arXiv:2301.00845v1 [math.AP] 2 Jan 2023

采用由椭球构造的广义反射器处理带空间限制的近场反射器问题的弱解

Dylanger S. Pittman

400 Dowman Drive, Atlanta

摘要

我们先阐明一种新型近场反射器问题变体的动机，随后对其进行表述，并称之为带空间限制的近场反射器问题。设 $\mathcal{O}$ 为各向异性点光源，并假设给定一个有界开集 U。假设光源 $\mathcal{O}$ 沿孔径 $D \subseteq \mathbb{S}^2$所定义的方向发出的光，其辐亮度为 $g(m)$（ $m \in D$），经$R \subset U$反射后产生辐照度 $f(x)$（ $x \in T$）。逆问题是根据给定的光源位置 $\mathcal{O}$、输入孔径 D、辐亮度 g、“目标”集 T和辐照度 f，构造反射器 $R \subseteq U$ 。我们完全聚焦于目标集 T 为有限集的情形。

关键词： 偏微分方程、几何光学、几何*2020*年数学主题分类: 78A05, 35, 51, 53

1. 引言

令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的原点，并令 $\mathbb{S}^2$ 为以 $\mathcal{O}$ 为中心的单位球面。我们将 $\mathbb{S}^2$ 上的点视为起点位于 $\mathcal{O}$. 的单位向量。令孔径 为 $\mathbb{S}^2$ 的一个子集；在我们的研究中，孔径将是一个开集。从物理角度来看，将 $\mathcal{O}$ 视为各向异性点光源的位置是合理的，该光源沿由孔径 $D \subseteq \mathbb{S}^2$ 定义的一组方向发射光线。

Email address: dpittm2@emory.edu (Dylanger S. Pittman)

定义 1.1。 假设给定一个孔径，它是一个连通开集 $D \subseteq \mathbb{S}^2$，以及一个函数 ρ : $D \to (0, \infty)$ ，该函数连续且几乎处处可微。那么，**反射器** 是集合 $R = \{m\rho(m)|m \in D\} \subset \mathbb{R}^3$。

如果 ρ 是光滑函数，我们可以称 R 为**光滑反射器**。

给定一个孔径 D，它是一个连通开集。假设我们有一个连续、几乎处处可微的正函数 ρ : $D \to (0, \infty)$，以及一个对应的反射器 $R = \{m\rho(m) |m \in D\}$. 。设一条从 $\mathcal{O}$ 出发、方向为 $m \in D$ 的光线射向反射器 R 上的点 $m\rho(m)$。如果 ρ 在 m 处可微，则存在一个单位向量 $n(m)$，它垂直于反射器 R 在 $m\rho(m)$ 处的表面。因此，根据几何光学的反射定律，一条来自 $\mathcal{O}$ 、方向为 m 的光线在点 $m\rho(m)$ 处反射，方向为

$$y(m) = m - 2\langle m, n(m)\rangle n(m) \tag{1}$$

其中 $\langle m, n(m)\rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的标准欧几里得内积，并且 $n(m)$ 的取向满足 $\langle m, n(m)\rangle > 0$ [1]。

反射器 R 经过设计，使得由点 $m\rho(m) \in R$ 和方向 $y(m)$ 描述的光线对应于预先指定的目标集 T中的某个元素。“目标集”的含义因上下文而异，对应关系 $y(m)$ 也是如此；此外，目标集中的元素也可以根据需求而有所不同。因此，目标集可以表示许多不同的事物。例如，若目标集 T 是 $\mathbb{S}^2$的子集，则一种可能的对应关系可以是 $^{y_{(m)}}{}_{|y(m)|} \in T$；见 [2]。从物理角度看，在这种情况下，$T$ 可视为光线方向的集合。若 T 是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$的子集，则另一种可能对应关系的例子是：对每个 $m \in D$，都存在一个 $a(m) > 0$ ，使得 $a(m)y(m) + m\rho(m) \in T$ ；见 [3] 和 [4]。从物理角度看，在这种情况下， T 可视为希望照亮的区域。

假设 g 是定义在孔径 D上的可积非负函数，而 f 是定义在目标集 T上的可积非负函数。从物理角度来说，我们称 $g(m)$ 是 $m \in D$ 在 $\mathcal{O}$ 沿 $m \in D$方向上的辐亮度，或者说 g 是 D上的辐亮度分布。我们还称 $f(x)$

是 $x \in T$ 在 $x \in T$处的目标集辐照度，或者说 f 是 T上的辐照度分布。

一个反射器系统由孔径 D $\mathcal{O}$、反射器 R、定义在 D上的可积非负函数 g，以及带有定义在 T上的可积非负函数 f 的目标集 T 组成。从物理角度来看：光源在 $\mathcal{O}$ 发出的光，沿孔径 D所定义的方向，以辐亮度 $g(m)$（$m \in D$时）照射，经 R反射后，产生辐照度 $f(x)$（ $x \in T$时）。图 1 展示了一个可作为说明的示例。

简而言之，反射器问题是一类逆问题，旨在通过构造一个符合其他给定信息的反射器来完善反射器系统。具体而言，假设给定了 $\mathcal{O}$、孔径 D、定义在 D上的可积非负函数 g，以及带有定义在 T上的可积非负函数 f 的目标集 T。反射器问题的目标是寻找定义在 D 上的连续、几乎处处可微的正函数 ρ，使得反射器$R = \{m\rho(m)|m \in D\}$ 在 T上产生预先指定的辐照度分布f。

反射器问题因其在物理学和工程学中的用途而得到了深入研究。这类问题在反射器天线的构造（见 [5], [6]）、镜面设计 [7], 、热传递 [8], 和波束整形 [9] 等领域有着广泛应用。我们仅考虑光的高频近似，此时几何光学定律适用。下面我们将对近场反射器问题作一般性介绍，并阐述其研究动机。

2. 近场反射器问题

我们讨论一种称为“近场反射器问题”的反射器问题。简而言之，近场反射器问题旨在设计一种反射器，将来自原点的光重新分布到与原点相距有限距离的一个集合上。

在本部分中，我们所说的曲面是指微分几何意义上的曲面；参见 [10] 中的定义 12.4。假设给定一个反射器系统

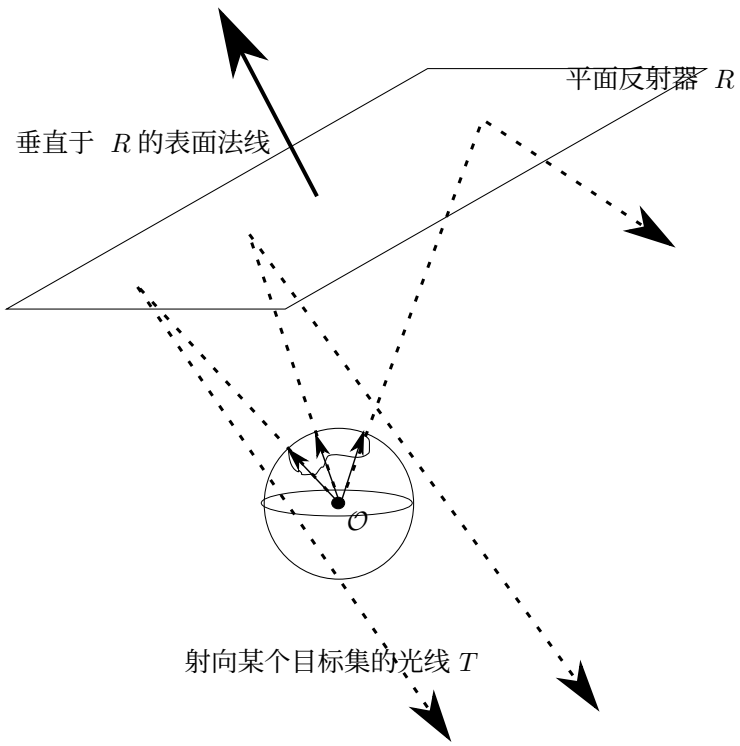


图 1：这是带有光滑反射器的反射器系统最基本的示例。这里， R 是一个平面。 R 上的每个点都有一个法线。光从点 $\mathcal{O}$ 发出，其方向由单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的点表示，并按照某个既未展示也未说明的目标集传播。

由以下内容组成

1. $\mathcal{O}$，2. 一个孔径 $D \subset \mathbb{S}^2$，3. 一个非负 $g \in L^1(D)$，4. 一个有界博雷尔集 $T \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$ （通常是曲面的子集或有限集），5. 一个非负可积函数 $f : T \to [0, \infty)$，6. 以及一个光滑函数 $\rho : D \to (0, \infty)$，其对应的光滑反射器为 $R = \{m\rho(m)|m \in D\}$.

从物理角度来看，这一设置可以描述如下。光从位于 $\mathcal{O}$ 的光源发出，沿由孔径 D 所定义的方向传播。方向为 $m \in D$ 的每条光线具有辐亮度 $g(m)$，并在点 $m\rho(m)$ 处从 R 反射，沿方向 $y(m)$ 传播，如公式（1）所述。对于每个 $m \in D$，存在一个 $a(m) > 0$，使得 $a(m)y(m) + m\rho(m) \in T$，从而为 $x \in T$ 产生辐照度 $f(x)$。图 2 展示了这一情形的基本示意图。在此设置下，我们继续对近场反射器问题进行表述

设 $u = (u^1, u^2)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的光滑局部坐标，使得 D 位于一个坐标片中。点 $m \in D$ 的位置向量为 $m = m(u)$。我们选择坐标 u^1, u^2，使得 $\langle m, m_1 \times m_2 \rangle = 1$ 属于 D；这里，$\langle , \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的标量积，而 $m_i = \frac{\partial m}{\partial u^i}$，$i = 1, 2$。注意，这意味着$\langle m, m_i \rangle = 0, i = 1, 2$。$\mathbb{S}^2$ 的第一基本形式为 $e = e_{ij} du^i du^j$，其中 $e_{ij} = \langle m_i, m_j \rangle$.

令 $r(m) = m\rho(m)$，则 $r(m)$ 定义了一个光滑曲面 $R = \{r(m)|m \in D\}$。设 R 的第一基本形式为 $g = g_{ij} du^i du^j$，其中 $g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle = \rho_i \rho_j + \rho^2 e_{ij}$，$r_i = \frac{\partial r}{\partial u_i}$，且 $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial u_i}$。

设 $n(m)$ 是定义在 R 上的法向量场，使得 $\langle n(m)\ m \rangle > 0$ 在 R. 上处处成立。于是

$$n(m) = (\rho^2 + |\tilde{\nabla}\rho|^2)^{-1/2}(r - \tilde{\nabla}\rho) \tag{2}$$

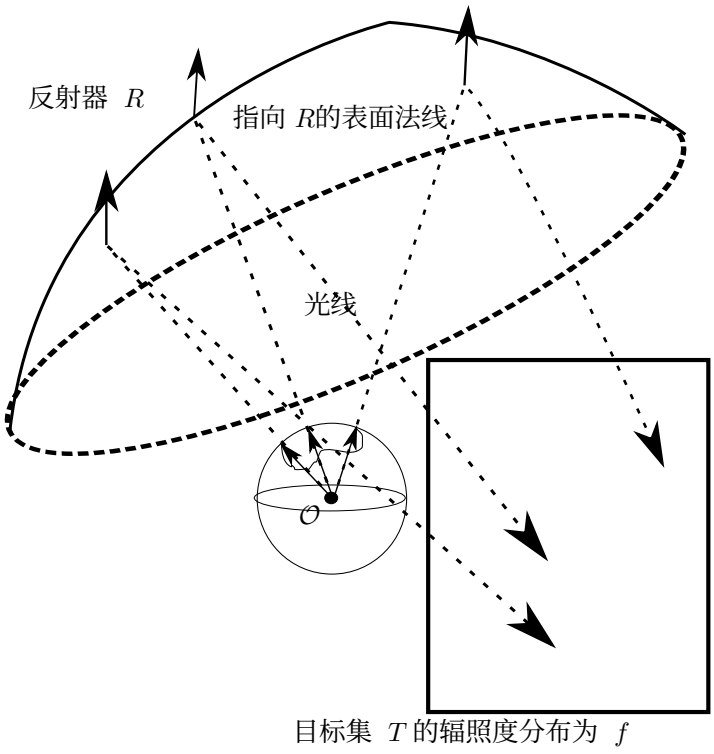


图 2：这是 $\mathbb{R}^3$ 中近场反射器问题的示意图。原点处的辐射强度 $\mathcal{O}$ 由非负函数 $g \in L^1(D)$ 给出。我们希望找到一个反射器 R，使反射光线在 T. 上产生给定的辐照度分布 f。

其中 $|\tilde{\nabla} p|^2 = \rho_i \rho_j e^{ij}$. 。结合方程 (1)，即可确定光线经 R [11] 反射后的方向。

现在，我们可以追踪每条光线的路径：光线沿方向 $m \in D$ 射向点 $x(m) \in T$。一条从 $\mathcal{O}$ 出发、方向为 m 的光线，在点 $r(m)$ 处照射到曲面R 。随后，该光线在 $r(m)$ 处被 R 反射，并沿由 (1) 定义的方向 $y(m)$ 到达 T 上的某个点 $x(m)$。因此，从物理角度来看，在 $x(m)$ 处反射的光线会产生辐照度 $f(x(m))$。这定义了一个映射 $m \to x$ ，我们称之为反射器映射；为方便起见，我们将 $x(m)$ 记作 m 在反射器映射下的像。反射器映射$x : D \to T$ 结合方程 (1) 和 (2)，描述了从D 到 T 的光线追踪过程。

如果反射器映射是从 D 到 T 的微分同胚，其中 T 是光滑曲面的子集，那么可以引入 T 的第一基本形式，记作$w = w_{ij} du^i du^j$，其中 $w_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$，$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$.

根据能量守恒定律的微分形式 [1],

$$f(x(m))|J(x(m))| = g(m) \tag{3}$$

其中， J 是映射 x 的雅可比行列式。注意,

$$J(x(m)) = \pm \frac{d\nu(x(m))}{d\sigma(m)} = \pm \frac{\sqrt{\det(w_{ij})}}{\sqrt{\det(e_{ij})}} \tag{4}$$

其中， $d\sigma$ 是 $\mathbb{S}^2$上的曲面面积元，而 $d\nu$ 是 T上的曲面面积元。根据 x 是保持定向还是反转定向，我们为雅可比行列式赋予 $\pm$ 号。因此，对（3）积分可得，对于所有博雷尔集$\omega \subseteq T$,

$$\int_{x^{-1}[\omega]} g d\sigma = \int_{\omega} f d\nu \tag{5}$$

其中， $x^{-1}[\omega] = \{m \in D | x(m) \in \omega\}$ 和 $\int_D g d\sigma = \int_T f d\nu$。

基于这一动机，现在我们可以陈述近场反射器问题。假设给定 $\mathcal{O}$、一个孔径 $D \subset \mathbb{S}^2$ 及其上的非负函数$g \in L^1(D)$，以及一个有界博雷尔集 $T \subset \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathcal{O}\}$ 和一个非负可积函数 $f : T \to [0, \infty)$。目标是求一个定义在 D 上的光滑函数 ρ ，使得:

1. 从 $\mathcal{O}$ 出发、沿方向 $m \in D$ 传播的光线经由反射器$R = \{m\rho(m)$ $|m \in D\}$ 反射，遵循方程 (1)，并到达目标集 T。

2. $g(m)$在 D 上经反射器映射变换后成为 T上的 f；也就是说，对所有Borel子集 $\omega \subseteq T$,

$$\int_{x^{-1}[\omega]} g d\sigma = \int_{\omega} f d\nu \tag{6}$$

其中，$x : D \to T$ 是与反射器 $R =\{m\rho(m)|m \in D\}$对应的反射器映射，$x^{-1}[\omega] = \{m \in D|x(m) \in \omega\}$，$d\sigma$ 是 $\mathbb{S}^2$上的曲面面积元，而 $d\nu$ 是 T 上的面积元（ν 通常是某种离散测度或勒贝格测度）。

3. 满足总能量守恒定律：$\int_D g d\sigma = \int_T f d\nu$。

当反射器映射是从 D 到 T 的微分同胚时，也可以将其表述为Monge-Amp`ère 型偏微分方程；具体而言，即文献 [12]中的方程（4）。

关于近场反射器问题，已有大量研究。1972年，Schruben [3] 发现，如果目标集是 $\mathbb{R}^3$中某个平面的子集，就可以推导出描述反射器的隐式积分微分方程；但尚未证明解的存在性。随后在 [13], , Schruben研究了目标集为平面上一小块旋转对称斑块的情形。在这种情况下，当辐亮度分布和辐照度分布均为旋转对称时，文献 [3] 推导出的方程可以作为常微分方程求解。1989年，Oliker [12] 将近场反射器问题表述为 Monge-Amp`ère 型强非线性偏微分方程。对该方程的研究颇具难度，而在 [12] 中，只有旋转对称情形得到了解决。

1998年，Kochengin 和 Oliker [4] 提出了近场反射器问题的一种替代表述。这是一种几何方法，涉及分析由一族支撑椭球体生成的凸集边界。这种方法也可以视为偏微分方程的弱解

，该方程于 [12] 中提出。其策略是假设目标集是平面上的有限集，并通过构造性证明证明该情形下解的存在性。由于所构造的反射器是凸的，因此可以利用布拉施克选择定理（更多详情见 [14]），证明当目标集是平面上的连续集时解的存在性。这种方法在很大程度上受到 Caffarelli 和 Oliker [2] 先前工作的启发；该工作通过分析由一族支撑抛物面生成的凸集边界，解决了一个相关问题。

在 [15]中，提出了一种可证明收敛的数值算法，可显式求出构造 [4]所述反射器所需的椭球。研究表明，这种构造会产生无穷多个解；不过，该算法有一个优点：若固定反射器上的一个初始点，算法便会收敛到唯一解。这种算法及其变体已在各种情形下得到广泛研究。例如，Fournier、Cassarly 和 Rolland 在 [16] 中将 [15], 中的算法推广到光源并非单个点的情形，具体而言，是平面旋转对称发射器。在 [17]中，有研究提出了一种方法，可将具有离散辐照度分布的反射器平滑处理为具有连续辐照度分布的反射器。此外，最优传输方法也得到了研究 [18]。

2.1. 具有空间限制的近场反射器问题

本文研究近场反射器问题的一种新变体，其中反射器的放置和构造位置受到极为严格的限制。具体而言，给定一个开集 $U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$，反射器$R$ 必须是U的子集。

—

定义 2.1. 给定一个 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$ 和一个子集 $S \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$，则定义 $\mathrm{Proj}(x) = \frac{x}{|x|}$ 为 x **在** $\mathbb{S}^2$ **上的投影**，并且 $\mathrm{Proj}[S] = \{\mathrm{Proj}(x) \in \mathbb{S}^2 | x \in S\}$ 为 S **在** $\mathbb{S}^2$**上的投影。**

假设给定一个定义在 Proj$[U]$ 上的正值、连续且几乎处处可微的函数 ρ。我们有一个反射器 $R = \{m\rho(m) | m \in \mathrm{Proj}[U]\}$

它确定了我们的反射器映射 $x : \text{Proj}[U] \to T$。该映射通过追踪每条由方向 $m \in \text{Proj}[U]$ 描述、到达点$x(m) \in T$的光线的路径来确定。一条从 $\mathcal{O}$ 出发、方向为 m 的光线，在点 $m\rho(m)$ 处射中反射器 R。接着，假设 ρ 在 m 处可微，则该光线会在 $m\rho(m)$ 处从 R 反射，反射方向为 $y(m)$，如公式 (1) 所定义，并最终在某点$x(m)$到达 T。因此，从物理角度来看，在 $x(m)$ 处反射的光线会产生辐照度 $f(x(m))$。这定义了映射 $m \to x(m)$，我们称之为反射器映射；为方便起见，我们将 $x(m)$ 记作 m 在反射器映射下的像。

现在我们可以表述带空间限制的近场反射器问题。假设给定一个开集 $U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$，$\mathcal{O}$、一个孔径 $\text{Proj}[U] \subset \mathbb{S}^2$、一个非负函数 $g \in L^1(\text{Proj}[U])$，以及一个带有可积函数 $f\colon T \to [0, \infty)$ 的有界博雷尔集$T \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$。

目标是在 $\text{Proj}[U]$ 上寻找一个正的、连续且几乎处处可微的函数 ρ，使得：

1. $R = \{m\rho(m) | m \in \text{Proj}[U]\} \subset \overline{U}$。

2. 从 $\mathcal{O}$ 出发、沿 $m \in \text{Proj}[U]$ 方向传播的光线按照方程 (1) 在 R 处反射，并到达目标集 T。

3. $\text{Proj}[U]$ 上的 $g(m)$ 经反射器映射变换后成为 T 上的 f，即对于所有博雷尔子集 $\omega \subseteq T$，

$$\int_{x^{-1}[\omega]} g d\sigma = \int_{\omega} f d\nu \tag{7}$$

其中 $x\colon \text{Proj}[U] \to T$是反射器映射，$x^{-1}[\omega] = \{m \in \text{Proj}[U] | x(m) \in \omega\}$，$d\sigma$ 是 $\mathbb{S}^2$上的曲面面积元，而 $d\nu$ 是 T上的面积元（ν 通常是某种离散测度或勒贝格测度）。

4. 满足总能量守恒定律：$\int_{\text{Proj}[U]} g d\sigma = \int_T f d\nu$。

这种近场反射器问题的变体在工程学中有着明确的应用，因为在现实世界的设计中，人们往往不得不应对空间限制。例如，在汽车前照灯的构造中，反射器可以放置的位置以及反射器必须采用的形状，

常常受到纯粹出于美学考虑的严格限制 [19]。然而，据作者所知，尚未有数学研究朝这一方向展开。我们专门研究目标集为有限集的情形。

3. 旋转椭球

我们的所有工作都在 $\mathbb{R}^3$ 中进行。我们用 $\mathbb{S}^2$ 表示以 $\mathcal{O}$ 为中心的单位球面，并且对所有 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$. 都有 $k_x = x/|x|$ 。这些几何构型很大程度上借鉴自 [4] 和 [15]。旋转椭球具有独特的光学性质，因此在求解近场反射器问题时至关重要。

设 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$ 和 $d \in (0, \infty)$ 。我们用 $E_d(x)$ 表示绕轴 $\mathcal{O}x$ 旋转且焦点位于点 $\mathcal{O}$ 和 x 的旋转椭球。相对于 $\mathcal{O}$ 的极径可表示为:

$$\psi_{x,d}(m) = \frac{d}{1 - \epsilon\langle m, k_x\rangle},\ m \in \mathbb{S}^2 \tag{8}$$

其中 ϵ 为离心率，并且

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{d^2}{x^2}} - \frac{d}{|x|}. \tag{9}$$

换句话说

$$E_d(x) = \{m\psi_{x,d}(m) | m \in \mathbb{S}^2\}. \tag{10}$$

从现在起，每当我们使用术语 椭球 时，特指这种类型的椭球，其中一个焦点始终位于 $\mathcal{O}$。注意，每个 $E_d(x)$ 都由 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$ 和 $d \in (0, \infty)$。唯一确定。本文中，我们定义 $\Psi_{x,\ d}(m) = m\psi_{x,\ d}(m)$。

注意，对于 d 的所有可能取值，我们都有 $\epsilon \in (0, 1)$。此外，对于固定的 x，随着 $d \to 0$ ，椭球将退化为一条线段，即 $E_d(x) \to \{tx + (1-t)\mathcal{O} | t \in [0, 1]\}$. 。这样的椭球称为退化椭球。注意，当$d \to \infty$时，$|\psi_{x,\ d}(m)| \to \infty$ 对所有 $m \in \mathbb{S}^2$. 都成立。

椭球的一项重要性质可由以下命题描述。

命题 3.1. 设 $c, d > 0$。那么椭球 $E_{cd}(x)$ 和 $E_d(x)$ 具有相同的焦点： $\mathcal{O}$ 和 x.

从物理角度来看，上述性质十分重要，因为形状为椭球 $E_d(x)$ 的反射器会将来自 $\mathcal{O}$ 的光照射到焦点x ，使得从 $\mathcal{O}$ 发出的总能量等于反射到 x 上的总能量。无论椭球有多大或多小，这一性质都成立；关键只在于焦点的位置。

4. 广义反射器

在继续之前，我们再次说明，近场反射器问题可以用解析方式表述为 Monge Amp´ere 型偏微分方程。具体而言，即 [12] 中的方程 (4)。因此，我们将把带有空间限制的近场反射器问题的以下表述视为其弱形式，并将其解称为弱解。以下表述仅涉及目标集为有限集的情况。

4.1. 广义反射器下的弱解

定义 4.1。 假设给定一个孔径 $D \subseteq \mathbb{S}^2$ ，它是一个开集，以及一个函数 $\rho : D \to (0, \infty)$ ，该函数不一定连续，但几乎处处可微。那么，**广义反射器** 就是集合$R = \{m\rho(m) | m \in D\} \subset \mathbb{R}^3$。

$\mathbb{R}^3$ 的上半空间表示为 $\mathbb{R}^{3+} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$，而 $\mathbb{R}^3$ 的下半空间表示为 $\mathbb{R}^{3-} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z < 0\}$。令 σ 表示 $\mathbb{S}^2$. 上的标准测度。考虑一个开集 $U \subseteq \mathbb{R}^{3+}$、相应的孔径 Proj$[U]$以及一个有限目标集 $T \subset \mathbb{R}^{3-}$。

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的一个开子集可数族，使得对于所有不同的 $B, B' \in \mathscr{B}$, 都有 $\sigma(\text{Proj}[U] \setminus \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B) = 0$、$\overline{\text{Proj}[U]} \subseteq \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$以及 $\sigma(B \cap B') = 0$。令集合 $\mathcal{B}(U)$ 为所有此类族构成的集合。

由于每个椭球都需要焦点和离心率才能得到明确定义，给定一个族 $\mathscr{B} \in \mathcal{B}(U)$，令 $\mathscr{U}_T(\mathscr{B})$ 为所有函数 $\mathscr{B} \to T$ 的集合，并令 $\mathscr{V}(\mathscr{B})$ 为

所有函数 $\mathscr{B} \to (0, \infty)$ 的集合。因此我们定义

$$\mathcal{E}_T(U) = \left\{ \bigcup_{B \in \mathscr{B}} \Psi_{u(B), v(B)}[\overline{B}] \,\middle|\, \mathscr{B} \in \mathcal{B}(U), u \in \mathscr{U}_T(\mathscr{B}), v \in \mathscr{V}(\mathscr{B}) \right\}. \tag{11}$$

假设给定一个 $Z \in \mathcal{E}_T(U)$。定义

$$\mathscr{B}_Z = \left\{ \mathrm{Int}(\mathrm{Proj}[E_d(x) \cap Z]) \subseteq \mathbb{S}^2 \,|\, d \in (0, \infty), x \in T, \sigma(\mathrm{Proj}[E_d(x) \cap Z]) \neq 0 \right\}. \tag{12}$$

椭球的几何性质以及 $\mathscr{B}_Z$ 的定义表明，存在唯一的 $u \in \mathscr{U}_T(\mathscr{B})$ 和 $v \in \mathscr{V}(\mathscr{B})$，使得 $Z = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_Z} \Psi_{u(B),\ v(B)}[B]$。定义 $u_Z \in \mathscr{U}_T(\mathscr{B}_Z)$ 和 $v_Z \in \mathscr{V}(\mathscr{B}_Z)$ 为满足以下条件的唯一函数：$Z = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_Z} \Psi_{u_Z(B)\ v_Z(B)}[B]$。给定某个 $Z \in \mathcal{E}_T(U)$，令 $y_Z^1(m) = \{B \in \mathscr{B}_Z | m \in B\}$，其中 $m \in \mathrm{Proj}[U]$。给定一个 $\mathscr{B} \in \mathcal{B}(U)$，令 $\mathscr{N}(\mathscr{B})$ 为所有单射函数 $s \colon \mathscr{B} \to \mathbb{N}$ 的集合。对于 $Z \in \mathcal{E}_T(U)$ 和 $s \in \mathscr{N}(\mathscr{B}_Z)$，定义

$$\rho_Z^s(m) = \psi_{u_Z(s^{-1}(\min s[y_Z^1(m)])), v_Z(s^{-1}(\min s[y_Z^1(m)]))}(m),\ m \in \mathrm{Proj}[U]. \tag{13}$$

注意，函数 ρ_Z^s 为正，但不一定连续，且几乎处处可微。令 $W(\rho_Z^s) = \{m\rho_Z^s(m) | m \in \mathrm{Proj}[U]\}$，因此我们描述一组广义反射器

$$\mathcal{R}_1^U(T) = \left\{ W(\rho_Z^s) |\, Z \in \mathcal{E}_T(U) \text{ where } Z \subset \overline{U}, s \in \mathscr{N}(\mathscr{B}_Z) \right\}. \tag{14}$$

假设给定一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$。定义

$$\mathscr{B}_R = \left\{ \mathrm{Int}(\mathrm{Proj}[E_d(x) \cap R]) \subseteq \mathbb{S}^2 \,|\, d \in (0, \infty), x \in T, \sigma(\mathrm{Proj}[E_d(x) \cap R]) \neq 0 \right\}. \tag{15}$$

椭球的几何性质以及 $\mathscr{B}_R$ 的定义表明，存在一个 $s \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_R)$、唯一的 $u \in \mathscr{U}_T(\mathscr{B})$ 和唯一的 $v \in \mathscr{V}(\mathscr{B})$，使得 $W(\rho_Z^s) = R$，其中 $Z = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_R} \Psi_{u(B), v(B)}[B]$。因此，对于每个广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$，我们可以定义唯一的 $\mathscr{B}_R \in \mathcal{B}(U)$，使得对于每个 $B \in \mathscr{B}_R$，都存在唯一的 $x_B \in T$ 和 $d_B \in (0, \infty)$，并且对于某个 $s \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_R)$，有 $R = W(\rho_Z^s)$，其中 $Z = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_R} \Psi_{x_B, d_B}[B]$。

—

因此，给定一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$，我们便得到相应的 $\mathscr{B}_R$；对于每个 $B \in \mathscr{B}_R$，我们定义唯一的 x_B 和 d_B。我们还得到一个 $s_R \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_R)$ 以及唯一的 $Z_R = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_R} \Psi_{x_B, d_B}[B]$，使得 $R = W(\rho_{Z_R}^{s_R})$。

给定一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$，对于所有 $m \in \text{Proj}[U]$，我们定义

$$M(m) = x_B \in T \tag{16}$$

其中 $m\rho_{Z_R}^{s_R}(m) = \Psi_{x_B,\ d_B}(m)$。令 $y_R^2(m)$ 为 $R \setminus \{m\rho_{Z_R}^{s_R}(m)\}$ 与连接 $m\rho_{Z_R}^{s_R}(m)$ 和 $M(m)$ 的线段的交点。

给定一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$，映射 $\alpha_1 \colon \text{Proj}[U] \to T \cup R$,

$$\alpha_1(m) = \begin{cases} M(m) & \text{if } y_R^2(m) = \varnothing \\ y_R^2(m) & \text{if } y_R^2(m) \neq \varnothing \end{cases} \tag{17}$$

称为广义反射器映射。从物理角度来说，方向为 m 、起源于 $\mathcal{O}$ 的光线只有在 $y_R^2(m)$ 为空时才能到达目标集。

假设给定一个非负 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$。对于所有博雷尔$X \subseteq \mathbb{S}^2$，定义

$$\mu_g(X) = \int_X g(m) d\sigma(m) \tag{18}$$

其中 σ 表示 $\mathbb{S}^2$. 上的标准测度。假设 $g \equiv 0$ 位于 $\text{Proj}[U]$ 之外。从物理角度来说， g 是 $\mathcal{O}$ 处光源的辐亮度分布。

为了表述并求解广义反射器问题（在下文将定义的弱解框架下），我们需要定义一种测度，用来表示由 g 产生并经广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$ 重新分配的能量。

给定广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$ 和集合 $\omega \subseteq T$，我们定义的可见集为

$$V_1^U(\omega) = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \overline{A} \setminus \{m \in \text{Proj}[U] | \alpha_1(m) = y_R^2(m)\} \tag{19}$$

其中 $\mathscr{A} = \{B \in \mathscr{B}_R | x_B \in \omega\}$。现在我们需要证明 $V_1^U(\omega)$ 是可测的。注意以下定义。

定义 4.2。对于一个元素 $x \in \mathbb{R}^3$ 和一个集合 $A \subset \mathbb{R}^3$，令集合 $C_{x,A} = \{at + x(1-t) | t \in [0,1], a \in A\}$ 为从 x 到 A的所有线段的并集，而 $C_{x,A,\infty} = \{at + x(1-t) | t \in [0,\infty)\ a \in A\}$ 为从 x出发且与 A相交的所有射线的并集。

下面给出以下引理。

引理 4.1。 设 $w\colon \mathbb{S}^2 \to (0,\infty)$ 连续，且对所有$m \in \mathbb{S}^2$， $W(m) = mw(m)$。若 B是 $\mathbb{S}^2$的博雷尔集，则$C_{\mathcal{O},W[B]}$以及$C_{\mathcal{O},W[B],\infty}$都是 $\mathbb{R}^3$.的博雷尔集

证明。 回想一下，所有博雷尔集都可以通过对开集进行可数并、可数交和相对补集运算得到。设 $\{E_i\}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的一个开集可数集，通过上述运算可得到 B. 。那么，给定 $\mathbb{R}^3$的开集可数集{Int($C_{\mathcal{O},W[E_i]}$)}，按照我们用来从 $\{E_i\}$得到 B的同一系列运算，可得到 Int($C_{\mathcal{O},W[B]}$)。因此，$C_{\mathcal{O},W[B]}$ 是博雷尔集。因此，假设对所有 $m \in \mathbb{S}^2$ 及 $i \in (0,\infty)$，$W_i \equiv (im)w(m)$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\mathcal{O},W_n[B]} = C_{\mathcal{O},W[B],\infty}$ 是博雷尔集。

□

引理 4.2. 若 B 是 $\mathbb{S}^2$的博雷尔集， $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$ 且 $d \in (0,\infty)$，则$C_{x,\Psi_{x,d}[B]}$ 和 $C_{x,\Psi_{x,d}[B],\infty}$ 是 $\mathbb{R}^3$.的博雷尔集

证明. 令 $\mathbb{S}_x^2 = \{m+x | m \in \mathbb{S}^2\}$ 为所有起点位于 x的单位向量所构成的集合，即以 x. 为中心的单位球面。由于 x 是该椭球的另一个焦点，因此存在连续函数 $w\colon \mathbb{S}^2 \to (0,\infty)$，使得 $E_d(x) = \{mw(m)+x | m \in \mathbb{S}^2\}$。令 $W_x(m) = mw(m) + x$，并令 $W(m) = mw(m)$。注意，由于 B 是 $\mathbb{S}^2$中的博雷尔集， Ψ_x是 $E_d(x)$中的博雷尔集。因此， $W_x^{-1}[\Psi_{x,d}[B]]$ 是 $\mathbb{S}^2$中的博雷尔集。根据引理 4.1，$C_{\mathcal{O},W[W_x^{-1}[\Psi_{x,d}[B]]]}$和 $C_{\mathcal{O},W[W_x^{-1}[\Psi_{x,d}[B]]],\infty}$是 $\mathbb{R}^3$.的博雷尔集。因此，经平移，$C_{x,\Psi_{x,d}[B]}$ 和 $C_{x,\Psi_{x,d}[B],\infty}$ 是 $\mathbb{R}^3$.的博雷尔集

□

现在我们可以证明以下命题。

命题 4.1。 设 R 是 $\mathcal{R}_1^U(T)$中的一个广义反射器。对于任意集合 $\omega \subseteq T$，可见集 $V_1^U(\omega)$ 是博雷尔集。

证明。 我们利用这样一个事实：通过可数并、可数交和相对补集运算由博雷尔集构成的集合仍为博雷尔集。回想一下，我们得到一个 $s_R \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_R)$。注意，根据 $\mathcal{R}_1^U(T)$ 中广义反射器的定义，$R = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_R} \Psi_{x_B,\, d_B}[B']$ 其中 $B' = \{m \in$

$B|m\rho_{Z_R}^{s_R} = \Psi_{x_B,\ d_B}(m)\} = B\backslash\bigcup_{K\in\mathscr{K}} K$ 其中 $\mathscr{K} = \{A \in \mathscr{B}_R | s_R(A) < s_R(B)\}$; 注意， B' 显然是博雷尔集，且 $B \subseteq B' \subseteq \underline{B_\circ}$

对于 $B \in \mathscr{B}_R$，根据引理 4.2 和 4.1，$C_{x_B,\Psi_{x_B,d_B}[B']}$ 和 $C_{\mathcal{O},\Psi_{x_B,d_B}[B']}$ 分别是博雷尔集。由于 $\mathscr{B}_R$ 是可数的，且形如 Ψ_{x_B,d_B} 的函数是连续且双射的，因此 R 是博雷尔的。因此，对所有 $B \in \mathscr{B}_R$，集合 $Q_B = C_{x_B,\Psi_{x_B,d_B}[B']} \cap ($ $R \setminus \Psi_{x_B,d_B}[B']$) 是博雷尔集，所以集合$L_B = C_{x_B,Q_B,\infty} \cap \Psi_{x_B,d_B}[B']$ 是博雷尔集。因此 $\mathrm{Proj}[L_B]$ 是博雷尔的，因为它是 Ψ_{x_B,d_B}下 L_B 的原像。由于

$$\{m \in \mathrm{Proj}[U] | \alpha_1(m) = y_R^2(m)\} = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_R} \mathrm{Proj}[L_B], \tag{20}$$

我们有 $\{m \in \mathrm{Proj}[U] | \alpha_1(m) = y_R^2(m)\}$ 是博雷尔集，因此 $V_1^U(\omega)$ 是博雷尔集。

□

对任意广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$，定义

$$G_1(\omega) = \mu_g(V_1^U(\omega)) \tag{21}$$

这将被称为广义反射器问题的能量函数。

设 F 是有限集 T 上的非负有限测度。如果由 R 确定的广义反射器映射 α_1 满足以下条件，我们就称广义反射器 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$ 为广义反射器问题的弱解

$$F(\omega) = G_1(\omega) \text{ for any Borel set } \omega \subseteq T. \tag{22}$$

值得指出的是，条件（22）与条件（6）相似。

4.2. 几何引理

需要注意的是，广义反射器映射的定义考虑到了这样一种可能：广义反射器的一部分可能会在反射射线到达目标集之前将其截住。这一事实启发了一些关键的几何引理。

引理 4.3. 设 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$，其中 $T \subset \mathbb{R}^{3-}$ 是有限集，$U \subseteq R^{3+}$ 是开集。对于所有 $B \in \mathscr{B}_R$，若 $m \in B$，则 $\alpha_1(m) = x_B$ 当且仅当 $y_R^2(m) = \varnothing$.

证明。这直接由广义反射器问题的反射器映射的定义得出。

□

注意以下定义。

定义 4.3。当我们说 r **是** $C_{x\text{中的一条光线，}B,\ \infty}$**时**，$r = \{at + x(1-t) | t \in [0, \infty)\}$ 对某个 $a \in B$**成立**；类似地，如果我们说 r **是** $C_{x\text{中的一条线段，}B}$，那么 $r = \{at + x(1-t) | t \in [0, 1]\}$ 对某个 $a \in B$.**成立**。

引理 4.4。设 A、$B \subset \mathbb{S}^2$ 为不相交集合。那么，对于任意 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$ 和a, $b \in (0,\ \infty)$，$C_{x,\ \Psi_{x,\ a}[A]} \cap \Psi_{x,\ b}[B] = \varnothing$ 以及 $C_{x,\ \Psi_{x,\ b}[B]} \cap \Psi_{x,\ a}[A] = \varnothing$ 当且仅当 $C_{x,\ \Psi_{x,\ a}[A],\ \infty} \cap \Psi_{x,\ b}[B] = \varnothing$。

证明。若 $C_{x,\Psi_{x,a}[A],\infty} \cap \Psi_{x,b}[B] \neq \varnothing$，则存在一条光线 r，位于 $C_{x,\Psi_{x,a}[A],\infty}$ 中，使得 r 与 $\Psi_{x,b}[B]$ 相交。因此，要么存在一条线段，位于 $C_{x,\Psi_{x,a}[A]}$ 中，与 $\Psi_{x,b}[B]$ 相交，从而 $C_{x,\Psi_{x,a}[A]} \cap \Psi_{x,b}[B] \neq \varnothing$；要么存在一条线段，位于 $C_{x,\Psi_{x,b}[B]}$ 中，与 $\Psi_{x,a}[A]$ 相交，从而 $C_{x,\Psi_{x,b}[B]} \cap \Psi_{x,a}[A] \neq \varnothing$。

反之，若 $C_{x,\Psi_{x,a}[A]} \cap \Psi_{x,b}[B] \neq \varnothing$，则存在一条线段，位于 $C_{x,\Psi_{x,a}[A]}$ 中，与 $\Psi_{x,b}[B]$ 相交；该线段与 $C_{x,\Psi_{x,a}[A],\infty}$ 中的一条光线重合；因此 $C_{x,\Psi_{x,a}[A],\infty} \cap \Psi_{x,b}[B] \neq \varnothing$。若 $C_{x,\Psi_{x,b}[B]} \cap \Psi_{x,a}[A] \neq \varnothing$，则存在一条线段，位于 $C_{x,\Psi_{x,b}[B]}$ 中，与 $\Psi_{x,a}[A]$ 相交；该线段与 $C_{x,\Psi_{x,a}[A],\infty}$ 中的一条光线重合；因此 $C_{x,\Psi_{x,a}[A],\infty} \cap \Psi_{x,b}[B] \neq \varnothing$。

□

这两个引理给出了以下结果。

引理 4.5。假设 U 是 $\mathbb{R}^{3+}$ 中的一个开集，且 T 是 $\mathbb{R}^{3-}$ 中的一个有限目标集。令 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$ 为一个广义反射器，并令 A、$B \in \mathscr{B}_R$ 满足 $A \neq B$ 和 $x = x_A = x_B$。则以下条件等价：

1. 对所有 $m \in A$ 和 $m' \in B$，$\alpha_1(m) = \alpha_1(m') = x$；*2.* $C_{x,\ \Psi_{x,\ d_A}[A]} \cap \Psi_{x,\ d_B}[B] = \varnothing$ 和 $C_{x,\ \Psi_{x,\ d_B}[B]} \cap \Psi_{x,\ d_A}[A] = \varnothing$；*3.* $C_{x,\ \Psi_{x,\ d_A}[A],\ \infty} \cap \Psi_{x,\ d_B}[B] = \varnothing$。

证明。 (2) 和 (3) 根据引理 4.4 等价。根据引理 4.3，对于所有 $m \in A\alpha_1(m) = x$ 当且仅当 $y_R^2(m) = \varnothing$. 根据定义， $y_R^2(m) = \varnothing$ 当且仅当 $\Psi_{x,\ d_A}(m)$ 与 x 之间的线段不与 $R \setminus \{\Psi_{x,d_A}(m)\}$相交。同样地，根据引理 4.3，对于所有 $m' \in B$， $\alpha_1(m') = x$ 当且仅当 $y_R^2(m') = \varnothing$.根据定义， $y_R^2(m') = \varnothing$ 当且仅当 $\Psi_{x,\ d_B}(m')$ 与 x之间的线段不与 $R\setminus\{\Psi_{x,d_B}(m')\}$相交。因此，命题 (1) 和 (2) 等价。

□

4.3. 在任意厚度的开圆锥柱中构造的广义反射器

令 $\mathbb{S}_+^2 = \{m \in \mathbb{S}^2 | \langle m,(0,\ 0,\ 1)\rangle > 0\}$ 为朝向正 $z-$ 轴的 $\mathbb{S}^2$ 开半球。同理， $\mathbb{S}_-^2 = \{m \in \mathbb{S}^2 | \langle m,(0,\ 0,\ 1)\rangle < 0\}$ 为朝向负 $z-$ 轴的 $\mathbb{S}^2$ 开半球。给定一个开 $U \subseteq \mathbb{S}_+^2$，以及 δ， $z' > 0$，我们定义厚度为 δ 的开圆锥柱如下: $\mathscr{C}_U^\delta(z') = C_{\mathcal{O},\ U,\ \infty} \cap \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 | z' + \delta > z > z'\}$。

本文中，给定一个有限目标集 $T \subset \mathbb{R}^{3-}$，我们旨在构造一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}^{\mathscr{C}_U^\delta(z')1}(T)$，使其成为广义反射器问题的弱解。这个条件非常严格，以下策略也可能适用于 $\mathbb{R}^{3+}$. 中其他类型的开子集

我们首先考虑目标集为单点的情形。下面给出相应的引理。

引理 4.6. 设 U 是 $\mathbb{S}_+^2$ 中的一个开集，且 z'、$\delta > 0$。设 $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 U 中一个由开子集组成的可数集， $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是由互不相同的正数组成的可数集，并且 $x \in \mathbb{R}^{3-}$。假设每个 $\Psi_{x,d_i}[S_i] \subset \mathscr{C}_U^\delta(z')$，并记 $\Psi_i = \Psi_{x,d_i}[S_i]$. 。那么我们有

$$\mathrm{Proj}\left[\mathscr{C}_U^\delta(z') \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (C_{\mathcal{O},\overline{\Psi_i},\infty} \cup C_{x,\overline{\Psi_i},\infty})\right] = \mathrm{Proj}\left[\mathscr{C}_U^\delta(z') \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{\mathcal{O},\overline{\Psi_i},\infty}\right]. \quad (23)$$

证明。 反设

$$\mathrm{Proj}\left[\mathscr{C}_U^\delta(z') \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (C_{\mathcal{O},\overline{\Psi_i},\infty} \cup C_{x,\overline{\Psi_i},\infty})\right] \neq \mathrm{Proj}\left[\mathscr{C}_U^\delta(z') \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{\mathcal{O},\overline{\Psi_i},\infty}\right]. \quad (24)$$

那么存在一条光线 $r \text{ in } C_{\mathcal{O},U\setminus\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i,\infty} = C_{\mathcal{O},U,\infty} \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{\mathcal{O},S_i,\infty}$ 使得$r \cap \mathscr{C}_U^{\delta}(z') \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{x_i,S_i,\infty}$. 等价地说，必存在一条方向为 $m \in U \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$、起自 $\mathcal{O}$ 的光线，我们将其记为r，使得$r \cap (\mathscr{C}_U^{\delta}(z') \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty} \cup C_{x,\Psi_i,\infty})) = \varnothing$.

考虑平面 $P(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = \alpha\}$。令 $m \in U \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$。假设存在一个集合 $P(z') \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{x,\Psi_i,\infty}$，使得

$$\left[\left(P(z') \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{x,\overline{\Psi_i},\infty}\right) \setminus \left(P(z') \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{\mathcal{O},\overline{\Psi_i},\infty}\right)\right] \cap C_{\mathcal{O},U,\infty} \neq \varnothing. \tag{25}$$

否则，不存在一条方向为 $m \in U \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$、起自 $\mathcal{O}$ 的光线 r，使得 $r \cap (\mathscr{C}_U^{\delta}(z') \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty} \cup C_{x,\Psi_i,\infty})) = \varnothing$；这就产生了矛盾。因此，我们假设这样的光线存在 r 存在。于是，m 必定朝向某个方向，使得存在一个 $d_{\min} > 0$，其中

$$\Psi_{x,d_{\min}}(m) \in \left[\left(P(z') \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{x,\overline{\Psi_i},\infty}\right) \setminus \left(P(z') \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{\mathcal{O},\overline{\Psi_i},\infty}\right)\right] \cap C_{\mathcal{O},U,\infty}. \tag{26}$$

由于 $\mathscr{C}_U^{\delta}(z')$ 有界，因此还必定存在一个 $d_{\max} > 0$，使得

$$\Psi_{x,d_{\max}}(m) \in P(z' + \delta) \cap C_{\mathcal{O},U,\infty}. \tag{27}$$

注意，根据我们的假设，对于所有 $d \in (d_{\min}, d_{\max})$，都存在一个 $\alpha \in \mathbb{N}$，使得 $\Psi_{x,d}(m)$ 与 x 之间的线段是 C_{x,Ψ_α} 中某条线段的子集。然而，由于所有 Ψ_i 都是闭集，因此对于所有$d \in [d_{\min}, d_{\max}]$，都存在一个 α，使得 $\Psi_{x,d}(m)$ 与 x 之间的线段是 C_{x,Ψ_α} 中某条线段的子集。

情形 1。 $d_{\max} > d_i$ 对于所有 $i \in \mathbb{N}$。

回想一下，根据我们的假设，$\Psi_{x,d}(m) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{x,\Psi_i,\infty}$ 对于所有 $d \in [d_{\min}, d_{\max}]$ 均成立。然而，由于 $\psi_{x,d_{max}}(m) > \psi_{x,d_i}(m)$ 对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立，$\Psi_{x,d_{max}}(m)$ 不可能位于任何满足 $d' \in \{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的椭球 $E_{d'}(x)$ 的内部，因此 $\Psi_{x,d}(m) \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{x,\Psi_i,\infty}$。矛盾。

情况 2. 存在某个 $\alpha \in \mathbb{N}$ 使得 $d_{\max} = d_\alpha$。

如果存在某个 α 使得 $d_{\max} = d_\alpha$，那么，由于 $t\Psi_{x,d_{\max}}(m) + (1 -$

t)$x \notin \mathscr{C}_U^{\delta}(z')$ 对所有 $t > 1$， $\Psi_{x,\ d_{\max}}(m)$ 位于椭球 $E_{d_\alpha}(x)$ 上。因此$\Psi_{x,\ d_{\max}}(m)$ $\in \Psi_\alpha \cap P(z' + \delta)$，从而 $m \in S_\alpha$。矛盾。 —

情形 3。存在某个 $\alpha \in \mathbb{N}$，使得 $d_\alpha > d_{\max}$。

假设 $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的排列满足 $d_{i+1} \geq d_i$。若存在某个 α，使得 $d_\alpha > d_{\max}$，则存在一条从 x 出发并与点 $\Psi_{x,\ d_{\max}}(m)$ 相交的光线，该光线还与点 $(x_\beta,\ y_\beta,$ $z_\beta)$ 相交，$\in \Psi_\beta$ 其中 $d_\beta \geq d_{max}$。 $d_\beta = d_{max}$ 的情形已讨论过。当 $d_\beta > d_{max}$ 时：由于 $x \in \mathbb{R}^{3-}$ 且 $\Psi_{x,\ d_{\max}}(m) \in P(z' + \delta)$，这意味着 $z_\beta > z' + \delta$。矛盾。

□

引理 4.7。回忆一下， σ 是 $\mathbb{S}^2$. 上的标准测度。设 U 是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$ 中的博雷尔集，满足 $\mathrm{Int}(U) \neq \varnothing$. 。令 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$. 。考虑集合$K(d) = \mathrm{Proj}[E_d(x) \cap U]$，以及相应的函数 $D(d) = \sigma(K(d))$，其中$d \in (0\infty)$。那么 $D(d)$ 不可能恒为零。

此外，如果 U 是开集，那么对于所有 $d \in (0, \infty)$， $K(d)$ 在 $\mathbb{S}^2$ 中是开集。

证明。显然，存在一个 $d' \in (0, \infty)$，使得 $K(d') \cap \mathrm{Int}(U) \neq \varnothing$。于是，$E_{d'}(x)$ $\cap \mathrm{Int}(U)$ 在 $E_{d'}(x)$ 中是开集，因此 $\mathrm{Proj}[E_{d'}(x) \cap \mathrm{Int}(U)]$ 在 $\mathbb{S}^2$. 中是开集。因此， $D(d') \geq \sigma(\mathrm{Proj}[K(d') \cap \mathrm{Int}(U)]) > 0$.

□

定理 4.1。设 U 是 $\mathbb{S}^2_+$, $\delta, z' > 0$ 中的一个开集，并且 $T = \{x\} \in \mathbb{R}^{3-}$。假设给定一个非负的 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$，其中 $g \equiv 0$ 在 U之外。那么存在一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}^{\mathscr{C}_U^{\delta}(z')1}(T)$，使得 $G_1(\{x\}) = \mu_g(U)$。

证明。为方便起见，将 $\mathscr{C}_* = \mathscr{C}_U^{\delta}(z')$. 记为标签。回顾一下， σ 是 $\mathbb{S}^2$. 上的标准测度

考虑集合 $K_1(d) = \mathrm{Proj}[E_d(x) \cap \mathscr{C}_*]$ 及其对应的函数$D_1(d) = \sigma(K_1(d))$, 其中 $d \in (0, \infty)$。注意，由于 $\mathscr{C}_*$ 有界，因此当 $d \to \infty$ 时， $D_1(d) \to 0$; 当 $d \to 0$. 时， $D_1(d) \to 0$。根据构造，显然 D_1 有界于 0 和 $\sigma(U)$ 之间。因此， $D_1^{max} = \sup\{D_1(d) | d \in (0, \infty)\}$ 存在且有限，并且根据引理 4.7, $D_1^{max} > 0$。

令 $\epsilon_1 \in [0, D_1^{max})$。我们定义 d_{max_1} 为一个满足 $D_1(d_{max_1}) = D_1^{max} - \epsilon_1$ 的值，其中若 $D_1^{max} \in \{D_1(d) | d \in (0, \infty)\}$，则 $\epsilon_1 = 0$。现在，我们剔除 U 中已处理的部分，以及 $\mathscr{C}_*$ 中不再能使用的部分：令 $E_1 = \text{Proj}[E_{d_{max_1}}(x) \cap \mathscr{C}_*]$, $\Psi_1 = \Psi_{x,d_{max_1}}[E_1]$,

$$Q_2 = \mathscr{C}_* \setminus (C_{x,\Psi_1,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_1,\infty}), \tag{28}$$

以及 $U_2 = U \setminus E_1$。由引理 4.6，注意到 $U_2 = \text{Proj}[Q_2]$。定义 $K_2(d) = \text{Proj}[\Psi_{x,d}[U_2] \cap Q_2]$ 以及 $D_2(d) = \sigma(K_2(d))$。

注意，由于 Q_2 有界，当 $d \to \infty$时，$D_2(d) \to 0$；当 $d \to 0.$ 时，$D_2(d) \to 0$。根据构造，显然 D_2 介于 0 和 $\sigma(U_2)$之间。因此，$D_2^{max} = \sup\{D_2(d) | d \in (0, \infty)\}$ 存在且有限，并且由引理 4.7，$D_2^{max} > 0$。令 $\epsilon_2 \in [0, D_2^{max})$。我们定义 d_{max_2} 为满足$D_1(d_{max_1}) \geq D_2(d_{max_2}) = D_2^{max} - \epsilon_2$ 的一个值。

已知 $U_1 = U$ 和 $Q_1 = \mathscr{C}_*$，现在我们可以递归地为 $k \geq 2$定义一列函数和集合：

$$E_{k-1} = \overline{\text{Proj}[\Psi_{x,d_{max_{k-1}}}[U_{k-1}] \cap Q_{k-1}]}, \tag{29}$$

$$\Psi_{k-1} = \Psi_{x,d_{max_{k-1}}}[E_{k-1}], \tag{30}$$

$$Q_k = Q_{k-1} \setminus (C_{x,\Psi_{k-1},\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_{k-1},\infty}), \tag{31}$$

$$U_k = U \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right) = \text{Proj}[Q_k], \tag{32}$$

$$K_k(d) = \text{Proj}[E_d(x) \cap Q_k], \tag{33}$$

$$D_k(d) = \sigma(K_k(d)). \tag{34}$$

此外，注意到由于 Q_k 有界，当 $d \to \infty$ 时，$D_k(d) \to 0$；当 $d \to 0.$ 时，$D_k(d) \to 0$。根据构造，显然 D_k 被 0 和 $\sigma(U_k)$所界。因此，$D_k^{max} = \sup\{D_k(d) | d \in (0, \infty)\}$ 存在且有限，并且根据引理 4.7，$D_k^{max} > 0$。令 $\epsilon_k \in [0, D_k^{max})$。我们定义 d_{max_k} 为一个满足$D_{k-1}(d_{max_{k-1}}) \geq D_k(d_{max_k}) = D_k^{max} - \epsilon_k$的值。

注意，对于所有 $d > 0$，集合 $K_k(d)$ 都是开集。因此，我们可以构造

一个序列

$$\left\{\sigma\left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right)\right\}_{k=1}^{\infty}. \tag{35}$$

命题 4.1. 存在 $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\left\{\sigma\left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 $\sigma(U)$。

证明。根据构造，该序列单调递增，且有界于 0 和 $\sigma(U)$ 之间；因此它收敛。反设对于每个可能的 $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，$\left\{\sigma\left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 都收敛到某个 $L \in (0, \sigma(U))$。那么 $\sigma\left(U \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sigma(U) - L > 0.$

考虑函数

$$D^*(d) = \sigma\left(\mathrm{Proj}\left[E_d(x) \cap \lim_{j\to\infty} Q_j\right]\right). \tag{36}$$

注意到 $\lim_{j\to\infty} Q_j = \mathscr{C}_* \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(C_{x,\Psi_i,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty})$。注意 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(C_{x,\Psi_i,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(C_{x,\Psi_i,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty})$。~~注意，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Int}(C_{x,\Psi_i,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty}) = C_{x,\Psi_i,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty}$；因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{Int}(C_{x,\Psi_i,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty}) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(C_{x,\Psi_i,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty})$。因此 $\lim_{j\to\infty} Q_j = \mathscr{C}_* \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(C_{x,\Psi_i,\infty} \cup C_{\mathcal{O},\Psi_i,\infty})$ 是开集，故 $\mathrm{Int}(\lim_{j\to\infty} Q_j) \neq \varnothing$~~。

因此，由引理 4.7，存在一个 d'，使得 $D^*(d') > 0$。根据收敛的定义，存在一个 M，使得对于所有 $m \geq M$，$D^*(d') > \sigma\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} E_j\right)$。。注意，$\sigma\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=m}^{\infty} \sigma(E_j) = \sum_{j=m}^{\infty} D_i(d_{max_i}) \geq D_m(d_{max_m})$。对于所有 $k \in \mathbb{N}$，D_k^{max} 是 $\{D_k(d) | d \in (0,\infty)\}$ 的一个极限点，因此当 $\epsilon_k \to 0$ 时，$D_k(d_{max_k}) \to D_k^{max}$。注意，$D_m(d') \geq D^*(d')$，因为 $\lim_{j\to\infty} Q_j \subseteq Q_m$ 且 $U \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subseteq U_m$.。因此存在一个序列 $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $D_m(d_{max_m}) \geq D^*(d')$。对于此序列，$\sigma\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} E_j\right) \geq D^*(d')$；矛盾。因此，存在 $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\left\{\sigma\left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 $\sigma(U)$。

□

Let

$$Z = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Psi_j. \tag{37}$$

对于某个 $s \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_Z)$，考虑广义反射器 $R = W(\rho_Z^s) \in \mathcal{R}_1^{\mathscr{C}*}(T)$。根据构造，

$$C_{x,\Psi_{x,d_{max_j}}[\mathrm{Int}(E_j)],\infty} \cap \Psi_{x,d_{max_{j'}}}[\mathrm{Int}(E_{j'})] = \varnothing \tag{38}$$

当 $j \neq j'$。注意，若 j'，$j \in \mathbb{N}$ 其中 $j' > j$，则 $d_{max_j} \neq d_{max_{j'}}$，因为否则$E_{j'} \subseteq E_j$；因此 $\mathscr{B}_R = \{\mathrm{Int}(E_j) \subset \mathbb{S}^2 | j \in \mathbb{N}\}$。于是，根据引理 4.5，对于所有满足 $B \in \mathscr{B}_R$ 的 $m \in B$，都有 $\alpha_1(m) = x$。然后，对于任意$s \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_Z)$，广义反射器 $R = W(\rho_Z^s) \in \mathcal{R}_1^{\mathscr{C}*}(T)$ 是广义反射器问题的一个弱解，且满足 $G_1(\{x\}) = \mu_g(U)$。

□

现在我们可以证明一个目标集由有限多个点组成的结果。首先，我们证明以下引理。

引理 4.8。假设 U 是 $\mathbb{R}^{3+}$ 中的一个开集，且 T 是 $\mathbb{R}^{3-}$ 中的一个有限目标集。令 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$ 为一个广义反射器，并令 $A, B \in \mathscr{B}_R$ 满足$A \neq B$。那么以下条件等价：

1. 对所有 $m \in A$ 和 $m' \in B$, $\alpha_1(m) = x_A$ 以及 $\alpha_1(m') = x_B$,
2. $C_{x_A,\ \Psi_{x_A,\ d_A}[A]} \cap \Psi_{x_B,\ d_B}[B] = \varnothing$ 和 $C_{x_B,\ \Psi_{x_B,\ d_B}[B]} \cap \Psi_{x_A,\ d_A}[A] = \varnothing$。

证明。对于 $x_A = x_B$ 的情形，由引理 4.5 得证。现在考虑 $x_B \neq x_B$. 的情形。根据引理 4.3，对于所有 $m \in A$ $\alpha_1(m) = x_A$ 当且仅当 $y_R^2(m) = \varnothing$. 根据定义， $y_R^2(m) = \varnothing$ 当且仅当连接 $\Psi_{x_A,d_A}(m)$ 与 x_A 的线段不与 $R \setminus \{\Psi_{x_A,d_A}(m)\}$ 相交。同理，根据引理 4.3，对于所有 $m' \in B$ $\alpha_1(m')$ $= x_B$ 当且仅当 $y_R^2(m') = \varnothing$. 根据定义， $y_R^2(m') = \varnothing$ 当且仅当连接 $\Psi_{x_B,\ d_B}(m')$ 与x 的线段不与 $R \setminus \{\Psi_{x_B,d_B}(m')\}$ 相交。因此，陈述 (1) 和 (2) 等价。

□

定理 4.2. 设 U 是 $\mathbb{S}^2_+$、 δ、 $z' > 0$ 中的一个开集，并且 $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathbb{R}^{3-}$，其中 $k \geq 2$。假设给定一个非负 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$，其中 $g \equiv 0$

在 U 外部。设 f_1、f_2、.....、f_k 是非负实数，使得

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = \mu_g(U). \tag{39}$$

假设在 U 中存在 $n \geq k$ 互不相交的开集 B_i，其中 $\bigcup_{i\in[n]} B_i = U$。再假设存在一族 k 子集 $[n]$、$\{A_i\}_{i\in[k]}$，使得：$A_t \cap A_{t'} = \varnothing$ 其中 $t \neq t'$、$\bigcup_{i\in[k]} A_i = [n]$，且 $\mu_g(\bigcup_{i\in A_t} B_i) = f_t$. 假设对于所有 $i \in [n]$，存在 a_i、$b_i > 0$，其中 $z' \leq a_i < a_i + b_i \leq z' + \delta$，使得$\mathscr{C}^{b_i}_{B_i}(a_i) \cap C_{x_j, \mathscr{C}^{b_j}_{B_j}(a_j)} = \varnothing$ 对所有 $j \in [n] \setminus \{i\}$ 均成立。

那么存在一个 $R \in \mathcal{R}^{\mathscr{C}^{\delta}_{U}(z')\,1}(T)$ 中的广义反射器，使得 $G_1(\{x_i\}) = f_i$ 对所有 $i \in [k]$ 均成立。

证明。对于每个 $i \in [n]$，$\mathscr{C}^{b_i}_{B_i}(a_i)$ 都是开集，并且广义反射器 $R_i \in_{\mathcal{R}} {}^{\mathscr{C}^{b_i}_{B_i}(a_i)}{}_1(\{x_i\})$ 的构造方式与定理 4.1 完全相同。根据我们的假设，由于 $R_i \subseteq \mathscr{C}^{b_i}_{B_i}(a_i)$，因此

$$(R_i \cap \mathscr{C}^{b_i}_{B_i}(a_i)) \cap C_{x_j, R_j \cap \mathscr{C}^{b_j}_{B_j}(a_j)} = \varnothing \tag{40}$$

对所有 $j \in [n] \setminus \{i\}$ 均成立。

令 $F = \bigcup_{i\in[k]} R_i$，并考虑广义反射器 $R = W(\rho_F) \in_{\mathcal{R}} {}^{\mathscr{C}^{\delta}_{U}(z')}{}_1(T)$。根据构造，对于某个 A，存在 $B \in \mathscr{B}_R$ 使得 $A \neq B$，我们有 $C_{x_A, \Psi_{x_A}, {}_{d_A}[A]} \cap \Psi_{x_B, {}_{d_B}[B]} = \varnothing$，且 $C_{x_B, \Psi_{x_B}, {}_{d_B}[B]} \cap \Psi_{x_A, {}_{d_A}[A]} = \varnothing$。因此，根据引理 4.8，对于任意 $B \in \mathscr{B}_R$，对所有 $m \in B$，均有 $\alpha_1(m) = x_B$。于是，对于任意 $s \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_F)$，广义反射器 $R = W(\rho^s_F) \in \mathcal{R}^{\mathscr{C}^{\delta}_{U}(z')\,1}(T)$ 是广义反射器问题的一个弱解，并且满足对所有 $i \in [k]$，$G_1(\{x_i\}) = f_i$。

□

现在，我们将使用定理 4.2 来构造一种特定类型的广义反射器。请注意以下定义。

定义 4.4. 令 $k \geq 2$, $d > 0$, $\xi \in (-1,0)$，以及 $t \in \mathbb{R}$。回想一下，给定一个

点 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$，存在 $r \in [0, \infty)$，$\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$，使得

$$x = r\cos\theta\sin\phi \tag{41}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{42}$$

$$z = r\cos\phi. \tag{43}$$

定义点集 $T_{k,\ d}^{\xi}(t)$ 为

$$\left\{\left(d\cos\left(\frac{2\pi j}{k}+t\right)\sin\left(\arccos(\xi)\right), d\sin\left(\frac{2\pi j}{k}+t\right)\sin\left(\arccos(\xi)\right), d\xi\right) | j \in I\right\} \tag{44}$$

其中 $I = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

若还给定一个 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$，则可定义集合$P_{k,\ i}(t) \subset \mathbb{S}^2$，如下：

$$\left\{\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi(2i-1)}{k}+t\right)\sin\phi, \sin\left(\theta+\frac{\pi(2i-1)}{k}+t\right)\sin\phi, \cos\phi\right) \middle| \phi \in [0,\pi], \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{k}\right]\right\}. \tag{45}$$

若 $k = 1$，定义点集 $T_{1,\ d}^{\xi}(t) = \{(0,\ 0,\ -d)\}$ 以及 $P_{1,\ 0}(t) = \mathbb{S}^2$。

值得注意的是，$T_{k,\ d}^{\xi}(t)$ 定义了以 z-轴为中心的正 k 边形的各顶点，而$P_{k,\ i}(t)$ 定义了一个球面楔形。

定理 4.3。 设 $\delta, z' > 0$。考虑开圆盘 $U = \{m \in \mathbb{S}_+^2 | \langle (0,\ 0,\ 1)\ m\rangle > c\}$，其中 $0 < c < 1$。设 $d_1, \ldots, d_n$ 为一组不一定互异的正数。设 $k_1, \ldots, k_n$ 为一组不一定互异的正整数。设 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 为一组不一定互异的数，使得 $\xi_i \in (-1,\ 0)$。设 $t_1', \ldots, t_n'$ 为 $\mathbb{R}$ 中一组不一定互异的元素。记 $T_i = T_{k_i,\ d_i}^{\xi_i}(t_i')$，并设 $T = \bigcup_{i=1}^n T_i$.

假设给定一个非负的 $g \in L^1(\mathbb{S}_+^2)$，它关于 z-轴旋转对称，且 $g \equiv 0$ 在 U 之外。设 $f_1, \ldots, f_n$ 为一组正数，使得

$$\mu_g(U) = \sum_{i=1}^{n} f_i. \tag{46}$$

那么存在一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}^{\mathscr{C}^{\delta}_{U}(z')\,1}(T)$，使得

$$G_1(\{x\}) = \sum_{\{j\in[n]|x\in T_j\}} \frac{f_j}{k_j} \tag{47}$$

对于所有 $x \in T$.

证明。由介值定理，存在一组数$\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in [c, 1)$，其中 $\zeta_n = c$ 且 $\mu_g\left(\{m \in \mathbb{S}^2_+ | \langle (0,0,1)\ m\rangle > \zeta_i\}\right) = \sum_{j=1}^{i} f_j$.定义

$$B_i = \{m \in \mathbb{S}^2_+ | \langle (0,0,1), m\rangle > \zeta_i\} \setminus \{m \in \mathbb{S}^2_+ | \langle (0,0,1), m\rangle \geq \zeta_{i-1}\} \tag{48}$$

对于所有 $i \in \{2, \ldots, n\}$ 且 $B_1 = \{m \in \mathbb{S}^2_+ | \langle (0,0,1)\ m\rangle > \zeta_1\}$. 因此 $\mu_g(B_i) = f_i$.

考虑集合 T_i，令

$$T_i(j) = \left(d_i \cos\left(\frac{2\pi j}{k_i} + t'_i\right) \sin\left(\arccos(\xi_i)\right), d_i \sin\left(\frac{2\pi j}{k_i} + t'_i\right) \sin\left(\arccos(\xi_i)\right), d_i\xi_i\right) \tag{49}$$

其中 $j \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$ 若 $k \geq 2$ 且 $T_i(0) = (0, 0, -d_i)$。

令 $P_i(j) = P_{k_i,j}(t'_i)$，其中 $j \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$，则根据构造可得 $\mu_g(B_i \cap P_i(j)) = \frac{f_i}{k_i}$。令 $U_i(j) = \mathscr{C}^{\delta}_{B_i \cap \mathrm{Int}(P_i(j))}\left(z' + (i-1)\frac{\delta}{n}\right)$，其中 $j \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$。由于 $T_i(j) \in \mathbb{R}^{3-}$，任意一条连接 $U_i(j)$ 中某点与点$T_i(j)$ 的线段，都不会与任何集合 $U_{i'}(j')$ 相交，其中 $i' > i$ 且 $j' \in \{0, \ldots, k_{i'} - 1\}$。因此 $C_{T_i(j)\,U_i(j)} \cap U_{i'}(j') = \varnothing$，其中 $i' > i$ 且 $j' \in \{0, \ldots, k_{i'} - 1\}$。此外，由于 $C_{\mathcal{O},\ P_i(j)\,\infty}$ 是一个凸集，且 $U_i(j)$，$\{T_i(j)\}$ 均为 $C_{\mathcal{O},P_i(j)\,\infty}$ 的子集，因此有 $C_{T_i(j)\,U_i(j)} \subset C_{\mathcal{O},P_i(j)\,\infty\cdot}$。因此，$C_{T_i(j)\,U_i(j)} \cap U_i(j') = \varnothing$，其中 $j' \neq j$。最后，若存在一条连接 $U_i(j)$ 中某点与 $T_i(j)$ 的线段，该线段与一个 $U_{i'}(j')$ 相交，其中 $i > i'$ 且 $j' \in \{0, \ldots, k_{i'} - 1\}$，则它必与 $C_{\mathcal{O},\{m\in\mathbb{S}^2_+|\langle (0,0,1)\ m\rangle > \zeta_{i-1}\},\infty}$ 相交。然而，$C_{T_i(j)\,U_i(j)}$ 与$C_{\mathcal{O},\{m\in\mathbb{S}^2_+|\langle (0,0,1)\ m\rangle > \zeta_{i-1}\},\infty}$ 不相交，因此 $C_{T_i(j)\,U_i(j)} \cap U_{i'}(j') = \varnothing$，其中 $i > i'$ 且$j' \in \{0, \ldots, k_{i'} - 1\}$。因此，当 $(i, j) \neq (i', j')$ 时，$C_{T_i(j)\,U_i(j)} \cap U_{i'}(j') = \varnothing$。

因此，根据定理 4.2，存在一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}^{C^{\delta}_{U}(z')\,1}(T)$，使得

$$G_1(\{x\}) = \sum_{\{j\in[n]|x\in T_j\}} \frac{f_j}{k_j} \tag{50}$$

对所有 $x \in T$.

□

5. 插值反射器

上一节介绍的广义反射器在现实世界中可能无法构造，或者即便可以，构造起来也极其困难。因此，我们引入以下概念。

定义 5.1. 假设给定一个连通开集 $D \subseteq \mathbb{S}^2$ 作为孔径，以及一个不一定连续、几乎处处可微的函数 $\rho : D \to (0, \infty)$。那么，**插值反射器** 是集合 $R = \partial(C_{\mathcal{O},S}) \setminus \partial(C_{\mathcal{O},S,\infty}) \subset \mathbb{R}^3$，其中 $S = \{m\rho(m) | m \in D\}$。

值得注意的是，给定一个作为连通开集$D \subseteq \mathbb{S}^2$的孔径，一个集合是反射器，当且仅当它既是广义反射器，也是插值反射器。

我们将在下文构造的插值反射器是一张拓扑曲面（参见 [20]中的第4.36章），因此只由一个连通分支构成，而非可数多个。从实际角度而言，与设计广义反射器相比，设计插值反射器会带来新的挑战。因此，我们将着眼于寻找插值反射器存在的充要条件。

我们将把近场反射器问题的以下表述视为 [12] 中方程 (4) 的弱形式，并研究其解，即弱解。以下表述仅适用于目标集为有限集的情形。

5.1. 使用插值反射体的弱解

考虑一个连通开集 $U \subseteq \mathbb{R}^{3+}$、相应的孔径 Proj$[U]$ 以及一个有限目标集 $T \subseteq \mathbb{R}^{3-}$。另外，考虑由式 (14) 定义的集合 $\mathcal{R}_1^U(T)$。接下来，我们描述一组插值反射器

$$\mathcal{R}_2^U(T) = \left\{ \partial(C_{\mathcal{O},S}) \setminus \partial(C_{\mathcal{O},S,\infty}) | \, S \in \mathcal{R}_1^U(T) \right\}. \tag{51}$$

值得注意的是， $\mathcal{R}_2^U(T)$ 中的插值反射器都是拓扑曲面。

假设给定一个插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$。定义

$$\mathscr{B}_R = \left\{ \text{Int}(\text{Proj}[E_d(x) \cap R]) \subseteq \mathbb{S}^2 \,|\, d \in (0,\infty)\ x \in T, \sigma(\text{Proj}[E_d(x) \cap R]) \neq 0 \right\}. \tag{52}$$

椭球的几何性质以及 $\mathscr{B}_R$ 的定义表明，存在一个 $s \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_R)$、唯一的 $u \in \mathscr{U}_T(\mathscr{B})$ 和唯一的 $v \in \mathscr{V}(\mathscr{B})$，使得$\partial(C_{\mathcal{O},W(\rho_Z^s)}) \setminus \partial(C_{\mathcal{O},W(\rho_Z^s)}\ \infty) = R$其中 $Z = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_R} \Psi_{u(B),v(B)}[B]$。因此，对于每个插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$，我们都可以定义唯一的 $\mathscr{B}_R \in \mathcal{B}(U)$，使得对每个 $B \in \mathscr{B}_R$，都存在唯一的 $x_B \in T$ 和 $d_B \in (0,\infty)$，并且对于某个 $s \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_R)$，有 $R = \partial(C_{\mathcal{O},W(\rho_Z^s)}) \setminus \partial(C_{\mathcal{O},W(\rho_Z^s)}\ \infty)$ 其中 $Z = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_R} \Psi_{x_B,d_B}[B]$。

—

因此，给定一个插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$，我们得到一个相应的 $\mathscr{B}_R$；对于每个 $B \in \mathscr{B}_R$，我们定义唯一的 x_B 和 d_B。我们还得到一个 $s_R \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_R)$ 和唯一的 $Z_R = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_R} \Psi_{x_B,d_B}[B]$，使得$R = \partial(C_{\mathcal{O},S}) \setminus \partial(C_{\mathcal{O},S,\infty})$，其中 $S = W(\rho_{Z_R}^{s_R})$。

给定一个插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$，令

$$M(m) = x_B \in T \tag{53}$$

其中 $m\rho_{Z_R}^{s_R}(m) = \Psi_{x_B,d_B}(m)$。令 $y_R^2(m)$ 为$R \setminus \{m\rho_{Z_R}^{s_R}(m)\}$与连接 $m\rho_{Z_R}^{s_R}(m)$ 和 $M(m)$ 的线段的交点。

给定一个插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$，映射 $\alpha_2 \colon \text{Proj}[U] \to T \cup R$,

$$\alpha_2(m) = \begin{cases} M(m) & \text{if } y_R^2(m) = \varnothing \\ y_R^2(m) & \text{if } y_R^2(m) \neq \varnothing \end{cases} \tag{54}$$

称为插值反射体映射。从物理角度来说，方向为 m、起点为 $\mathcal{O}$ 的光线只有在 $y_R^2(m)$ 为空时，才能到达目标集。

与前文一样，我们用 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$ 表示光源 $\mathcal{O}$ 的能量密度。我们对所有博雷尔 $X \subseteq \mathbb{S}^2$ 定义

$$\mu_g(X) = \int_X g(m) d\sigma(m) \tag{55}$$

其中， σ 表示 $\mathbb{S}^2$. 上的标准测度。假设 g 是一个非负函数，且 $g \equiv 0$ 在 Proj$[U]$ 之外。物理上来说， g 是光源在 $\mathcal{O}$ 处的辐亮度分布

为了表述并求解插值反射器问题（在下文将定义的弱解框架下），我们需要定义一种测度，用以表示由 g 产生并经由插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$ 重新分配的能量。

给定一个插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$ 和一个集合 $\omega \subseteq T$，我们将 ω 的可见集定义为

$$V_2^U(\omega) = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \overline{A} \setminus \{m \in \mathrm{Proj}[U] | \alpha_2(m) = y_R^2(m)\} \tag{56}$$

其中 $\mathscr{A} = \{B \in \mathscr{B}_R | x_B \in \omega\}$。现在我们需要证明 $V_2^U(\omega)$ 是可测的。

命题 5.1。 设 R 是 $\mathcal{R}_2^U(T)$ 中的一个插值反射器。对于任意集合 $\omega \subseteq T$，可见集 $V_2^U(\omega)$ 是博雷尔集。

证明。 我们利用这样一个事实：由博雷尔集经过可数并、可数交和相对补集运算所得到的集合仍是博雷尔集。回顾一下，我们得到一个 $s_R \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_R)$。注意，根据 $\mathcal{R}_1^U(T)$ 中插值反射器的定义，$R = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_R} \Psi_{x_B,\ d_B}[B'] \cup S_R$ 其中 $B' = \{m \in B | m\rho_{Z_R}^{s_R} = \Psi_{x_B, d_B}(m)\} = B \setminus \bigcup_{K \in \mathscr{K}} K$ 其中 $\mathscr{K} = \{A \in \mathscr{B}_R | s_R(A) < s_R(B)\}$ 且 $S_R = R \setminus \bigcup_{B \in \mathscr{B}_R} \Psi_{x_B,\ d_B}[B']$。注意， B' 显然是博雷尔集，并且 $B \subseteq B' \subseteq B$。

—

对于 $B \in \mathscr{B}_R$，根据引理 4.2 和 4.1，$C_{x_B,\ \Psi_{x_B,\ d_B}[B']}$ 以及 $C_{\mathcal{O},\ \Psi_{x_B,\ d_B}[B']}$ 分别是博雷尔集。注意， R 是博雷尔集，因为它是一个开集的边界减去另一个开集的边界。由于 $\mathscr{B}_R$ 是可数的，且形如 $\Psi_{x_B,\ d_B}$ 的函数是连续且双射的，因此 $\bigcup_{B \in \mathscr{B}_R} \Psi_{x_B,\ d_B}[B']$是博雷尔集。因此， S_R 也是博雷尔集。于是，对于所有 $B \in \mathscr{B}_R$，集合 $Q_B = C_{x_B,\ \Psi_{x_B,\ d_B}[B']} \cap (R \setminus \Psi_{x_B,\ d_B}[B'])$ 是博雷尔集，因此集合 $L_B = C_{x_B,\ Q_B,\ \infty} \cap \Psi_{x_B,\ d_B}[B']$ 是博雷尔集。因此，Proj$[L_B]$ 是博雷尔集，因为它是 L_B 在

$\Psi_{x_B,\ d_B}$。由于

$$\{m \in \mathrm{Proj}[U] | \alpha_2(m) = y_R^2(m)\} = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_R} \mathrm{Proj}[L_B], \tag{57}$$

我们有 $\{m \in \mathrm{Proj}[U] | \alpha_2(m) = y_R^2(m)\}$ 是博雷尔可测的，因此 $V_2^U(\omega)$ 是博雷尔可测的。

□

对任意插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$，定义

$$G_2(\omega) = \mu_g(V_2^U(\omega)) \tag{58}$$

我们将其称为插值反射器问题的能量函数。

设 F 是有限集 T上的一个非负有限测度。若由 R 确定的插值反射器映射 α_2 满足以下条件，则称插值反射器 $R \in \mathcal{R}_2^U(T)$是插值反射器问题的弱解：

$$F(\omega) = G_2(\omega) \text{ for any Borel set } \omega \subseteq T. \tag{59}$$

5.2. 主要结果

这里我们证明插值反射器问题存在弱解的充要条件。我们从以下引理开始。

引理 5.1。假设 U 是 $\mathbb{R}^{3+}$ 中的一个开集，且 T 是 $\mathbb{R}^{3-}$ 中的一个有限目标集。假设给定一个非负的 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$，使得 $g \equiv 0$ 在 $\mathrm{Proj}[U]$ 外部，而 $g > 0$ 在 $\mathrm{Proj}[U]$ 内部。令 $R \in \mathcal{R}_1^U(T)$ 为一个广义反射器，则我们定义集合 $\mathscr{B}_R^x = \{B \in \mathscr{B}_R | x = x_B\}$（对于 $x \in T.$）。那么，对于任意 z、$y \in T$，以下条件等价：

1. 对所有 $m \in \bigcup_{A \in \mathscr{B}_R^z} A$ 和 $m' \in \bigcup_{B \in \mathscr{B}_R^y} B$，$\alpha_1(m) = z$ 和 $\alpha_1(m') = y$，
2. $C_{z、\ \Psi_{z、\ d_A}[A]} \cap \Psi_{y、\ d_B}[B] = \varnothing$ 和 $C_{y、\ \Psi_{y、\ d_B}[B]} \cap \Psi_{z、\ d_A}[A] = \varnothing$ 对所有 $A \in \mathscr{B}_R^z$和 $B \in \mathscr{B}_R^y$，其中 $A \neq B$，*3.* $C_{x_A、\ \Psi_{x_A、\ d_A}[A]} \cap \Psi_{x_B、\ d_B}[B] = \varnothing$ 和 $C_{x_B、\ \Psi_{x_B、\ d_B}[B]} \cap \Psi_{x_A、\ d_A}[A] = \varnothing$ 对所有A、$B \in \mathscr{B}_R$，其中 $A \neq B$，

4. $G_1(\{x\}) = \mu_g(\bigcup_{A\in\mathscr{B}_R^x} A)$ *and* $G_1(\{y\}) = \mu_g(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_R^y} B)$.

证明。 (1) $\Leftrightarrow$ 根据引理 4.8，显然 (3) $\Leftrightarrow$ (2)，且 (1) 显然推出 (4)。

我们只需证明 (4) 蕴含 (2)；我们证明其逆否命题。假设存在一个 $A \in \mathscr{B}_R^x$ 和一个 $B' \in \mathscr{B}_R^y$，使得不失一般性地，$C_{z,\Psi_{z,d_A}[A]} \cap \Psi_{y,d_{B'}}[B'] \neq \varnothing$. 令 $Q = C_{z,\Psi_{z,d_A}[A]} \cap \Psi_{y,d_{B'}}[B']$。注意，$C_{z,\Psi_{z,d_A}[A],\infty} \cap C_{z,\Psi_{y,d_{B'}}[B'],\infty} = C_{z,Q,\infty_o}$ 由于 $C_{z,\Psi_{z,d_A}[A],\infty} \setminus \{\mathcal{O}\}$ 和$C_{z,\Psi_{y,d_{B'}}[B'],\infty}\setminus\{\mathcal{O}\}$ 都是开集，因此 $C_{z,Q,\infty}\setminus\{\mathcal{O}\}$ 是开集；从而 $C_{z,Q,\infty}\cap E_{d_B}(y)$ 在 $E_{d_B}(y)$ 中是开集。因此 $\mathrm{Proj}[Q] \subseteq B$是开集，并且由于 $g > 0$属于 U， $\mu_g(\mathrm{Proj}[Q]) > 0$，从而 $G_1(\{y\}) \leq \mu_g(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_R^y} B) - \mu_g(\mathrm{Proj}[Q])$。

□

注意以下定义。

定义 5.2. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集，其中 $n \geq 2$ 满足 K 是紧集。补集 $U = \mathbb{R}^n \setminus K$ 是一个开集。对于充分大的 $R > 0$，集合 $V = \{x|R < |x|\}$ 包含于 U中。由于 V 是连通的，因此存在 U 的一个连通分支包含 V。这是 U 的唯一无界连通分支。

我们将 K 的**外边界**定义为 $\mathbb{R}^n \setminus K$的无界连通分支的边界。记作 $\partial_E(K)$。

以下结果给出了插值反射器问题存在弱解的一个充要条件。

定理 5.1. 设 $U \subset \mathbb{R}^{3+}$ 是一个单连通开集，满足 $U \subset \mathbb{R}^{3+}$，且 $T \subset \mathbb{R}^{3-}$ 是一个有限集。假设给定一个非负的 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$，使得 $g \equiv 0$位于$\mathrm{Proj}[U]$之外，且 $g > 0$位于$\mathrm{Proj}[U]$之内。设 F是 T 上的一个测度，使得

$$F(T) = \mu_g(\mathrm{Proj}[U]). \tag{60}$$

那么，当且仅当存在一个广义反射器 $R_1 \in \mathcal{R}_1^U(T)$，它是如（*22*）所定义的广义反射器问题的弱解（其中 R_1 是某个单连通子集的子集）时，才存在一个插值反射器 $R_2 \in \mathcal{R}_2^U(T)$，它是如（*59*）所定义的插值反射器问题的弱解，该单连通子集

的

$$\overline{U} \cap \partial_E \left(C_{\mathcal{O},R_1} \cup \bigcup_{B \in \mathscr{B}_{R_1}} C_{x_B,\Psi_{x_B,d_B}[B]} \right). \tag{61}$$

证明。显然，如果满足 (59) 中定义的插值反射器问题的弱解 $R_2 \in \mathcal{R}_2^U(T)$，那么对于任意 $s \in \mathcal{N}(\mathscr{B}_{R_2})$，$R_1 = W(\rho_F^s)$，其中 $F = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_{R_2}} \Psi_{x_B,d_B}[B]$ 是满足 (22) 中定义的广义反射器问题的弱解。注意，这意味着 $\mathscr{B}_{R_1} = \mathscr{B}_{R_2}$。由于$g$ 在 Proj$[U]$ 中为正，对于我们的反射器 R_1，由引理 5.1 可知，对于所有互不相同的$A, B \in \mathscr{B}_{R_1}$, $C_{x_A,\Psi_{x_A,d_A}[A]} \cap \Psi_{x_B,d_B}[B] = \varnothing$ 以及 $C_{x_B,\Psi_{x_B,d_B}[B]} \cap \Psi_{x_A,d_A}[A] = \varnothing$。因此，对于所有 $A \in \mathscr{B}_{R_1}$, $\Psi_{x_A,d_A}[A] \cap \operatorname{Int}\left(C_{\mathcal{O},R_1} \cup \bigcup_{B \in \mathscr{B}_{R_1}} C_{x_B,\Psi_{x_B,d_B}[B]}\right) = \varnothing$。另请注意，对于所有 $A \in \mathscr{B}_{R_1}$，$C_{\mathcal{O},\Psi_{x_A,d_A}[A],\infty} \setminus C_{\mathcal{O},\Psi_{x_A,d_A}[A]} \cap \operatorname{Int}\left(\overline{C}_{\mathcal{O},R_1} \cup \bigcup_{B \in \mathscr{B}_{R_1}} C_{x_B,\Psi_{x_B,d_B}[B]}\right) = \varnothing.$

因此，R_1 是.....的一个单连通子集的子集

$$\partial_E \left(C_{\mathcal{O},R_1} \cup \bigcup_{B \in \mathscr{B}_{R_1}} C_{x_B,\Psi_{x_B,d_B}[B]} \right). \tag{62}$$

由于插值反射器必须包含在 U 中，我们得到（61）。

反过来，若存在反射器 $R_1 \in \mathcal{R}_1^U(T)$，它是按照（22）定义的广义反射器问题的弱解，其中 $R_1 \subset Q$，且 Q是（61）的一个单连通子集，那么 $R_2 = \partial(C_{\mathcal{O},\ R_1}) \setminus \partial(C_{\mathcal{O},\ R_1,\ \infty})$ 也是 Q 的子集。

□

6. 讨论

本文针对带有空间限制的近场反射器问题，定义了两种不同的弱解。对于第一种弱解，我们证明，在某些假设下，当目标集由多个点组成时，广义反射器存在。未来研究的一个方向是尝试将定理 4.3 推广到不同的目标集、孔径和空间限制。另一个想法是尝试设计出连通分支有限的广义反射器，

而不是具有可数多个连通分支。作者认为以下陈述是正确的。

猜想 6.1. 设 U 是 $\mathbb{S}^2_+$, $\delta, z' > 0$ 中的一个开集，且 $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathbb{R}^{3-}$ 满足 $k \geq 2$。假设给定一个正的 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$，其中 $g \equiv 0$ 在 U 之外。设 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ 为非负实数，使得

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = \mu_g(U). \tag{63}$$

那么，存在一个广义反射器 $R \in \mathcal{R}^{\mathscr{C}^{\delta}_{U}(z')1}(T)$，使得 $G_1(\{x_i\}) = f_i$ 对所有 $i \in [k]$ 均成立。

对于第二个弱解，我们证明了一个定理，详细给出了插值反射器存在的充要条件。与广义反射器相比，我们的插值反射器的优势在于，其设计是一个拓扑曲面；因此，从工程学角度来看，它更容易构造。今后一个显而易见的研究方向是设计一些具有实际用途的插值反射器；定理 4.2 可能对此有所帮助。事实上，如果下面的猜想成立，将会非常有用。

猜想 6.2。设 U 是 $\mathbb{S}^2_+$中的单连通开集， δ、 $z' > 0$，并且$\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathbb{R}^{3-}$。假设给定一个非负 $g \in L^1(\mathbb{S}^2)$，其中 $g \equiv 0$在 U之外。设 f_1、 f_2、.....、 f_k 为非负实数，使得

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = \mu_g(U). \tag{64}$$

那么存在一个插值反射器，属于 $R \in \mathcal{R}^{\mathscr{C}^{\delta}_{U}(z')2}(T)$，使得$G_2(\{x_i\}) = f_i$ 对所有 $i \in [k]$都成立。

另一个富有成果的研究方向，或许是以某种方式扩展这些弱解的定义，以涵盖目标集并非有限集的情形。随后，证明具有连续辐照度分布的广义反射器和插值反射体的存在性。

正如读者可能已经注意到的，我们并未尝试用反射器来处理具有空间条件的近场反射器问题。相反，我们只使用广义反射器或插值反射器。尽管研究反射器以获得“更强”的解可能很有意义，但作者认为，一般而言，不可能在空间条件下构造反射器。例如，如果目标集是一个单点，那么近场反射器问题的解就是一个椭球。然而，在给定空间限制的情况下，单个椭球通常无法满足这些限制；定理 4.1 对此进行了说明。如果对于单个点不存在反射器，那么对于更复杂的目标集和辐照度分布，其前景似乎也十分有限。

参考文献

[1] M. Born、E. Wolf，《光学原理：60周年纪念版》，第7版，剑桥大学出版社，2019年。[2] L. Caffarelli、V. Oliker，几何光学中的一个逆问题的弱解，《数学科学杂志》154（2008年）39–49。[3] J. Schruben，照明灯具反射器设计问题的表述，《美国光学学会杂志》62（12）（1972年）1498–1501。[4] S. Kochengin、V. Oliker，根据近场散射数据确定反射器表面，《逆问题》13（2）（1997年）363–373。[5] X.-J. Wang，关于反射器天线的设计，《逆问题》12（1996年）351–375。[6] B. Kinber，关于双反射器天线，《无线电工程与电子物理》7（1962年）973–979。[7] D. Burkhard、D. Shealy，设计能够按指定方式分布阳光的反射器，《太阳能》17（1975年）221–307。

[8] T. E. Horton、J. H. McDermit，使用非均匀准直辐射源设计镜面非球面，使其均匀照射平面，《传热学杂志》（1972年）453–458。[9] F. Fournier，LED照明光束整形策略综述，载于：T. E. Kidger、S. David（编），《照明光学 II》，第8170卷，国际光学工程学会，2011年，第55–65页。[10] A. Gray，《曲线与曲面的现代微分几何（使用 Mathematica）》，第二版，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，1997年。[11] V. Oliker、E. Newman，反射器映射问题中的能量守恒方程，《应用数学快报》6（1）（1993年）91–95。[12] V. Oliker，在几何光学近似下根据散射数据重建反射面，《逆问题》5（1）（1989年）51–65。[13] J. Schruben，照明系统旋转对称反射器的分析∗，《美国光学学会杂志》64（1）（1974年）55–58。[14] R. Schneider，《凸体：布伦–闵可夫斯基理论》，第二版，《数学及其应用百科全书》，剑桥大学出版社，2013年。[15] S. Kochengin、V. Oliker，根据近场散射数据确定反射器表面 II：数值解，《数值数学》79（1998年）553–568。[16] F. Fournier、B. Cassarly、J. Rolland，面向扩展光源的单反射器优化，SPIE会议论文集7103（2008年9月）。[17] F. Fournier、B. Cassarly、J. Rolland，利用源-目标映射快速生成自由曲面反射器，《光学快报》18（5）（2010年）5295–5304。[18] T. Graf、V. Oliker，光学设计中近场反射器问题的最优质量输运方法，《逆问题》28（2012年）025001。

[19] F. R. Fournier, 《扩展光源自由曲面反射器设计》, 博士论文, CREOL, 中佛罗里达大学光学与光子学学院（2010年）。

[20] J. Munkres, 《拓扑学》, 第2版, 《拓扑学》精选书目, 培生普伦蒂斯霍尔, 2000年。