{(x+c_1)^2}\right]$ $I_2=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{y}-\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2-\lambda(c_2\dot{y}+c_3\dot{z})+\right.$ $\left.+\frac{\lambda^2}{2}\left(c_2y+c_3z+\frac{c_2^2}{2}+\frac{c_3^2}{2}\right)+\frac{2F}{z+c_3()^2}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}\left[x^2+4(1-c_1^2)y^2\right]-$ $-\frac{\lambda^2}{4}\left(c_2x+4c_1yz\right)+$ $+c_3y+\frac{c_4}{(x+c_2)^2}+F(z-c_1y)$	$I_1=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2-\lambda c_2\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{4}c_2\right)+\frac{2c_4}{(x+c_2)^2}\right]$ $I_2=e^{\lambda t}\left[\dot{y}+c_1\dot{z}-\lambda(y+c_1z)+\frac{c_3}{\lambda}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{2(1+c_1^2)}\left(x^2+c_1^2y^2\right)-$ $-\frac{1}{2(1+c_1^2)}(z-2c_1x)^2+$ $+c_2(z-2c_1x)$	$I_1=\frac{1}{2}\dot{y}^2-\frac{\lambda^2c_1^2}{2(1+c_1^2)}y^2$ $I_2=e^{\lambda t}\left[(\dot{x}-\lambda x)\dot{y}+c_1(\dot{y}-\lambda y)\dot{z}-\frac{\lambda^2c_1}{1+c_1^2}(c_1x-z)y-c_1c_2y\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{2}r^2+\frac{c_1z}{rR^2}+F\left(\frac{y}{x}\right)R^2$	$I_1=e^{\lambda t}\left[M_2(\dot{x}-\lambda x)-M_1(\dot{y}-\lambda y)+\frac{c_1}{r}+\frac{2c_1z^2}{rR^2}+\right.$ $\left.+\frac{2zF\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2}\right]$ $I_2=\frac{1}{2}M_3^2+F\left(\frac{y}{x}\right)$

表11：可能的不可积势 $V(x,y,z)$，在 E^3 中允许存在形式为 $I_{(3)}$ 的时变 LFI/二次第一积分。

最小超可积势		
势	参考文献	线性第一积分和二次第一积分
$V=-\frac{\lambda^2}{2}x^2+c_2x+F_1(y)+F_2(z)$	[2] New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{\lambda^2}{2}x^2+c_2x$ $I_2=\frac{1}{2}\dot{y}^2+F_1(y)$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F_2(z)$ $I_4=e^{\lambda t}\left(\lambda\dot{x}-\lambda^2x+c_2\right)$
$V=-\frac{\lambda^2}{2}x^2+F(z-cy)$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{\lambda^2}{2}x^2$ $I_2=\dot{y}+c\dot{z}$ $I_3=e^{\lambda t}(\dot{x}-\lambda x)$
$V=-\frac{\lambda^2}{2}R^2+\frac{c_1x}{y^2R}+\frac{c_2}{y^2}+F(z)$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{z}^2+F(z)$ $I_2=\frac{1}{2}M_3^2+\frac{x}{(c_1R+c_2x)y^2}$ $I_3=e^{\lambda t}\left[M_3\left(\dot{y}-\lambda y\right)+\frac{2c_2x}{y^2}+\frac{c_1(y^2+2x^2)}{y^2R}\right]$

表12： E^3中允许具有 $I_{(3)}$ 形式的含时线性/二次第一积分的最小超可积势 $V(x,y,z)$。

极大超可积势		
势	参考文献	线性第一积分和二次第一积分
$V=-\frac{\lambda^2}{8}r^2+b_1x+b_2y+b_3z$	[2] New	$I_i=\frac{\dot{q}_i^2}{2}-\frac{\lambda^2}{8}q_i^2+b_iq_i$ $J_i=e^{\lambda t}\left[\frac{\lambda^2}{4}\left(\dot{q}_i-\frac{\lambda}{2}q_i\right)^2+\lambda b_i\dot{q}_i-\frac{\lambda^2}{2}b_iq_i+b_i^2\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}r^2-\frac{\lambda^2}{4}(b_1x+b_2y+b_3z)+$ $+\frac{c_1}{(x+b_1)^2}+\frac{c_2}{(y+b_2)^2}+\frac{c_3}{(z+b_3)^2}$	New	$I_i=\frac{\dot{q}_i^2}{2}-\frac{\lambda^2}{8}q_i^2-\frac{\lambda^2}{4}b_iq_i+\frac{c_i}{(x+b_i)^2}$ $J_i=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{q}^i-\frac{\lambda}{2}q^i\right)^2-\lambda b_i\left(\dot{q}^i-\frac{\lambda}{2}q^i-\frac{\lambda b_i}{4}\right)+\frac{2c_i}{q^i+b_i)^2}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}\left(x^2+4y^2\right)-\frac{\lambda^2}{4}c_2x+c_3y+$ $+\frac{c_4}{(x+c_2)^2}+F(z)$	New	$I_1=\frac{\dot{x}^2}{2}-\frac{\lambda^2}{8}x^2-\frac{\lambda^2}{4}c_2x+\frac{c_4}{(x+c_2)^2}$ $I_2=\frac{\dot{y}^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}y^2+c_3y$ $I_3=\frac{\dot{z}^2}{2}+F(z)$ $I_4=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x\right)^2-\lambda c_2\left(\dot{x}-\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{4}c_2\right)+\frac{2c_4}{x+c_2)^2}\right]$ $I_5=e^{\lambda t}\left(\dot{y}-\lambda y+\frac{c_3}{\lambda}\right)$
$V=-\frac{\lambda^2}{2}r^2+\frac{c_1x}{y^2R}+\frac{c_2}{y^2}+\frac{c_3}{z^2}$	New	$I_1=\frac{1}{2}\dot{z}^2-\frac{\lambda^2}{2}z^2+\frac{c_3}{z^2}$ $I_2=\frac{1}{2}M_3^2+\frac{c_1R+c_2x}{y^2}+\frac{2c_2x}{y^2}+\frac{c_1(y^2+2x^2}{y^2R}$ $I_3=e^{\lambda t}\left[M_3\ \dot{y}-\lambda y\right]$ $I_4=\frac{1}{2}\mathbf{M}^2+\frac{c_1xr^2}{y^2R}+c_2\frac{r^2}{y^2}+\frac{c_3R^2}{z^2}$
$V=-\frac{\lambda^2}{2}r^2+\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{y^2}$	New	$I_1=\frac{\dot{x}^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}x^2+\frac{k_1}{x^2}$ $I_2=\frac{\dot{y}^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}y^2+\frac{k_2}{y^2}$ $I_3=\frac{\dot{z}^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}z^2$ $I_4=e^{\lambda t}\left[M_2(\dot{x}-\lambda x)+\frac{2k_1z}{y^2}\right]$ $I_5=e^{\lambda t}\left[M_1(\dot{y}-\lambda y)-\frac{2k_2z}{y^2}\right]$
$V=-\frac{\lambda^2}{2}r^2+\frac{F\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2}$	New	$I_1=e^{\lambda t}\left[M_2(\dot{x}-\lambda x)-M_1(\dot{y}-\lambda y)+\frac{2zF\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2}\right]$ $I_2=\frac{1}{2}M_3^2+F\left(\frac{y}{x}\right)$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2-\frac{\lambda^2}{2}z^2$ $I_4=\frac{1}{2}\mathbf{M}^2+\frac{r^2F\left(\frac{y}{x}\right)}{R^2}$
$V=-\frac{\lambda^2}{8}(4x^2+4z^2+y^2)-$ $-\lambda^2c_1z-\frac{\lambda^2}{4}c_2y+\frac{k}{(y+c_2)^2}$	New	$I_1=e^{\lambda t}(\dot{x}-\lambda x)$ $I_2=e^{\lambda t}\left\{\left[\dot{y}-\frac{\lambda}{2}\ (y+c_2)\ \right]^2+\frac{2k}{(y+c_2)^2}\right\}$ $I_3=e^{\lambda t}\left[\dot{z}-\lambda(z+c_1)\right]$ $I_4=M_2+c_1\dot{x}$
$V=-\frac{\lambda^2}{2}R^2+\frac{kx}{y^2R}+\frac{c_1}{y^2}-$ $-\frac{\lambda^2}{8}z^2+\frac{c_2}{z^2}$	New	$I_1=e^{\lambda t}\left[\left(\dot{z}-\frac{\lambda}{2}z\right)^2+\frac{2c_2}{z^2}\right]$ $I_2=e^{\lambda t}\left[M_3(\dot{y}-\lambda y)+\frac{2c_1x}{y^2}+\frac{k(y^2+2x^2}{y^2R}\right]$ $I_3=\frac{1}{2}\dot{z}^2-\frac{\lambda^2}{8}z^2+\frac{c_2}{z^2x}$ $I_4=\frac{1}{2}M_3^2+\frac{}{(kR+c_1x)y^2}$

表13：在 E^3 中允许存在形式为 $I_{(3)}$ 的含时线性/二次第一积分的极大超可积势 $V(x,y,z)$。

8 与现有结果的比较

正如我们在第1节中所指出的，该领域主要的综述工作是 Evans 的 [2] 和 Kalnins 的 [4]。因此，有必要讨论本文综述与这些工作的关系。

8.1 Evans 的工作 [2]

Evans 在 [2], 中利用哈密顿–雅可比方程在 E^3 中的可分离性，确定了所有具有形式为 $I = K_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b + G(q)$ 的自治二次第一积分的最小超可积势和极大超可积势。作者没有考虑线性第一积分（自治或含时）以及含时守恒量。具体而言，[2] 的表 I 中列出了五个极大超可积势，而 [2] 的表 II 中列出了八个最小超可积势。

从表 1–13 可以看出，[2] 的所有结果都已得到重现，此外还获得了一些新结果。因此，[2] 声称已确定 E^3 中的所有二阶超可积势，这一说法并不成立。

此外，应注意到，[2]中的一些结果存在印刷错误。具体而言：1）在 [2], 的方程（3.43）中，二次第一积分 I_4 的首项应为 $L_2P_1 - P_2L_1$。2）在 [2], 的表 II 中，与势 (55) 和 (56) 相关的二次第一积分 I_3 的首项应为 $L_2P_1 - P_2L_1$。3） [2] 的方程（3.57）中的二次第一积分 I_2 应替换为二次第一积分 (8)。4） [2] 的方程（3.57）中的二次第一积分 I_3 应替换为二次第一积分 (9)。

8.2 Kalnins 等人的工作 [4]

在 [4], 中，作者讨论了共形平坦实空间或复空间上的经典三维超可积非退化（即四参数）势。他们证明，二次代数总是在六阶闭合（“5 $\implies$ 6 定理”），也就是说，自治二次第一积分的空间是六维的。此外，借助 St¨ackel 变换（不同空间上超可积结构之间的可逆共形映射），他们提出了有力证据（但未证明），表明所有非退化三维超可积系统都是常曲率系统（即复欧几里得空间或复三维球面）的 St¨ackel 变换。这意味着，要获得所有非退化共形平坦超可积系统，只需对复欧几里得空间和复三维球面上的系统进行分类。最后，他们找到了八类可分离于一般坐标的超可积系统。

将 [4] 的结果与本研究的结果进行比较，我们注意到以下几点：1） [4] 的方程（10）至（16）中给出的七个极大超可积欧几里得势均可重现（见表7）。2） [4] 的方程（10）和（13）中给出的势早已见于 [2] 的表 I。势（13）比 Evans 所发现的势更一般。3）第5节证明，[4] 的势（11）、（12）、（14）、（16）是更一般的势（28）的子情形，对应于任意光滑函数 $F_1(w,z)$ 和 $F_2(w)$ 的特定形式。这解释了这些势为何具有形式为 $I = \dot{w}^2 + G(x,y,z)$ 的二次第一积分，其中 $w = x + iy$。4） [4] 的势（15）是（31）的一个子情形，因此具有形式为 $I = \dot{\bar{w}}^2 + G(x,y,z)$ 的二次第一积分。5） [4] 的势（12）、（16）属于可积形式（34）；因此，它们具有形式为 $I = \dot{z}\dot{w} + G(x,y,z)$ 的二次第一积分。6） [4] 的势（11）、（12）属于可积形式（82）；因此，它们具有形式为 $I = (M_2 - iM_1)^2 + G(x,y,z)$ 的二次第一积分。7） [4] 的势（15）是 $F(z) = k_1z^2 + \frac{k_4}{z^2}$ 时新得到的最小超可积势（97）的一个子情形。因此，它具有形式为 $I = \frac{1}{4}\dot{w}^2 + iM_3\dot{\bar{w}} + G(x,y,z)$ 的额外二次第一积分。8） [4] 的方程（17）中给出的另外两个极大超可积势，只是 $k_1 = k_2 = 0$ 的表3中最后一个极大超可积势在 $F(z) = -\frac{\lambda^2}{8}z^2 + c_3z$ 且 $F(z) = -\frac{\lambda^2}{32}z^2 + \frac{c_3}{z^2}$ 时的子情形。

因此，通过系统地应用定理1，我们找到了 [4] 的所有结果以及新的结果，尤其是含时守恒量。

9 结论

本工作的目的有两个：a. 以系统化，即算法式的方式，评估形如 $q^a = -V_{,a}(q)$（其中 $a = 1,2,3$）的自治保守动力系统的二阶可积性；以及 b. 在可能的情况下，丰富该主题主要来源中的现有成果，这些来源见综述论文 [2] 和 [4]。因此，应将本工作视为对具有线性第一积分/二次第一积分的可积/超可积三维牛顿自治保守动力系统的最新综述。

我们考察了两类可积和超可积的三维牛顿势。第一类是形如 $\Phi(x,y)+F(z)$ 的势，它们是 $2+1$ 可分解的，因此其二次第一积分可由二维势$\Phi(x,y)$的二次第一积分得到；第二类是不可分解势 $V(x,y,z)$，位于 E^3 中，无法以这种方式处理。对于后一类势，我们采用定理1的算法进行了搜索。

在对定理1中考虑的三类二次第一积分 $I_{(1,\ell)}, I_{(2,\ell)}, I_{(3)}$ 进行详细研究后，我们重新找出了所有已知的可积/超可积势，以及一些新的势。研究还表明，许多已有结果实际上是更一般结果在特定自由参数/函数取值下的特殊情形。为方便起见，我们将各情形的结果汇总在表格中，其中列出了已有结果及其相应参考文献，以及本研究得到的新结果。这些结果可用于以多种方式研究动力系统，尤其是更复杂系统的情形。相关研究将在其他地方给出。

参考文献

[1] V.I. Arnold, 《经典力学的数学方法》, 施普林格（1989）, 证明见第272–284页。[2] N.W. Evans, 《经典力学中的超可积性》, 《物理评论A》41(10), 5666（1990）。[3] W. Miller, 《三维二阶超可积系统》, SIGMA 1, 015（2005）。[4] E.G. Kalnins、J.M. Kress 和 W. Miller Jr., 《三维超可积系统的分类》, 载于《量子理论与对称性 IV》, V.K. Dobrev 编, Heron Press, 索非亚（2006）。[5] E.G. Kalnins、J.M. Kress 和 W. Miller Jr., 《三维二阶超可积系统的精细结构：三参数势》, 《物理学杂志A：数学与理论》40, 5875（2007）。[6] V.V. Kozlov, 《哈密顿力学中的可积性与不可积性》, 《俄罗斯数学调查》, Turpion, 38(1), 第1–76页（1983）, 参见第17页, 定理1, 第二章, 第2节。[7] T.G. Vozmishcheva, 《常曲率空间中的天体力学可积问题》, 《数学科学杂志》125(4), 419（2005）, 参见定理3.4。[8] M. Tsamparlis 和 A. Mitsopoulos, 《自治保守动力系统的二次第一积分》, 《数学物理杂志》61, 072703（2020）。[9] E.G. Kalnins、J.M. Kress 和 W. Miller Jr., 《非退化三维复欧几里得超可积系统与代数簇》, 《数学物理杂志》48, 113518（2007）。[10] A. Mitsopoulos、M. Tsamparlis 和 A. Paliathanasis, 《二维自治保守动力系统的可积势与超可积势》, 《对称性》12, 1655（2020）。[11] M. Tsamparlis 和 A. Mitsopoulos, 《无诺特对称性的完整系统第一积分》, 《数学物理杂志》61, 122701（2020）。[12] J. Hietarinta, 《寻找第二不变量的直接方法》, 《物理报告》147(2), 87（1987）。