arXiv:2301.00848v1 [math.DG] 2 Jan 2023

李代数 so(4) 上科瓦列夫斯卡娅可积情形的刘维尔叶状结构拓扑。

Kozlov I. K.*
ikozlov90@gmail.com

摘要

本文研究李代数 so(4) 上欧拉方程的一个可积情形的拓扑性质，该情形可视为刚体动力学中经典科瓦列夫斯卡娅情形的类比。具体而言，对于所研究系统的所有参数值，我们构造了动量映射的分岔图，确定了秩为 0 的临界点的类型，描述了刘维尔环面的分岔，并计算了分岔图中所有奇异点对应的环分子。所得结果表明，经典科瓦列夫斯卡娅情形的某些拓扑性质，可以通过取自然极限，从李代数 so(4) 上所研究可积情形的相应性质中得到。

参考文献：21篇。

关键词： 可积哈密顿系统、科瓦列夫斯卡娅情形、刘维尔叶状结构、分岔图、拓扑不变量。

目录

1 引言 2 2 基本定义与问题表述 3

3 主要结果

63.1 情形 $\varkappa > 0, \quad b = 0$ .16

*无所属机构，俄罗斯莫斯科。[0]本研究得到俄罗斯基础研究基金会（项目编号：13-01-00664-a 和 12-01-31497）、“重点科学学派”计划（项目编号：НШ-581.2014.1）以及俄罗斯联邦政府为支持由重点科学家指导的俄罗斯高等教育机构科研工作所提供的资助（合同编号：11.G34.31.0054）。

4 主要结论的证明 **20**
4.1 秩 1 临界点.20 4.2 分岔图类型。（情形 $b \neq 0$）.26 4.3 秩为 0 的临界点.30
4.4 定理 1、2 和 3 的证明.34

5 经典科瓦列夫斯卡娅情形（$\varkappa = 0$） **37**

1 引言

科瓦列夫斯卡娅陀螺是经典力学中最著名的可积哈密顿系统之一。索菲娅·科瓦列夫斯卡娅在她的论文 [1] 中证明，除了欧拉、拉格朗日以及她本人发现的情形外（这些情形此前已在 [2], 中提出），不存在其他刚体系统能在区域常数取任意值时以相同方式可积。科瓦列夫斯卡娅陀螺比欧拉陀螺和拉格朗日陀螺更为复杂，因此人们对各种能够简化其研究的方法很感兴趣。本文展示了这样一种可能的方法。具体而言，我们考虑在李代数铅笔 so(4) $-$ e(3) $-$ so(3，1) 上定义的一个可积哈密顿系统单参数族，该系统族见论文 [3] 。我们表明，通过研究李代数 so(4) 上的可积哈密顿系统，可以获得关于经典科瓦列夫斯卡娅情形（即李代数 e(3) 上的一个可积哈密顿系统）的一些信息。更确切地说，本文运用可积哈密顿系统的拓扑分类理论（见 [4]），计算了这些可积情形的一些拓扑不变量。李代数 so(4) 上所得的结果使我们能够对经典科瓦列夫斯卡娅情形的拓扑性质作出一些结论。

本文针对所研究的 so(4) 代数上的可积情形，完成了以下工作：

1. 构造了动量映射的分岔图（定理 1），

2. 确定了秩为 0 的临界点的类型（引理 2），

3. 描述了刘维尔环面的分岔（定理 2），并计算了分岔图中所有奇异点对应的环分子（定理 3）。

利用本文的结果，不难得到等能面在粗刘维尔等价意义下的分类。换言之，对于每个等能面 $H = \text{const}$，都不难构造相应的无标记分子（福缅科不变量）。本文不作此事，因为描述所有可能的分子会相当繁琐。分子不仅取决于分岔图的类型，还取决于哈密顿量在秩为 0 的临界点处的取值。了解环分子也使我们能够轻松地为这些粗分子恢复一些标记。请注意，带标记分子（福缅科–齐尚不变量）是可积

哈密顿系统的重要拓扑不变量，它们能够完整描述非奇异三维等能面上的刘维尔叶状结构。具体而言，福缅科–齐尚定理指出，两个等能面上的可积哈密顿系统刘维尔等价（即存在一个将一种刘维尔叶状结构映射到另一种的微分同胚），当且仅当它们的带标记分子相同（有关福缅科–齐尚不变量的更多细节，参见例如 [4]）。

在紧李代数上研究可积哈密顿系统这一思路可能颇有成效：紧李代数的余伴随轨道是紧致的，这极大地简化了在其上研究可积哈密顿系统的分析。例如，在本文考虑的情形中，由于轨道是紧致的，要构造分岔图并计算环分子，只需找出包含临界点像的曲线，并确定秩 0 临界点的类型。此前，关于李代数 so(4) 上的可积哈密顿系统已有一些研究，见文献 [5] （克莱布施情形的紧致类比）、 [6] （索科洛夫情形）和 [7]（斯捷克洛夫情形的紧致类比）。此外，文献 [8] 和 [9]研究了与李代数 so(4) 及其他紧李代数相关的可积系统的代数性质和拓扑性质。

经典科瓦列夫斯卡娅情形的拓扑已在著作[10] 中得到详细研究（另见 [11]和 [12]）。特别是，该书描述了动量映射的分岔图，以及动量映射临界值处刘维尔环面的分岔。经典科瓦列夫斯卡娅情形的环分子（以及精细李乌维尔分类）见论文 [13]。关于经典科瓦列夫斯卡娅情形的所有必要结果，都以便于本文使用的形式汇集在著作 [4]中。经典科瓦列夫斯卡娅情形与本文所研究的李代数 so(4) 上的系统之间的联系将在第 5 节讨论。

零　　面积常数的情况（$b = 0$）已在论文 [14 中描述过　　].

2 基本定义与问题表述

回顾一下，对于任意有限维李代数 $\mathfrak{g}$ ，其对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上存在自然的线性泊松括号，由公式给出

$$\{f, g\} = \langle x, [df|_x,\, dg|_x] \rangle. \tag{1}$$

这里 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 表示余向量在 $\mathfrak{g}^*$ 上作用于 $\mathfrak{g}$ 中向量所得的值，而 $[\cdot, \cdot]$ 表示李代数 $\mathfrak{g}$ 中的交换子。在公式（1）中，我们使用典范同构 $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$。括号（1）称为李-泊松括号。

定义 1. 设 $\mathfrak{g}$ 为有限维李代数， x_1， $\ldots$， x_n 为对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 中的线性坐标， H 为定义在 $\mathfrak{g}^*$ 上的光滑函数。方程

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \tag{2}$$

定义 $\mathfrak{g}^*$ 上动力系统的方程，称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的欧拉方程 。

众所周知（例如，参见 [4]），经典科瓦列夫斯卡娅情形可由李代数 e(3) 上的欧拉方程定义。事实证明，经典科瓦列夫斯卡娅情形可以纳入定义在李代数铅笔 so(4) $-$ e(3) $-$ so(3，1) 上的单参数族可积系统中。

考虑六维空间 $\mathbb{R}^6$，并在其中固定一组基 e_1，e_2，e_3，f_1，f_2，f_3。考虑 $\mathbb{R}^6$ 中依赖参数 $\varkappa \in \mathbb{R}$ 的如下单参数交换子族：

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad [e_i, f_j] = \varepsilon_{ijk} f_k, \quad [f_i, f_j] = \varkappa \varepsilon_{ijk} e_k, \tag{3}$$

其中，ε_{ijk} 是置换 $\{123\} \to \{ijk\}$ 的符号。容易验证，$\varkappa > 0$、$\varkappa = 0$ 和 $\varkappa < 0$ 分别对应李代数 so(4)、e(3) 和 so(3，1)。

在与基 e_1，e_2，e_3，f_1，f_2，f_3 对应的对偶线性空间上的坐标 J_1，J_2，J_3，x_1，x_2，x_3 中，李–泊松括号具有类似的形式

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k. \tag{4}$$

对于任意参数 $\varkappa \in \mathbb{R}$ 的取值，括号 (4) 有两个卡西米尔函数：

$$f_1 = \mathbf{x}^2 + \varkappa \mathbf{J}^2, \qquad f_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{J} \rangle, \tag{5}$$

其中，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{J}$ 分别表示三维向量 (x_1, x_2, x_3) 和 (J_1, J_2, J_3)，而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量的欧几里得内积。回想一下，若某函数关于给定泊松括号与任意其他函数的泊松括号均为零，则称其为该泊松括号的卡西米尔函数。联合等值面

$$M_{a,b} = \{(\mathbf{J}, \mathbf{x}) | \quad f_1(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = a, \quad f_2(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = b\} \tag{6}$$

除 $\varkappa \leq 0, a = 0, b = 0$ 这种情况外，它们都是余伴随表示的轨道（在这种情况下，水平集是若干个余伴随表示轨道的并集）。在其他所有情况下，曲面 $M_{a,b}$ 都是括号 (4) 的辛叶；特别地，括号 (4) 在这些曲面上定义了辛结构。若 $\varkappa > 0$ 且 $a > 2\sqrt{\varkappa}|b|$，则轨道 $M_{a,b}$ 是 $\mathbb{R}^6(\mathbf{J},\mathbf{x})$ 中与两个二维球面 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的乘积微分同胚的四维子流形。若 $\varkappa > 0$，则奇异轨道$a = 2\sqrt{\varkappa}|b|$ 与二维球面 $\mathbb{S}^2$ 微分同胚。若 $\varkappa > 0$，则不存在满足条件 $a < 2\sqrt{\varkappa}|b|$的轨道。还需指出，若 $\varkappa = 0$，则非奇异轨道 $a > 0$ 与二维球面 $T^*\mathbb{S}^2$ 的余切丛微分同胚（特别是，它们不是紧致的）。

本文研究了上述李代数铅笔 so(4) $-$ e(3) $-$ so(3，1) 上定义的欧拉方程的以下可积情形（例如参见[3] 或 [15]）。在上述坐标（J_i，x_j）中，哈密顿量等于

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1 x_1 \tag{7}$$

且积分具有如下形式

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1 J_2 - 2c_1 x_2)^2, \tag{8}$$

其中 c_1 是任意常数。

注意，不失一般性，我们可以假设 $c_1 = 1$ 和 $\varkappa = -1$，为 0 或 1，因为对系统的坐标和参数进行如下公式所示的变换

$$J' = \mu J, \quad x' = \lambda\mu x, \quad a' = \mu^2\lambda^2 a, \quad b' = \mu^2\lambda b, \quad c_1' = \frac{\mu}{\lambda}c_1, \quad \varkappa' = \lambda^2\varkappa,$$

其中 λ，μ 为任意常数，该变换分别将哈密顿量和积分乘以 μ^2和 μ^4 。不过，为了得到“齐次”公式（例如，哈密顿量和积分是关于 $\mathbf{J}$，$\mathbf{x}$ c_1的齐次函数），我们将保留 c_1 和 $\varkappa$ 。

注 1. 不难验证，若 $\varkappa = 0$ （且 $c_1 = 1$），则得到经典科瓦列夫斯卡娅情形，其形式例如在书籍 [4]中有所描述。更准确地说，在书籍 [4]中，哈密顿量比哈密顿量 (7) 小 2 倍，第一积分比积分 (8) 小 4 倍。还请注意，书籍 [4] 中使用了以下记号：$S_i = J_i$，$R_j = x_j$；积分 f_2 的值 b 记作 g，并假定积分 f_1 的值 a 等于 1。

注2. 坐标变换 $(\mathbf{J}, \mathbf{x}) \to (-\mathbf{J}, \mathbf{x})$ 保持积分 f_1、哈密顿量 (7) 和积分 (8) 不变，但会改变积分 f_2 的符号。因此，不失一般性，我们可以假设 $b \geq 0$。

注3. 还要注意，该系统具有以下两种自然对称性，它们保持哈密顿量 (7)、第一积分 (8) 以及积分 f_1 和 f_2不变。第一种对称性 σ_2 改变坐标 J_2 和 x_2 的符号，并保持其余坐标不变：

$$\sigma_2 : (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3) \to (J_1, -J_2, J_3, x_1, -x_2, x_3).$$

类似地，第二种对称性 σ_3 同时改变坐标J_3 和 x_3的符号：

$$\sigma_3 : (J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3) \to (J_1, J_2, -J_3, x_1, x_2, -x_3).$$

接下来，我们构造动量映射的分岔图，确定临界点的类型，描述刘维尔环面的分岔，并计算给定哈密顿系统（哈密顿量为 (7)、积分为 (8)）在非奇异轨道 $M_{a,\ b}$上分岔图奇异点对应的环分子。我们采用 A. T. Fomenko 及其弟子创立的拓扑分类理论中的一些事实和记号。拓扑不变量（原子、分子）的定义以及该理论的基本事实可参见著作 [4]。关于该理论在刚体动力学中的各种应用，例如参见 [16]。还要指出的是，近年来，该理论在研究刘维尔环面分岔的对称性以及构建此类对称性的分类理论方面发挥了重要作用（参见 [17], [18], [19]和 [20]）。

本文仅简要回顾环分子方法的思想。平面 $\mathbb{R}^2(H,\ K)$中没有自交点的光滑曲线，若与分岔图横截相交且不经过其奇异

点，则称为可容许曲线。任意可容许曲线的原像都是一个带有刘维尔叶状结构的三维流形。这种叶状结构的一个不变量是带标记分子，它是一个图，其边对应于刘维尔环面的一参数族，顶点对应于这种叶状结构的奇异叶。图的顶点上放置有符号，用以表示分岔的类型。此外，图还以某种方式带有三种标记（r、 ϵ和 n），用于指示不同分岔之间的关系。分岔图中奇异点 x 的环分子，是描述该点 x周围任意足够小的可容许闭曲线的原像中刘维尔叶状结构的带标记分子。环分子可以提供有关可容许曲线所对应的不同分子的信息（例如，有时可以将曲线的分子由环分子的部分“粘合”而成）。环分子的例子见表2和表3。

3 主要结果

现在陈述主要结果。首先，我们描述 $b \neq 0$ 情形的结果，然后描述 $b = 0$ 情形的结果。先从动量映射的分岔图描述开始。

引理 1。 设 $b \neq 0$ 且 $\varkappa \neq 0$。那么，对于任意非奇异轨道 $M_{a,\ b}$ （即对于满足 $a^2 - 4\varkappa b^2 \neq 0$ 的任意轨道），可积哈密顿系统（其哈密顿量为 (7)，积分为 (8)）的分岔图 $\Sigma_{h,\ k}$ 包含于平面 $\mathbb{R}^2$（h, k）上以下三族曲线的并集中：

1. 直线 $k = 0$;

2. 参数曲线

$$h(z) = \frac{b^2c_1^2}{z^2} + 2z, \quad k(z) = \left(4ac_1^2 - \frac{4b^2c_1^2}{z} + \frac{b^4c_1^4}{z^4}\right) - 2\varkappa c_1^2 h(z) + \varkappa^2 c_1^4, \tag{9}$$

其中 $z \in \mathbb{R} - \{0\}$。

3. 两条抛物线的并集

$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}\right)^2 \tag{10}$$

and

$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}\right)^2. \tag{11}$$

引理 1 的证明见第 4.1 节。

为了构造动量映射的分岔图，还需舍弃引理 1 中所描述曲线的若干部分。分岔图的精确描述见下述定理。

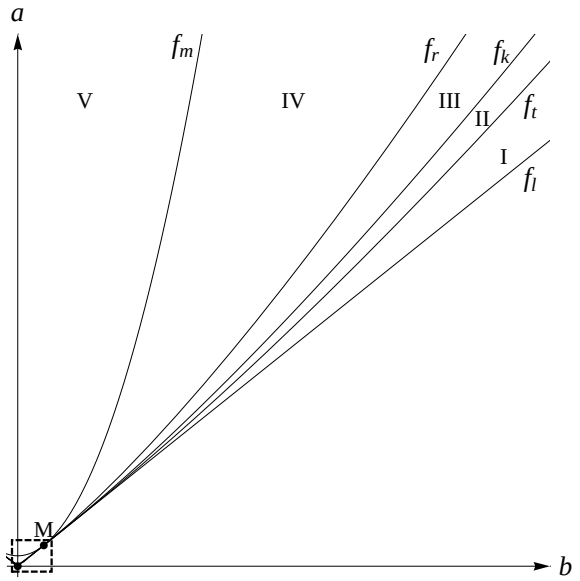


图1：参数集的划分

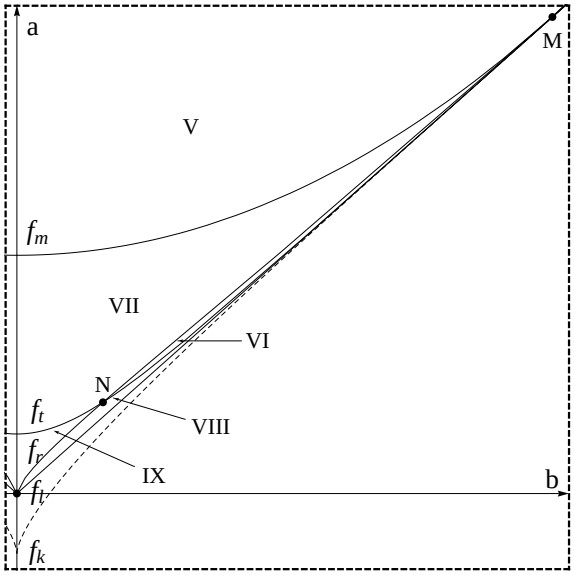


图2：图 1 的放大部分

定理 1。 设 $\varkappa > 0$ 和 $b > 0$。那么，由以下公式给出的函数 f_k、f_r、f_m、f_t 和 f_l

$$f_k(b) = \frac{3b^{4/3} + 6\varkappa b^{2/3} c_1^{4/3} - \varkappa^2 c_1^{8/3}}{4c_1^{2/3}} \tag{12}$$

$$f_r(b) = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} + \varkappa b^{2/3} c_1^{2/3} \tag{13}$$

$$f_m(b) = \frac{b^2}{\varkappa c_1^2} + \varkappa^2 c_1^2 \tag{14}$$

$$f_t(b) = \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1}\right)^2 + \varkappa t^2, \qquad where \quad b = t\left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1}\right) \tag{15}$$

$$f_l(b) = 2\sqrt{\varkappa}|b| \tag{16}$$

将区域 $\{b > 0, a > 2\sqrt{\varkappa} b\} \subset \overline{\mathbb{R}}^2$（$a, b$）划分为9个区域（见图 *1* 和图 *2*）。图*3–21*展示了李代数 *so*（4）的轨道 $M_{a,\ b}$上、哈密顿量为（7）且积分为（8）的可积哈密顿系统的动量映射的相应分岔图，分别对应上述各区域。具体而言，每种情形均说明动量映射的分岔图由直线 $k = 0$、曲线（9）和两条抛物线（10）及（11）的哪些部分构成。

请注意，对于满足 $b < 0$ 的轨道 $M_{a,\ b}$，其分岔图与轨道 $M_{a,\ -b}$ 的分岔图相同（见注2）。

注4. 在图3–21中，弧段 $y_8 z_2$， $z_2 z_1$， $y_5 z_3$， $z_8 z_9$， $z_8 z_{11}$ 和 $z_9 z_{11}$ 属于参数曲线(9)。分岔图中的其余弧段显然分布在各条曲线上。

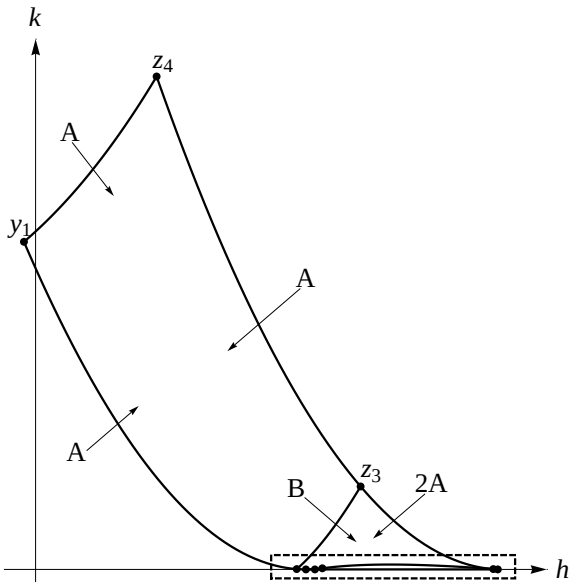


图3：区域I： $\varkappa^3 c_1^4 < b^2, \quad f_l(b) < a < f_t(b)$

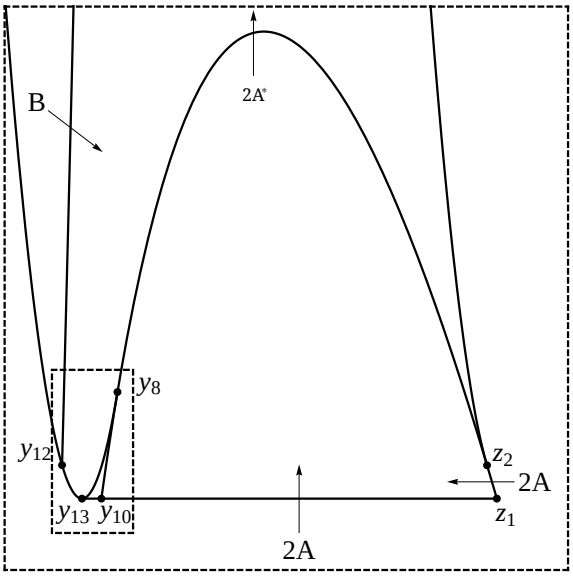


图4：区域I：图3的放大部分

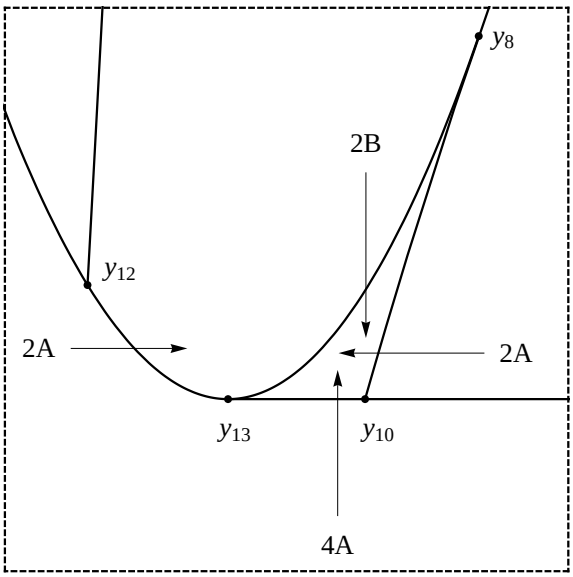


图5：区域I：图4的放大部分

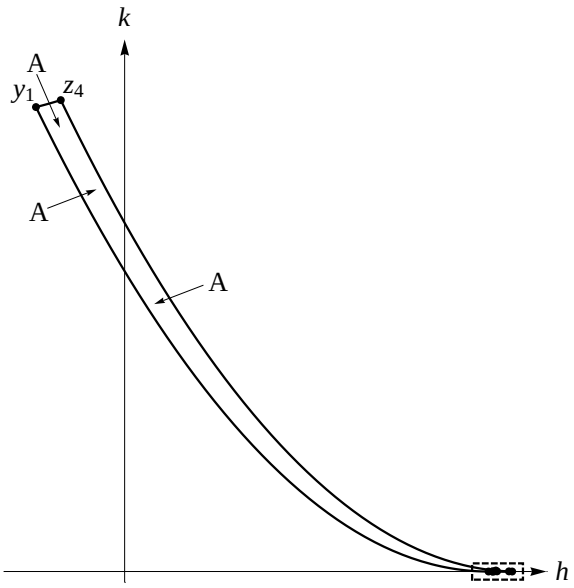


图6：区域II： $\varkappa^3 c_1^4 < b^2, \quad f_t(b) < a < f_k(b)$

注5. 本文将平面 $\mathbb{R}^2(a,\ b)$ 划分为9个区域，并用罗马数字 I–IX 编号，如图1和图2所示（函数 f_k，f_r，f_m，f_t 和 f_l 的图像相对位置也在断言 14 中有所描述）。直线 $b = 0$ 上的区域编号依次如下：

- area X: $\{b = 0, \quad \varkappa^2 c_1^2 < a\}$;
- area XI: $\{b = 0, \quad \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2\}$;

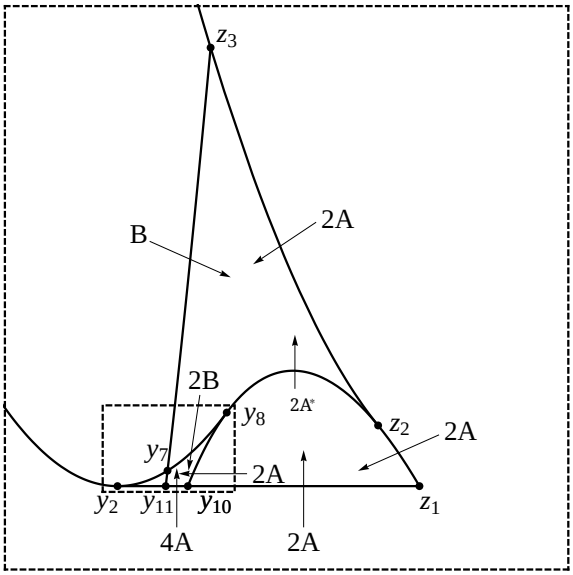


图7：区域II：图 6 的放大部分

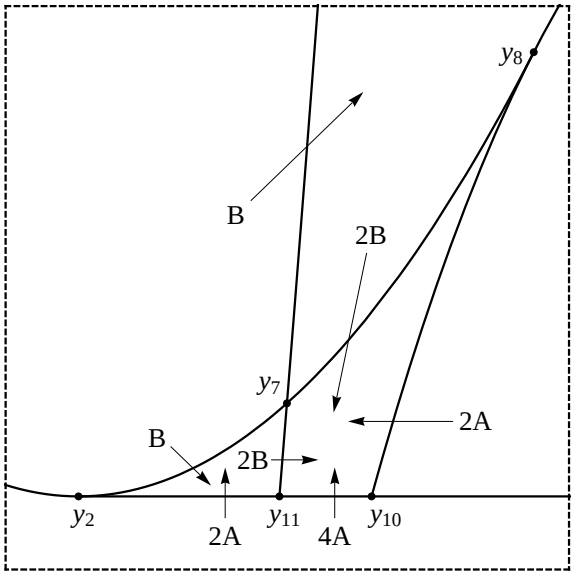


图 8：区域II：图7 的放大部分

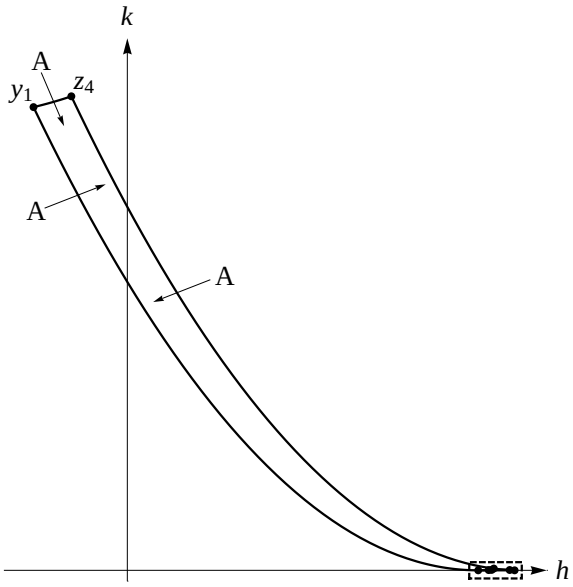


图9：区域III： $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$, $f_k(b) < a < f_r(b)$

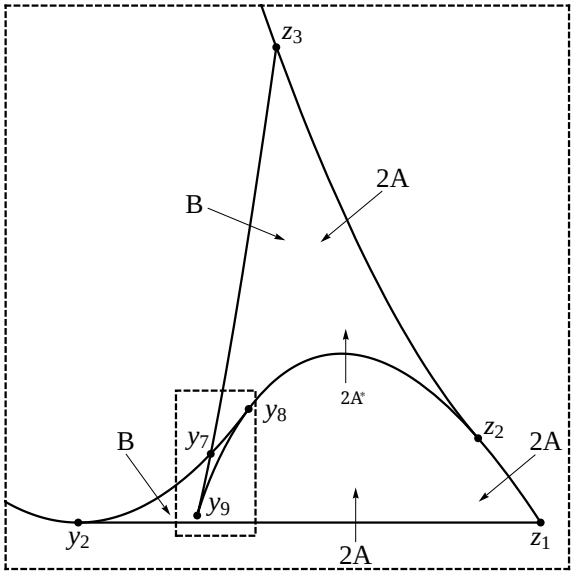


图 10：区域III：图9 的放大部分

- area XII: $\{b = 0, \quad 0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}\}$;

动量映射的分岔图所在曲线的相对位置的详细描述见第 4.2 节。定理 1 的证明见第 4.4 节。事实上，为证明定理 1，只需知道秩为 0 的临界点的类型，以下引理对此作了描述（关于秩为 0 的非退化临界点及其类型的定义，参见例如 [4]）。

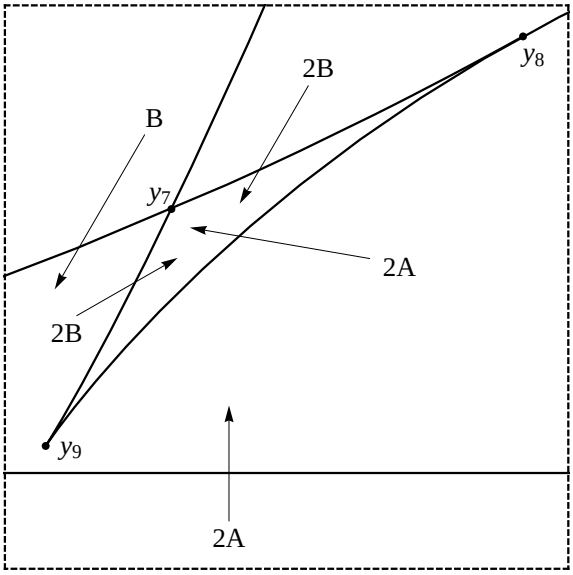


图1 1：区域III：图10的放大部分

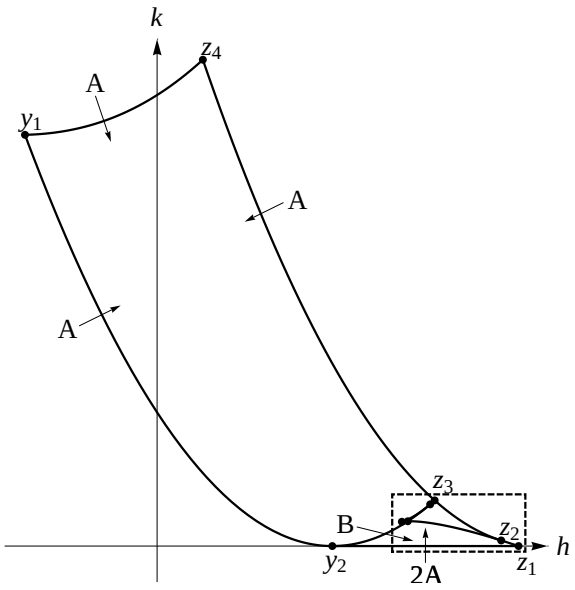


图12：区域IV：$\varkappa^3 c_1^4 < b^2$，　$f_r(b) < a < f_m(b)$

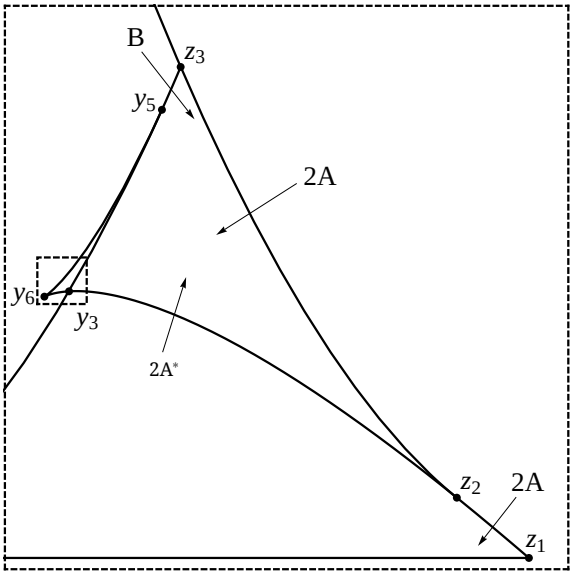


图13：区域IV：图 12 的放大部分

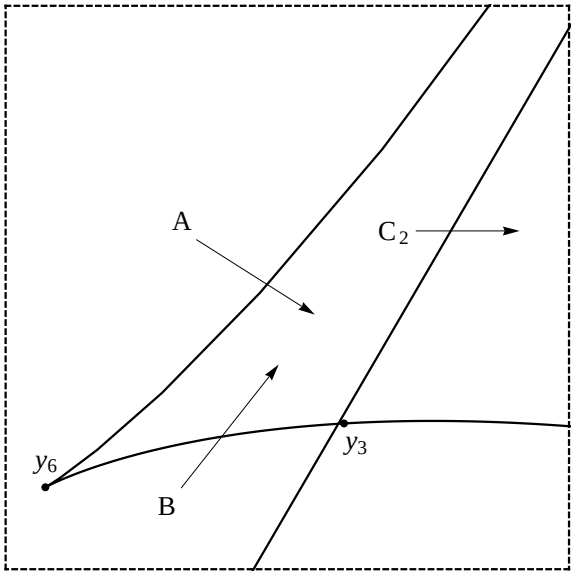


图14：区域IV：图13的放大部分

引理 2. 设 $\varkappa > 0$ 和 $b > 0$。那么秩0 临界点的像包含于以下三族点的并集中。

1. 抛物线(10) 与(11) 的交点（图*15*中的点 z_5 ）。其坐标为

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa}, \quad k = \frac{a^2 - 4\varkappa b^2}{\varkappa^2}.$$

如果 $a > f_m(b)$，其中函数 $f_m(b)$ 由公式 (14)给出，那么

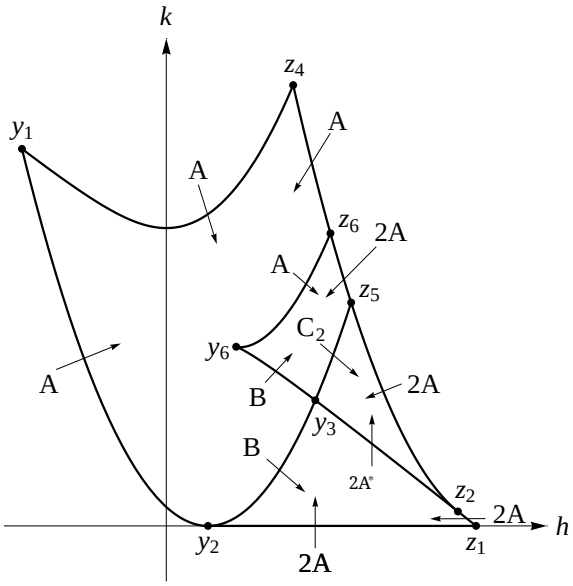


图15：区域V： $f_m(b) < a$

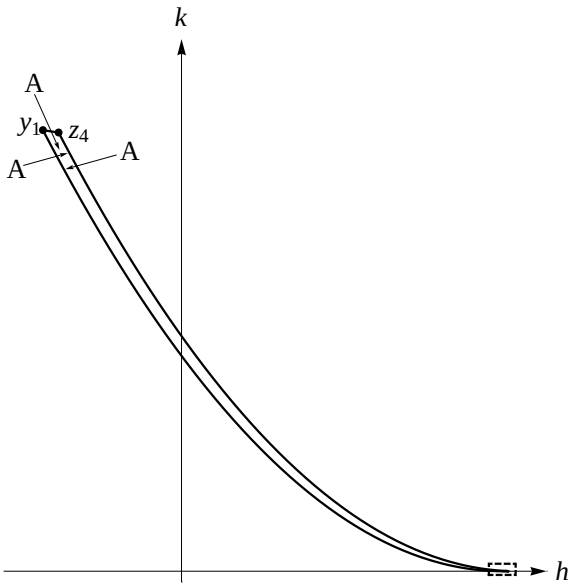


图16：区域VI：$0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$， $f_t(b) < a < f_r(b)$

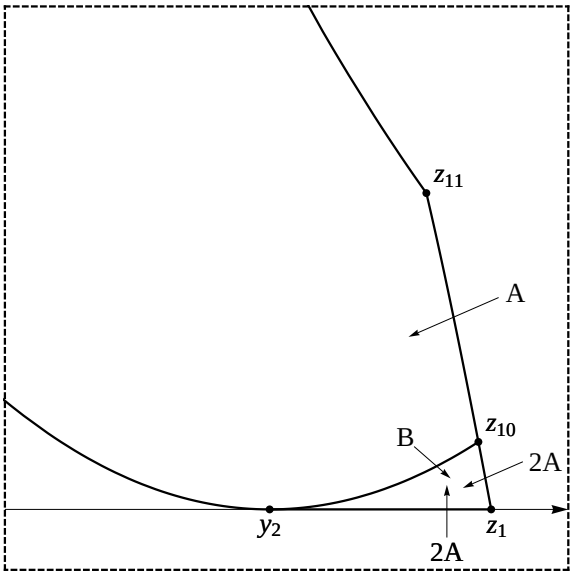


图17：区域VI：图16的放大部分

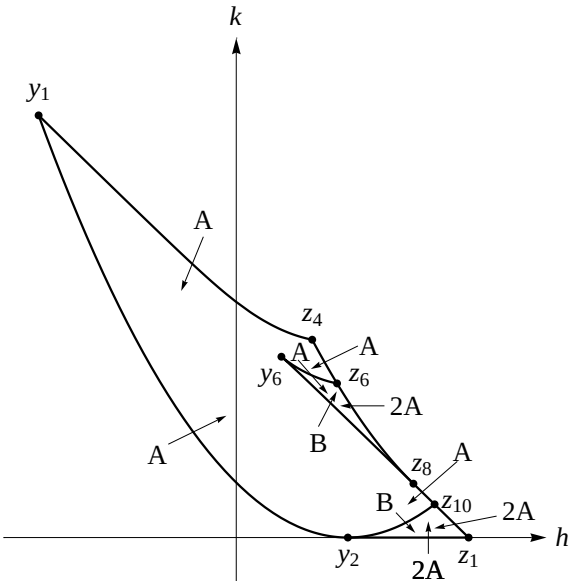


图18：区域 VII：$0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$， $\max(f_t(b)\ f_r(b)) < a < f_m(b)$

在轨道 $M_{a,b}$ 上该点的原像中有两个秩为 0 的临界点。若 $a = f_m(b)$，则原像中有一个秩为 0 的临界点；若$a < f_m(b)$，则原像中没有秩为 0 的临界点。若 $a > f_m(b)$，则该系列中的所有临界点都是鞍心型非退化临界点。

2. 抛物线(10)、(11) 与曲线(9)的交点。该

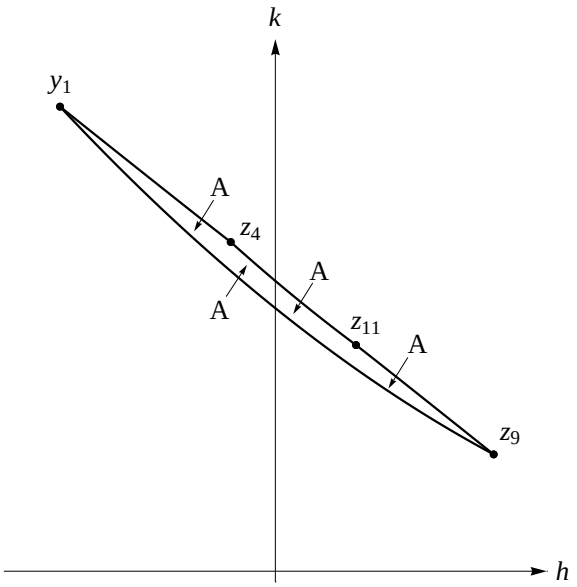


图19：区域VIII： $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$, $f_l(b) < a < \min(f_r(b), f_t(b))$

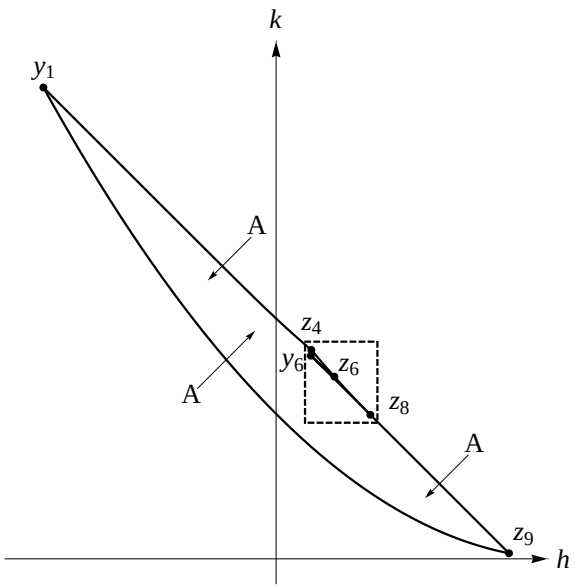


图20：区域IX：$0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$, $f_r(b) < a < f_t(b)$

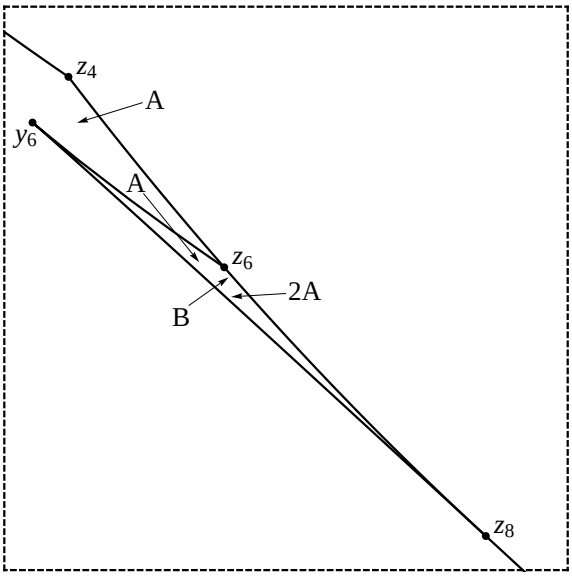


图21：区域IX：图 2 的放大部分

曲线(9) 的对应参数值 z 由下列方程给出

$$z^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2.$$

对于每条非奇异轨道$M_{a,\ b}$ 每个交点的原像中恰有一个秩为0 的临界点，其中交点是曲线(9)与抛物线的交点。满足 $z < 0$ 的两个临界点（即图*3–25*中的点 y_1 和 z_4 ）均为中心-中心型。

其余各点的类型见表*1*。这里， z_{+l} 和 z_{+r} 分别是曲线(9) 与左侧抛物线(10)、右侧抛物线(11) 的其余交点，而函数 $f_r(b)$、 $f_m(b)$ 和 $f_t(b)$ 分别由公式(13)、(14) 和(15)给出。（在图*3–21*中，点z_{+r} 根据点的类型分别记为 z_3、 z_6 或 z_{11} 。点 z_{+l}记为 y_3、 y_7、 y_{12}、 z_9 或 z_{10}。）

		$0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$	$b^2 > \varkappa^3 c_1^4$
$a > f_m(b)$	z_{+r} z_{+l}	中心-中心 鞍点-鞍点	中心-中心 鞍点-鞍点
$f_m(b) > a > f_t(b)$ $a \neq f_r(b)$	z_{+r} z_{+l}	中心-中心 中心-鞍点	中心-鞍点 鞍点-鞍点
$f_t(b) > a > f_l(b)$ $a \neq f_r(b)$	z_{+r} z_{+l}	中心-中心 中心-中心	中心-鞍点 中心-鞍点

表1：曲线 (9) 与抛物线 (10) 和 (11) 的交点类型。

3. 曲线(9) 与直线 $k = 0$ 的交点（图*3–21*中的点 y_{10}、 y_{11}和 z_1 ）。对于位于点右侧的每个交点的原像

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}$$

（即位于抛物线(11) 与直线$k = 0$的交点右侧），恰有两个秩为0 的临界点，且这两个点的类型相同。其他所有交点的原像均为空。换言之，

- 若 $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$ 且 $a < f_t(b)$，其中函数 $f_t(b)$ 由公式(15)给出，则原像中不存在该系列的秩为0 的临界点；

- 若 $a > f_t(b)$ 且 $a > f_k(b)$，其中 $f_k(b)$ 由公式(12)给出，则该系列在轨道上有2个点；
- 若 $f_k(b) > a > f_t(b)$ （仅当 $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$ 时才可能），则原像包含该系列中的6 个点。
- 若 $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$ 且 $a < f_t(b)$，则原像包含该系列中的4 个点。

参数为 $z > z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2}$ 的交点所对应的点，也就是说，参数大于曲线(9) 尖点参数的点（即图*3–18*中的点 y_{10} 和 z_1 ），属于中心-中心型。若 $a \neq f_t(b)$，则参数为 $z < z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2}$ 的交点所对应的点（即图*6–8*中的点 y_{11} ）属于中心-鞍点型。

引理 2 的证明见第 4.3 节。

结果表明，在所考虑的情形下，关于临界点类型所获得的信息不仅使我们能够构造动量映射的分岔图，还能确定动量映射奇异点处刘维尔环面的分岔类型以及环分子。与定理 1 的证明一样，定理 2 和定理 3 的证明见第 4.4 节。

与经典科瓦列夫斯卡娅情形一样，对应于分岔图中光滑正则弧的环面分岔只有四种类型。按照 [4] 中的术语，它们分别对应原子 A、 A^*、 B 和 C_2。

定理 2。 图 *3–30* 中，为动量映射的每个分岔图标出了对应于分岔图不同弧段的刘维尔环面分岔，并标记了分岔图的所有奇异点。

分岔图的奇异点记为 y_1–y_{13} 和 z_1–z_{11}。这些点对应于尖点、分岔曲线的交点和相切点，它们构成了动量映射的分岔图（请回忆引理 1 中对这些曲线的描述）。

奇异点 y_1，y_3，y_7，y_{10}–y_{12}、 z_1，z_3–z_7 和 z_9–z_{11} 对应于动量映射 $\mathcal{F} = (H, K) : M^4_{a,\,b} \to \mathbb{R}^2$ 的非退化奇点。用相同字母标记的点对应于同一类型的奇点。这些非退化奇点的类型见引理 2 和引理 4。

点 y_2，y_4，y_5，y_6，y_8，y_9，y_{13}，z_2 和 z_8 对应于群 $\mathbb{R}^2$ 在 $M_{a,\,b}$ 上作用所产生的退化的一维轨道，该作用由哈密顿量 (7) 和积分 (8) 生成。（本文不确定秩 1 临界点的类型，但可以对其类型作出推测——它们很可能是 [4] 中描述的典型奇点。奇点的类型可以很容易地从其环分子推断出来。）接下来的陈述保证，分岔图中所有其他点的原像里的奇点都是非退化的。

断言 1。 在李代数 $so(4)$、 $e(3)$ 和 $so(3,1)$ 的所有非奇异轨道 $M_{a,\,b}$ 上，所考虑的、哈密顿量为 (7)和 (8) 的可积哈密顿系统均为 *Bott* 型。换言之，对于参数 a 和 b 的所有非奇异值，分岔图中非奇异点的原像内的所有临界点（即分岔图平滑弧段上既不是尖点，也不是交点或相切点的点）都是秩为 1 的非退化点。

断言 1 的证明见第 4.1 节。需要强调的是，本文证明了对于铅笔 $so(4) - e(3) - so(3,1)$ 的所有非奇异轨道，系统均为 Bott 型。

注 6. 不难理解图 3–30 中未展示的其余非奇异轨道的分岔图结构。例如，在 $a = f_k(b)$ $\varkappa > 0$ 的情形下，参数曲线 (9) 与直线 $k = 0$ 相交于尖点。毫无疑问，分岔图结构发生变化处的秩为 0 的临界点是退化的。在第 4.3 节中，在证明引理 1 时，我们实际上证明了一个更一般的结论：其余的点——在这些点的某个邻域内，分岔图在

从平面 $\mathbb{R}^2(a,\ b)$ 的一个区域移至另一个区域时，其结构不会发生变化——仍然是非退化的，且其类型不变。

定理 3. 图 *3–30* 所示分岔图中所有奇异点对应的环分子列于表*2*和表*3*中。标有相同字母的图表中奇异点对应的环分子相同。

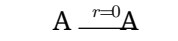
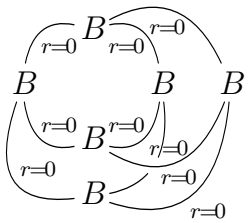
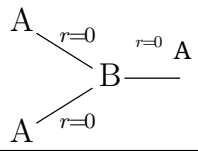
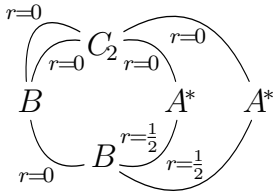
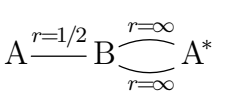
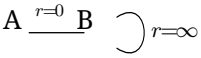
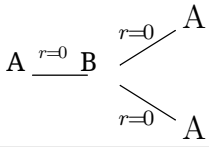
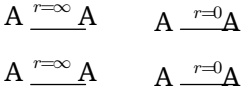
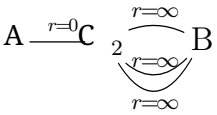
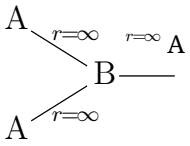
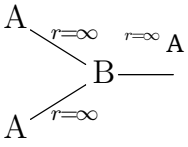
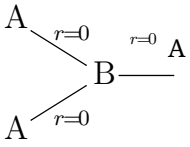
y_1		y_7	
y_2			
y_3		y_8	 两次
		y_9	 两次
y_4		y_{10}	
y_5		y_{11}	 两次
		y_{12}	
y_6		y_{13}	 两次

表2：环分子，经典科瓦列夫斯卡娅情形。

注7. 对于分岔图边界上的点，表2和表3中的环分子均按逆时针方向展示。尽管在这种情况下，歧义可能只会出现在点 z_2 处。该点对应的环分子必须

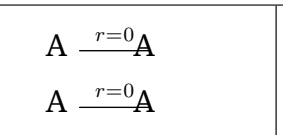
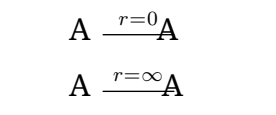
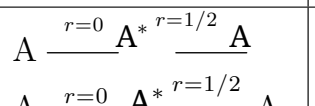
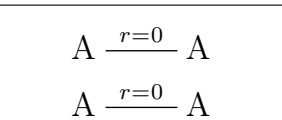
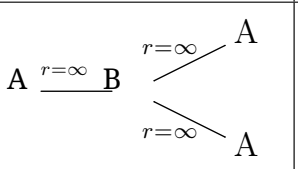
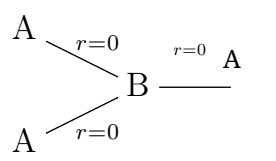
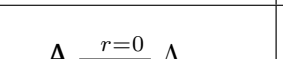
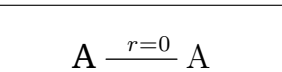
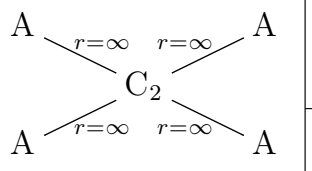
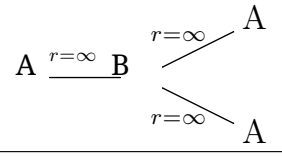
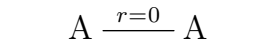
z_1		z_6	
z_2		z_7	
z_3		z_8	
z_4		z_9	
z_5		z_{10}	
		z_{11}	

表 3：新的环分子。

由两个相同的分子组成，两者的形式都与称为椭圆周期倍增分岔的退化奇点相同。（有关退化奇点的更多内容，请参见例如 [4]。）

我们强调，在定理 2 和定理 3 中，我们不仅考虑 $\varkappa > 0, b \neq 0$情形，还考虑 $\varkappa > 0, b = 0$ 和 $\varkappa = 0$情形。注意，对于 $\varkappa = 0$，所得结果与经典科瓦列夫斯卡娅情形的已知结果完全一致（例如，见 [4]）。

注 8。书中 [4] 关于科瓦列夫斯卡娅可积情形的环分子列表存在一处不准确之处：对应点 y_8 和 y_9 的分子应各重复两次。

3.1 $\varkappa > 0, b = 0$情形

现在我们描述第二积分 $b = 0$时的结果。下面的引理将在第 4.1 节中证明，此外还将证明引理 1。

引理 3. 设 $\varkappa \neq 0$ 和 $b = 0$。那么对于任意非奇异轨道 $M_{a,0}$（即满足 $a \neq 0$ 的轨道），可积哈密顿系统的分岔图 $\Sigma_{h,k}$（其哈密顿量为 (7)，积分为 (8)）包含于以下

平面 $\mathbb{R}^2(h,k)$上的三族曲线:

1. 直线 $k=0$;

2. 抛物线与

$$k=(h-\varkappa c_1^2)^2+4ac_1^2 \tag{17}$$

该抛物线在点 $h=0$ 处的切线的并集

$$k=-2\varkappa c_1^2 h+(4ac_1^2+\varkappa^2 c_1^4); \tag{18}$$

3. 两条抛物线的并集

$$k=\left(h-\varkappa c_1^2\right)^2 \tag{19}$$

and

$$k=\left(h-\varkappa c_1^2-\frac{2a}{\varkappa}\right)^2. \tag{20}$$

现在，为了构造动量映射的分岔图，只需舍弃引理 3 中描述的曲线的若干部分。分岔图的精确描述见定理 4（另见图 22–25）。

现在来描述秩为 0 的临界点集合。以下引理与引理 2 一样，已在第 4.3 节中证明。

引理 4. 设 $\varkappa>0$ 和 $b=0$。那么，秩为0 的临界点的像包含于以下三族点的并集:

1. 抛物线(19) 与(20) 的交点（图 *22* 中的点 z_5 ）。该点的坐标为

$$h=\varkappa c_1^2+\frac{a}{\varkappa},\quad k=\frac{a^2}{\varkappa^2}.$$

若 $a>\varkappa^2 c_1^2$，则轨道 $M_{a,0}$上该点的原像中有两个秩为0 的临界点。若 $a=\varkappa^2 c_1^2$，则原像中有一个秩为0 的临界点；若 $a<\varkappa^2 c_1^2$，则原像中没有秩为0 的临界点。若 $a>\varkappa^2 c_1^2$ ，则该系列中的所有临界点均为鞍中心型非退化临界点。

2. 上抛物线(17) 与切线(18) 同抛物线(19)和(20)的交点。

对于任意 $a>0$ ，直线 (18) 与左侧抛物线 (19)有两个交点，其坐标为

$$h=\pm 2\sqrt{a}c_1,\quad k=(\pm 2\sqrt{a}c_1-\varkappa^2 c_1^2)^2$$

并且，在轨道$M_{a,0}$上这些点中，每个点的原像中恰有一个秩为0 的临界点。

(a) 上方交点的原像中的临界点（即图 *22 - 25* 中的点 y_1 ）是一个中心–中心型非退化临界点。

(b) 若 $a > \varkappa^2 c_1^2$，则下方交点（即图 *22* 中的点 y_3 、图 *23* 中的点 z_{10} 以及图 *24*、*25* 中的点 z_9 ）原像中的临界点 p 是鞍点–鞍点型非退化临界点。若 $\frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2$，则 p 是鞍点–中心型非退化临界点；若 $a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$，则 p 是中心–中心型非退化临界点。

(c) 上抛物线 (17) 与右侧抛物线 (20) 的交点（图 *22–25* 中的点 z_7 ）原像中有两个秩为 0 的临界点

$$h = \frac{a}{\varkappa}, \quad k = (\frac{a}{\varkappa} - \varkappa c_1^2)^2 + 4ac_1^2$$

在每条轨道 $M_{a,\,0}$ 上（其中 $a > 0$），且原像中的两个点都是中心–中心型非退化临界点。

3. 直线 $k = 0$ 与切线(18) 的交点（图 *22* 和 *23* 中的点 z_1）。该点的坐标为

$$h = \frac{\varkappa c_1^2}{2} + \frac{2a}{\varkappa}, \quad k = 0.$$

若 $a > \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$，则在轨道 $M_{a,\,0}$上该点的原像中有两个秩为0 的中心–中心型临界点。若 $a = \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$，则原像中有一个秩为$0$ 的临界点；若 $a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$，则原像中没有秩为$0$ 的临界点。

当 $\varkappa > 0$ 且 $b = 0$ 时，存在三种定性不同的分岔图类型。这是因为由公式 (12)、(13)、(14)、(15) 和 (16) 分别给出的函数 f_k，f_r，f_m，f_t 和 f_l 将射线 $\{b = 0, a \geq 0\}$分成了 3 部分。

定理 4. 当 $\varkappa > 0$ 和 $b = 0$ 时，分岔图的形式取决于参数 a。以下三种情况下的图表在定性上有所不同：

1. $0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$,
2. $\frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2$,
3. $\varkappa^2 c_1^2 < a$.

对应的分岔图见图 *22–25*，其中直线和抛物线的公式见引理 *3*。

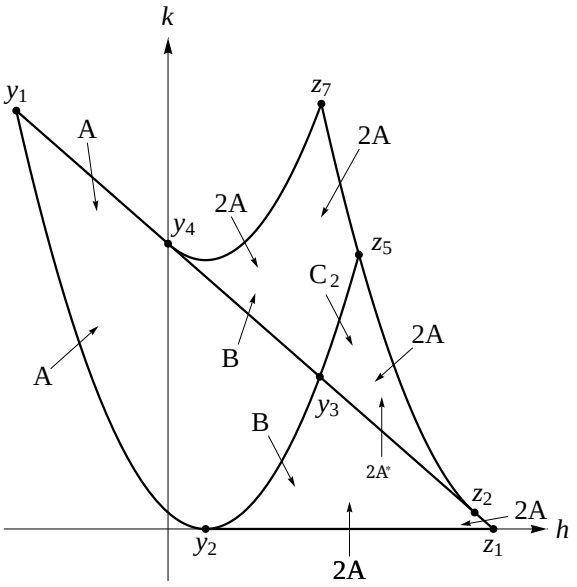


图22：区域X： $b = 0, \qquad \varkappa^2 c_1^2 < a$

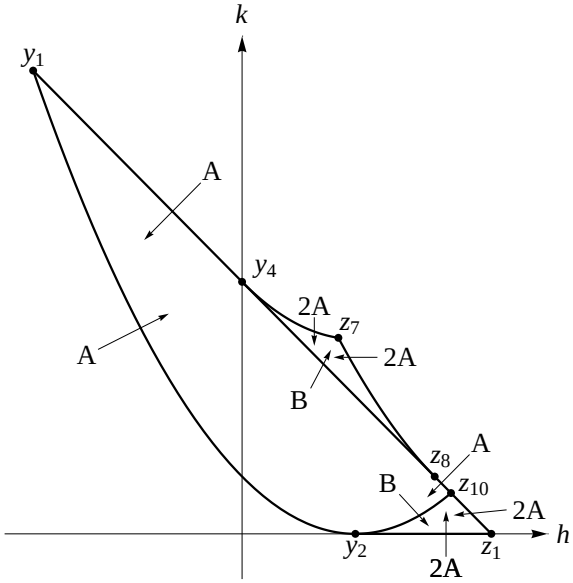


图23：区域XI： $b = 0, \qquad \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2$

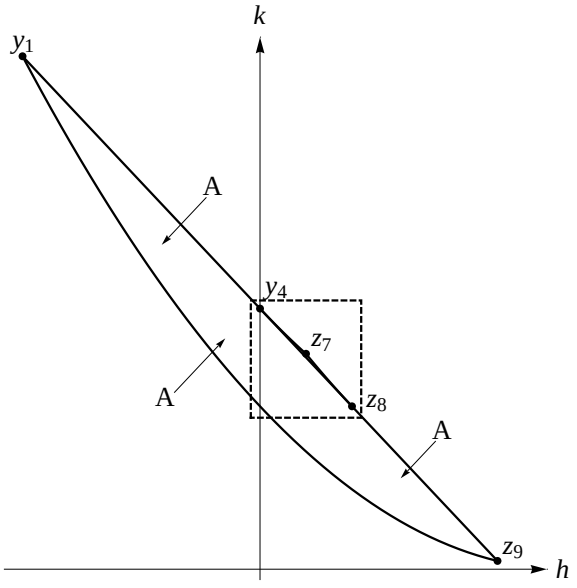


图24：区域XII： $b = 0, \qquad 0 < a < \frac{\varkappa^2 c_{14}^2}{}$

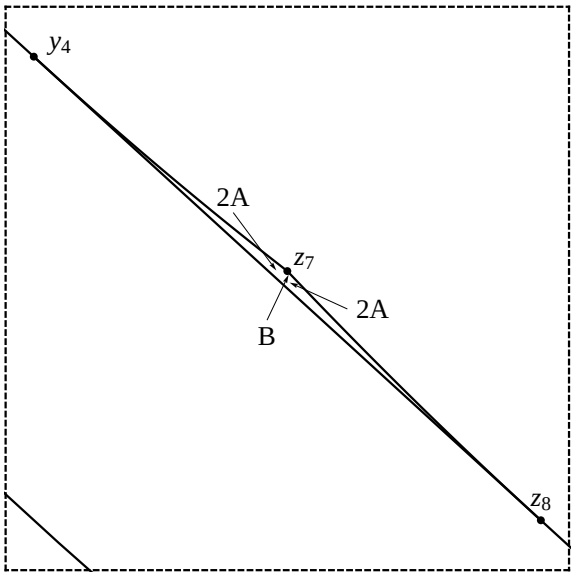


图25：区域XII：图24的放大部分

注9. 在图 22–25 中，弧段 z_2z_1， z_8z_9 和 z_8z_{10} 属于直线 (18)，弧段 y_4z_7 属于上抛物线 (17)。其余弧段显然分布在各条曲线上。

情形 $b = 0$ 的分岔图此前也已在论文[14]中描述。

刘维尔环面的分岔以及奇异点对应的环分子为

分别在定理 2 和定理 3 中描述。

4 主要结论的证明

4.1 秩为 1 的临界点

在本节中，我们证明引理 1 和引理 3；这两个引理断言，分岔图包含于这些引理中所描述的曲线内。为此，我们首先在断言 2 中描述动量映射的所有临界点，然后研究这些临界点在动量映射下的像。注意，除断言 15 中的点之外，所有这些临界点都是秩 1 临界点。

需要强调的是，本节不对参数$\varkappa$ 和 b 施加限制（即 $\varkappa, b \in \mathbb{R}$，除非另有说明）。

断言 2. 与哈密顿量 (7) 和积分 (8) 相对应的哈密顿向量场线性相关的点集，是以下六族点的并集。前三族为三参数族，后三族为四参数族。

四参数族：

1. $x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}, \qquad x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}$
2. $J_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{J_1 J_3}{c_1}$
3. $x_1 = \varkappa c_1 + (J_1 - c_1 \frac{x_3}{J_3}) \frac{x_2}{J_2}, \qquad x_2 = J_2 \frac{(J_1 x_3 - \varkappa c_1 J_3)(J_1 J_3 - c_1 x_3) + J_2^2 J_3 x_3}{(J_1 J_3 - c_1 x_3)^2 + J_2^2 J_3^2},$
   $where\ J_2 J_3 \neq 0.$

三参数族：

4. $J_2 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad J_1 x_3 - J_3 x_1 = 0$
5. $J_3 = 0, \qquad x_3 = 0,$
   $((x_1 - \varkappa c_1) J_1 + J_2 x_2)(J_2(x_1 - \varkappa c_1) - J_1 x_2) + c_1 x_2 (x_1 (x_1 - \varkappa c_1) + x_2^2) = 0$
6. $J_1 = 0, \qquad J_3 = 0, \qquad x_2 = 0$

证明。哈密顿向量场 X_H 和 X_K 线性相关的点，恰好是矩阵 $\big(X_H, \quad X_K\big)$的全部 15 个秩 2 子式均为零的点；该矩阵由向量 X_H 和 X_K 的坐标组成。

注意 t hat 对应于第一条和第三条直线的子式 Δ_{13} 具有如下形式

$$\begin{vmatrix} \{J_1, H\} & \{J_1, K\} \\ \{J_3, H\} & \{J_3, K\} \end{vmatrix} = 16 c_1 \left(c_1 x_2 - J_1 J_2\right) \left(J_2 J_3 \left(\varkappa c_1 - x_1\right) + \left(J_1 J_3 - c_1 x_3\right) x_2\right)$$

因此，要么是 $x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}$，要么是 $J_2 J_3 \ (\varkappa c_1 - x_1) \ + \ (J_1 J_3 - c_1 x_3) \ x_2 = 0$。

首先，我们考察 $x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}$ 的情况。将 x_2 代入由子式组成的矩阵中，我们立即得到第一个解

$$x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}, \qquad x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}. \tag{21}$$

其余部分通过穷举法证明。若 $x_3 = \frac{J_1 J_3}{c_1}$，则得到以下三个解族：

$$x_1 = \varkappa c_1, \qquad x_2 = \frac{J_1 J_2}{c_1}, \qquad x_3 = \frac{J_1 J_3}{c_1}, \tag{22}$$

$$J_2 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{J_1 J_3}{c_1}, \tag{23}$$

$$J_1 = 0, \qquad J_3 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0. \tag{24}$$

若 $x_3 \neq \frac{J_1 J_3}{c_1}$，则得到以下两个解族：

$$J_1 x_3 - J_3 x_1 = 0, \qquad J_2 = 0, \qquad x_2 = 0, \tag{25}$$

$$J_1 = 0, \qquad J_3 = 0, \qquad x_2 = 0. \tag{26}$$

现在假设 $J_2 J_3 (\varkappa c_1 - x_1) + (J_1 J_3 - c_1 x_3) x_2 = 0$, $x_2 \neq \frac{J_1 J_2}{c_1}$。有两种情况：要么是 $J_2 J_3 = 0$，要么是 $x_1 = \frac{\varkappa c_1 J_2 J_3 + J_1 J_3 x_2 - c_1 x_2 x_3}{J_2 J_3}$。

若 $J_2 = 0$，则得到第二个四参数秩一点族：

$$J_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{J_1 J_3}{c_1}. \tag{27}$$

若 $J_2 \neq 0$, $J_3 = 0$，则得到以下解：

$$\begin{gathered} J_3 = 0, \qquad x_3 = 0, \\ ((x_1 - \varkappa c_1) J_1 + J_2 x_2)(J_2 (x_1 - \varkappa c_1) - J_1 x_2) + c_1 x_2 (x_1 (x_1 - \varkappa c_1) + x_2^2) = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

现在考虑情形 $x_1 = \frac{\varkappa c_1 J_2 J_3 + J_1 J_3 x_2 - c_1 x_2 x_3}{J_2 J_3}$。容易验证，在这种情况下，子式 Δ_{12} 等于

$$-16 c_1 \left(x_2 (J_2^2 J_3^2 + (J_1 J_3 - c_1 x_3)^2) - J_2 ((\varkappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2) J_3 x_3 - c_1 J_1 x_3^2 - \varkappa c_1 J_1 J_3^2) \right).$$

x_2 的系数不为零，因为情形 $J_2 J_3 = 0$ 已经分析过。由此方程解出 x_2，得到第九个解：

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\varkappa c_1 J_2 J_3 + J_1 J_3 x_2 - c_1 x_2 x_3}{J_2 J_3}, \\ x_2 &= J_2 \frac{(\varkappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2) J_3 x_3 - c_1 J_1 x_3^2 - \varkappa c_1 J_1 J_3^2}{(J_1 J_3 - c_1 x_3)^2 + J_2^2 J_3^2}. \end{aligned} \tag{29}$$

至此，我们已经讨论了所有情形。剩下的工作是汇总所有解。显然，族 (24) 是解 (26) 的一个特例，而解 (23) 是解 (27) 的特例。还需指出，族 (22) 包含在族 (27)、(28) 和 (29) 中。断言 2 得证。

□

现在来证明引理 1。为此，我们证明断言 2 中临界点的像属于引理 1 所描述的曲线。

断言 3. 设 $\varkappa \neq 0$ 和 $b \neq 0$。那么，断言 *2* 中所述临界点族的像排列如下：

1. 族 *1* 中临界点的像位于直线 $k = 0$ 上。

2. 族 *2* 中临界点的像属于曲线 (9) .

3. 族 *3*、*4*、*5* 和 *6* 中临界点的像位于两条抛物线 (10)和 (11)的并集上。

证明。 1. 可直接验证 $k = 0$。

2. 方程 (9) 可按如下方式得到。取函数 $J_3^2 + c_1 x_1$ 作为参数 z。注意，由于 $b \neq 0$, $J_3^2 + c_1 x_1 \neq 0$。因此，可由 b 的公式得到 J_1，进而可由 a的公式得到 x_2 。只需将所得的 J_1 和 x_2 的表达式代入哈密顿量 (7) 和第一积分 (8) 的方程中，然后用 z 替换 $J_3^2 + c_1 x_1$。由此，方程 (7) 和 (8) 化为形式 (9)，证毕。

3. 可以明确验证，对于族 3、4 和 5 中的任意一点，方程 (10) 和 (11) 中至少有一个成立。

在这种情况下，先验证 $k = \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2$ 会更容易，其中 λ 是 X_K 与 X_H 之间的比例系数（即 $X_K + \lambda X_H = 0$），然后再检查

$$-\frac{\lambda}{2} = h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}.$$

验证这个等式时，使用以下关系会比较方便

$$\frac{a}{b} = \frac{x_3}{J_3} + \varkappa \frac{J_3}{x_3},$$

当 $J_3 \neq 0$ 和 $x_3 \neq 0$ 时，该关系成立。

断言 3 得证。 □

接下来，我们需要关于断言 2 中族 2 的临界点的以下结论。

断言 4. 设 $\varkappa \neq 0$ 和 $b \neq 0$。那么对于 $z^2 > \frac{a+\sqrt{a^2-4\varkappa b^2}}{2} - c_1^2$，曲线$(9)$ 上各点的原像中要么没有临界点，要么临界点构成两个临界圆，且对称性$(J_3, x_3) \to (-J_3, -x_3)$会交换这两个圆。

证明。不难验证，对于固定参数 z，族 2 中的临界点由以下方程给出

$$J_1 = \frac{b c_1}{z}, \quad J_2 = 0, \quad x_1 = \frac{z - J_3^2}{c_1}, \quad x_3 = \frac{b}{z} J_3,$$

其中坐标 J_3 和 x_2 满足以下形式的方程

$$\left(\frac{J_3^2}{c_1}+d\right)^2+x_2^2=R^2 \tag{30}$$

对于某些依赖于 $\varkappa$，a，b 和 z 的常数 d 和 R。因此，为了证明该断言，只需证明对于 $z^2>\frac{a+\sqrt{a^2-4\varkappa b^2}}{2}c_1^2$，有 $J_3\neq 0$。不难直接验证：~~若 $J_3=0$，~~ 则方程 (30) 具有如下形式

$$z^4-ac_1^2z^2+\varkappa b^2c_1^4=0,$$

该方程恰有解当且仅当

$$\frac{a-\sqrt{a^2-4\varkappa b^2}}{2}c_1^2<z^2<\frac{a+\sqrt{a^2-4\varkappa b^2}}{2}c_1^2.$$

断言 4 得证。 □

现在证明引理 3。

断言 5。 设 $\varkappa\neq 0$ 和 $b=0$。那么，断言 *2* 中描述的临界点族的像排列如下：

1。族 *1* 中临界点的像位于直线 $k=0$ 上。

2. 族 *2* 中临界点的像属于抛物线(17)与切线 (18)的并集。 *3.* 族 *3*、*4*、*5* 和 *6* 中临界点的像位于两条抛物线 (19)和 (20)的并集上。

证明。该结论的证明几乎与断言 3 的证明完全相同，只有以下几点不同。首先，在确定族 2 的像时，应考虑 $J_3^2+c_1x_1=0$ 情形。不难直接验证，此时其像位于抛物线 (17) 上。其次，我们必须考虑族 6，并证明其像位于左侧抛物线 (19) 上。

□

现在我们证明关于秩 1 临界点非退化性的断言 1。为证明这一点，我们使用以下关于秩 1 临界点的简单非退化性判据（参见 [4]）。

断言6。设(M^4,ω) 为一个辛流形，且 $y_0\in(M,\omega)$ 是某个可积系统的秩1 临界点，该系统的哈密顿量为 H，积分为 K。记$F=\alpha H+\beta K$ 为一个非平凡线性组合，使得点 y_0 是临界点；记 A_F 为相应哈密顿向量场 X_F 在该点 y_0处的线性化。当且仅当算子 A_F 具有非零特征值时，点 y_0 是非退化的。

在所考虑的情形中，系统定义在一个泊松流形上。因此，采用下面的断言较为方便。

断言7. 设在点 x_0 的某个邻域内，局部坐标 $(p^1, \ldots, p^k, q^1, \ldots, q^k,$ $z^1 \ \ldots \ z^m$,,) 下，泊松括号具有形式 $\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial p^i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^i}$。另设 x_0 是哈密顿量为 F 的哈密顿向量场 X_F 的临界点。那么，哈密顿向量场 X_F 的线性化 A_F 具有如下形式

$$(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial p^j}\frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dp^j + \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j}\frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dq^j + \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial z^j}\frac{\partial}{\partial p^i} \otimes dz^j) -$$
$$(\frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial p^j}\frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dp^j + \frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial q^j}\frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dq^j + \frac{\partial^2 F}{\partial p^i \partial z^j}\frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dz^j).$$

^因此，若 F 是函数 F 在某个辛叶上的限制，那么向量场 X_F 的线性化谱可由向量场 $X_{\hat{F}}$ 的线性化谱通过添加零特征值获得，添加的零特征值数量等于该辛叶的余维。因此，与辛情形一样，要检验秩 1 点的非退化性，只需验证相应算子的谱并非全为零。

这一点可以通过显式计算加以验证。为简化下述断言中的验证，我们给出与哈密顿量 (7) 和积分 (8) 相对应的哈密顿向量场之间的比例系数 λ，并描述所研究的可积哈密顿系统中所有秩 1 临界点（即断言 2 中除断言 15 所述的秩 0 点之外的所有点）处相应哈密顿向量场 $X_{K+\lambda H}$ 的线性化谱。

断言 8. 对于断言 *2* 中每个秩为1 的临界点，我们指定 λ，使得 $X_K + \lambda X_H = 0$ 在该点成立；并指定 μ，使得算子 $A_{K+\lambda H}$的谱由四个零和 $\pm\mu$组成。

四参数族：

1. 族 *1.* 比例系数为 $\lambda = 0$，即 $X_K = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$。非平凡特征值：

$$\mu = 8i|\left(\varkappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2\right) J_3 - 2c_1 J_1 x_3|.$$

2. 族 *2.* 比例系数：

$$\lambda = 2\left(\varkappa c_1^2 - J_1^2\right),$$

特征值的平方：

$$\mu^2 = 64c_1\left(J_1^2 - J_3^2 - c_1 x_1\right)\left(\left(J_1^2 - c_1 x_1\right)\left(x_1 - \varkappa c_1\right) - c_1 x_2^2\right).$$

3. 族 *3.* 比例系数：

$$\lambda = 2\left(\varkappa c_1^2 + J_1^2 + J_2^2 - 2c_1 J_1 \frac{x_3}{J_3}\right),$$

特征值的平方：

$$\mu^2 = -32\lambda\left(\left(J_1 J_3 - c_1 x_3\right)^2 + \left(\left(J_1^2 + J_2^2\right) - c_1 \frac{J_1 x_3}{J_3}\right)^2 + J_2^2\left(\varkappa c_1^2 + J_3^2\right)\right).$$

三参数族：

4. 族 *4*。比例系数：

$$\lambda = 2\left(\varkappa c_1^2 + J_1^2 - 2c_1x_1\right),$$

特征值的平方：

$$\mu^2 = -32\lambda\left(\left(J_1^2 - c_1x_1\right)^2 + \left(J_1J_3 - c_1x_3\right)^2\right)$$

5. 族 *5*。这里假设 $x_2 \neq 0$，因为族 *5* 中满足条件 $x_2 = 0$ 的所有点，要么秩为 0，要么属于族 *6*。比例系数：

$$\lambda = 2(\varkappa c_1^2 - J_1^2 + J_2^2) + \frac{4}{x_2}J_1J_2\left(x_1 - \varkappa c_1\right).$$

如果还满足 $x_1 \neq \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}$，那么特征值的平方等于：

$$\mu^2 = \frac{16\lambda^2 J_2\gamma}{x_2\left(\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1\right)},$$

其中

$$\gamma = \left(c_1J_1x_2^2 - J_1\left(x_1 - \varkappa c_1\right)\left(J_1^2 - J_2^2 - c_1x_1\right) - J_2x_2\left(\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1\right)\right).$$

如果 $x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2 - J_2^2}{2c_1}$，那么要么 $x_2 = \frac{J_1J_2}{c_1}$，要么 $x_2 = \pm\frac{\varkappa c_1^2 - J_1^2 + J_2^2}{2c_1}$。第一种情况下$\mu = 0$，第二种情况下

$$\mu^2 = -32J_2^2\lambda\left(\varkappa c_1^2 + \left(J_1 \mp J_2\right)^2\right).$$

6. 族 *6.* 比例系数：

$$\lambda = 2\left(\varkappa c_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1\right),$$

特征值的平方：

$$\mu^2 = -32\lambda c_1^2\left(\varkappa J_2^2 + x_1^2 + x_3^2\right).$$

断言 *1.* 我们利用断言 6 证明秩 1 点的非退化性。相应算子的比例系数和谱在断言 8 中给出。此后，通过穷尽法证明非退化性。断言 1 得证。

□

4.2 分岔图类型。（情形 $b \neq 0$）

本节将说明，引理 1 中的曲线彼此之间的位置关系如图3–21所示（对应参数 a 和b 的取值）。由此，我们实际上描述了动量映射所有可能的分岔图。我们主要关注分岔图中的奇异点，即尖点、这些曲线的交点和相切点。

首先，显然，对于参数 a 和 b 的任意取值，抛物线 (10) 和 (11) 分别与直线 $k = 0$ 相交于点

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}, \qquad \text{and} \qquad h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}$$

并且彼此相交于点

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa}, \qquad k = \frac{a^2 - 4\varkappa b^2}{\varkappa^2}. \tag{31}$$

因此，接下来只需描述曲线 (9) 相对于直线 $k = 0$ 和抛物线 (10)、(11) 的相对位置。

本节首先描述曲线 (9)（见断言 9），然后确定该曲线与上述抛物线（见断言 10）以及直线 $k = 0$ （见断言 11）的交点个数。此后，本节其余部分将研究这些“奇异”点之间的相对位置。最终结果可表述如下。

引理 5。 由公式 (12)、(13)、(14)、(15) 和(16) 给出的函数 f_k、f_r、f_m、f_t 和 f_l 将区域 $\{b > 0, a > 2\sqrt{\varkappa}b\}$ 分成9 个子区域。在每个子区域中，直线 $k = 0$、抛物线(10)、(11) 以及曲线(9) 的尖点、交点和相切点在这四条曲线上的分布如图*3–21*所示。

我们先来描述曲线 (9)。

断言 9. 设 $\varkappa \neq 0$ 。那么对于任意的 a、$b \in \mathbb{R}$、$b \neq 0$，曲线 (9) 有一个尖点

$$z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2} \tag{32}$$

和两个局部极值点

$$z_{+ext} = \frac{|b|}{\sqrt{\varkappa}} \qquad and \qquad z_{-ext} = -\frac{|b|}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{33}$$

对于参数 a 和 b 的任意取值，点 z_{-ext} 都是局部极小值点。若 $b > \varkappa^{3/2} c_1^2$，则点 z_{+ext} 是局部极大值点。若 $b < \varkappa^{3/2} c_1^2$，则点 z_{+ext} 是局部极小值点。（若 $b = \varkappa^{3/2} c_1^2$，则点 z_{+ext} 与尖点 z_{cusp} 重合。）换言之，函数 $k(z)$ 在点 z_{+ext} 和 z_{cusp} 之间单调递增，并在射线 $z > 0$ 的其余部分单调递减。

对应函数的图在 $z < z_{cusp}$ 处凹向上，在 $z > z_{cusp}$处凹向下。

当 $z \to \pm\infty$ 时，曲线(9) 渐近于直线

$$k = -2\varkappa c_1^2 h + (4ac_1^2\varkappa^2 c_1^4).$$

此外，当 $z \to \pm 0$ 两个函数 $h(z)$ 和 $k(z)$ 同时趋于 $+\infty$ ，并且

$$\frac{k(z)}{h^2(z)} \underset{z\to\pm 0}{\longrightarrow} 1.$$

现在我们来描述曲线 (9) 与其他曲线的交点：与抛物线 (10)、(11) 以及直线 $k = 0$ 的交点。我们先讨论与抛物线的交点。下面命题的证明可通过直接计算得到。

断言 10. 设 $\varkappa \neq 0$ 和 $b \neq 0$。则曲线 (9) 与左侧抛物线 (10)有两个交点和一个切点。交点对应的参数值 z_{+l} 和 z_{-l} 满足关系式

$$z^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2. \tag{34}$$

切点对应的参数值为

$$z_{lt} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2\varkappa}. \tag{35}$$

类似地，曲线 (9) 与右侧抛物线 (11) 有两个交点，相应的参数值 z_{+r} 和 z_{-r} 满足关系式

$$z^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2 \tag{36}$$

以及一个与参数值对应的切点

$$z_{rt} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2\varkappa}. \tag{37}$$

注 10. 在断言 10 中（以及下文中），我们假设 $z_{+l} > 0$ and$z_{+r} > 0$。因此， $z_{-l} < 0$ and $z_{-r} < 0$。

现在我们来求直线 $k = 0$ 与曲线 (9) 的交点个数。

断言 11. 设 $\varkappa > 0$。那么，直线 $k = 0$ 与曲线 (9) 的交点个数取决于参数 a 和 b 的取值，具体如下。考虑函数

$$f_k(b) = \frac{3b^{4/3} + 6\varkappa b^{2/3} c_1^{4/3} - \varkappa^2 c_1^{8/3}}{4c_1^{2/3}}.$$

1. 假设 $b > \varkappa^{3/2} c_1^2$。若 $a > f_k(b)$，则直线 $k = 0$ 与曲线 (9)恰有 3 个交点。若 $a < f_k(b)$，则只有 1 个交点；若 $a = f_k(b)$，则有 2 个交点。

2. 假设 $0 < b < \varkappa^{3/2} c_1^2$。若 $a < f_k(b)$，则直线 $k = 0$ 与曲线 (9)恰有 3 个交点。若 $a > f_k(b)$，则只有 1 个交点；若 $a = f_k(b)$，则有 2 个交点。

3. 如果 $b = \varkappa^{3/2} c_1^2$，那么直线 $k = 0$ 与曲线 (9) 恰好有1 个交点，与参数 a的任意取值无关。

断言 11 的结果汇总于表 4 中。

	$0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$	$b^2 = \varkappa^3 c_1^4$	$b^2 > \varkappa^3 c_1^4$
$a > f_k(b)$	1	1	3
$a = f_k(b)$	2	1	2
$a < f_k(b)$	3	1	1

表 4：曲线 (9) 与直线 $k = 0$ 的交点数。

证明。 显然，当 $z < 0$ 时不存在交点，因为

$$k(z) = 4ac_1^2 - 4\varkappa c_1^2 z - \frac{4b^2 c_1^2}{z} + \left(\frac{b^2 c_1^2}{z^2} - \varkappa c_1^2 \right)^2 > 0.$$

由断言 9 可知，当 $z > 0$ 时，函数 $k(z)$ 有两个局部极值点：

$$z_{+\mathrm{ext}} = \frac{b}{\sqrt{\varkappa}} \qquad \text{and} \qquad z_{\mathrm{cusp}} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2}.$$

接下来需要考察这些极值点的位置，以及函数 $k(z)$ 在这些点处的值是否大于零。断言 11 得证。 □

因此，我们在由公式 (32)、(33)、(34)、(35)、(36) 和 (37) 分别确定的曲线 (9) 上找到了点 z_{cusp}， $z_{\pm\mathrm{ext}}$， $z_{\pm l}$， $z_{\pm r}$， z_{lt} 和 z_{rt}。现在确定这些点在 z 轴上的顺序。显然，

$$z_{-l} < z_{\text{-ext}} < z_{-r} < 0,$$

其他所述点对应的参数 z 的值大于零。下一个断言可由直接计算得证。

断言 12。 设 $\varkappa > 0$。那么，根据参数 a 和 b 的取值，点 z_{cusp}、z_{+ext}、z_{+l}、z_{+r}、z_{lt} 和 z_{rt} （断言 *9* 和 *10* 中所述）在射线 $z > 0$ 上的排列如表 *5* 和表 *6* 所示。这里，函数 $f_r(b)$和 $f_m(b)$ 分别由公式 (13)和 (14)给出。

现在我们描述三条曲线何时交于一点。

断言13。假设 $\varkappa > 0$, $b \neq 0$ 和 $a^2 - 4\varkappa b^2 > 0$。那么，直线 $k = 0$、曲线 (9) 和右侧抛物线 (11) 不可能交于一点。直线 $k = 0$、曲线 (9) 和左侧抛物线 (10) 交于一点，当且仅当

$$a = \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right)^2 + \varkappa t^2, \qquad b = t \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right) \tag{38}$$

对于某个 $t \in \mathbb{R}$。

$a > f_m(b)$	$z_{rt} > z_{+l} > z_{\text{cusp}} > z_{+\text{ext}} > z_{+r} > z_{lt}$
$a = f_m(b)$	$z_{rt} = z_{+l} > z_{\text{cusp}} > z_{+\text{ext}} = z_{+r} > z_{lt}$
$f_r(b) < a < f_m(b)$	$z_{+l} > z_{rt} > z_{\text{cusp}} > z_{+r} > z_{+\text{ext}} > z_{lt}$
$a = f_r(b)$	$z_{+l} > z_{rt} = z_{\text{cusp}} = z_{+r} > z_{+\text{ext}} > z_{lt}$
$a < f_r(b)$	$z_{+l} > z_{+r} > z_{\text{cusp}} > z_{rt} > z_{+\text{ext}} > z_{lt}$

表5：曲线 (9) 上点的相对位置，适用于 $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$。

$a > f_m(b)$	$z_{rt} > z_{+l} > z_{+\text{ext}} > z_{\text{cusp}} > z_{+r} > z_{lt}$
$a = f_m(b)$	$z_{rt} > z_{+l} = z_{+\text{ext}} > z_{\text{cusp}} > z_{+r} = z_{lt}$
$f_r(b) < a < f_m(b)$	$z_{rt} > z_{+\text{ext}} > z_{+l} > z_{\text{cusp}} > z_{lt} > z_{+r}$
$a = f_r(b)$	$z_{rt} > z_{+\text{ext}} > z_{+l} = z_{\text{cusp}} = z_{lt} > z_{+r}$
$a < f_r(b)$	$z_{rt} > z_{+\text{ext}} > z_{lt} > z_{\text{cusp}} > z_{+l} > z_{+r}$

表6：曲线 (9) 上的点在 $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$ 时的相互位置。

注意，在公式 (38) 中，参数 a 由 b 唯一确定，因此公式 (38) 定义了一个函数，我们将其记为 $a = f_t(b)$（见公式 (15)）。

断言 *13*。不难验证，在该断言的条件下，属于族 1、2 以及族 3、4、5 和 6 中任一族的秩 1 点就是这些点

$$x_1 = \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2}{2c_1}, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0. \tag{38}$$

对于这些点，等式 (38) 与 $t = J_1$ 一起成立。因此，如果等式成立，则曲线在一个点相交。

现在证明，如果三条曲线在一个点相交，则等式成立。不难看出，曲线 (9) 上唯一可能成为三重交点的点，是它与左侧抛物线 z_{+l} 的交点（从几何考虑也可轻易得到这一点）。由于根据假设曲线在一个点相交，等式

$$\varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa} = \frac{b^2 c_1^2}{z_{+l}^2} + 2z_{+l}$$

成立。代入等式 (34)，得到

$$(z - \varkappa c_1^2)^2 = \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}\, c_1^2. \tag{39}$$

如果令

$$z = \frac{t^2 + \varkappa c_1^2}{2},$$

其中 $\operatorname{sgn}(t) = \operatorname{sgn}(b)$，于是得到

$$\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2} = \frac{(t^2 - \varkappa c_1^2)^2}{4c_1^2}. \tag{40}$$

将 (39) 和 (40) 代入公式 (34)，即可由公式 (38) 得到所需的 a 表达式。这立即推出 b 的公式 (38)。断言 13 得证。

□

由断言 9、10、11、12 和 13 可知，引理 1 中曲线的相对位置会根据参数 a 和 b 相对于由公式 (12)、(13)、(14) 和 (15) 分别给出的函数 f_k、f_r、f_m、和 f_t 的位置而呈现定性差异。

由于在 $\varkappa > 0$ 的情形下，参数 a 和 b 的取值总是满足不等式 $a^2 - 4\varkappa b^2 \geq 0$，因此我们还考虑函数

$$f_l(b) = 2\sqrt{\varkappa}|b|.$$

现在我们描述函数 f_k、f_r、f_m、f_t 和 f_l 的图像彼此之间的相对位置。下一个断言可由直接计算证明。

断言 14。设 $\varkappa > 0$。记 α_0 为方程 $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ 的唯一根。由公式 (12)、(13)、(14)、(15) 和 (16) 分别给出的函数 f_k、f_r、f_m、f_t 和 f_l 的图像关于轴 $b = 0$ 对称；当 $b > 0$ 时，它们的位置如图 *1* 和图 *2* 所示。换言之，对于 $b > 0$，所有图像都交于点

$$M = (\varkappa^{3/2} c_1^2,\ 2\varkappa^2 c_1^2),$$

且函数图像 f_r 和 f_t 相交于点

$$N = (\alpha_0^3 \varkappa^{3/2} c_1^2,\ f_r(\alpha_0^3 \varkappa^{3/2} c_1^2)).$$

此外，若 $0 < b^2 < \alpha_0^6 \varkappa^3 c_1^4$，则

$$f_k < f_l < f_r < f_t < f_m.$$

若 $\alpha_0^6 \varkappa^3 c_1^4 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$，则

$$f_k < f_l < f_t < f_r < f_m.$$

并且若 $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$，则

$$f_l < f_t < f_k < f_r < f_m.$$

引理 *5* 的引理 5 可由前面证明的断言 9、10、11、12、13 以及简单的几何考虑轻易得出。

□

4.3 秩 0 临界点

本节证明关于秩为 0 的临界点类型的引理 2 和引理 4。首先，我们描述动量映射的所有秩为 0 的临界点，然后确定它们在动量映射下的类型和像。回顾一下，在非奇异轨道上（即，在满足 $M_{a,\ b}\ a^2 - 4\varkappa b^2 > 0$ 的轨道上），秩为 0 的非奇异点恰好是哈密顿向量场 X_H 和 X_K 均为零的点。需要强调的是，以下结论对参数 $\varkappa \in \mathbb{R}$ 的任意取值均成立。

断言 15：哈密顿量分别为 （7） 和 （8） 的两个哈密顿向量场 X_H 和 X_K 均为零的点集，是 $\mathbb{R}^6$（J、x） 中以下若干个（双参数）点族的并集：

1. $(J_1, J_2, 0, \varkappa c_1, 0, 0)$, *2.* $(J_1, 0, 0, x_1, 0, 0)$, *3.* $(J_1, 0, J_3, \frac{\varkappa c_1^2 + J_1^2}{2c_1}, 0, \frac{J_1 J_3}{c_1})$.

证明。 向量场 X_H 的坐标如下：

$$\{J_1, H\} = -2J_2J_3, \qquad \{J_2, H\} = 2J_1J_3 - 2c_1x_3$$
$$\{J_3, H\} = 2c_1x_2, \qquad \{x_1, H\} = 2J_2x_3 - 4J_3x_2$$
$$\{x_2, H\} = 4J_3x_1 - 2J_1x_3 - 2\varkappa c_1J_3, \qquad \{x_3, H\} = 2J_1x_2 - 2J_2x_1 + 2\varkappa c_1J_2$$

容易看出 $x_2 = 0$，并且要么 $J_2 = 0$，要么 $J_3 = 0$，$x_3 = 0$。证明的其余部分通过穷举完成。 □

引理 *2* 和引理 *4*。 通过直接计算可以证明，秩 0 点的像位于这些曲线上。可以显式求出每条轨道 $M_{a,\ b}$上属于第 1 和第 2 系列的所有点。现在我们证明关于轨道 $M_{a,\ b}$上第 3 系列点数的结论。情形 $b = 0$ 显然，因此我们假设 $b \neq 0$。不难验证，点集（或者说对应的参数值 J_1 和 J_3）由以下方程组给出

$$\begin{gathered} J_1^5 - 2\varkappa c_1^2 J_1^3 - 4bc_1 J_1^2 + \left(4ac_1^2 + \varkappa^2 c_1^4\right) J_1 - 4\varkappa b c_1^3 = 0 \\ J_3^2 = \frac{2bc_1 - \varkappa c_1^2 J_1 - J_1^3}{2J_1}. \end{gathered} \tag{41}$$

显然，对于像中的每个点，其原像中恰有两个点（这两个点的坐标 J_1 相同，而坐标 J_3 互为相反数）。为了确定解的确切数量，我们先将参数集合（a，b）划分为若干区域，使每个区域内的解数保持不变，然后分别求出各区域内的解数。我们稍微简化一下方程（41），令

$$\hat{b} = \frac{b}{\varkappa^{3/2} c_1^2}, \qquad \hat{a} = \frac{a}{\varkappa^2 c_1^2}, \qquad s = \frac{J_1}{\varkappa^{1/2} c_1}.$$

那么像中的点数等于方程的解数

$$s^5 - 2\hat{b}s^3 - 8\hat{b}s^2 + (4\hat{a} + 1)s - 4\hat{b} = 0 \tag{42}$$

在线段上

$$0 \leq s + s^3 \leq 2\hat{b}. \tag{43}$$

注意，函数 $s + s^3$ 单调递增，因此不等式 (43) 定义了一条线段。注意，如果改变参数 a 和 b，解的数量只会在以下情况下发生变化：

1. 方程 (42) 有重根。

2. 线段 (43) 的一个端点是方程 (42) 的解。（容易看出，点 0 不可能是方程 (42) 的根，因此我们只需检验点 $s + s^3 = 2\hat{b}$。）

可以验证，点 $s + s^3 = 2\hat{b}$ 是方程 (42) 的解，当且仅当 $a = f_t(b)$（回想一下，函数 $f_t(b)$ 由公式 (15) 定义，并且 $a = f_t(b)$ 当且仅当分岔图中的三条曲线交于一点，见断言 13）。还可以验证，在曲线 $a = f_t(b)$ 上任意一点的充分小邻域内（方程 (42) 有重根的点或许除外），区域 $a > f_t(b)$ 中的点在原像中比区域 $a < f_t(b)$ 中的点多一个点。

此外，容易验证，方程 (42) 在以下情况下有重根：要么 $a = \pm 2\sqrt{\varkappa}b$，要么 $a = f_k(b)$，其中 $f_k(b)$ 由公式 (12) 给出。在 $a = 2\sqrt{\varkappa}|b|$ 的情况下，唯一的重根是 $s = 1$，重数为 2。由此可知，对于 $b^2 < \varkappa^3 c_1^4$ 和 $2\sqrt{\varkappa}|b| < a < f_t(b)$，原像中没有来自第 3 系列的点；而对于 $b^2 > \varkappa^3 c_1^4$ 和 $2\sqrt{\varkappa}|b| < a < f_t(b)$，原像中恰有两个来自第 3 系列的点。由于固定 b 时，随着参数 a 增大而穿过曲线 $a = f_t(b)$，原像中的点数会增加 1，因此我们得出结论：区域 $a > f_t(b)$ $a > f_k(b)$ 的原像中恰有一个点，而区域 $f_k(b) > a > f_t(b)$ 的原像中有三个点。

由此证明了每条轨道上的点数这一结论。接下来只需证明关于这些点的类型的结论。利用以下判据不难证明（更多细节见 [4]）。

断言 16. 考虑一个辛流形 (M^4, ω)，并设 $x_0 \in (M, \omega)$ 是可积哈密顿系统的一个秩为 0 的临界点，该系统的哈密顿量为 H，积分为 K。那么，点 x_0 非退化，当且仅当哈密顿向量场 X_H 和 X_K 在点 x_0 处的线性化 A_H 和 A_K 满足以下性质：

1. 算子 A_H 和 A_K 线性无关，

2. 存在线性组合 $\lambda A_H + \mu A_K$，使得其所有特征值互不相同且均不等于0。

此外，若点 x_0 非退化，则其类型完全由任意一个没有零特征值的线性组合 $\lambda A_H + \mu A_K$ 的谱决定。更确切地说，该点的类型取决于谱的类型，如下所示。

- 如果线性组合 $\lambda A_H + \mu A_K$ 的谱具有形式 $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$，那么点 x_0 是鞍点-鞍点型临界点。
- 如果谱具有形式 $i\alpha, -i\alpha, i\beta, -i\beta$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$，那么点 x_0 是中心-中心型临界点。
- 如果谱具有形式 $i\alpha, -i\alpha, \beta, -\beta$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$，那么点$x_0$ 是一个中心-鞍点型临界点。

• 如果谱具有形式 $\alpha+i\beta, \alpha-i\beta, -\alpha+i\beta, -\alpha-i\beta$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}-\{0\}$，那么点 x_0 是一个焦点-焦点型临界点。

利用断言 7，我们计算哈密顿量为 (7) 的哈密顿向量场 X_H线性化的谱。

断言 17。 对于断言 *15* 中秩为0的三个临界点系列，哈密顿量为 (7) 的哈密顿向量场 X_H 线性化的谱包含一个重数为2的零特征值。该谱还包含以下元素：

1. 对于第 *1* 个秩为0 的临界点系列，该谱还包含特征值 $\pm\sqrt{2}\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+4\varkappa\beta^2}}$，其中

$$\alpha = \varkappa c_1^2 - J_1^2 - J_2^2 = (2\varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa})$$
$$\beta = c_1 J_2 = c_1^2 a - \varkappa^2 c_1^4 - \frac{b^2}{\varkappa}$$

2. 对于第 *2* 个系列，该谱还包含特征值

$$\pm 2\sqrt{c_1(x_1 - \varkappa c_1)} \quad and \quad \pm 2\sqrt{-J_1^2 + 2c_1 x_1 - \varkappa c_1^2}$$

3. 对于第 *3* 个系列，该谱还包含特征值

$$\pm 4iJ_3 \quad and \quad \pm\sqrt{2}\sqrt{J_1^2 - 2J_3^2 - \varkappa c_1^2}$$

我们进一步指出，为了证明这些点的非退化性，只需验证算子 A_H 的 4 个特征值均不等于 0，并且存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得算子 A_F的谱恰好有 2 个非零特征值，其中 $F = K + \lambda H$。事实上，此时算子 A_H 和A_K 的限制线性无关；否则，任意线性组合的谱都可由算子 A_H 的谱乘以一个常数得到（由断言 7 可知）。此外，无需验证算子 A_H 的所有特征值互不相同，因为在这种情况下，某个线性组合$H + \mu F$ 的谱有 4 个不同的非零特征值。

对于系列 2 和 3，所需的比例系数 λ 已在断言 8 中求得（对于系列 2 和 3，我们分别可以取 $\lambda = 2$（$\varkappa c_1^2 - J_1^2$）和 $\lambda = 0$）。对于系列 1，我们可以利用这样一个事实：$k = \frac{\lambda^2}{4}$ 对应于抛物线 (10) 和 (11) 上各点的原像中的临界点，并形式上取 $\lambda = \sqrt{\frac{k}{2}}$。那么，对于函数 $F = K + \sqrt{\frac{k}{2}}H$，算子 A_F 的谱仅由 4 个零组成，并且

$$\pm 4\sqrt{2}\sqrt{\frac{4\varkappa b^2 - a^2}{\varkappa^2}\left(\frac{a^2 - 2\varkappa c_1^2}{\varkappa} + \sqrt{\frac{a^2 - 4\varkappa b^2}{\varkappa^2}}\right)}.$$

现在不难验证引理 2 和引理 4 中各点的非退化性。（注意，退化点仅出现在平面 $\mathbb{R}^2$（a，b）的区域边界上，而它们的退化与这些点邻域内分岔图的重构有关。）

利用断言 16 和断言 17 可以轻松确定临界点的类型。引理 2 和引理 4 得证。

□

4.4 定理 1、2 和 3 的证明

定理 1、2 和 3 很容易由前面已证明的引理 1、2、3、4 以及以下简单的几何考察得出。

1. 首先，我们利用李代数 so(4) 的余伴随表示 $M_{a,\ b}$ 的轨道是紧致的这一事实。特别地，由于紧集的像也是紧集，这使我们能够在构造分岔图时排除所有无界区域。

2. 其次，我们利用一些关于非退化奇点的众所周知的结果。所有所需论述都在书中 [4] 详细阐述，因此我们仅简要回顾如下。

(a) 在刘维尔等价意义下，中心-中心型奇点只有一个。中心-中心奇点邻域内的分岔图是两条从该点发出的曲线的并集。该奇点的环分子形式为 $A-A$，标记为 $r=0$。(b) 任何中心-鞍点型奇点都刘维尔等价于鞍原子与椭圆原子 A 的直积。在中心 - 鞍点的像的邻域内，分岔图是一条经过该点的曲线与另一条从该点发出的曲线的并集。环分子由相应的鞍原子构成，并在每条边的末端添加原子 A，所有标记均为 $r=\infty$。（例如，表2中点 y_{12} 的环分子便是这种形式。）(c) 恰好存在 4 个复杂度 1 的鞍点–鞍点型奇点（即叶上恰好包含一个奇异点）。这些奇点完全由其环分子确定。（表2中点 y_3 和 y_7 对应的鞍点–鞍点型奇点所需的两个环分子列于表2中。）

3. 第三，由于我们考虑的是轨道的二参数族 $M_{a,b}$ 因此可以利用系统的一些不变量连续依赖于参数 a和 b 这一事实（例如，对参数作小扰动，不会改变来自“同一区域”的正则点原像中环面的数量）。

我们还利用类型 A、B 和 A^*的分岔稳定性。

本节不讨论经典科瓦列夫斯卡娅情形（$\varkappa=0$），因为本文前文已讨论过该情形 [10], 并且书籍 [4]中对此作了详细描述。

此外，我们不详细讨论情形 $b = 0$： 该情形中各结论的证明与情形 $b \neq 0$中的证明类似。

定理 *1* 和定理 *2*。此前已经证明，所需的动量映射分岔图包含于引理 1 所描述的曲线并集之中。因此，要证明这些定理，只需舍去所述曲线的若干部分，并确定剩余弧段上的分岔。下面利用此前获得的秩为 0 的临界点类型信息（见引理 2 和引理 4），说明如何做到这一点。

我们针对区域I内的参数值 a 和 b 证明定理 1 和定理 2，即在 $|b| > \varkappa^{3/2}c_1^2$、$2\sqrt{\varkappa}b < a < f_t\,(b)$ 的情况下（其中函数 $f_t\,(b)$ 由公式 (15) 给出）。其余情况的证明类似。

在这种情况下，动量映射的分岔图应具有图 3、4、5 所示的形式。分别用 P、Q 和 R 表示曲线 (9) 与直线 $k = 0$的交点、抛物线 (10) 与 (11) 的交点，以及右侧抛物线 (11) 与直线 $k = 0$ 的交点。

首先，我们舍弃所有无界区域（因为 so(4) 的轨道是紧致的）以及直线 $k = 0$ 下方的所有区域（显然， $k \geq 0$）。接着注意到，“曲边三角形” $y_{12}y_{13}P$ 和 z_1z_2R 不属于动量映射的像。事实上，点 z_1 是余伴随轨道像中最右侧的点，因为直线 $k = 0$ 上最右侧点的原像中的所有点都必须是中心–中心型，而且点 z_1右侧不存在秩 0 临界点的像。类似地，如果点 P 属于动量映射的像，那么它就会是其某个邻域中最左且最低的点。因此，它的原像中必定有秩 0 点，但事实并非如此。

此外，由于我们知道所有秩 0 点的类型，因此可以轻易确定包含秩 0 临界点像的所有弧段所对应的分岔。在这种情况下，唯一的歧义出现在点 y_{10}处。该点是两个中心-中心型点的像，因此先验上有 3 种可能：对于点 y_{10} 左侧的区域，其原像中可能有 4 个、2 个或 0 个环面。下面证明只有第一种情况可能成立。如果增大参数 a，那么在 $f_t(b) < a < f_k(b)$ 的情况下，会出现鞍点–鞍点型点 y_7，因此相邻图示中的点的原像中必须有 4 个环面。根据连续性，在 $a < f_t(b)$ 的情况下，点 y_{10}左侧的图示中也应有 4 个环面。

接下来需要确定“曲边三角形” y_8z_2Q 和弧 y_8y_{13}是否属于分岔图，以及这些弧对应什么分岔。曲线 y_8Q 不属于分岔图，而曲线 z_2Q 属于，因为在这种情况下，点 q 的原像中不存在秩为 0 的临界点。这里我们使用以下简单断言。

断言 18。设(M^4, ω) 为一个紧辛流形， H、 K 为定义在 M^4上的两个彼此对易（关于泊松括号）的函数，且几乎处处相互独立。假设在点 $x \in \mathbb{R}^2$ 的某个邻域内，分岔图具有与中心–中心型秩0 临界点相同的结构

（即像的边界上的两条弧横截相交），或与中心–鞍型相同的结构（即一条弧与动量映射的像边界上的一条光滑弧横截相交）。那么，点 x的原像中存在一个秩0 的临界点。

还需证明弧段 $y_{13}y_8$ 和 y_8z_2 属于分岔图，且相应的分岔类型分别为 $2B$ 和 $2A^*$ 。我们先来看弧段 y_8z_2。我们已知（见断言 4），该弧段上各点的原像要么为空，要么由两个临界圆组成；后一种情况下，对称性（J_3，x_3）$\to$（$-J_3$，$-x_3$）会交换这两个临界圆。首先，我们证明，若原像由两个临界圆组成，则每个临界圆对应的分岔类型均为 A^*。由于有两个圆，它们将两个环面变为两个环面，且系统具有对称性，因此除$2A^*$ 之外，唯一可能的分岔是分岔 C_2。为证明后一种情况不可能发生，我们考察能量 H 接近$h_0 = \frac{b^2c_1^2}{z_{rt}^2} + 2z_{rt}$时的等能面 $H = \text{const}$，其中 z_{rt} 由公式 (37) 给出（该能量值对应于右侧抛物线 (11) 与参数曲线 (9) 的切点）。由于在 H接近 h_0的取值下不存在哈密顿向量场 X_H 消失的点，因此等能面的类型在h_0的某个邻域内不会改变。然而，当能量参数增大 $H > h_0$ 时，等能面显然是不连通的：其粗分子由两个 $A - A$副本组成。因此，在较低的 H 取值下，它也不连通。但是，如果曲线 y_8z_2 对应的分岔类型为 C_2，那么等能面就会是连通的。因此，曲线 y_8z_2 唯一可能对应的分岔是 $2A^*$。

现在我们证明曲线 y_8z_2 上的分岔确实存在。首先注意到，当参数 a 取足够大的值时（更准确地说，对于$a > f_m(b)$），这些分岔存在（且类型为 $2A^*$）。只需证明点 y_3 的环分子具有表2所示的形式。这是因为点 y_3 “左侧”各点的原像中有3个环面，而“右侧”各点的原像中有两个环面。在 $f_r(b) < a < f_m(b)$ 的情形下，通过分析临界点的类型即可轻易得出这一结论；而在 $a > f_m(b)$ 的情形下，则可由连续性得出。注意，对于 $a > f_m(b)$，弧 y_3z_2 上的分岔类型为 $2A^*$，因为点 z_3的原像中的秩 0 临界点为中心–鞍点型，因此曲线 y_3z_3 上的分岔必定是可定向的。

根据连续性可知，在情形 $a < f_m(b)$ 下，曲线 y_8z_2 对应的分岔存在。下面更详细地描述最后一种转变。一方面，类型为 A^* 的分岔是稳定的，因此在参数 a 和 b 发生小扰动后仍然存在。因此，对于曲线 y_8z_2 对应的分岔存在且类型为 $2A^*$ 的点 a, b 构成一个开子集。另一方面，哈密顿向量场 X_H 和 X_K 线性相关的点集是 $\mathbb{R}^7 = \mathbb{R}^7(\mathrm{J}, \mathrm{x}\ \varkappa)$ 的闭子集。因此，由于 so(4) 的轨道是紧致的，映射 $(H, K, a, b, \varkappa)$: $\mathbb{R}^7(\mathrm{J}, \mathrm{x}\ \varkappa) \to \mathbb{R}^5$ 对所有秩为 $\varkappa > 0$ 的临界点取值所得的像是一个闭集。因此，曲线 y_8z_2 对应的分岔存在的点 a, b 构成一个闭子集。由此可知，对于参数 $a > 2\sqrt{\varkappa}b$ 的任意取值（以及 $b^2 > \varkappa^3c_1^4$），这些分岔都存在且类型为 $2A^*$。

—

最后，我们证明与弧 y_8y_{13} 对应的分岔类型为 $2B$。弧 y_8y_{13} 属于分岔图，因为“底部”区域上方有 4 个环面，而“顶部”区域上方有 2 个环面。仔细考察秩为 0 的临界点的类型，就可以轻易确定各区域中的环面数量。例如，“顶部”区域上方有 2 个环面，因为点 y_{12} 是一个中心-鞍点型单点的像，因此曲线 $y_{12}z_5$ 对应的分岔类型为 B （即一个环面分裂为两个）。

我们进一步指出，与弧 y_8y_{13} 对应的分岔由两个相同的部分组成。此外，以下结论成立，这可由断言 4 以及点 y_8的邻域内不存在秩 0 点的像这一事实轻易推出。

断言 19。 奇点 y_8 的充分小邻域的原像由两个连通分支组成，而对称性 $\sigma_3 : (J_3, x_3) \to (-J_3, -x_3)$ 会交换这两个连通分支。

因此，与弧 y_8y_{13}对应的两个相同分岔会将两个环面变为四个环面。根据此前对分岔 $2A^*$ 所作的连续性考察可知，这两个分岔的类型均为 B：对于 $a > f_t(b)$，与弧 y_7y_8 对应的分岔类型为 $2B$ （点 y_7 原像中的鞍—鞍点的环分子由这一事实唯一确定：邻近相机之一中各点的原像有 4 个环面）。

由此，我们确定了所有分岔。定理 1 和定理 2 得证。 □

定理 3 的秩 0 非退化奇点的环分子结构广为人知，并在书籍 [4] 中有详细描述。还需证明定理 3 对秩 1 退化临界点的像成立。在几乎所有情况下，利用已获得的关于分岔以及各个区域环面数量的信息，都可以唯一确定退化临界点对应的环分子（不带标记）。点 y_8 和 y_9 对应的环分子存在歧义，但根据这些点的环分子必须由两个相同部分组成这一事实（见断言 19），即可轻易消除。退化奇点的标记可通过标准方法（“标记求和规则”、连续性考量）求得，例如见 [4] 或 [21]。

□

5 经典科瓦列夫斯卡娅情形（$\varkappa = 0$）

本节将展示由哈密顿量在李代数 e(3) 上定义的经典科瓦列夫斯卡娅情形的分岔图

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2x_1 \tag{44}$$

以及积分

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2x_1)^2 + (2J_1J_2 - 2x_2)^2 \tag{45}$$

可由李代数 so(4) 上哈密顿量为 (7)、第一积分为 (8)（其中 $c_1 = 1$）的可积哈密顿系统的分岔图得到

通过取极限 $\varkappa \to 0$。此极限 $\varkappa \to 0$ 保持秩为 0 的临界点的类型、刘维尔环面的分岔以及动量映射奇异点的环分子。

经典科瓦列夫斯卡娅情形的分岔图结构众所周知，例如在 [10] 和 [4]中有相关描述。不过，在本节中，我们不仅比较所得结果，还说明如何构造经典科瓦列夫斯卡娅情形的分岔图，并利用关于李代数 $so(4)$上的科瓦列夫斯卡娅情形所获得的信息，计算其部分不变量（更准确地说，本节确定刘维尔环面的分岔），同时尽可能减少额外计算。

本节中，我们将 $\Sigma(a,\ b,\ 0)$记为李代数轨道 $M_{a,\ b}$ 上动量映射的分岔图，其中对应的铅笔参数值等于 $\varkappa$。

引理 6. 任取满足 $a > 0$的 $a, b \in \mathbb{R}$ 。则点 x 属于分岔图 $\Sigma(a, b, 0)$ 当且仅当存在点序列$x_n \in \Sigma(a_n, b_n, \varkappa_n)$ 使得$\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n, \varkappa_n) = (a, b, 0)$。

证明。 由断言 2 可知，在一个方向上，对于李代数 $e(3)$ 上的任意临界点 z （即参数为 $\varkappa = 0$ 的点），都存在李代数 $so(4)$ 上的临界点序列 z_n （即参数值为 $\varkappa > 0$），收敛到该点。因此，点 z 的像是点 z_n 的像的极限。

反过来，用反证法证明。假设点 $x \in \mathbb{R}^2$ 是正则的，即 $x \notin \Sigma(a, b, 0)$，但存在序列 $x_n \in \Sigma(a_n, b_n, \varkappa_n)$，使得 $x_n \to x$，且当 $\varkappa \to 0$ 时，$(a_n, b_n, \varkappa_n) \to (a, b, 0)$。为导出矛盾，我们在每个点 x_n 的原像中选取一个点 z_n，并证明序列 z_n 包含一个收敛子列。为此，我们证明序列 z_n 包含在一个紧集 $A \subset \mathbb{R}^7(\mathbf{J}, \mathbf{x}, \varkappa)$ 中。

取两个充分小的闭圆盘 D_1 和 $D_2 \subset \mathbb{R}^2$，分别包含点 x和 $(a,\ b)$，再取一条小线段 $[0, T] \subset \mathbb{R}$。于是集合

$$A = \{(J, x, \varkappa) | (H, K, f_1, f_2, \varkappa)(\mathbf{J}, \mathbf{x}, \varkappa) \subset \overline{D_1} \times \overline{D_2} \times [0, T]\}$$

是紧致的。事实上，$A \subset \mathbb{R}^7$ 是闭子集，因为 $D_1 \times \overline{D_2} \times \overline{[0, T]}$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的闭子集，而且映射 $(H,\ K,\ f_1,\ f_2,\ \varkappa) : \mathbb{R}^7(\mathbf{J},\ \mathbf{x}\ \varkappa) \to \mathbb{R}^5$ 连续。剩下要证明集合 A 有界。注意，数集 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 有界，因为积分 $f_1 = \varkappa\mathbf{J}^2 + \mathbf{x}^2$ 有上下界。还需注意，数集 $(J_1,\ J_2,\ J_3)$ 也有界，因为

$$J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 = H - 2c_1x_1$$

且右侧有界，因为对于来自 A的所有点，$(H,\ \overline{K}) \in D_1$ 。引理 6 得证。

□

不难得出包含 $\varkappa = 0$ 动量映射分岔图的曲线的精确方程。为此，只需在曲线 (9) 和 (10) 的方程中取极限 $\varkappa \to 0$ （右侧抛物线 (11) 会随着 $\varkappa \to 0$ “向右移动至无穷远”，因此对于 $\varkappa = 0$ 没有极限点）。

引理 7. 设 $\varkappa = 0$ 和 $b \neq 0$。那么对于任意非奇异轨道 $M_{a,\ b}$（也就是说，对于任意满足 $a > 0$ 的轨道），可积哈密顿系统的分岔图 $\Sigma_{h,\ k}$（其哈密顿量为 (7)，积分为 (8)）包含于平面 $\mathbb{R}^2(h,k)$ 上以下三族曲线的并集中：

1. 直线 $k = 0$;

2. 参数曲线

$$h(z) = \frac{b^2 c_1^2}{z^2} + 2z, \qquad k(z) = 4ac_1^2 - \frac{4b^2 c_1^2}{z} + \frac{b^4 c_1^4}{z^4}, \tag{46}$$

其中 $z \in \mathbb{R} - \{0\}$。

3. 抛物线

$$k = \left(h - \frac{2b^2}{a}\right)^2. \tag{47}$$

对于 $b = 0$，我们有类似的结论。

引理 8. 设 $\varkappa = 0$ 和 $b = 0$。那么，对于任意非奇异轨道 $M_{a,0}$（即对于任意满足 $a > 0$ 的轨道），哈密顿量为 (7)、积分为 (8) 的可积哈密顿系统的分岔图 $\Sigma_{h,k}$ 包含于平面 $\mathbb{R}^2(h,k)$ 上以下三族曲线的并集中：

1. 直线 $k = 0$;

2. 抛物线与

$$k = h^2 + 4ac_1^2 \tag{48}$$

该抛物线在点 $h = 0$ 处的切线的并集

$$k = 4ac_1^2. \tag{49}$$

3. 抛物线

$$k = h^2. \tag{50}$$

现在我们确定定理 1 和定理 4 中描述的哪些区域在 $\varkappa \to 0$ 时仍然存在。不难验证，当 $\varkappa \to 0$ 时，公式 (12)、(13)、(15) 和 (16) 分别给出的曲线 f_k，f_r，f_t 和 f_l 分别趋于曲线 $a = \frac{3}{4}\frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}$、$a = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}$、$a = \frac{1}{2^{2/3}}\frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}$ 和 $b = 0$。（对于固定的 $b \neq 0$，曲线 $f_m(b)$ 在区域 $\{a > 0, b > 0\}$ 中没有极限点。）所得曲线将区域 $\{a > 0, b > 0\}$ 分成 4 个子区域，本文将其记作如下：

1. 区域I′ 为区域 $\{\varkappa = 0, \quad 0 < b, \quad 0 < a < \frac{1}{2^{2/3}}\frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}\}$;

2. 区域II′：$\{\varkappa = 0, \quad 0 < b, \quad \frac{1}{2^{2/3}}\frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} < a < \frac{3}{4}\frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}\}$;

3. 区域III′：$\{\varkappa = 0, \quad 0 < b, \quad \frac{3}{4}\frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} < a < \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}\}$;

4. Area IV′: $\{\varkappa = 0, \quad 0 < b, \quad \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} < a\}$.

若 $\varkappa = 0$，则所有曲线 f_r, f_k, f_t 和 f_l 仅在原点相交，因此在这种情况下，我们只需考虑直线 $b = 0$的一个附加区域:

1. Area V′: $\{\varkappa = 0, \quad b = 0, \quad 0 < a\}$.

注 11. 若 $\varkappa = 0$，则不失一般性，可假设 $a = 1$（其他轨道可由 $a = 1$ 情形通过适当的变量替换得到）。不难验证，直线 $a = 1$ 与区域 I′–V′ 的交集如下：它与前四个区域的交集分别为区间 $2 < b^2$、$(4/3)^{3/2} < b^2 < 2$、$1 < b^2 < (4/3)^{3/2}$ 和 $0 < b^2 < 1$ （区间按区域的升序排列），与区域 V′ 的交集为点 $b = 0$。

现在不难看出经典科瓦列夫斯卡娅情形的分岔图是什么样的：粗略地说，它们是从图 3–14（ $b = 0$ 时则为图 22）所示的图表中去掉所有“右侧弧段”得到的，也就是去掉属于右侧抛物线 (11) 的所有弧段以及弧段 $z_1 z_2$。具体而言，有如下定理。

定理 5（[10]）。设 $\varkappa = 0$ 和 $b > 0$。曲线

$$a = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}, \quad a = \frac{3}{4}\frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} \quad and \quad a = \frac{1}{2^{2/3}}\frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}}$$

将区域 $\{a > 0, b > 0\}$ 分成4 个区域。图 *27– 30* 展示了李代数 $e(3)$ 的轨道 $M_{a,\ b}$ 上，可积哈密顿系统的动量映射的分岔图；该系统的哈密顿量为(7)，积分为(8)，每个图对应上述区域之一。图 *27*、*28*、*29* 和 *30* 的放大部分分别与图 *14*、*11*、*8* 和 *5* 的形式相同。李代数 $e(3)$ 的轨道 $M_{a,\ 0}$ 的分岔图（即在 $\varkappa = 0$、$b = 0$、$a > 0$ 的情形下）如图 *26* 所示。

注 12。在图 27–30 中，弧段 y_1y_2，y_2y_3，y_3y_5，y_2y_7，y_7y_8，y_1y_{12}，$y_{12}y_{13}$ 和 $y_{13}y_8$ 属于抛物线 (47)。其余弧段以显而易见的方式分布在曲线 (46) 和直线 $k = 0$ 上。

定理 *5* 的。首先，有必要检验 $\varkappa = 0$ 情形下临界点的非退化性，因为在参数变化过程中，临界点通常可能变为退化（例如，对于所研究的李代数$so(4)$上的可积系统，从一个参数区域 a，b转到另一个参数区域时就会发生这种情况）。不过，第 4.1 节和第 4.3 节中分别针对秩 1 点和秩 0 点所做的所有计算，在 $\varkappa = 0$ 情形下仍然成立，因此不难验证，与分岔图上的非奇异点对应的所有临界点都是非退化的秩 1 临界点，并且所有秩为 0 的临界点都是非退化的，且类型与李代数 $so(4)$上相应的秩为 0 的临界点相同。

此外，根据连续性，李代数 $e(3)$的动量映射像中每个正则点的原像必须

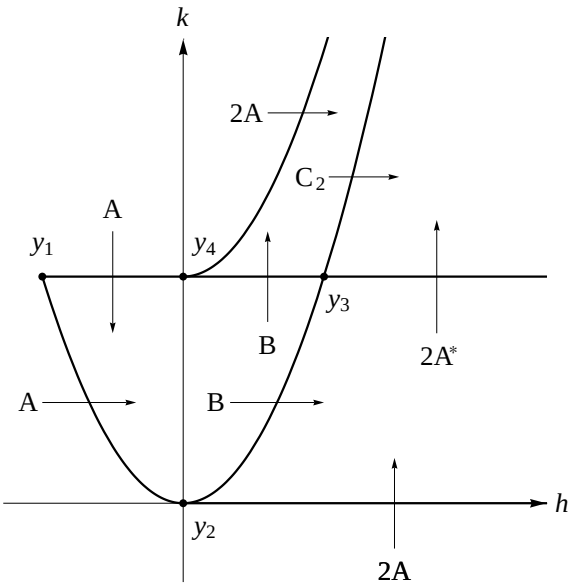


图26：经典科瓦列夫斯卡娅情形： $\varkappa = 0, \quad b = 0$

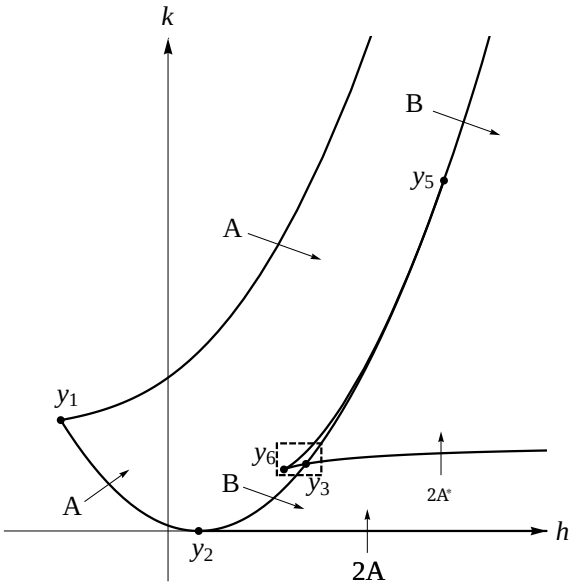


图27：经典科瓦列夫斯卡娅情形：$\varkappa = 0$, $a = 1, \quad 0 < b^2 < 1$

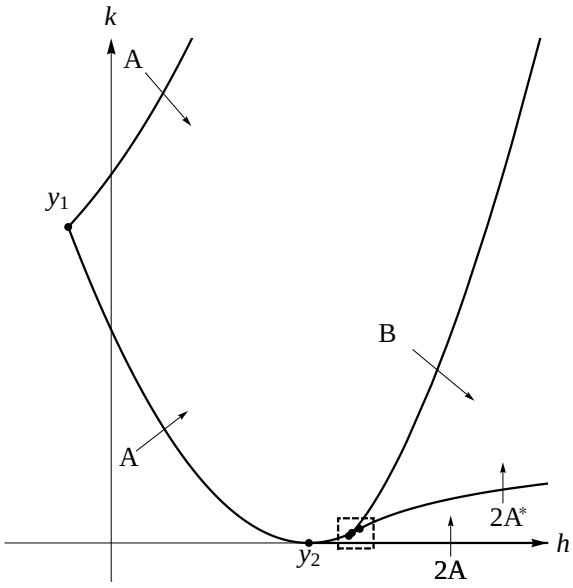


图28：经典科瓦列夫斯卡娅情形：$\varkappa = 0$, $a = 1, \quad 1 < b^2 < (4/3)^{3/2}$

与李代数 $so(4)$相应区域内一个正则点的原像包含相同数量的环面。类似地，分岔图中非奇异点的原像所含的临界圆数量必须相同。（临界圆的数量不会减少，因为所有奇点都是非退化的。在参数发生微小扰动时，一个复奇点可能分解为几个简单奇点，但本例中不会发生这种情况——这可从分岔图的显式形式看出。出于与引理 6 中证明不存在分岔点所用的相同理由，临界圆的数量不会增加

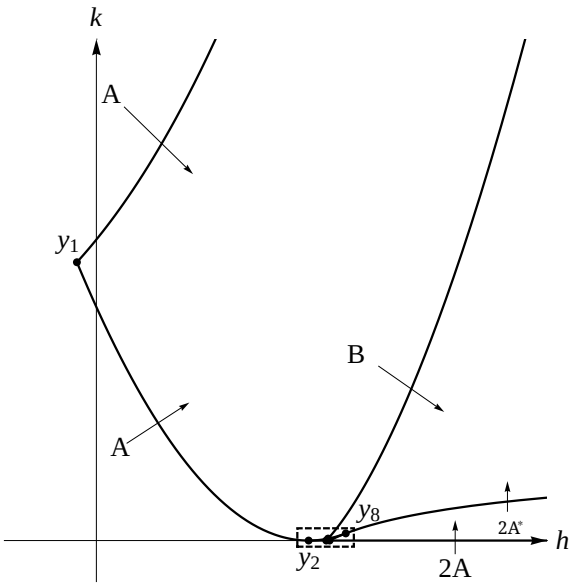


图29：经典科瓦列夫斯卡娅情形：$\varkappa = 0$, $a = 1, (4/3)^{3/2} < b^2 < 2$

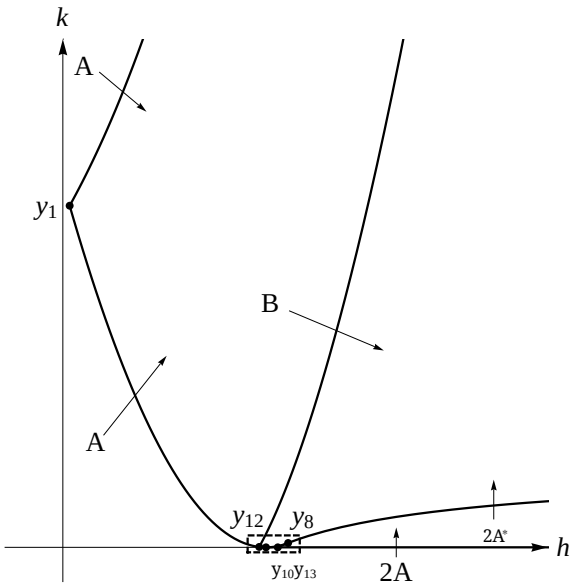


图30：经典科瓦列夫斯卡娅情形：$\varkappa = 0$, $a = 1, \quad 2 < b^2$

正则点邻域中的图表）。

现在，由于我们知道秩 0 点的类型以及环面和临界圆的数量，几乎可以确定刘维尔环面的所有分岔。剩下的工作是利用分岔的稳定性 A, B 和 A^*，并根据连续性的常规考虑，消除某些弧段上的歧义。例如，在 $\varkappa = 0$, $b = 0$ 的情形下，与弧段 P_1 对应的分岔类型为 C_2，而非 $2A^*$，因为与弧段 y_3z_5 对应的分岔类型为 C_2。

定理 5 已完全证明。

□

参考文献

[1] S. Kowalewski, 《关于定义刚体绕固定点旋转的微分方程组的一个性质》，数学学报，14:1（1890年），81-93。[2] S. Kowalewski, 《关于刚体绕固定点旋转问题》，数学学报，12:1（1889年），177—232。[3] I.V. Komarov, 《氢原子的科瓦列夫斯卡娅基底》，理论与数学物理，47:1（1981年），67–72；英文译本见理论与数学物理47:1（1981年），320–324。[4] A.V. Bolsinov、A.T. Fomenko, 《可积哈密顿系统：几何、拓扑与分类》，第1、2卷，乌德穆尔特大学出版社，伊热夫斯克，1999年，444页、447页；英文译本由Chapman & Hall/CRC出版，博卡拉顿，佛罗里达州，2004年，xvi+730 页。

[5] 一. A. Oshemkov, “The topol学 f surf献 f constant 能量与 分岔urcati 关于 SO(4) 上刚体动力学可积情形的图表》, 《数学科学院通报》42:6(258) (1987), 199–200; 英文译文载于《俄罗斯数学评论》42:6 (1987), 241–242。[6] G. Haghighatdoost, A. A. Oshemkov, 《李代数 so(4) 上索科洛夫可积情形的刘维尔叶状结构的拓扑》, 《数学文集》200:6 (2009), 119–142; 英文译文载于《数学文集》200:6 (2009), 899–921。[7] H. Khorshidi, 《李代数 so(4) 上斯捷克洛夫情形的可积哈密顿系统的拓扑》, 《莫斯科大学学报: 数学与力学》, 2006年第5期, 58–61; 英文译文载于《莫斯科大学数学通报》61:5 (2006), 40–44。[8] A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, 《有限维李群上的欧拉方程》, 《苏联科学院消息: 数学辑》42:2 (1978), 396–415; 英文译文载于《苏联数学辑》12:2 (1978), 371–389。[9] A. T. Fomenko, 《刘维尔可积哈密顿系统的拓扑不变量》, 《泛函分析及其应用》22:4 (1988), 38–51; 英文译文载于《泛函分析及其应用》22:4 (1988), 286–296。[10] M. P. Kharlamov, 《刚体动力学可积问题的拓扑分析》, 列宁格勒大学出版社, 列宁格勒, 1988年, 200页。(俄文)[11] M. P. Kharlamov, 《科瓦列夫斯卡娅问题第一积分公共等值面的分岔》, 《应用数学与力学》47:6 (1983), 922–930; 英文译文载于《应用数学与力学杂志》47:6 (1985), 737–743。[12] M. P. Kharlamov, 《刚体动力学中经典可积系统的拓扑分析》, 《苏联科学院通报》273:6 (1983), 1322–1325; 英文译文载于《苏联数学科学院通报》28:3 (1983), 802–805。[13] A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, 《环分子方法与科瓦列夫斯卡娅陀螺的拓扑》, 《数学文集》191:2 (2000), 3–42; 英文译文载于《数学文集》191:2 (2000), 151–188。[14] I. K. Kozlov, T. S. Ratiu, 《李代数 so(4) 上科瓦列夫斯卡娅情形的分岔图》, 《俄罗斯科学院院刊》447:5 (2012), 486–489; 英文译文载于《数学科学院院刊》86:3 (2012), 827–830。[15] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, 《可积系统理论的现代方法》, 当代数学, 计算机研究所, 莫斯科—伊热夫斯克, 2003年, 296页。(俄文)[16] A. T. Fomenko, 《可积动力系统的辛拓扑: 重刚体动力学中经典可积情形的粗略拓扑分类》, 《微分几何、李群与力学》。15–2, 《圣彼得堡斯捷克洛夫数学研究所分部科学论文集》, 第235卷, 圣彼得堡分部。

斯捷克洛夫数学研究所，圣彼得堡，1996年，第104–183页；《数学科学》（纽约）**94**:4 (1999), 1512–1557。[17] E. A. Kudryavtseva, I. M. Nikonov, A. T. Fomenko, 《曲面的极大对称胞腔分解及其覆盖》, 《数学文集》**199**:9 (2008), 3–96；英文译文载于《数学文集》**199**:9 (2008), 1263–1353。[18] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev, 《可积哈密顿系统中的对称性与奇点研究新方法》, 《拓扑学及其应用》**159**:7 (2012), 1964–1975。[19] E. A. Kudryavtseva, A. T. Fomenko, 《曲面上优良莫尔斯函数的对称群》, 《俄罗斯科学院院刊》**446**:6 (2012), 615–617；英文译文载于《数学科学院院刊》**86**:2 (2012), 691–693。[20] A. T. Fomenko, E. A. Kudryavtseva, 《每个有限群都是某个映射的对称群（“原子”分岔）》, 《莫斯科大学学报：数学与力学》**67**:3 (2013), 21–29；英文译文载于《莫斯科大学数学通报》**68**:3 (2013), 148–155。[21] P. V. Morozov，刚体力学若干可积情形的精细李乌维尔分类，副博士学位论文，莫斯科国立大学力学与数学系，莫斯科，2006年，170页。（俄文）