arXiv:2301.00846v1 [math-ph] 2 Jan 2023

几何对称性视角下自治动力系统的高阶第一积分

Antonios Mitsopoulos[1, a)] 和 Michael Tsamparlis[1, b)]

[1]物理学院，天文学－天体物理学－力学系，雅典大学，Panepistemiopolis，雅典 157 83，希腊

a) 通讯作者：antmits@phys.uoa.grb) 电子邮箱：mtsampa@phys.uoa.gr

摘要

一般而言，如果存在“足够多”的第一积分（FI），使得能够通过求积法求出解，那么微分方程组就是可积的。因此，确定第一积分对于确立动力系统的可积性至关重要。本文考虑由方程 $\ddot{q}^a = -\Gamma^a_{bc}(q)\dot{q}^b\dot{q}^c - Q^a(q)$ 定义的完整自治动力系统，其中 $\Gamma^a_{bc}(q)$ 是对称（可能非度量）联络的系数，$-Q^a(q)$ 是广义力。我们证明了一个定理，可以根据由量 $\Gamma^a_{bc}(q)$ 定义的几何结构的“对称性”，求出此类系统任意阶的第一积分。我们应用该定理计算了各种动力系统的二次和三次第一积分。

1 引言

由广义坐标 q^a 和广义速度 $\dot{q}^a \equiv \frac{dq^a}{dt}$ 描述的二阶动力学方程组的一个第一积分（FI），是满足条件 $\frac{dI}{dt} = 0$ 的函数 $I(t, q^a, \dot{q}^a)$，其中条件沿着动力学方程成立。确定第一积分的系统方法十分重要，因为它们可用于降低动力学方程的阶数；若其数量“足够多” [1], ，则可通过求积法求出系统的解（刘维尔可积性）。

计算第一积分的标准方法是诺特对称性方法 [2, 3, 4]。另一种方法是直接法 [5, 6, 7, 8, 9] ，该方法假设第一积分 I 具有某种函数形式，并直接要求满足条件 $\frac{dI}{dt} = 0$。该条件与动力学方程共同导出一个偏微分方程（PDE）系统，其解即为第一积分。

在本文中，我们将直接法应用于具有对称联络 Γ^a_{bc}（q）的空间中的自治完整动力系统（该联络不一定是黎曼联络），并从动力学方程中读取该联络。我们计算所得的偏微分方程系统，并根据 Γ^a_{bc}（q）的“对称性”求解。结果表述为定理 1，为确定这些动力系统任意阶的第一积分（包括含时和自治情形）提供了一种系统方法。在特殊情况下，若对称联络 Γ^a_{bc}（q）是由系统的动能度量（动能） γ_{ab}（q）定义的黎曼联络，则计算得到的第一积分可通过逆诺特定理 [8, 10] 直接关联到带规范项的广义诺特对称性（即依赖速度的诺特对称性）。最后，我们应用定理 1，寻找具有二次第一积分和三次第一积分的可积系统与超可积系统。

2 高阶 FIs 的条件

我们考虑如下形式的自治完整动力系统

$$\ddot{q}^a = -\Gamma^a_{bc}(q)\dot{q}^b\dot{q}^c - Q^a(q) \tag{1}$$

其中， $\Gamma^a_{bc}(q)$ 是一般联络的系数， $-Q^a(q)$ 是广义力。由于只有对称部分 $\Gamma^a_{(bc)}$ 会对动力学方程产生作用，因此不失一般性，假设量 $\Gamma^a_{bc}(q)$ 是对称的。

我们寻找一般形式为

$$I^{(m)}=\sum_{r=0}^{m}M_{i_1i_2...i_r}(t,q)\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2}...\dot{q}^{i_r}=M+M_{i_1}\dot{q}^{i_1}+M_{i_1i_2}\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2}+...+M_{i_1i_2...i_m}\dot{q}^{i_1}\dot{q}^{i_2}...\dot{q}^{i_m} \tag{2}$$

其中 $M_{i_1...i_r}(t,q)$ 是完全对称的 r 阶张量，指标 (m) 表示第一积分的阶数。

第一积分条件

$$\frac{dI}{dt}=0 \tag{3}$$

以及动力学方程 (1) 得到以下偏微分方程组：

$$\begin{aligned}
M_{(i_1i_2...i_m|i_{m+1})} &= 0 && (4)\\
M_{i_1i_2...i_m,t}+M_{(i_1i_2...i_{m-1}|i_m)} &= 0 && (5)\\
M_{i_1i_2...i_r,t}+M_{(i_1i_2...i_{r-1}|i_r)}-(r+1)M_{i_1i_2...i_ri_{r+1}}Q^{i_{r+1}} &= 0,\ r=1,2,...,m-1 && (6)\\
M_{,t}-M_{i_1}Q^{i_1} &= 0 && (7)\\
M_{i_1,tt}-2M_{i_1i_2,t}Q^{i_2}+\left(M_cQ^c\right)_{,i_1} &= 0 && (8)\\
2\left(M_{[i_1|c|}Q^c\right)_{|i_2]}-M_{[i_1|i_2],t} &= 0 && (9)
\end{aligned}$$

其中 $|$ 表示关于对称联络 Γ^a_{bc} 的协变导数，逗号表示关于 q^a 或 t 的偏导数，圆括号/方括号表示对所含指标进行对称化/反对称化，而波浪线括起的指标在对称化或反对称化符号作用时予以忽略。

方程 (8) 和 (9) 分别表示标量 M 的可积条件 $M_{、i_1t}=M_{、ti_1}$ 和 $M_{、[i_1i_2]}=0$ 。

方程（4）将 Killing 张量（KT）的概念推广到具有对称联络 Γ^a_{bc}的非度量几何中。在此背景下， $M_{i_1i_2...i_m}$ 是 Γ^a_{bc}的广义m阶Killing张量。

自治系统中，广义 m阶Killing张量 $M_{i_1i_2...i_m}$ 的最一般形式为

$$M_{i_1...i_m}(t,q)=C_{(0)i_1...i_m}(q)+\sum_{N=1}^{n}C_{(N)i_1...i_m}(q)\frac{t^N}{N} \tag{10}$$

其中， $C_{(N)i_1...i_m}(q)$ 、 $N=0$、1、...、 n是 Γ^a_{bc}的任意 m阶广义Killing张量序列，而 n 是所考虑多项式的次数。

选择（10）并结合方程（5）可知，我们令

$$M_{i_1...i_r}(t,q)=\sum_{N_r=0}^{n_r}L_{(N_r)i_1...i_r}(q)t^{N_r},\ r=1,2,...,m-1 \tag{11}$$

其中，$L_{(N_r)i_1...i_r}(q)$ 、 $N_r=0$、1、...、 n_r是任意的 r阶全对称张量，且 n_r 是所考虑多项式的次数。

我们注意到，上述 t 多项式表达式的次数 n、 n_r 可以是无限 e.

将 (10) 和 (11) 代入方程组 (4)–(9) 中（由于 $C_{(N)i_1...i_m}$ 被假设为广义 Killing 张量，方程 (4) 恒等为零），最终得到一个包含五个偏微分方程的方程组。该方程组的求解过程较为繁琐，需要考虑许多情形和子情形。下面将解表述为定理 1。

3 自治完整动力系统的 m 阶第一积分定理

定理 1 动力系统 (1) 的独立 m 阶第一积分如下：

积分 1。

$$I_n^{(m)} = \left(-\sum_{N=1}^{n}\frac{t^N}{N}L_{(N-1)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}+C_{(0)i_1\ldots i_m}\right)\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_m}+\sum_{r=1}^{m-1}\left(\sum_{N=0}^{n}t^N L_{(N)i_1\ldots i_r}\right)\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_r}+$$
$$+s\frac{t^{n+1}}{n+1}+\sum_{N=1}^{n}L_{(N-1)c}Q^c\frac{t^N}{N}+G(q)$$

其中 $C_{(0)i_1\ldots i_m}$, $L_{(N)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}$ 对于 $N=0,1,...,n-1$ 而言，它们是 m 阶广义 Killing 张量， $L_{(n)i_1\ldots i_{m-1}}$ 是 (m − 1) 阶广义 Killing 张量， s 是由以下条件定义的任意常数

$$L_{(n)i_1}Q^{i_1}=s \tag{12}$$

而向量 $L_{(N)i_1}$ 以及全对称张量 $L_{(A)i_1\ldots i_r}$, $A=0,1,...,n$, $r=2,3,...,m-2$ 满足以下条件:

$$L_{(n)(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} = -\frac{m}{n}L_{(n-1)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}Q^{i_m} \tag{13}$$
$$L_{(k-1)(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} = -\frac{m}{k-1}L_{(k-2)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}Q^{i_m}-kL_{(k)i_1\ldots i_{m-1}},\ \ k=2,3,...,n \tag{14}$$
$$L_{(0)(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} = mC_{(0)i_1\ldots i_{m-1}i_m}Q^{i_m}-L_{(1)i_1\ldots i_{m-1}} \tag{15}$$
$$L_{(n)(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} = (r+1)L_{(n)i_1\ldots i_r i_{r+1}}Q^{i_{r+1}},\ \ r=2,3,...,m-2 \tag{16}$$
$$L_{(k-1)(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} = (r+1)L_{(k-1)i_1\ldots i_r i_{r+1}}Q^{i_{r+1}}-kL_{(k)i_1\ldots i_r},\ \ k=1,2,...,n,\ \ r=2,3,...,m-2 \tag{17}$$
$$\left(L_{(n-1)c}Q^c\right)_{,i_1} = 2nL_{(n)i_1i_2}Q^{i_2} \tag{18}$$
$$\left(L_{(k-2)c}Q^c\right)_{,i_1} = 2(k-1)L_{(k-1)i_1i_2}Q^{i_2}-k(k-1)L_{(k)i_1},\ \ k=2,3,...,n \tag{19}$$
$$G_{,i_1} = 2L_{(0)i_1i_2}Q^{i_2}-L_{(1)i_1}. \tag{20}$$

积分 2。

$$I_e^{(m)}=\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left(-L_{(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_m}+\lambda\sum_{r=1}^{m-1}L_{i_1\ldots i_r}\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_r}+L_{i_1}Q^{i_1}\right)$$

其中， $\lambda\neq 0$ $L_{(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}$ 是一个 m 阶广义 KT，其余全对称张量满足以下条件:

$$L_{(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} = -\frac{m}{\lambda}L_{(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}Q^{i_m}-\lambda L_{i_1\ldots i_{m-1}} \tag{21}$$
$$L_{(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} = (r+1)L_{i_1\ldots i_r i_{r+1}}Q^{i_{r+1}}-\lambda L_{i_1\ldots i_r},\ \ r=2,3,...,m-2 \tag{22}$$
$$\left(L_cQ^c\right)_{\,i_1} = 2\lambda L_{i_1i_2}Q^{i_2}-\lambda^2L_{i_1}. \tag{23}$$

我们注意到，对于 $m=2$ 和黎曼联络，定理 1 可化为 [7] 的定理 1，以及 QFI 情形下 [8] 的定理 3。

此外，我们还有以下一些次要结果。

命题 2 独立的 m 阶第一积分 $I_n^{(m)}$ 和 $I_e^{(m)}$ 满足以下递推公式：a. $I_n^{(k)}<I_n^{(k+1)}$，也就是说，每个 k 阶第一积分 $I_n^{(k)}$ 都是下一个（$k+1$）阶第一积分 $I_n^{(k+1)}$ 的一个子情形，且对于所有 $k\in\mathbb{N}$，其时间依赖的次数 n 相同。

b. $I_\ell^{(m)}<I_{\ell+1}^{(m)}$，也就是说，由 ℓ 固定时间依赖性的 m 阶第一积分 $I_\ell^{(m)}$，是对所有 $\ell\in\mathbb{N}$ 都成立的 m 阶第一积分 $I_{\ell+1}^{(m)}$（其时间依赖性为 $\ell+1$）的一个子情形。

c. $I_e^{(k)}<I_e^{(k+1)}$，也就是说，对于所有 $k\in\mathbb{N}$，每个 k 阶第一积分 $I_e^{(k)}$ 都是下一个（$k+1$）阶第一积分 $I_e^{(k+1)}$ 的一个子情形。

命题 3 m 阶第一积分 $I_n^{(m)}$ 由以下两个相互独立的第一积分组成:

a. 第一积分 $J_\ell^{(m,1)}$ 的系数是 t 的多项式；对于偶数个速度的乘积，包含 t 的偶次幂；对于奇数个速度的乘积，包含 t 的奇次幂。

b. 第一积分 $J_\ell^{(m,2)}$ 的系数是关于 t的多项式：对于奇数个速度乘积，包含偶次幂 t；对于偶数个速度乘积，包含奇次幂 t 。

对于偶数阶 $m=2\nu\,(\nu\in\mathbb{N})$，命题 3 中的独立第一积分可由公式（$\ell\in\mathbb{N}$）计算：a.

$$\begin{aligned}
J_{\ell}^{(m=2\nu,1)} &= \left(-\frac{t^{2\ell}}{2\ell}L_{(2\ell-1)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}-\ldots-\frac{t^2}{2}L_{(1)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}+C_{(0)i_1\ldots i_m}\right)\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_m}+\\
&+\sum_{1\leq r\leq m-1}^{odd}\left(t^{2\ell-1}L_{(2\ell-1)i_1\ldots i_r}+\ldots+t^3L_{(3)i_1\ldots i_r}+tL_{(1)i_1\ldots i_r}\right)\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_r}+\\
&+\sum_{1\leq r\leq m-1}^{even}\left(t^{2\ell}L_{(2\ell)i_1\ldots i_r}+\ldots+t^2L_{(2)i_1\ldots i_r}+L_{(0)i_1\ldots i_r}\right)\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_r}+\\
&+\frac{t^{2\ell}}{2\ell}L_{(2\ell-1)c}Q^c+\ldots+\frac{t^2}{2}L_{(1)c}Q^c+G(q) \qquad (24)
\end{aligned}$$

其中 $C_{(0)i_1\ldots i_m}$, $L_{(N)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}$ 对于 $N=1,3,\ldots,2\ell-1$ 均为 m 阶广义 Killing 张量，并满足以下条件：

$$\begin{aligned}
L_{(2\ell)(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} &= -\frac{m}{2\ell}L_{(2\ell-1)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}Q^{i_m} && (25)\\
L_{(k-1)(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} &= -\frac{m}{k-1}L_{(k-2)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}Q^{i_m}-kL_{(k)i_1\ldots i_{m-1}},\quad k=3,5,\ldots,2\ell-1 && (26)\\
L_{(0)(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} &= mC_{(0)i_1\ldots i_{m-1}i_m}Q^{i_m}-L_{(1)i_1\ldots i_{m-1}} && (27)\\
L_{(2\ell)(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} &= (r+1)L_{(2\ell)i_1\ldots i_ri_{r+1}}Q^{i_{r+1}},\quad r=3,5,\ldots,m-3 && (28)\\
L_{(k-1)(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} &= (r+1)L_{(k-1)i_1\ldots i_ri_{r+1}}Q^{i_{r+1}}-kL_{(k)i_1\ldots i_r},\ k=1,3,\ldots,2\ell-1,\ r=3,5,\ldots,m-3 && (29)\\
L_{(k-1)(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} &= (r+1)L_{(k-1)i_1\ldots i_ri_{r+1}}Q^{i_{r+1}}-kL_{(k)i_1\ldots i_r},\ k=2,4,\ldots,2\ell,\ r=2,4,\ldots,m-2 && (30)\\
\left(L_{(2\ell-1)c}Q^c\right)_{,i_1} &= 4\ell L_{(2\ell)i_1i_2}Q^{i_2} && (31)\\
\left(L_{(k-2)c}Q^c\right)_{,i_1} &= 2(k-1)L_{(k-1)i_1i_2}Q^{i_2}-k(k-1)L_{(k)i_1},\quad k=3,5,\ldots,2\ell-1 && (32)\\
G_{,i_1} &= 2L_{(0)i_1i_2}Q^{i_2}-L_{(1)i_1}. && (33)
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
J_{\ell}^{(m=2\nu,2)} &= \left(-\frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1}L_{(2\ell)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}-\ldots-\frac{t^3}{3}L_{(2)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}-tL_{(0)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}\right)\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_m}+\\
&+\sum_{1\leq r\leq m-1}^{odd}\left(t^{2\ell}L_{(2\ell)i_1\ldots i_r}+\ldots+t^2L_{(2)i_1\ldots i_r}+L_{(0)i_1\ldots i_r}\right)\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_r}+\\
&+\sum_{1\leq r\leq m-1}^{even}\left(t^{2\ell+1}L_{(2\ell+1)i_1\ldots i_r}+\ldots+t^3L_{(3)i_1\ldots i_r}+tL_{(1)i_1\ldots i_r}\right)\dot{q}^{i_1}\ldots\dot{q}^{i_r}+\\
&+\frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1}L_{(2\ell)c}Q^c+\ldots+\frac{t^3}{3}L_{(2)c}Q^c+tL_{(0)c}Q^c \qquad (34)
\end{aligned}$$

其中 $L_{(N)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}$ 对于 $N=0$、2、...、2ℓ，它们是 m 阶广义 Killing 张量，并满足以下条件：

$$\begin{aligned}
L_{(2\ell+1)(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} &= -\frac{m}{2\ell+1}L_{(2\ell)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}Q^{i_m} && (35)\\
L_{(k-1)(i_1\ldots i_{m-2}|i_{m-1})} &= -\frac{m}{k-1}L_{(k-2)(i_1\ldots i_{m-1}|i_m)}Q^{i_m}-kL_{(k)i_1\ldots i_{m-1}},\quad k=2,4,\ldots,2\ell && (36)\\
L_{(2\ell+1)(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} &= (r+1)L_{(2\ell+1)i_1\ldots i_ri_{r+1}}Q^{i_{r+1}},\quad r=3,5,\ldots,m-3 && (37)\\
L_{(k-1)(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} &= (r+1)L_{(k-1)i_1\ldots i_ri_{r+1}}Q^{i_{r+1}}-kL_{(k)i_1\ldots i_r},\ k=1,3,\ldots,2\ell+1,\ r=2,4,\ldots,m-2 && (38)\\
L_{(k-1)(i_1\ldots i_{r-1}|i_r)} &= (r+1)L_{(k-1)i_1\ldots i_ri_{r+1}}Q^{i_{r+1}}-kL_{(k)i_1\ldots i_r},\ k=2,4,\ldots,2\ell,\ r=3,5\ldots,m-3 && (39)
\end{aligned}$$

$$\left(L_{(2\ell)c}Q^c\right)_{,i_1} = 2(2\ell+1)L_{(2\ell+1)i_1i_2}Q^{i_2} \tag{40}$$
$$\left(L_{(k-2)c}Q^c\right)_{,i_1} = 2(k-1)L_{(k-1)i_1i_2}Q^{i_2} - k(k-1)L_{(k)i_1}, \ \ k=2,4,...,2\ell. \tag{41}$$

此外，对于偶数阶第一积分，有

$$I^{(2\nu)}_{2k} = J^{(2\nu,1)}_k + J^{(2\nu,2)}_k \left(L_{(2k)(i_1...i_{m-1}|i_m)}=0; L_{(2k+1)(i_1...i_r)}=0, 1\le r\le m-1, r=even\right)$$
$$I^{(2\nu)}_{2k+1} = J^{(2\nu,1)}_{k+1} \left(L_{(2k+1)(i_1...i_{m-1}|i_m)}=0; L_{(2k+2)(i_1...i_r)}=0, 1\le r\le m-1, r=even\right) + J^{(2\nu,2)}_k$$

其中 $m=2\nu$，而对于奇数阶第一积分

$$I^{(2\nu+1)}_{2k} = J^{(2\nu+2,1)}_k \left(M_{i_1...i_m}=0\right) + J^{(2\nu+2,2)}_k \left(M_{i_1...i_m}=0; L_{(2k+1)(i_1...i_r)}=0, 1\le r\le m-1, r=even\right)$$
$$I^{(2\nu+1)}_{2k+1} = J^{(2\nu+2,1)}_{k+1} \left(M_{i_1...i_m}=0; L_{(2k+2)(i_1...i_r)}=0, 1\le r\le m-1, r=even\right) + J^{(2\nu+2,2)}_k \left(M_{i_1...i_m}=0\right)$$

其中 $m=2\nu+2$。为完整起见，我们可以引入记号 $J^{(2\nu+1,1)}_\ell \equiv J^{(2\nu+2,1)}_\ell \left(M_{i_1...i_m}=0\right)$ 和 $J^{(2\nu+1,2)}_\ell \equiv J^{(2\nu+2,2)}_\ell \left(M_{i_1...i_m}=0\right)$。

在黎曼联络的情形下，一般的 m阶第一积分 (2) 与广义规范弱诺特对称性

$$\left(\xi=0, \ \eta_{i_1}=-\frac{\partial I^{(m)}}{\partial \dot q^{i_1}}, \ \phi_a, \ f=I^{(m)}-\frac{\partial I^{(m)}}{\partial \dot q^{i_1}}\dot q^{i_1}\right) \quad \text{such that } \phi_a\dot q^a + F^a\frac{\partial I^{(m)}}{\partial \dot q^a}=0 \tag{42}$$

通过逆诺特定理 [8, 10]建立联系。在 (42) 中，我们有

$$\frac{\partial I^{(m)}}{\partial \dot q^{i_1}} = M_{i_1} + 2M_{i_1i_2}\dot q^{i_2} + 3M_{i_1i_2i_3}\dot q^{i_2}\dot q^{i_3} + ... + mM_{i_1i_2...i_m}\dot q^{i_2}...\dot q^{i_m} = \sum_{r=0}^{m-1}(r+1)M_{i_1i_2...i_{r+1}}\dot q^{i_2}...\dot q^{i_{r+1}}$$

$F^a(t,q,\dot q)$ 是非保守广义力， $\phi^a(t,q,\dot q)$ 是一个附加的向量生成元， $f(t,q,\dot q)$ 是诺特函数，而 $\mathrm{X} = \xi(t,q,\dot q)\partial_t + \eta^a(t,q,\dot q)\partial_{q^a}$ 是李生成元。接下来，我们考虑一些应用，以说明定理 1 的重要性。

4 应用

4.1 应用 1：非黎曼动力系统的二次第一积分 **m**

考虑以下动力系统:

$$\ddot u = -\frac{8\beta}{u^3}\left(u\dot u\dot w - w\dot u^2\right) - \frac{1}{u^2} \tag{43}$$
$$\ddot w = -\frac{4\beta}{u^3}\left(u\dot w^2 - 4w\dot u\dot w\right) + \frac{2w}{u^3} \tag{44}$$

其中 β 是任意　　实常数。该系统是形式为 (1) 的自治完整系统，其变量为

$$q^a = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \ Q^a = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2w}{u} \end{pmatrix}.$$

对称联络系数可由动力学方程读出:

$$\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{11}=0, \ \Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{12}=-8\beta\frac{w}{u^3}, \ \Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{22}=\frac{4\beta}{u^2}. \tag{45}$$

曲率张量 $R^a{}_{bcd}=\Gamma^a_{bd,c}-\Gamma^a_{bc,d}+\Gamma^a_{sc}\Gamma^s_{bd}-\Gamma^a_{sd}\Gamma^s_{bc}$ 计算结果为

$$R^1{}_{112}=R^2{}_{221}=-R^2{}_{212}=-R^1{}_{121}=-\frac{32b^2w}{u^5}, \ R^2{}_{112}=-R^2{}_{121}=\frac{24bw}{u^4}.$$

求解广义 KT 条件 $C_{(ab|c)}=0$，我们发现联络 (45) 仅存在二阶广义 KT

$$C_{ab}=ke^{\frac{12\beta w}{u^2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \tag{46}$$

其中， k 是任意常数。

求解广义 Killing 向量（KV）条件 $L_{(a|b)}=0$，我们得到 $L_a=0$；因此，不存在广义 Killing 向量。

此外，可以证明，也不存在生成形如$B_{(a|b)}$ 的可约广义 KT 的非零向量 B_a 。

Ap对 $m=2$ 应用定理 1，我们发现该系统仅有一个二次第一积分，即 th e

$$J_1^{(2,1)}=e^{\frac{12\beta w}{u^2}}\left(\dot{u}\dot{w}+\frac{1}{12\beta}\right). \tag{47}$$

要证明给定系统是可积的，我们还需要一个与其对合的、更高阶的独立第一积分。

4.2 应用 2：一类自治保守动力系统的三次第一积分。

考虑势为 $V=F(x^2+\nu y^2)$ 的二维（2d）自治保守动力系统，其中 ν 是任意常数。确定哪些势允许存在三次第一积分。

在 [11], 中，作者建立了自治保守动力系统的哈密顿方程的自治二次第一积分/三次第一积分与哈密顿-雅可比方程的容许李-巴克伦德对称性之间的同构。利用这一结果，他们找到了以下三个势:

$$V_{(1a)}=\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}y^2,\ V_{(1b)}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{18}y^2,\ V_{(1c)}=(x^2-y^2)^{-2/3}. \tag{48}$$

应用定理 1，我们又找到了两个势，并证明 [11] 中的结果只是特殊情形。这些势如下:

a. 新的超可积势

$$V_1=c_0(x^2+9y^2)+c_1y \tag{49}$$

其中 c_0 和 c_1 是任意常数，该势允许存在相应的守恒第一积分

$$J_1=(x\dot{y}-y\dot{x})\dot{x}^2-\frac{c_1}{18c_0}\dot{x}^3+\frac{c_1}{3}x^2\dot{x}+6c_0x^2y\dot{x}-\frac{2c_0}{3}x^3\dot{y}. \tag{50}$$

b. 可积势

$$V_2=k(x^2-y^2)^{-2/3} \tag{51}$$

其中 k 是一个任意常数，它允许存在守恒第一积分

$$J_2=(x\dot{y}-y\dot{x})\left(\dot{y}^2-\dot{x}^2\right)+4V_2(y\dot{x}+x\dot{y}). \tag{52}$$

对于以下参数取值，势 (48) 是 V_1 和 V_2 的特例:

$$V_{(1a)}=V_1\left(c_1=0,c_0=\frac{1}{2}\right),\ V_{(1b)}=V_1\left(x\leftrightarrow y;c_1=0,c_0=\frac{1}{18}\right),\ V_{(1c)}=V_2(k=1).$$

4.3 应用3：允许存在自治和时变守恒第一积分的新可积势/超可积势。

在 [12], 中，作者采用雅可比度量方法，找到了允许自治守恒第一积分的可积势和超可积势。

应用定理 1，我们得到新的可积势

$$V = \frac{k_1}{(a_2y - a_5x)^2} + \frac{k_2}{r} + \frac{k_3(a_2x + a_5y)}{r(a_2y - a_5x)^2} \tag{53}$$

其中 k_1、k_2、k_3、a_2、a_5 为任意常数，而 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 具有守恒第一积分

$$\begin{aligned} J_1 \;=\; & (x\dot{y} - y\dot{x})^2(a_2\dot{x} + a_5\dot{y}) + \frac{2k_1r^2}{(a_2y - a_5x)^2}(a_2\dot{x} + a_5\dot{y}) - \frac{k_2(a_2y - a_5x)}{r}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \\ & + \frac{k_3r}{a_2y - a_5x}(a_2\dot{y} - a_5\dot{x}) - \frac{k_3(a_2x + a_5y)}{r(a_2y - a_5x)}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{2k_3(a_2x + a_5y)r}{(a_2y - a_5x)^2}(a_2\dot{x} + a_5\dot{y}). \end{aligned}$$

我们注意到，对于 $k_2 = 0$，特殊势

$$V(k_2 = 0) = \frac{k_1}{(a_2y - a_5x)^2} + \frac{k_3(a_2x + a_5y)}{r(a_2y - a_5x)^2} \tag{54}$$

还具有额外的时变守恒第一积分

$$\begin{aligned} J_2 \;=\; & -tJ_1(k_2 = 0) + (a_2x + a_5y)(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \frac{2k_1r^2(a_2x + a_5y)}{(a_2y - a_5x)^2} + \\ & + \frac{2k_3r(a_2x + a_5y)^2}{(a_2y - a_5x)^2} + k_3r. \end{aligned}$$

我们得出结论，(54) 是一种新的超可积势。这一结果说明了时变第一积分对于确定可积性/超可积性的重要性。

5 结论

我们得出以下结论：

a) 我们提出了一种直接、系统的方法，可根据动力学方程所定义的几何对象（视具体情况而定，为对称联络或动能度量）的“对称性”，计算自治完整动力系统 (1) 的 m 阶第一积分。

b) 该方法适用于具有对称联络的非黎曼几何。研究表明，m 阶第一积分需要由对称联络 Γ^a_{bc} 定义的广义 Killing 张量和 Killing 向量。黎曼联络的情形只是一个特例。

c) 由条件 $dI/dt = 0$ 和动力学方程得到的偏微分方程组 (4)–(9) 包含两部分：几何部分（方程 (4)、(5)），适用于所有共享同一联络的系统；以及动力学部分（方程 (6)–(9)），其中包含特定系统的广义力 Q^a 。

d) 在黎曼背景几何中，自治完整动力系统的所有 m 阶第一积分，通过逆诺特定理都与规范化弱诺特对称性相关联。

参考文献

[1] V.I. Arnold, 《经典力学的数学方法》，施普林格（1989），证明见第272-284页。

[2] P.A. Damianou 和 C. Sophocleous, 《具有三个自由度的拉格朗日量的诺特对称性分类》，Nonlin. Dyn. 36,3（2004）。

[3] M. Tsamparlis 和 A. Paliathanasis, 《具有李对称性和诺特对称性的二维动力系统》，J. Phys. A: Math. Theor. 44, 175202（2011）。

[4] A.K. Halder、A. Paliathanasis 和 P.G.L. Leach, 《诺特定理与对称性》，Symmetry 10(12), 744 (2018)。

[5] G.H. Katzinand J. Levine, 《黎曼时空中显含路径参数的测地线第一积分》, J. Math. Phys. 22(9), 1878 (1981)。[6] J.T. Horwood, 《经典力学中的高阶第一积分》, J. Math. Phys 48, 102902 (2007)。[7] M. Tsamparlis 和 A. Mitsopoulos, 《自治保守动力系统的二次第一积分》, J. Math. Phys. 61, 072703 (2020)。[8] M. Tsamparlis 和 A. Mitsopoulos, 《无诺特对称性的完整系统的第一积分》, J. Math. Phys. 61, 122701 (2020)。[9] A. Mitsopoulos 和 M. Tsamparlis, 《自治动力系统的高阶第一积分》, J. Geom. Phys. 170, 104383 (2021)。[10] D.S. Djukic 和 B.D. Vujanovic, 《经典非保守力学中的诺特理论》, Acta Me- chanica 23, 17 (1975)。[11] A.S. Fokas 和 P.A. Lagerstrom, 《经典力学中的二次与三次不变量》, J. Math. Anal. Appl. 74, 325 (1980)。[12] M. Karlovini 和 K. Rosquist, 《固定能量与任意能量下三次不变量的统一处理》, J. Math. Phys. 41(1), 370 (2000)。