arXiv:2301.00856v1 [eess.IV] 2 Jan 2023

高斯模糊与相对边缘响应

Austn C. Bergstrom,David Conran, DavidW.
MessingerChester F. Carlson成像科学中心 罗切斯特
理工学院 纽约州罗切斯特 acb6595@rit.edu

摘要

在研究图像质量或用于训练卷积神经网络的数据增强流程中，使用高斯模糊通常很方便。由于使用方便，高斯函数有时被用作光学点扩散函数的一阶近似。本文推导并评估了高斯模糊参数与相对边缘响应之间的闭式关系，发现其与测量结果吻合良好。此外，我们还评估了光学点扩散函数的高斯近似在多大程度上可用于预测相对边缘响应。结果表明，在有限情况下，高斯关系可以提供合理的近似，但对广泛的光学参数范围并不适用。

关**键词：** 相对边缘响应 · 高斯模糊 · 图像质量

1 引言

相对边缘响应（RER）是一种便捷的图像质量指标，通过量化图像沿垂直于边缘方向的空间导数来概括图像的清晰度。值得注意的是，RER 是遥感领域用于量化俯视图像效用的《通用图像质量方程》中采用的三个参数之一 [1]。

由于高斯分布在数学上简单易用、广泛应用于图像处理库 [2, 3, 4], ，且在定性上与光学点扩散函数相似，因此使用高斯核对图像进行模糊处理通常很方便。例如，许多研究图像质量与深度学习之间关系的工作都使用高斯模糊来调节图像清晰度和空间频率内容 [5, 6, 7, 8, 9]。

鉴于高斯模糊核在图像质量研究中的便捷性和普及程度，我们推导并评估了用于近似高斯模糊与 RER 之间关系的闭式函数。此外，我们还评估了使用高斯函数近似光学点扩散函数的程度，以便利用我们推导出的高斯模糊与 RER 之间的关系，快速将系统点扩散函数映射到 RER。我们发现，简单的高斯近似无法直接预测理想边缘与真实系统点扩散函数卷积后产生的 RER。

具体而言，我们做出了以下贡献：

- 我们推导出了相对边缘响应与高斯模糊之间简单的闭式关系。
- 我们使用经高斯核模糊处理的合成边缘图像，验证了相对边缘响应关系。
- 我们表明，光学点扩散函数的高斯近似所生成的图像，其相对边缘响应与光学点扩散函数本身所产生的相对边缘响应不同。

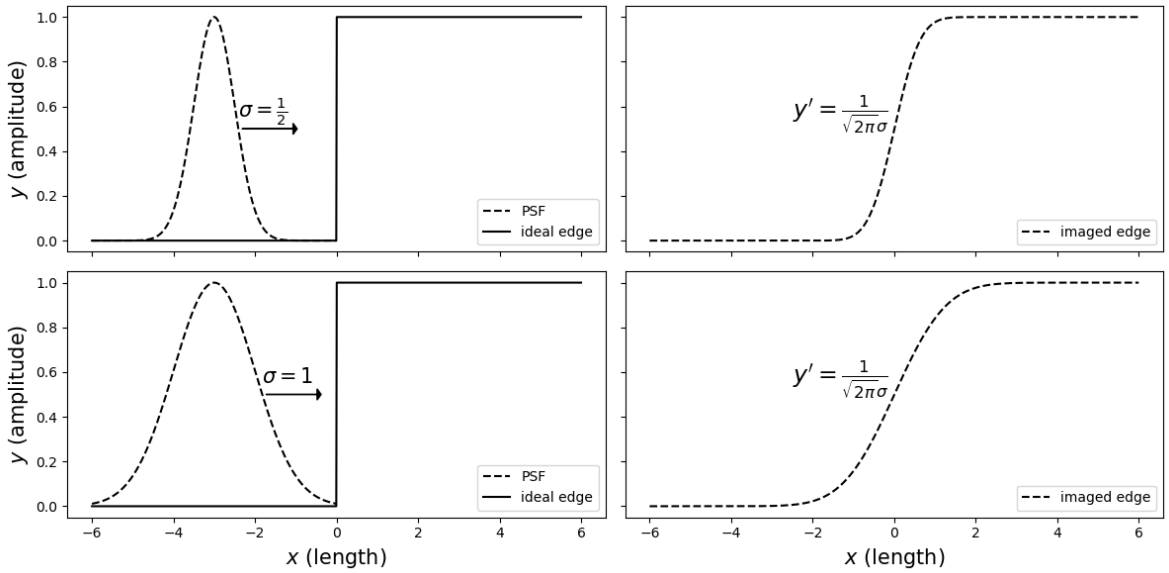


图1：卷积示意图，以及点扩散函数宽度对相对边缘响应（RER）的影响。一阶近似下，RER 等于图像在边缘位置处的斜率。

2 推导

2.1 一阶近似

首先，我们指出，可以将成像仪近似为一个线性移不变（LSI）系统，从而将该系统的作用建模为输入场景与系统点扩散函数的卷积，其中卷积运算定义为

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)*h\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(\alpha\right)f\left(x-\alpha\right)d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x-\alpha\right)f\left(\alpha\right)d\alpha. \tag{1}$$

为推导高斯模糊与相对边缘响应之间的关系，我们考虑一维图像 $g(x)$，它由边缘物体 $f(x)$ 与系统点扩散函数 $h(x)$ 卷积而成。边缘物体由单位阶跃函数描述

$$f\left(x\right)=\text{STEP}\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{where } x<0\\ \frac{1}{2} & \text{where } x=0\\ 1 & \text{where } x>0\end{cases}, \tag{2}$$

我们将点扩散函数 $h(x)$ 近似为归一化高斯函数

$$h\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3}$$

应用卷积的定义　　后，我们可以看到，能够用积分表示一维图像 $g(x)$

$$g\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right)\text{STEP}\left(x-\alpha\right)d\alpha. \tag{4}$$

利用阶跃函数的性质，并为方便起见反转积分限（这是允许的，因为相对边缘响应与符号无关），我们得到边缘图像的表达式

$$g\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right)d\alpha \tag{5}$$

RER 描述了图像的清晰度，其依据是边缘响应函数的斜率；RER 是图像在边缘位置 [10] 处空间导数的一阶近似。因此，在我们的一维示例中，有

$$\text{RER} \approx \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right)d\alpha\Big|_{x=0} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{x=0} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \tag{6}$$

如图1所示。

2.2 改进近似

虽然相对边缘响应是对图像在边缘位置处导数的近似，但根据定义，它是对该斜率的离散近似，通过在 $\pm\frac{1}{2}$ 像素 [10] 处对边缘扩展函数进行插值来测量。若不考虑测量中固有的离散采样，相对边缘响应在点扩散函数足够窄时可能趋于无穷大。为考虑这种采样，我们从边缘图像开始

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right)d\alpha \tag{7}$$

该图像由一个系统生成，系统具有标准差为 σ 的高斯点扩散函数。应用考虑了.....的相对边缘响应定义 r 离散测量 ，我们有

$$\text{RER} = g(0.5) - g(-0.5), \tag{8}$$

它远小于 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$，因为~~$\sigma \Longrightarrow$~~ 0。为了考虑 $x = \pm 0.5$ 处离散采样的影响，我们注意到 $g(0.5) - g(0.5)$ 存在一个方便的闭式关系。如果将 $g(x)$ 重写为两个积分之和，其中

$$g(x) = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right)d\alpha + \int_{0}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right)d\alpha, \tag{9}$$

由于第一项是常数，在相减时会抵消，因此可以将其舍去，从而得到

$$\text{RER} = \int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right)d\alpha - \int_{0}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma^2}\right)d\alpha. \tag{10}$$

由此可见，相对边缘响应由两个经过缩放的误差函数之差给出，其中误差函数 $\text{erf}(x)$ 定义为

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt. \tag{11}$$

使用变量替换

$$t = f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\alpha, \tag{12}$$

我们得到表达式

$$\text{RER} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}}e^{-\alpha^2}\sqrt{2}\sigma d\alpha - \int_{0}^{\frac{-1}{2\sqrt{2}\sigma}}e^{-\alpha^2}\sqrt{2}\sigma d\alpha\right), \tag{13}$$

化简后得

$$\text{RER} = \frac{1}{2}\left(\text{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}\right) - \text{erf}\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right) = \text{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{14}$$

2.3 扩展到多个模糊阶段

在研究图像质量时，我们可能需要估算具有两种不同模糊贡献的图像的相对边缘响应（RER）：首先是由其系统点扩散函数造成的，其次是由后处理造成的。因此，对于真实图像 $g(x)$，我们有

$$g(x) = f(x) * h_0(x) * h_1(x) \tag{15}$$

其中，f 是成像的物体，h_0 是系统点扩散函数，h_1 是后处理中应用的高斯模糊核。若将光学点扩散函数 h_0 近似为标准差为 σ_0的高斯函数，则

$$h_0(x) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_0^2}\right), \tag{16}$$

$$h_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right), \tag{17}$$

and

$$g(x) = f(x) * h_{effective}(x), \tag{18}$$

其中

$$h_{effective}(x) = h_0(x) * h_1(x). \tag{19}$$

在这里，我们可以应用 滤波器定理（详见 [11]），并注意到图像的傅里叶变换 $\mathfrak{F}\{g(x)\} = G(\xi)$ 表示为 由下式给出

$$G(\xi) = \mathfrak{F}\{f(x)\} \cdot \mathfrak{F}\{h_{effective}(x)\} = F(\xi) \cdot H_{effective}(\xi), \tag{20}$$

其中 $H_{effective}$ 表示有效光学传递函数，其表达式为

$$H_{effective}(\xi) = H_0(\xi) \cdot H_1(\xi). \tag{21}$$

利用高斯函数的傅里叶性质，我们有

$$H_0(\xi) = \exp\left(2\pi^2\sigma_0^2\xi^2\right), \tag{22}$$

$$H_1(\xi) = \exp\left(2\pi^2\sigma_1^2\xi^2\right), \tag{23}$$

and

$$H_{effective}(\xi) = \exp\left(2\pi^2\left(\sigma_0^2 + \sigma_1^2\right)\xi^2\right). \tag{24}$$

求得有效传递函数后，根据下式对其进行傅里叶逆变换，即可得到有效点扩散函数

$$h_{effective}(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{H_0(\xi) \cdot H_1(\xi)\}. \tag{25}$$

这里,

$$\begin{aligned} h_{effective}(x) &= \mathfrak{F}^{-1}\left\{\exp\left(2\pi^2\left(\sigma_0^2 + \sigma_1^2\right)\xi^2\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_0^2 + \sigma_1^2\right)}} \exp\left(\frac{x^2}{2\left(\sigma_0^2 + \sigma_1^2\right)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{effective}} \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma_{effective}^2}\right), \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\sigma_{effective} = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}$。

因此，对于两阶段的高斯模糊，我们可以将有效点扩散函数建模为标准差为$\sigma_{effective}$的高斯函数，其中

$$\sigma_{effective} = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}. \tag{27}$$

3 方法

为评估上述推导出的相对边缘响应模型，我们生成了合成边缘图像芯片（图2），并使用倾斜边缘法测量相对边缘响应。该方法概述于 [10], ，我们的代码可在 [12] 获取。具体而言，我们通过定义近垂直边缘在 xy 平面上的位置，生成理想倾斜边缘，并将像素网格叠加在该平面上。我们将边缘左侧的像素设为暗值，右侧的像素设为亮值，并根据边界像素位于边缘亮侧和暗侧的比例为其赋值。接着，对理想边缘图像施加不同程度的高斯模糊，以生成相对边缘响应各异的边缘图像。最后，我们使用整数像素合并对部分边缘图像进行下采样。表1列出了未进行下采样的图像芯片所用的模糊参数，表2则列出了模糊后进行下采样的图像芯片所用的参数。

我们执行此下采样，是为了近似在模拟域中应用光学模糊，然后使用焦平面阵列进行降采样的过程。我们使用整数像素合并 ，以避免像素插值的影响。对于经过降采样的图像，模糊程度按降采样比例线性缩放。

最后，我们评估了使用高斯近似的光学点扩散函数模糊合成边缘图块时，所得相对边缘响应值是否相同。为此，我们使用 Conran 开发并在 {v1} 中介绍的代码模拟了系统点扩散函数。



(a) $\sigma = 1$ (b) $\sigma = 2$ (c) $\sigma = 4$ (d) $\sigma = 8$

图 2：不同高斯模糊程度下的合成边缘图像。

表1：参　　数：用于生成不进行下采样的一阶段和两阶段高斯模糊边缘图像　　g

第一阶段模糊	0.1 - 3 像素
第二阶段模糊	0 - 3 像素
组合模糊（两阶段图像）	0.1 - 4.25 像素

Conran 的模型采用表 3 所示的光学系统参数，我们的模拟涵盖了其中展示的范围。

对于生成的每个光学点扩散函数，我们都使用非线性最小二乘拟合程序，找到与之最接近的二维高斯函数。对于每个模拟的光学点扩散函数及其高斯最佳拟合版本，我们都对理想合成边缘进行模糊处理，并测量所得的相对边缘响应。

4 结果与分析

4.1 高斯点扩散函数

对于经高斯核模糊处理的合成边缘图像，我们发现，当 $\sigma \gtrsim 1$ 像素时，公式6中的理想边缘斜率模型与观测结果吻合良好，且预测的相对边缘响应会随着 $\sigma \to 0$ 急剧增大。公式14中纳入离散采样的模型避免了第一个模型在 σ 处出现的小型灾难，但在 $\sigma < 1$ 时仍无法很好地拟合数据。图3展示了使用这两种模型对边缘模糊一次和分两个阶段模糊时，相对边缘响应的建模值与测量值的拟合情况；对于模糊两次的边缘，组合标准差 $\sigma_{effective}$ 根据公式27计算得出。

有两个因素可以解释我们的公式14模型在较小 σ 时表现相对较差。首先，由于忽略了像素本身的传递函数，该模型会在 σ 非常小时高估相对边缘响应。其次，由于生成模糊核时固有的离散采样，在 σ非常小时，模糊核不再呈现高斯特性。图4展示了我们用于生成边缘图像的 Torchvision 库中模糊核的一维轮廓。随着标准差 σ 趋近于0，模糊核逐渐失去高斯特性，并趋近于离散δ函数。模糊核的这种非高斯特性往往会使较小 σ时的相对边缘响应升高，导致我们的公式14模型在 σ较小时低估相对边缘响应。由于这一效应，当 $\sigma > 0.5$ 像素且图像未经下采样时，我们最简单的公式6模型对相对边缘响应的预测效果最佳。

为避免离散模糊核的影响，我们接下来考虑先在高分辨率下对合成边缘图像进行模糊处理，再将其下采样。模糊处理后再降采样时，最终的高斯有效标准差会按照与图像相同的比例缩放，因此在降采样之前可以使用标准差更大的模糊核，使其具有更明显的高斯特性。对于以这种方式进行模糊处理、从而更好地近似光学成像的合成边缘图像，我们发现，当 $\sigma > 1$ 像素时，最简单的模型（公式6）仍能取得合理效果；对于更大的值，我们则可避开 $1/\sigma$ 关系所固有的问题。我们还发现，如图5所示，我们的公式14离散采样现在会在所有较小的 σ情况下系统性地高估相对边缘响应。

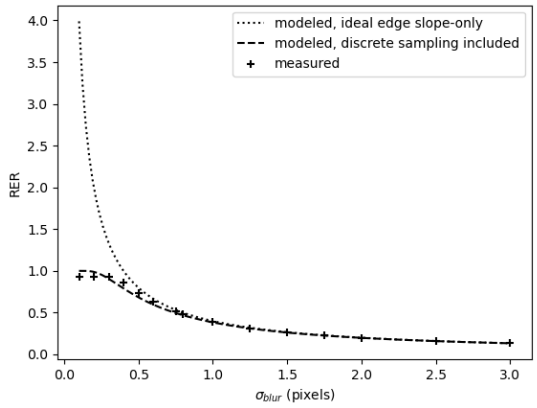
我们可以这样理解低 σ 时实测相对边缘响应与离散采样模型预测的相对边缘响应为何存在偏差：像素本身的传递函数会显著影响低模糊值下的相对边缘响应。重要的是，这个传递函数不同于我们在 2.2 节中考察的离散采样效应，在那里我们推导了

表 2：使用两阶段高斯模糊和整数下采样生成边缘图像时所用的参数

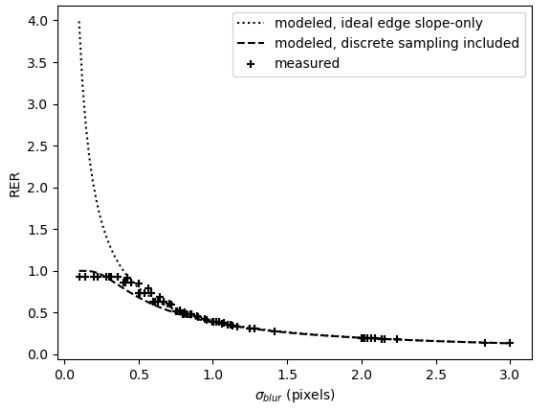
第一阶段模糊	0.75 - 6 像素
第二阶段模糊	0 - 6 像素
组合模糊（下采样前）	0.75 - 8.5（像素）
下采样比例	2, 3, 4, 5（无量纲）
组合有效模糊（下采样后）	0.15 - 4.2 像素

表 3：光学点扩散函数模拟中使用的系统参数

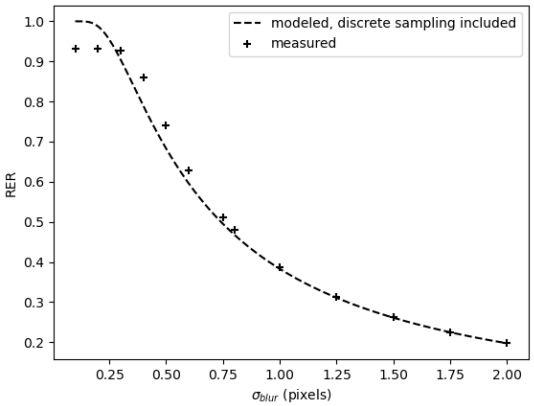
焦比	20（无量纲）
孔径填充因子	0.8（无量纲）
像素间距	8 μm
波长	0.8 μm
波前误差	0.025 - 0.135 μm
拖影	0.05 - 0.15 像素
弥散抖动	2.6e-5 - 5e-4 像素
下采样比例	1, 2（无量纲）



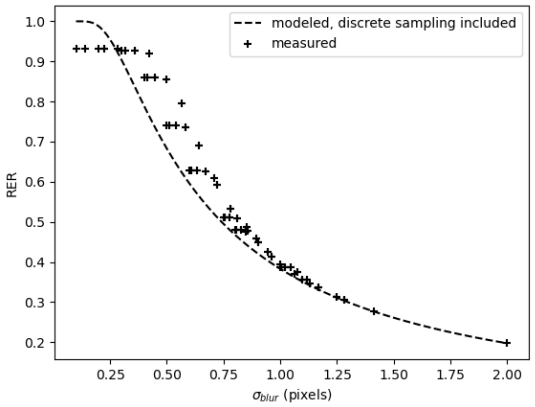
(a) $0.1 \leq \sigma \leq 3$，单级模糊



(b) $0.1 \leq \sigma_{effective} \leq 3$，两级模糊



(c) $0.1 \leq \sigma \leq 2$，单级模糊



(d) $0.1 \leq \sigma_{effective} \leq 2$，两级模糊

图3：相对边缘响应的建模与测量。

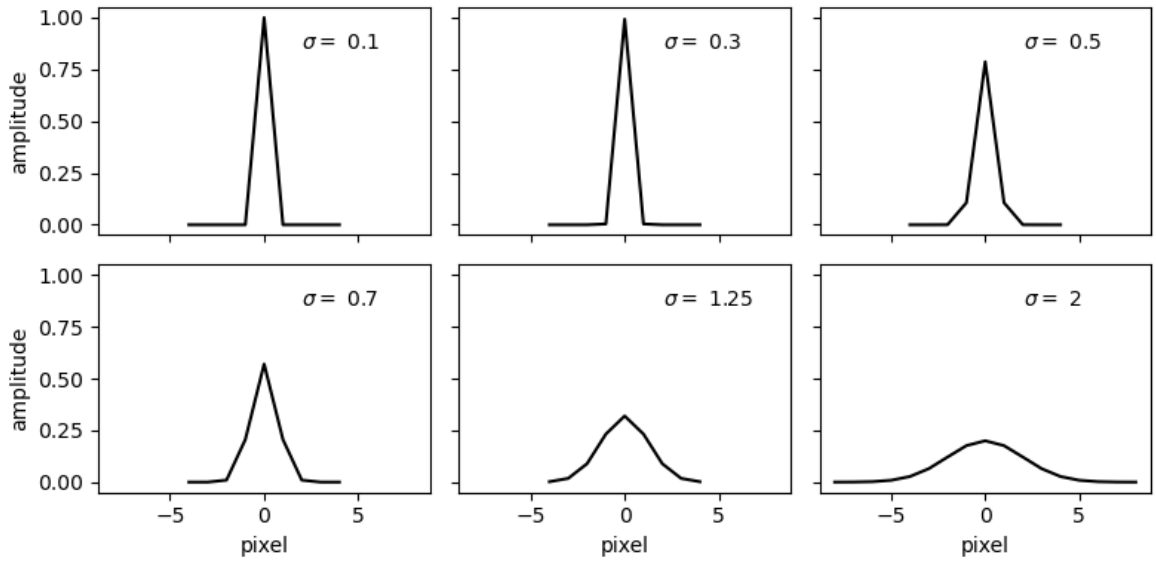


图4：来自 Torchvision 库的高斯核轮廓。在这里，我们可以看到，由于离散采样，模糊核在较小时会失去其高斯特性 σ

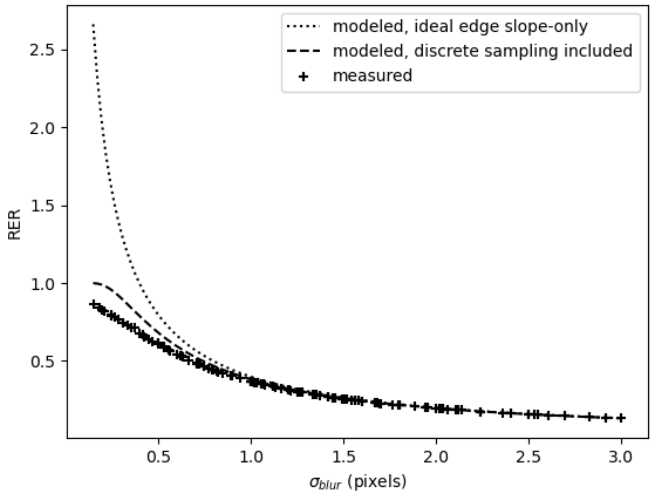


图5：相对边缘响应作为高斯模糊的函数

，由理想边缘斜率模型（公式6）和离散采样模型（公式14）测量并预测。这些离散采样模型通过在 $\pm 1/2$ 像素处进行离散测量，考虑了用边缘扩展函数的导数近似值所带来的影响；而像素传递函数则通过对像素宽度范围内的图像信号取平均，显著改变边缘扩展函数。

To e为估算像素传递函数的影响，我们计算了组合传递函数

$$H_{combined}\left(\xi;\sigma\right) = H_{Gauss}\left(\xi;\sigma\right) \cdot H_{pixel}\left(\xi\right), \tag{28}$$

在一系列 σ 值下 。由于我们指定 σ 的单位为像素，因此可以方便地将像素视为 g
单位宽度，从而得到 th 像素传递函数

$$H_{pixel}\left(\xi\right) = \mathfrak{F}\left\{\text{RECT}\left(x\right)\right\} = \text{SINC}\left(\xi\right), \tag{29}$$

其中，矩形函数（x）和辛克函数（ξ）是一对傅里叶变换，表示为

$$\text{RECT}\left(\xi\right) \equiv \begin{cases} 1 & \text{when } -\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{when } \xi = \pm\frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{30}$$

and

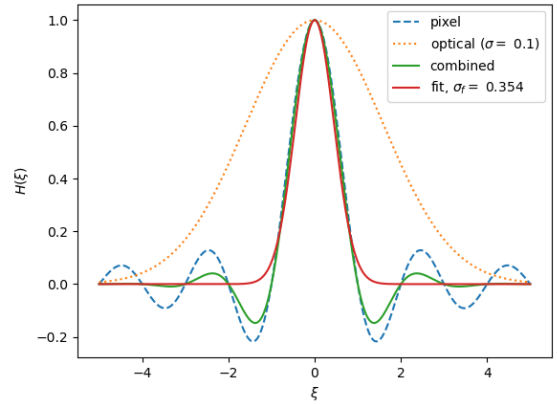
$$\text{sinc}\left(x\right) \equiv \frac{\sin\left(\pi x\right)}{\pi x} \tag{31}$$

分别为。高斯的传递函数是另一个高斯函数，其标准差与第一个高斯函数的标准差成反比 [11], ，从而得到传递函数

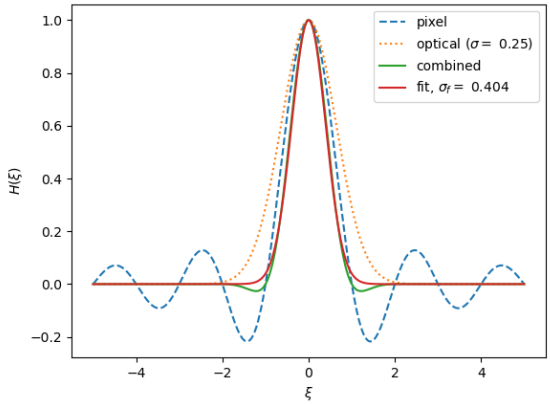
$$H_{Gauss} = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right\} = \exp\left(2\pi^2\sigma^2\xi^2\right) \tag{32}$$

标准差为 σ 的高斯点扩散函数。因此，对于标准差为 σ 的高斯点扩散函数，我们得到一个组合传递函数

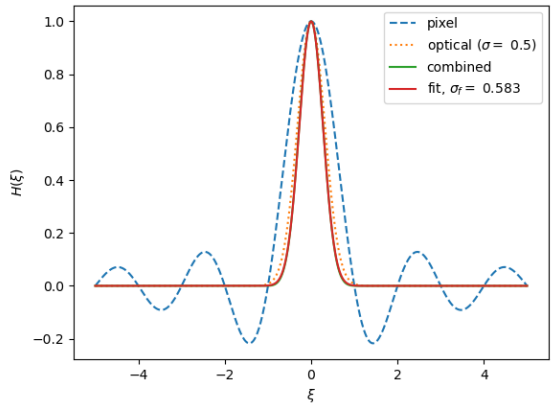
$$H_{combined}\left(\xi;\sigma\right) = \exp\left(2\pi^2\sigma^2\xi^2\right) * \text{SINC}\left(\xi\right). \tag{33}$$



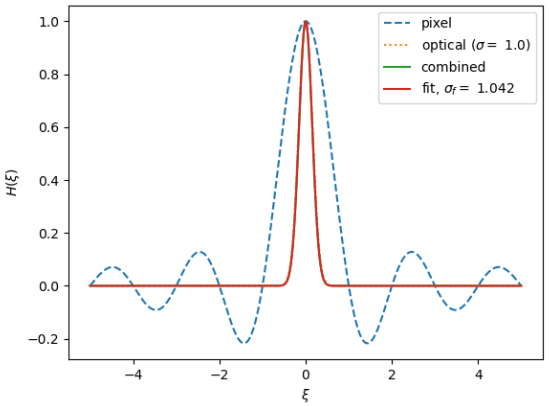
(a) $\sigma = 0.1$, $\sigma_f = 0.354$



(b) $\sigma = 0.25$, $\sigma_f = 0.404$



(c) $\sigma = 0.5$, $\sigma_f = 0.583$



(d) $\sigma = 1$, $\sigma_f = 1.042$

图6：不同高斯点扩散函数宽度与单位宽度像素对应的组合传递函数。请注意，在所有情况下，σ指归一化高斯点扩散函数的标准差，而它与高斯传递函数的宽度成反比（见公式32）。这里可以看到，当像素宽度为 $\sigma < 0.5$ 时，像素传递函数开始显著改变组合传递函数。

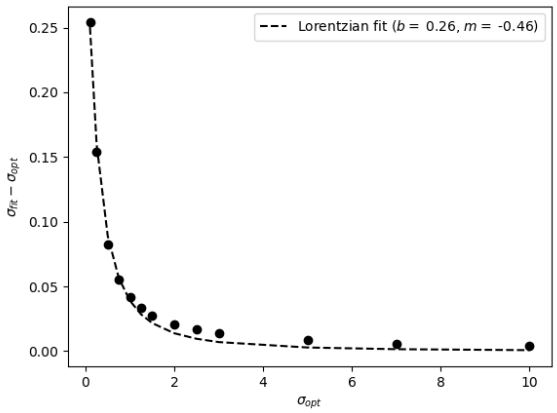


图7：原始高斯 σ 与公式33给出的组合传递函数最佳拟合结果σ_f 之间的残差

图6展示了该传递函数中两个项之间的相互作用。对于较宽、 σ 较大的高斯点扩散函数，我们得到较窄的高斯传递函数，此时像素传递函数的影响很小。相反，对于较窄、 σ 较小的高斯点扩散函数，我们得到较宽的高斯传递函数，此时像素传递函数的影响显著。我们对每个组合传递函数 $H_{combined}$ 拟合了形式为 $H_f(\xi) = \exp\left(2\pi^2\sigma_f^2\xi^2\right)$ 的高斯函数，并观察到，当 σ 较小时，由于像素传递函数的影响，原始点扩散函数模糊参数与最佳拟合高斯模糊参数 σ_f 之间的差异变化显著。图7显示了不同 σ 下原始 σ 与 σ_f 之间的差异，残差呈近似洛伦兹型模式，其中洛伦兹函数 [14] 为

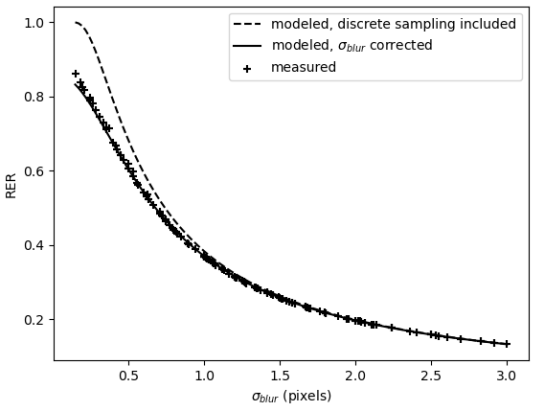
$$P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(x-m)^2 + b^2}. \tag{34}$$

将图7所示的拟合参数应用于公式34，我们便能够估算出一个组合高斯函数，同时考虑高斯点扩散函数和像素传递函数。将此校正值加到原始模糊参数 σ上，其中

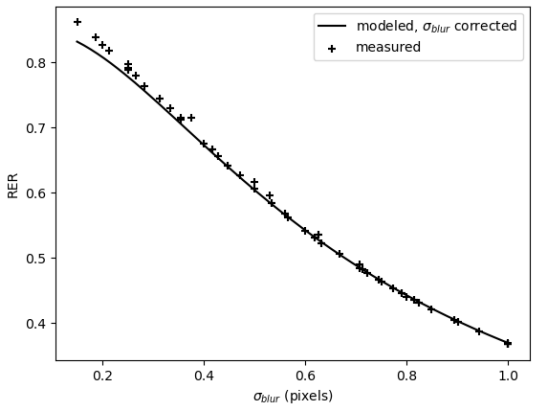
$$\sigma_{corrected} = \sigma + \frac{1}{\pi}\frac{b}{(\sigma-m)^2 + b^2}, \tag{35}$$

并在公式14给出的相对边缘响应模型中使用校正后的模糊值，我们可以看到，在很宽的模糊参数 σ范围内，模型计算的相对边缘响应与测量值高度吻合，如图8所示。

鉴于模型预测的相对边缘响应与测量结果吻合良好，我们可以得出结论：如果对像素传递函数进行修正，公式14给出的模型就能准确预测相对边缘响应随高斯模糊变化的情况，即使模糊程度低至很低的 σ。需要强调的是，这项修正本身并未参考相对边缘响应，而是通过为高斯点扩散函数与单位宽度像素矩形函数卷积后得到的组合传递函数求得最佳拟合高斯函数而确定的；我们的相对边缘响应模型从未根据相对边缘响应结果进行拟合，这表明其从第一原理出发的推导是可靠的。



（a）有模糊校正和无模糊校正



（b）有模糊校正，小 σ

图8：采用离散采样模型（公式14）测量和预测的相对边缘响应与高斯模糊的关系，以及采用和未采用像素传递函数校正（公式35）的结果（左）。完全校正后的模型在低至约$\sigma \geq 0.25$时仍表现良好。

4.2 光学点扩散函数的高斯近似

在确认我们能够预测点扩散函数完全呈高斯分布的系统的相对边缘响应后，我们接下来研究了能否利用仿真的光学点扩散函数的高斯近似来准确预测相对边缘响应。表3列出了光学仿真所用的参数。需要指出的是，我们仿真的点扩散函数对应的是降采样前的 $Q = 2$ 系统，其中 Q 是光学质量因子，定义为

$$Q = \frac{\lambda F}{p}, \tag{36}$$

波长为 λ、焦比为 F、像素间距为 p时。[1] 下采样后，像素间距实际上加倍，导致 Q下降。图9显示了由模拟光学点扩散函数及其最佳拟合高斯近似得到的相对边缘响应。

从这些结果可以看出，光学核的具体形状很重要；由我们模拟的某个光学核模糊后的图像，其相对边缘响应与由最佳拟合高斯核模糊后的图像的相对边缘响应不同。我们还使用了其他光学仿真参数，并观察到（此处未展示）由我们的光学核模糊后的图像与其最小二乘高斯函数对应项之间，相对边缘响应也存在类似差异。

5 结论

本文推导了高斯模糊与相对边缘响应之间关系的闭式近似，并展示了这些近似的局限性。对于在最终分辨率下模糊的图像，我们发现，当模糊标准差约为 0.5 像素及以上时，我们的模型能够较好地预测相对边缘响应。最简单的关系式为

$$\text{RER} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{37}$$

当 $\sigma > 0.5$ 时，其表现优于改进近似；但随着 $\sigma \to 0$，两者很快出现偏离。

对于先在高分辨率下进行模糊处理、再下采样的图像——这更能近似焦平面上的光学模糊和采样过程——我们发现，改进近似

$$\text{RER} \approx \text{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}\right), \tag{38}$$

[1]概念上，Q 是艾里斑半径与像素间距之比；对于填充因子为 100% 的传感器，它也是探测器截止频率与光学截止频率之比。

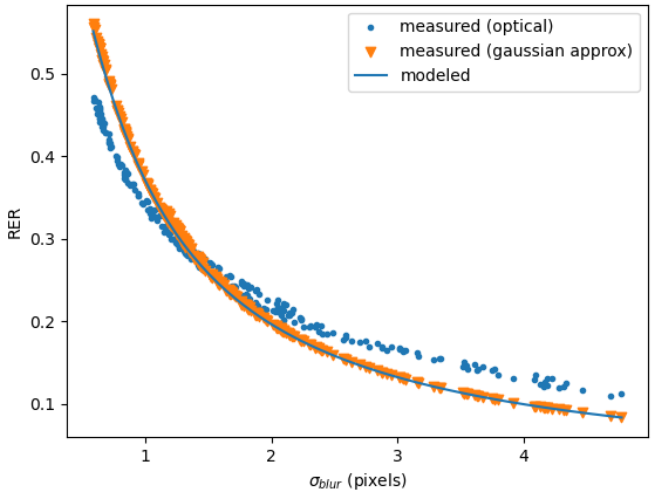


图 9：经过模拟光学点扩散函数模糊处理的图像及其最佳拟合高斯近似的相对边缘响应。模拟点扩散函数由 $Q = 1$ 和 $Q = 2$ 系统组合而成，其波前误差、抖动和拖影值在表 3 所示范围内变化。

对于大于约 0.75 像素的模糊值，该方法能够很好地预测相对边缘响应（RER）；超过这一数值后，高斯传递函数便占据主导地位，超过像素传递函数。在较小的模糊值下，我们可以通过式 35 给出的修正来考虑像素传递函数。此外，我们证明，当分两阶段应用高斯模糊时，可以通过对两个标准差进行平方和开方，求得组合高斯函数的标准差，

$$\sigma_{combined} = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}. \tag{39}$$

最后，我们发现，使用光学点扩散函数的最小二乘高斯近似进行模糊处理，所得相对边缘响应与直接使用光学点扩散函数进行模糊处理所得的结果并不相同。

参考文献

[1] L. Harrington, D. Blanchard, J. Salacain, S. Smith, and P. Amanik, “通用图像质量方程：GIQE 第5版”，美国弗吉尼亚州贝尔沃堡国家地理空间情报局，技术报告，2015年。[2] A. Paszke, S. Gross, F. Massa, A. Lerer, J. Bradbury, G. Chanan, T. Killeen, Z. Lin, N. Gimelshein, L. Antiga, A. Desmaison, A. Kopf, E. Yang, Z. DeVito, M. Raison, A. Tejani, S. Chilamkurthy, B. Steiner, L. Fang, J. Bai, and S. Chintala，“PyTorch：一种命令式风格的高性能深度学习库”，神经信息处理系统进展 *32*，第8024–8035页，Curran Associates, Inc.，2019年。[3] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, ˙I. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, and SciPy 1.0 贡献者，“SciPy 1.0：Python 科学计算的基础算法”，《自然·方法》**17**，第261–272页，2020年。[4] M. Abadi, A. Agarwal, P. Barham, E. Brevdo, Z. Chen, C. Citro, G. S. Corrado, A. Davis, J. Dean, M. Devin, S. Ghemawat, I. Goodfellow, A. Harp, G. Irving, M. Isard, Y. Jia, R. Jozefowicz, L. Kaiser, M. Kudlur, J. Levenberg, D. Mané, R. Monga, S. Moore, D. Murray, C. Olah, M. Schuster, J. Shlens, B. Steiner, I. Sutskever, K. Talwar, P. Tucker, V. Vanhoucke, V. Vasudevan, F. Viégas, O. Vinyals, P. Warden, M. Wattenberg, M. Wicke, Y. Yu, and X. Zheng，“TensorFlow：异构系统上的大规模机器学习”，2015年。软件可从 tensorflow.org 获取。[5] S. Dodge and L. Karam，“了解图像质量如何影响深度神经网络”，*2016*年第八届多媒体体验质量国际会议（*QoMEX*），第1–6页，2016年。

[6] S. Dodge and L. Karam，“视觉失真条件下人类与深度学习识别性能的研究与比较”，*2017*年第*26*届国际计算机通信与网络会议（*ICCCN 2017*），2017年9月。[7] R. Geirhos, C. R. M. Temme, J. Rauber, H. H. Schütt, M. Bethge, and F. A. Wichmann，“人类与深度神经网络中的泛化”，*CoRR* **abs/1808.08750**，2018年。[8] D. Hendrycks, N. Mu, E. D. Cubuk, B. Zoph, J. Gilmer, and B. Lakshminarayanan，“AugMix：一种提升鲁棒性与不确定性的简单数据处理方法”，2019年12月。[9] A. C. Bergstrom and D. W. Messinger，“理解图像质量与卷积神经网络性能之间的关系”，模式识别与跟踪 *XXXIII* **12101**，第10–24页，2022年。[10] P. D. Burns 等，“用于数码相机和扫描仪分析的倾斜边缘调制传递函数”，成像科学与技术学会图片会议，第135–138页，2000年。[11] R. L. E. Jr，成像中的傅里叶方法，John Wiley & Sons，2010年。[12]A. Bergstrom，“相对边缘响应”，2022年10月。网址：https://github.com/acb08/ relative-edge-response。[13] D. Conran，“遥感成像仪的高保真点扩散函数/调制传递函数仿真——GRSS-IEEE”。网址：https://www.grss-ieee.org/events/high-fidelity-psf-mtf-simulations-for-remote-sensing-imagers/。[14] E. W. Weisstein，“洛伦兹函数。摘自 MathWorld——Wolfram 网络资源”。最后访问日期：2022年12月15日。