通过局部信息形成小世界

Soroush Alamdari

sorush@gmail.com

arXiv:2301.00849v2 [cs.SI] 9 Jan 2023

摘要

人们已经观察到，几乎任何人与其他几乎任何人之间，都只需通过少数几个中间链路即可建立联系。这被称为小世界现象。在本文中，我们将每个个体设想为一个贪心代理，从理论角度探讨这一观察结果。我们表明，当个体为连接付费以应对来自人口群体的拉力时，小世界性质会自然涌现。*

1 小世界现象

推动我们彼此靠近的种种力量远比数学所能理解的复杂，不过，我们或许仍能找到一些线索，勾勒出一幅抽象的图景。为此，我们聚焦于一个特定的观察结果，即小世界现象：任意两个人都可以通过寥寥几条连接相识。

20世纪60年代，Milgram 在一项实验中证实了小世界现象 [5], ：他向内布拉斯加州和堪萨斯州随机选出的个体寄送数据包，并附上说明，请他们帮忙将数据包送到波士顿的一位特定商人手中。如果他们不认识目标个体，就应将数据包转交给自己认识、且最有可能认识目标的某个人。于是，每位最初的接收者都开启了一条传递链，其中有些链因无人继续参与，在到达目标前便中断了。在那些最终到达目标的链中，平均链长略短于六。自那以后，我们一直试图理解这一现象。

这是一种令数学家 感到好奇的现象，因为它满足两个相互对立的条件 ：

1. 度：任一节点与其他节点相连的数量，即该节点的度，相对于总人口群体而言很小。2. 直径：对于任意接收者和任意目标，从接收者出发并以目标为终点的最短链路链的长度都非常短。网络中这类链路链的最长长度称为该网络的直径。

20 世纪 90 年代，Watts 和 Strogatz [7] 指出，在一个由 n 个个体组成、环绕环而坐的社会中，如果每个个体都与其两侧的 n^{ε} 个其他个体以及另外 n^{ε} 个随机节点相连，那么任意一对节点之间都存在一条期望长度小于 $1/\varepsilon$ 的链。这个简单模型同时满足约束 1 和 2，但无法解释实验中转发的数据包实际上是如何找到这条链的。在实验中，每个接收者都不了解该网络的结构，也无法判断与自己相连的人中，谁位于通往目标的最短链上。实验中确实观察到了这种短链，这一事实表明，存在比约束2严格得多的约束。

*本文的研究结果最初发表于第 35 届 ACM SIGACT-SIGOPS 分布式计算原理研讨会（PODC 2016）。

	$\alpha < d+1$	$\alpha = d+1$	$d+1 < \alpha$
最大度	$o(n^{1-\delta\frac{\alpha}{d+1}}$ 对数 对数 $n)$	$O(\log\ n)$	$O(\log_{\frac{\alpha}{d+1}} \log n)$，对于 $d=1$
路由直径	O（对数 $_{\frac{d+1}{\alpha}}$ 对数 n）	O（对数 n）	$o\ (n^{1-\frac{\delta}{\alpha-d}}$对数 对数 $n)$

表1：相对于维度 d，不同 α 值下稳定性对应的最大度和路由直径界。这里 δ 可以是任何小于 1 的常数。

这一观察使我们能够强化约束2：

3. 有限信息：每个节点都不知道其他节点所维护的连接。我们将这一条件称为有限信息约束。

4. 路由直径：对于任意接收者和任意目标，如果每个接收者根据与目标的相似程度来选择数据包的转发对象，就能找到一条连接接收者与目标的极短链。我们将网络中这类链的最长长度称为该网络的路由直径。

Travers 和 Milgram [6] 观察到，参与者在决定数据包的下一个接收者时倾向于依据地理信息。Kleinberg [4, 3] 指出，这类信息足以满足约束 4；他证明，在一个均匀分布于平面上的人口群体中，如果每个节点以 $1/l^{\alpha}$ 的概率与一个地理距离为 l 的节点建立链路，那么反复根据与目标的地理邻近程度来选择下一个接收者，几乎总能产生一条短链。尤其是当 $\alpha = 2$ 时，链的预期长度以及每个节点创建的连接数的期望值都可以限定在 $O(\log n)$ 以内。

小世界现象究竟是偶然出现的，还是由我们的集体思维设计出来的，这仍然令人好奇。我们的目标是寻找可能产生具有此类性质的网络的策略：

5. 策略　性选择：每个节点通过朝着某个目标作出选择来创建连接　.

已有许多关于网络创建的博弈论模型得到分析。然而，若考虑这样一种模型：个体根据他人的选择进行策略性选择，那么就会违反我们的约束 3。

例如，考虑 Even-Dar 和 Kearns 的模型 [2],：人口群体均匀分布在平面上，每个代理 v 都会为连接付费，以缩短其通过网络到达其他节点的平均距离。在他们的模型中，连接到地理距离为 l 的节点会产生 l^{α} 的成本。具体而言，他们证明，在此模型中，当 $\alpha < 2$ 时，直径可以被限制在一个常数范围内。计算每个节点所使用的目标函数，需要了解整个网络。

在另一项相关研究中，Clauset 和 Moore [1] 表明，如果节点在无法通过有界数量的步骤到达另一个节点时，重新连接其出向连接，那么就会出现小世界性质，其界限与 Kleinberg [4, 3]观察到的结果相似。他们通过反复模拟证明了这一点；尽管他们的模型放宽了完全信息假设，但并不满足我们的约束 3。

尝试对 Kleinberg [4, 3] 的研究进行去随机化时，我们在一个临界点发现了一种策略性网络创建模型：此时，期望度和路由直径都呈现对数级界限。该模型达到了类似的界限，并满足我们的所有约束。我们将这一模型中支配参与者决策的公式解释为对维护连接的成本与对连通性的需求所作的权衡。

我们在第 2 节详细介绍模型，并讨论参与者试图最小化的成本函数的各个组成部分。在第 3 节中，我们分析模型在一个 d 维

网格[†]上的情形。我们重点研究这样一种均衡：参与者无法通过添加或删除链路进一步降低成本。我们证明， $\alpha = d+1$ 是一个阈值，在该阈值处，贪心路由性能和最大度的上界均为 $O(\log n)$。我们还分析了其他 α取值下的最大度和贪心路由性能，特别证明了当 $\alpha < d+1$ 时，贪心路由找到其目的地所需的迭代次数可由 $O(\log_{\frac{d+1}{\alpha}} \log(n))$界定

我们将在第4节讨论研究结果的意义，并据此作出总结。

2 模型

考虑一个由 n 个节点构成的 d 维环形网格，它表示网络形成所依托的底层结构。对于节点 u 和 v，我们用 $d(u,v)$ 表示 u 与 v 之间的距离[‡]。此外，对于节点 u 和节点集合 V，我们用 $d(u,V)$ 表示 u 到 V 中最近成员的距离，即 $d(u,V) = \min_{v\in V} d(u,v)$。

网络 N 为每个节点 v 指定一个节点集合 $N(v)$，其中包含 v 所连接的节点。为了对这种网络的构建过程建模，我们引入每个代理在给定情形下所承担的成本。令 $c_N(v)$ 为这样一个函数，用于计算网络 N 中节点 v 所产生的成本。该成本函数包含两个部分： v 连接其他节点所需承担的链路维护成本，以及 v 因未连接某些节点而产生的成本。对于节点 u，令 $l_N(v,u)$ 表示前者， $s_N(v,u)$ 表示后者。于是有

$$c_N(v) = \sum_{u\in N(v)} l_N(v,u) + \sum_{u\notin N(v)} s_N(v,u).$$

对于 v 维持与距离为 d（v,u）的代理之间的链路所需承担的成本，合理的假设是该成本与距离有关。令 l_N（v,u）$= d^\alpha$（v,u），其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为某个数。 α 的具体取值将在第 3 节讨论。我们将此成本称为链路成本。

接下来需要定义 s_N（v,u），即 v 为某个与其没有链路的节点 u 所支付的成本。我们假设每个节点 u 都会给 v 带来一项成本，该成本与 u 到 u 中距离最近且 v 与之存在链路的节点之间的距离成正比，即 d（u,N（v））。我们将此称为分离成本。

现在可以表示我们的成本函数 c_N（v），使其仅取决于 N（v）以及节点在底层网格上的位置：

$$c_N(v) = \beta \sum_{u\in N(v)} d^\alpha(v,u) + \sum_{u\notin N(v)} d(u,N(v)). \tag{1}$$

3 分析

在本节中，我们分析由参与者构建的网络：他们通过添加或删除指向其他节点的连接来降低成本。具体而言，我们讨论网络的贪心路由直径与节点最大度之间的权衡。当$\alpha < \frac{1}{\log^{\beta-1} n}$ 时，每条连接的成本都小于 1，因此直径为 1，且所有节点的度都等于 $n-1$；而当 $\alpha > \log(\beta^{-1}n^2)$ 时，没有参与者能证明连接到距离为

[†]本文始终假设 d 是一个常数。

[‡]除非另有说明，本文所说的距离均指网格上的距离，即网格距离

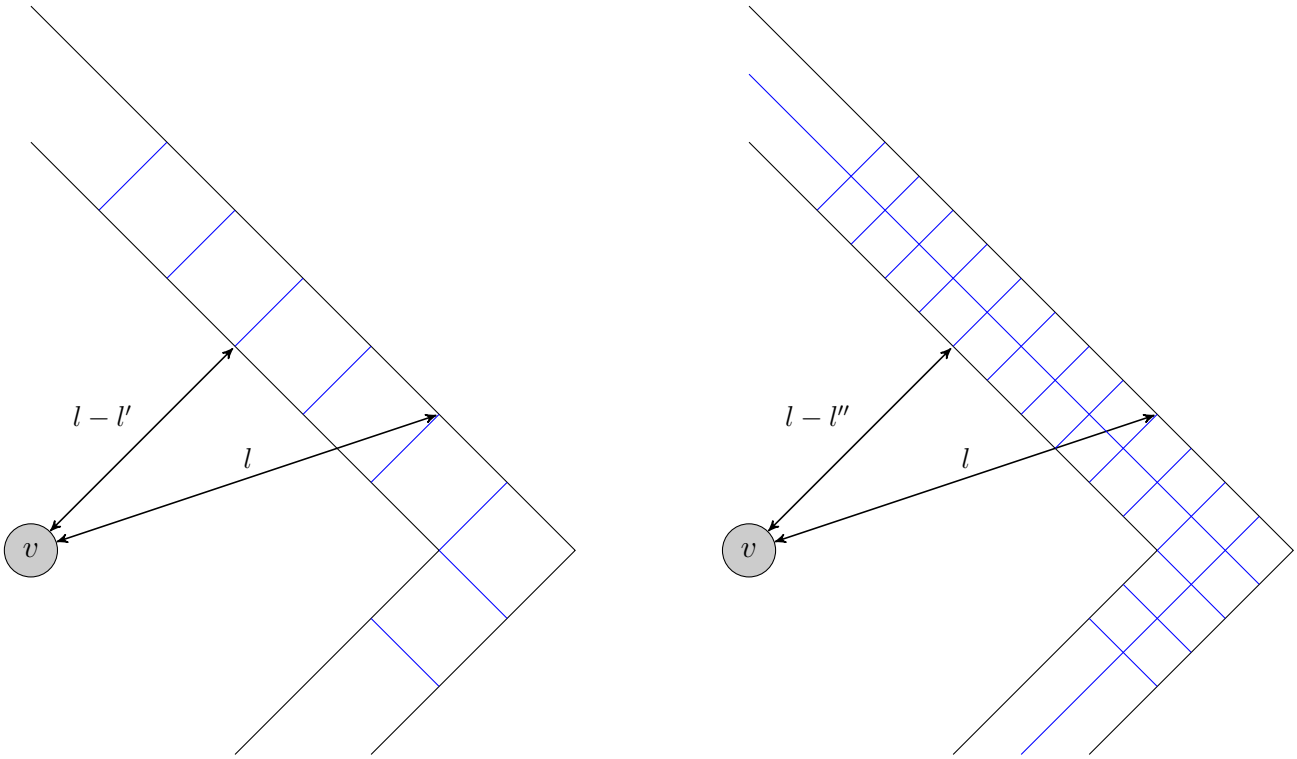


图1：观察3.1的第3项（左）和第4项（右）。在这两种情况下，l' 都是较小正方形的直径。

> 1 的节点是合理的，因此度和直径分别为 $2d$ 和 $dn^{1/d}$。在此，我们分析 α 取中间值时的情况。

为了建立我们的界，我们不需要假设每个代理选择链路是为了使其成本最小化。在我们的每种情形中，只要假设没有代理能够通过添加链路来降低自身成本（添加稳定性），就足以证明网络路由直径的上界。此外，如果在添加稳定性的基础上，还假设没有代理能够通过移除链路来改善自身成本（切换稳定性），我们还可以证明最大度的上界。由于每个代理在添加或删除链路后都会降低成本，因此无论以何种顺序执行这些操作，最终都会达到稳定状态。还值得注意的是，这些假设比例如纳什均衡的假设宽泛得多。

我们先介绍一些关于网格性质的观察结果，这些性质将在本节中用于限定节点之间的路由直径和最大度。为此，定义 $S(v,l)$为与 v的距离恰好为 l 的所有节点的集合，并定义 $B(v,l)$为满足 $d(u,v) \leq l$的所有节点 u。下面的观察列出了一些关于$S(v,l)$和 $B(v,l)$的性质。

观察 n 3.1. 对于 d维网格上的任意节点 v，以及 $l \in \mathbb{N}$，以下结论成立 :

1. $|S(v,l)| \in \Theta(l^{d-1})$。2. $|B(v,l)| \in \Theta(l^d)$。3. $B(v,l)\backslash B(v,l-l')$中的节点可以用形如 $B(u,l')$、满足 $u \in B(v,l)\backslash B(v,l-l')$的 $O((\frac{l}{l'})^{d-1})$个球覆盖。

4. $B(v,l)\backslash B(v,l-l'')$中的节点可以用形如 $B(u,l')$、满足$u \in B(v,l)\backslash B(v,l-l'')$的 $O((\frac{l}{l''})^d)$个球覆盖。

3.1 平衡： $\alpha = d+1$

这里我们关注 $\alpha = d+1$ 的情况，并证明最大度和贪心路由找到目的地所需的迭代次数均有界于 $O(\log n)$。

我们先从一个有用的引理开始，它给出了添加一条链路时分离成本降幅的下界。

引理 3.2. 若节点 v 在 $B(u,l)$ 中没有链路，那么添加一条通往 u 的链路会使 v 的总分离成本减少 $\Omega(l^{d+1})$。

证明。考虑节点集合 S，其中的节点与 u 的距离为 l'，且满足 $l' \leq \frac{1}{3}l$。注意，S 中的任何节点都会产生至少为$\frac{2}{3}l$ 的分离成本。若 v 添加一条通往 u 的链路，则 S 中每个节点的分离成本都会降至至多 $\frac{1}{3}l$。因此，根据引理 3.1 的第 2 项，分离成本总降幅至少为 $c\frac{l}{3}^d \times \frac{l}{3} = c\frac{l}{3}^{d+1}$，引理得证。

□

考虑一个添加稳定节点 v，也就是一个不会因向其他任何节点添加更多连接而获益的节点 v。接下来，我们给出节点 u 与 v的邻居之间距离的上界，其中 u 满足$d(u,v) = l$；也就是说， $d(u,N(v))$。为此，我们将证明，如果距离过大，那么 v 就会因向 u添加一条链路而获益。

引理 3.3. 如果节点 v 属于 N 且是添加稳定的，那么对于任意满足 $d(v,u) \leq l$ 的 u，都存在一个节点u'，其与 u的距离至多为 $O(l^{\frac{\alpha}{d+1}})$，且 v与该节点相连；也就是说，对于某个常数 c，有 $N(v) \cap B(u, cl^{\frac{\alpha}{d+1}}) \neq \emptyset$。

证明。反设存在一个节点 u，使得 $N(v)\cap B(u, cl^{\frac{\alpha}{d+1}}) = \emptyset$。根据引理 3.2，从 v 向 u 添加一条链路，至少能使分离成本降低 $c'l^\alpha$，其中 c'为某个常数。当 $\beta < c'$时，这意味着分离成本的降低大于添加一条通往 u 的链路的成本，而该成本至多为 βl^α，这与添加稳定性矛盾。

□

现在，我们可以证明贪心路由算法到达目的地所需的迭代次数上界。

定理 3.4. 如果网络 N 是添加稳定的，且 $\alpha = d+1$，那么通过贪心路由，任意节点 u 都能在 $O(\log(n))$ 步内从任意节点 v 到达。

证明. 当 $\alpha = d+1$时，根据引理 3.3，我们知道贪心路由的每次迭代都会使到目的地的距离缩短一个常数因子，因此到达目的地所需的迭代次数有对数级上界。

□

接下来，我们将着重证明当 $\alpha = d+1$ 时最大度的上界：对于某个常数c，节点 v 与所有距离介于 l 和 cl 之间的节点相连的链路数量有一个常数上界。

引理 3.5. 当 $\alpha \leq d+1$时，如果网络 N 中的节点 v 是切换稳定的，那么对于任何以满足 $d(u,v) = l$的节点 u 为中心、半径为 $l' \leq \epsilon l^{\frac{\alpha}{d+1}} \leq \epsilon l$ 的球， v 与其相连的链路数量至多为一个常数；也就是说， $|N(v) \cap B(u,l')| \leq c$。

证明。 v周围 $B(u,l')$ 内的任何节点与 v 的距离至多为 $l+l'$；并且由于 v 在 N 中是稳定的（可切换的），根据引理 3.3，我们可以论证，球内的任何节点只能服务距离至多为 $c'(l+l')^{\frac{\alpha}{d+1}}$ 的节点，其中 c' 是某个常数。因此，任何由某个节点服务的节点

位于 $B(u,l')$ 中的节点也必须位于球 $B(u,l'+c'(l+l')^{\frac{\alpha}{d+1}})$ 内。由于 $l' \le \epsilon l^{\frac{\alpha}{d+1}} \le \epsilon l$，我们有 $l'+c'(l+l')^{\frac{\alpha}{d+1}} \le c''l^{\frac{\alpha}{d+1}}$，其中 c'' 是某个常数。设 $C(u')$ 为这样一组节点：它们在 $N(v)$ 中最近的节点是 u'。根据引理 3.1 的第 2 项，我们可以论证

$$\sum_{u' \in N(v) \cap B(u,l')} |C(u')| \le c^*(l^{\frac{\alpha}{d+1}})^d.$$

对于某个常数 c^*。

移除一条连接到节点 $u' \in B(u,l')$ 的链路，最多会使对 v 产生的分离成本增加 $c''l^{\frac{\alpha}{d+1}}|C(u')|$，因此存在一个节点 $u' \in N(v) \cap B(u,l')$，移除它至少能使对 v 产生的总成本降低

$$\beta(l-l')^\alpha - c''l^{\frac{\alpha}{d+1}}|C(u')| \ge \beta(l-l')^\alpha - c''l^{\frac{\alpha}{d+1}} \times \frac{c^*l^{\frac{\alpha}{d+1}})^d}{|N(v)\cap B(u,l')|} \ge \beta(1-\epsilon)^\alpha l^\alpha - \frac{c^\star l^\alpha}{|N(v)\cap B(u,l')|}.$$

因此，如果 $|N(v) \cap B(u,l')| > \frac{c^\star}{\beta\ 1-\epsilon()^\alpha} = c$，那么 v 就可以通过移除 u' 来降低其总成本，这与稳定性矛盾。 □

定理 3.6. 如果 v 是 N 中的一个切换稳定节点，且 $\alpha = d+1$，那么 v 的度至多为 $O(\log n)$ 条链路。

证明。对于任意整数 $0 \le i \le log_{1+\epsilon}(n)$，令 $P(i)$ 表示与 v 的距离为 l、且满足 $(1+\epsilon)^i < l \le (1+\epsilon)^{i+1}$ 的网格点集合。根据引理 3.5，对于任意 $p \in P(i)$，我们知道 v 与球 $B(p,\epsilon(1+\epsilon)^i)$ 中各点相连的链路数有一个常数上界。

此外，根据引理 3.1 的第 3 项，可以用 $c\frac{(1+\epsilon)^{i+1}}{\epsilon\ 1+\epsilon}()_i^{\ d-1}$ 个这样的球覆盖 $P(i)$ 中的节点，其中 c 是某个常数。因此，对于每个 $0 \le i \le log_{1+\epsilon}(n)$，我们可以将 $N(v) \cap P(i)$ 的大小界定为一个常数，从而得出定理。 □

3.2 次对数直径：$\alpha < d+1$

本节讨论 $^1\ \log_{\beta^{-1}} n < \alpha < d+1$ 的情形，~~并证~~明在这一范围的 α 下，贪心路由所需迭代次数和最大度的上界。

定理 3.7. 若网络 N 是添加稳定的，且 $\alpha < d+1$，则任何节点 u 都可以通过贪心路由在 $O(\log_{\frac{d+1}{\alpha}} \log(n))$ 步内从任意节点 v 到达。$_\alpha$

证明。根据引理 3.3，如果在贪心路由的一次迭代中，到目的地的距离为 l，那么 $^\alpha$ 在下一次迭代中，距离至多为 $cl^{\frac{\alpha}{d+1}}$，其中 c 是某个常数。因此，经过

$$\log_{\frac{\alpha}{d+1}}(\frac{1}{\log(n)}) = \log_{\frac{d+1}{\alpha}} \log(n)$$

经过若干次迭代后，到目的地的距离将为常数。 □

定理 3.8。若节点 v in N 是切换稳定的，且 $\alpha < d+1$，则对于任意 $\delta < 1$，v 的度至多为 $o(\log \log(n) n^{1-\delta\frac{\alpha}{d+1}})$ 条连接。

证明。对于某个正的常数 $0 < a < 1$ 以及某个整数 $0 \le i \le \log_{a^{-1}} \log(n)$，令 $P(i)$ 表示满足 $n^{a^{i+1}/d} < l \le n^{a^i/d}$ 且与 v 的距离为 l 的网格点集合。根据引理 3.5，对于任意 $p \in P(i)$，我们知道 v 与球 $B(p,\epsilon(n^{a^{i+1}/d})^{\frac{\alpha}{d+1}})$ 中各点之间的连接数有常数上界。

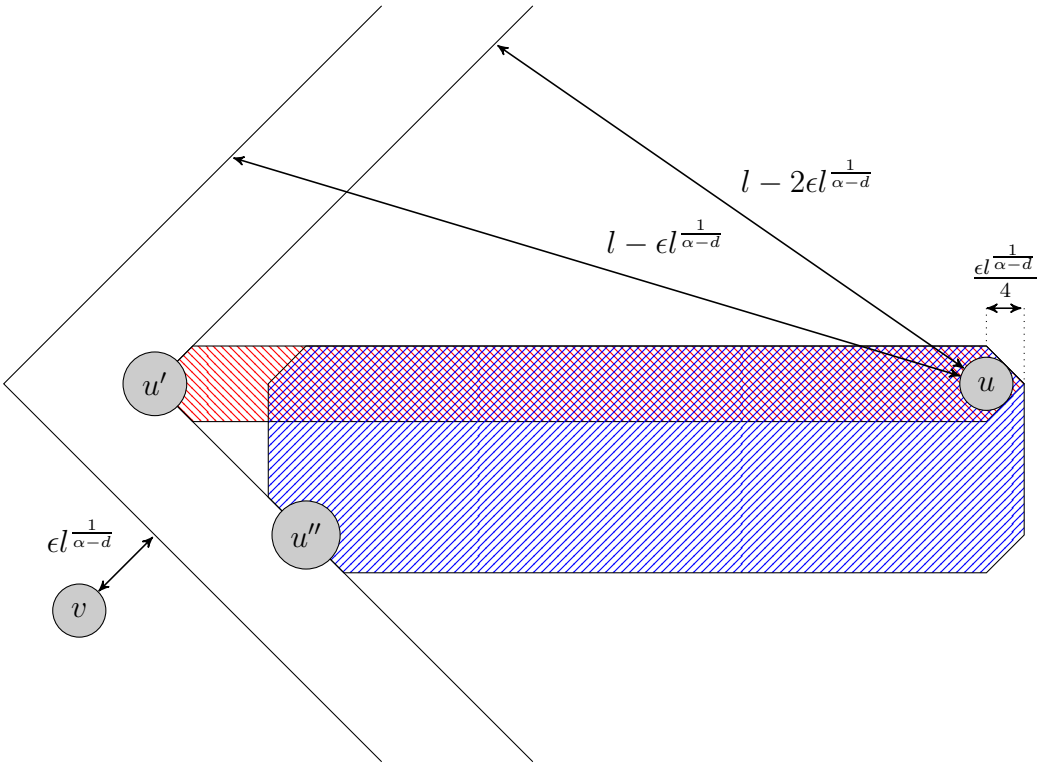


图 2：引理 3.9。添加一条从 v 到 u'（分别为 u''）的链路，至少会使红色（分别为蓝色）阴影区域内每个节点的分离成本降低$_1$ $\frac{\epsilon l^{\frac{1}{\alpha-d}}}{4}$。

根据引理 3.1 P 的第 4 项，i可由 $O(n^{a^i - a^{i+1}\frac{\alpha}{d+1}})$ 个球覆盖，其中 $B(p, \epsilon(n^{a^{i+1}/d})^{\frac{\alpha}{d+1}})$，且 $p \in P(i)$。

因此，v 的连接总数可被界定为

$$|N(v)| \leq c + \sum_{i=0}^{i \leq \log_{a^{-1}} \log(n)} n^{a^i - a^{i+1}\frac{\alpha}{d+1}} \leq c + \log_{a^{-1}} \log(n) n^{1-a\frac{\alpha}{d+1}}$$

其中某个常数为 c。 □

3.3 次对数度：$\alpha > d+1$

现在我们将注意力转向 $d+1 < \alpha < \log(\beta^{-1}n^2)$ 的情况，并证明与前几节类似的界。在这种情况下，我们需要修改一些引理，因为连接的成本相对于长度增长得非常快，以至于让 v 与其希望用该连接覆盖的区域中部建立连接不再有益。

引理 3.9。若 v 中的节点 N 是添加稳定的，那么对于任意满足 $d(v,u) \leq l$ 的 u，都存在一个节点$u' \in N(v)$，使得 $d(u,u') \leq l - \epsilon l^{\frac{1}{\alpha-d}}$。

证明思路：反设 v 与 $B(u, l - \epsilon l^{\frac{1}{\alpha-d}})$ 中的任何节点都没有链路，并令 u' 为 $\arg\min_{u' \in B(u, l - 2\epsilon l^{\frac{1}{\alpha-d}})} d(u', v)$。那么，节点 v会因添加一条指向 u'的链路而获益，因为 u'能够将 $\Omega((l^{\frac{1}{\alpha-d}})^{d-1} l)$ 个节点的分离成本至少降低 $\Omega(l^{\frac{1}{\alpha-d}})$（见图 2），从而将其总分离成本降低 $\Omega(l^{1+\frac{d}{\alpha-d}})$。我们可以论证

$$\epsilon' l^{1+\frac{d}{\alpha-d}} = \epsilon' l^{\frac{\alpha}{\alpha-d}} > \beta(2\epsilon l^{\frac{1}{\alpha-d}})^{\alpha}$$

for 是 ϵ 和 β的适当取值，因此 v 添加一条指向 u'的链路是有益的 . □

定理 3.10. 如果网络 N是添加稳定的，且 $\alpha > d+1$，那么通过贪心路由，任意节点 u 都可从任意节点 v 在 $o(\log\log(n)n^{1-\frac{\delta}{\alpha-d}})$ 步内到达，其中 δ是任意小于 1 的常数。

证明. 通过归纳法可以说明，从节点 v出发时，贪心路由分析的最坏情况出现在目的地是距 v最远的节点时。根据引理 3.9，如果每一步中到最远节点的距离为 l，那么下一步该距离至多为 $l-\epsilon l^{\frac{1}{\alpha-d}}$。考虑从距目的地 n^{a^i} 到距离 $l^{a^{i+1}}$ 所需的迭代次数，其中 $a<1$。该次数至多为

$$\frac{l^{a^i}}{\epsilon l^{\frac{a^{i+1}}{\alpha-d}}} = \epsilon^{-1} l^{a^i - \frac{a^{i+1}}{\alpha-d}}.$$

因此，迭代总次数至多为

$$\sum_{i=0}^{i\le\log\log n} \epsilon^{-1} l^{a^i-\frac{a^{i+1}}{\alpha-d}} \le \sum_{i=0}^{i\le\log\log n} \epsilon^{-1} l^{1-\frac{a}{\alpha-d}} \le \log\log(n)\epsilon^{-1} l^{1=\frac{a}{\alpha-d}}$$

□

这里我们证明，对于 $d=1$，当 $\alpha > d+1$ 时，度受次对数上界限制。更高维度下的相应证明仍然是一个挑战。

定理 3.11. 如果 $\alpha > d+1=2$ 且网络 N是切换稳定的，那么任意节点 v最多有$O(\log^{\frac{\alpha}{d+1}}\log(n))$条连接。

证明。设每个距离 l （从 v 出发）的节点最初都有 l 的分离成本预算，可用于证明维护一条链路的合理性。我们将证明，如果 v 拥有超过 $c\log^{\frac{\alpha}{d+1}}\log(n)$ 条连接，那么就会存在一个节点集合，其预算不足以证明一组服务于该集合某个子集的连接是合理的，因此 N 将不是切换稳定的。

考虑一个节点 v，并令 $P(i)$ 表示与 v的距离为 l'、且满足 $n^{\frac{a^{i+1}}{d}} < l' \le n^{\frac{a^i}{d}}$（其中 $a=\frac{d+1}{\alpha}$）的节点集合。我们证明 $P(i)\cap N(v)$ 的大小有一个常数上界。为此，注意到 v在 $P(i)$ 中的任意一条链路，成本至少为 $\beta n^{\frac{\alpha a^{i+1}}{d}}$。

注意到 $d=1$，令 S为集合 $P(i)\cap N(v)$ 去掉两侧距离最远的元素后所得的集合，因此 $|S|\ge|P(i)\cap N(v)|-2$。S 中没有节点能够为与 v 的距离大于 $n^{\frac{a^i}{d}}$ 的节点提供服务；根据引理 3.1 的第 2 项，至多有 $n^{\frac{a^i}{d}d}$ 个节点能够为 S 提供依据，且每个这样的节点的预算至多为 $n^{\frac{a^i}{d}}$。因此，我们有

$$|S| \le \frac{n^{\frac{a^i}{d}d+1}}{\beta n^{\frac{\alpha a^{i+1}}{d}}} = \frac{n^{\frac{(d+1)^{i+1}}{d\alpha^i}}}{\beta n^{\frac{(d+1)^{i+1}}{d\alpha^i}}} = \beta^{-1}$$

. □

我们猜想，定理 3.11 给出的界可以扩展到 $d>1$。

4 讨论

我们的主要贡献是提出了一种确定性框架，用于分布式网络构建，并且遵循在米尔格拉姆实验中确实存在的某些理论约束。

尽管我们在此探讨的问题本质上源自自然启发，但这些成果是在一项纯数学研究中取得的，其目标是在个体仅掌握局部信息的情形下，重新确立最大度和路由直径的对数界。然而，由此得出的模型或许能让我们洞悉将彼此联系起来的内在驱动力。

设想一个分布在平面上的人口群体，其中每个个体都保存着其他一些人的状态（例如当前地址），以便通过他们获取某种特权。为此需要付出切实的努力，而这主要是维持他人状态所需的投入；与此同时，还存在某种焦虑、一股牵引力、一种潜在的驱动力，可以将其描述为一种渴望与各处建立联系的欲望。

我们的研究结果表明，这样的人口群体会形成一个小世界网络。

这项研究还为我们提供了设计鲁棒网络的一种范式。尽管这类网络只需要有限的通信能力，却十分高效，同时还具有可生存性。若能在实践中用它们连接我们的群体，例如道路上的汽车，将会很有意义。

需要注意的是，我们的成本函数可以通过多种方式进行修改，同时仍能生成具有小世界性质的网络。例如，如果每个节点 v 通过最小化以下目标来选择集合 $N(v)$，其中包含其所关注状态的节点：

$$c_N(v) = \beta \sum_{u \in N(v)} d^{\alpha}(v,u) + \sum_{u \notin N(v)} w_v(u) d(u, N(v)) \tag{2}$$

其中，$w_v(u)$ 表示 u 对于 v的相对重要性；那么，根据参数 α 和 β以及相对重要性与邻近程度之间的相关性，可能会作为副作用而形成一定程度的小世界性质。

此时，仍有许多方向尚未探索。特别值得关注的是，当 β取其他值时，阈值会发生什么变化。当我们设定 $\beta = n$时，我们的成本函数与 Even-Dar 和 Kearns [2] 所依据的模型中的目标函数非常相似。尽管他们的模型本质上有所不同，但其中似乎也存在一个具有自身特征的类似阈值。这一切都暗示着一幅更宏大的图景，或许还存在一个有待发现的更一般化框架。

致谢

感谢 Jon Kleinberg 的指导，也感谢 PODC 16 和 SODA 18 的匿名审稿人提供的宝贵意见。

参考文献

[1] A. Clauset 和 C. Moore。网络如何变得可导航？，2003。[2] E. Even-Dar 和 M. J. Kearns。经济网络形成的小世界阈值。载于《第19届神经信息处理系统进展大会》，第 385–392 页。麻省理工学院出版社，2007。[3] J. Kleinberg。小世界中的导航。《自然》，406(6798):845–845，2000。[4] J. Kleinberg。小世界现象：一种算法视角。载于《第三十二届年度ACM计算理论研讨会论文集》，第 163–170 页，美国纽约州纽约市，2000。ACM。[5] S. Milgram。《小世界问题》。《今日心理学》，2:60–67，1967。[6] J. Travers 和 S. Milgram。小世界问题的实验研究。《社会计量学》，32:425–443，1969。[7] D. J. Watts 和 S. H. Strogatz。‘小世界’网络的集体动力学。《自然》，393(6684):409–10，1998。