arXiv:2301.00857v1 [math.FA] 2 Jan 2023

有理格上的全正函数与 Gabor 框架

¨KARLHEINZ GROCHENIG

Abstract. 我们证明，对于任意全正函数 $g \in L^1(\mathbb{R})$ 和 $\alpha\beta$ 有理数，Gabor 族 $\{e^{2\pi i\beta lt}g(t-\alpha k)\colon\ k,l \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个框架，当且仅当 $\alpha\beta < 1$。

1. Introduction

自 J. von Neumann 和 D. Gabor 声称时频移位（相空间移位）族 $\{e^{2\pi ilt}e^{-\pi(t-k)^2}\colon\ k,l \in \mathbb{Z}\}$ 张成 $L^2(\mathbb{R})$ 以来，时频移位的张成性质一直引发数学家、物理学家和工程师的好奇。该问题的现代版本以任意生成元取代高斯函数，并以一般格甚至非均匀集取代格 $\mathbb{Z}^2$ 上的时频移位。

具体而言， $g \in L^2(\mathbb{R})$关于(x,ξ)的时频移位 $\in \mathbb{R}^2$ 定义为

$$M_\xi T_x f(t) = e^{2\pi i\xi t}g(t-x)\,. \tag{1}$$

给定格参数 $\alpha,\beta > 0$ ，集合 $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta) = \{M_{\beta l}T_{\alpha k}g\colon\ k,l \in \mathbb{Z}\}$ 称为以窗函数 g为基础、定义在格 $\alpha\mathbb{Z}\times\beta\mathbb{Z}$ 上的 Gabor族。Gabor分析研究在什么条件下，对于 α, β和 g，存在常数 $A,B > 0$，使得

$$A\|f\|_2^2 \le \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{\beta l}T_{\alpha k}g\rangle|^2 \le B\|f\|_2^2 \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R})\,. \tag{2}$$

若(2)成立，则称 $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$为 Gabor框架。集合

$$\mathcal{F}(g) = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2_+ : \mathcal{G}(g,\alpha,\beta) \text{ is a frame }\}$$

称为 g的框架集。了解 $\mathcal{F}(g)$，就等于完整刻画了所有能与给定窗函数 g一起生成 Gabor 框架的（矩形）格 $\alpha\mathbb{Z}\times\beta\mathbb{Z}$ 。

我们对框架集的理解仍然非常有限。典型的结果由 Lyubarski [28] 和 Seip-Wallsten [33,34] 给出，他们确定高斯函数的框架集为 $\mathcal{F}(e^{-\pi t^2}) = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2_+\colon\ \alpha\beta < 1\}$。通常将其表述为： $\mathcal{G}(e^{-\pi t^2},\alpha,\beta)$ 是框架，当且仅当 $\alpha\beta < 1$。随后，Janssen 和 Strohmer [22,23,25]找到了更多框架集的例子。当时

2010年数学主题分类。42C15，42C40，94A20，42A82。关键词和短语：全正函数，Gabor框架，谱不变性，全正矩阵的可逆性。K. G. 的研究部分由奥地利科学基金（FWF）项目 P31887-N32 资助。

文献 [19] 指出，直到 2010年为止，所有已知的例子都基于全正窗口 g。这一观察促使人们采取更系统的方法，研究全正窗口的框架集。

为说明当前最先进的研究成果，我们回顾一下：可测函数 g 在 $\mathbb{R}$上是全正的，如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意两组递增数列$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$和 $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$，矩阵 $\big(g(x_j - y_k)\big)_{j,\ k=1,\ \ldots n}$的行列式均非负：

$$\det(g(x_j - y_k)\Big)_{j,k=1,\ldots,n} \geq 0\,. \tag{3}$$

此外，如果 g 可积，那么根据引理 2], g 已经具有指数衰减 [31,。可积的全正函数通常称为波利亚频率函数，但本文不作此区分。

根据 Schoenberg 的一个深刻定理 [31]，可积全正函数 g 的傅里叶变换具有如下因式分解

$$\hat{g}(\xi) = ce^{-\gamma\xi^2} e^{2\pi i\nu\xi} \prod_{j=1}^{N} (1 + 2\pi i\nu_j\xi)^{-1} e^{-2\pi i\nu_j\xi} \tag{4}$$

其中 $c > 0$、 ν、 $\nu_j \in \mathbb{R}$、 $\gamma \geq 0$、 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $0 < \gamma + \sum_j \nu_j^2 < \infty$。

全正函数包括高斯函数 $e^{-\gamma t^2}$ （其中 $\gamma > 0$ ）以及单边指数函数 $\eta_\gamma(t) = e^{-\gamma t}\chi_{\mathbb{R}^+}($ $\gamma t)$，其中 $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$。

对于因式分解 (4) 为有限乘积的全正函数子类， $[18, 19]$ 的结果可概括如下：

定理 1.1. 设 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 是一个全正函数，其有限因式分解 (4) 中除单边指数函数 η_γ 外还含有 $N \in \mathbb{N}$，则

$$\mathcal{F}(g) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ : \alpha\beta < 1\}\,.$$

换言之，格 $\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$ 生成一个以全正窗口 g 为窗口的框架，当且仅当 $\alpha\beta < 1$。

值得注意的是，定理 1.1 的证明对两种情形采用了不同方法：$\gamma = 0$ （无高斯因子）和 $\gamma > 0$ （有高斯因子）。在前一种情形中，证明使用了全正性和 Schoenberg-Whitney 条件；在后一种情形中，则仅将因式分解与复分析结合使用。

单侧指数函数 η_γ 的框架集略有不同，因为 η_γ 不够光滑，Balian-Low 定理不适用 [20]。在这种情况下，框架集为 $\mathcal{F}(\eta_\gamma) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ : \ \alpha\beta \leq 1\}$，Janssen [22] 早已得出这一结果。

定理 1.1 表明，对所有全正生成元，Gabor 框架的刻画都成立。我们的目标是证明以下定理，这是迈向完整猜想的一步；该猜想在 [16] 中提出。

定理 1.2. 假设 g 是全正函数，且不是单边指数函数 η_γ。进一步假设 $\alpha\beta$ 是有理数。那么，当且仅当 $\alpha\beta < 1$时， $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的框架。

定理 1.2 表明，框架集 $\mathcal{F}(g)$ 是 $\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2_+ : \alpha\beta < 1\}$ 的开稠密子集。这是 Feichtinger 和 Kaiblinger 的一个变形结果 [11] 的推论。

由于每个全正函数都是具有有限因式分解的全正函数的极限，因此人们希望某种极限过程能够奏效。然而，到目前为止，我们所有的“证明”都存在漏洞。除了双曲正割的例子 $(e^{at}+e^{-at})^{-1}$ [25]之外，定理 1.2 是第一个关于具有无限因式分解（4）的全正生成元所生成的 Gabor 框架的一般性结论。

在本文中，我们提出了一种独立于 Schoenberg 的因式分解（4）的新方法，该方法仅使用全正性的定义。新的证明思路源自 [8] 关于无限全正矩阵可逆性的一个深刻定理。我们还采用了矩阵代数谱不变性方面的方法，以及全正函数的 Zak 变换只有一个零点这一重要事实。对于有理格，这种方法还导出了定理 1.1 的一种新证明。

最后，我们提及一项出色的研究 [3], ，该研究确定了有理函数（Hurwitz 函数）$g(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{t-iw_j}$ 的框架集，其中 $w_j \in \mathbb{C}$。若 $a_j > 0$ 且 $w_j > 0$，则 $\mathcal{F}(g) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ : \alpha\beta \le 1\}$；对于一般系数，框架集包含 $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ : \alpha\beta \le 1\} \cap \mathbb{Q}^c$。有趣的是，与我们的研究相反，作者证明所有无理格都属于框架集！

除此之外，只有区间的特征函数 $\chi_{[0,1]}$ [5] 和 Haar 函数 [6] 的完整框架集已得到确定。与全正窗口和有理函数的结果相比，框架集极其复杂，并且取决于乘积 $\alpha\beta$ 的微妙数论性质。

无理格的情形仍未解决。有一些证据表明，通常而言，具有无理数 $\alpha\beta$ 的格 $\alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$ 会生成 Gabor 框架。 [3] 和 [6] 中包含了支持这一方向的重要结果。在这两种情形下，底层的动力系统和某种遍历性都发挥了作用。目前，我们还不知道这一结论对全正窗口是否成立。

当然，关于 Gabor 框架，还有许多已知且相关的结果。由于我们只关心给定窗口的 Gabor 框架的完备刻画，关于 Gabor 框架的一般理论，请参阅综述 [15, 17, 20] 和专著 [9, 14]。

本文结构如下：在第2节中，我们回顾 Gabor分析所依据的工具，包括 Zak 变换方法、关于谱不变性的 Banach代数方法，以及 Gabor 框架的一般刻画。所有这些刻画归根结底都是要证明某个（无限）矩阵可逆。在我们的方法中，所考虑的矩阵 G 是所谓预 Gram 矩阵的一个子矩阵。这是一项技术上的创新。在第3节中，我们将大量运用谱不变性的性质以及来自 [8]的一个定理，证明该矩阵是满射 $\ell^1(\mathbb{Z})$。在第4节中，我们将证明 G 也是单射。只有在这里，我们才会用到格的有理性。最终，证明归结为这样一个事实：一个方阵可逆，当且仅当它是满射。

致谢。我衷心感谢 Jose Luis Romero 和 Joachim St¨ockler 对本文早期版本提出的意见。

2. Tools

2.1. 约化。设 $g_\beta(x) = \beta^{-1/2} g(x/\beta)$。那么，当且仅当 $\mathcal{G}(g_\beta, \alpha\beta\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ 是一个框架时， $\mathcal{G}(g, \alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z})$ 才是一个框架。由（3）可立即得出，全正函数的集合在伸缩变换下保持不变。因此，如果 g 是全正的，那么 g_β 也同样是全正的。因此，我们总可以将 g 替换为 g_β，将 α 替换为 $\alpha\beta$，并将 β 替换为 1，从而不失一般性地假设 $\beta = 1$。

我们注意到，由于 Gabor 框架 [20] 的密度定理，我们总可以假设 $\alpha\beta < 1$，并且在约化之后假设$\alpha < 1$、 $\beta = 1$。

2.2. 谱不变性。谱不变性指的是这样一种现象：具有足够强非对角衰减的可逆无穷矩阵，其逆矩阵也具有相同的非对角衰减。这一主题历史悠久，已有许多相关贡献和不同变体。关于部分相关成果，请参见 $[1, 2, 35–38]$，综述请参见 $[15]$。以下版本可归功于 Shin-Sun $[35]$ 和 Tessera $[38, \text{定理 } 1.8]$。

命题 2.1（稳定性定理）。设 $G = (G_{kl})_{k,\, l\in\mathbb{Z}}$ 是一个具有非对角衰减的双无限矩阵

$$|G_{kl}| \le C(1 + |k - l|)^{-\sigma} \qquad k, l \in \mathbb{Z},$$

其中某个 $\sigma > 1$。

(i) 谱不变性：若 G 在某个 $\ell^{p_0}(\mathbb{Z})$ 上可逆，则对所有 $1 \le p \le \infty$， G 在所有 $\ell^p(\mathbb{Z})$ 上均可逆。

(ii) 稳定性：若 G 在某个 $\ell^{p_0}(\mathbb{Z})$ 上稳定，即若 G 满足

$$\|Gc\|_{p_0} \ge A\|c\|_{p_0} \qquad \textit{for all } c \in \ell^{p_0}(\mathbb{Z}),$$

则对所有 $1 \le p \le \infty$， G 在所有 $\ell^p(\mathbb{Z})$ 上均稳定。

对于满射映射，我们需要对稳定性 (ii) 作一个小幅调整。

命题 2.2. 设 $G = (G_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$ 具有非对角衰减

$$|G_{kl}| \le C(1 + |k - l|)^{-\sigma} \qquad k, l \in \mathbb{Z},$$

对于某些 $\sigma > 1$。若 G 将 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 映射到 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 上，则 G 也将 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 映射到 $\ell^1(\mathbb{Z}\quad)$ 证明。注意，非对角衰减意味着 G 在所有 $\ell^p(\mathbb{Z})$ $1 \le p \le \infty$ 上定义了一个有界算子。

根据闭值域定理， $[30, \text{p. } 102]$, 在预对偶 G^* 上的伴随算子（矩阵）： $\ell^1(\mathbb{Z}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$ 是单射，且在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 中具有闭值域。因此，G^* 满足如下形式的不等式

$$\|G^*c\|_1 \ge A\|c\|_1 \qquad \text{for all } c \in \ell^1(\mathbb{Z}) \tag{5}$$

其中 $A > 0$ 为正常数。

于是，命题 2.1 的稳定性部分意味着 (5) 对所有 p-范数都成立；特别地，对于某个 $A' > 0$，有

$$\|G^* c\|_\infty \geq A' \|c\|_\infty \qquad c \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) .$$

由于 G^* 在 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 中是单射，且值域为闭集，我们得出 $G : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$ 必须映满 $\ell^1(\mathbb{Z})$。 ∎

2.3. Gabor 框架的刻画。我们使用以下 Gabor 框架刻画，它可追溯至 Janssen [21] 以及 Gabor 框架对偶理论 [29]。这是验证有理矩形格上的 Gabor 系统是否生成框架的最成功判据之一，并已被多次应用。关于已知的 Gabor 框架刻画及其部分用途的综述，请参阅 [17] 。

定理 2.3. 假设 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续且满足条件 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[0,1]} |g(x+k)| < \infty$。则以下命题等价。

(i) 族 $\mathcal{G}(g, \alpha\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的框架。(ii) 对每个 $x \in [0, 1)$，存在 $A_x, B_x > 0$ 使得

$$A_x \|c\|_2^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k g(x + \alpha j - k) \Big|^2 \leq B_x \|c\|_2^2 \qquad \text{for all } c \in \ell^2(\mathbb{Z}). \tag{6}$$

(iii) 存在 $A, B > 0$，使得对所有 $x \in [0, 1)$，

$$A\|c\|_2^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k g(x + \alpha j - k) \Big|^2 \leq B\|c\|_2^2 \qquad \text{for all } c \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

矩阵 $P(x) = \big(g(x + \alpha j - k)\big)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 通常称为 Gabor 族的预 Gram 矩阵。

利用谱不变性，我们推导出 Gabor 框架的以下充分条件。

命题 2.4. 设 g 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的一个函数，其具有多项式衰减 $|g(t)| \leq C(1+|t|)^{-\sigma}$，其中某个 $\sigma > 1$。假设对每个 $x \in \mathbb{R}$，集合 $x + \alpha\mathbb{Z}$ 都包含一个子集 $\{k + \delta_k : k \in \mathbb{Z}\}$，其扰动 $\delta_k = \delta_k(x)$ 依赖于 x，使得由 $G_{kl} = g(k + \delta_k - l)$ 构成的矩阵 G 在 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 上可逆。那么 $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ 是一个 Gabor 框架。

证明。 g 的衰减意味着 G 具有足够的非对角衰减，可应用命题 2.1(i)。因此，谱不变性断言， G在$\ell^\infty(\mathbb{Z})$上的可逆性意味着 G 在 $\ell^2(\mathbb{Z})$上也可逆。由于 $x + \alpha\mathbb{Z} \supseteq \{k + \delta_k : k \in \mathbb{Z}\}$，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big| \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l g(x + \alpha j - l)\big|^2 &\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big| \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l g(k + \delta_k - l)\big|^2 \\ &= \|Gc\|_2^2 \geq A_x \|c\|_2^2 . \end{aligned}$$

由于 g 的衰减，(6) 中的上界总是成立。对所有 x，这一点都成立，因此定理 2.3 的条件 (ii) 推出 $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ 是一个框架。 ∎

命题 2.4 表明，预 Gram 矩阵 $P(x)$ 的一个适当子矩阵是可逆的。命题 2.4 与通过采样对移位不变空间进行的刻画有关，这些刻画在 [18] 中占据重要地位。（用一种等价的表述来说，每个集合 $x + \alpha\mathbb{Z}$ 都包含 $\mathbb{Z}$ 的一个扰动，该扰动在与 g 相关联的移位不变空间中是插值的。）

为证明主定理（定理 1.2），我们将验证命题 2.4 的条件。

2.4. Zak 变换。我们回顾函数 $g \in L^1(\mathbb{R})$ 的 Zak 变换 $Zg(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x-k)e^{2\pi ik\xi}$ 的定义。更一般地，周期为 $p > 0$ 的 Zak 变换定义为

$$Z_p g(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x-pk)e^{2\pi ipk\xi}\,.$$

Zak 变换关于第二个变量是 $\frac{1}{p}$-周期的，关于第一个变量是准周期的，即，对所有 $x,\xi \in \mathbb{R}$

$$Z_p f\left(x+pk, \xi+\tfrac{l}{p}\right) = e^{2\pi ipk\xi} Z_p g(x,\xi)\,.$$

全正函数的 Zak 变换只有少数几个零点。这一重要性质直到最近才被发现 [26, 27, 39]，且对我们的论证至关重要。

命题 2.5. 全正函数 g 的 Zak 变换在 $[0,1)^2$ 中有唯一一个零点，该零点位于 $(x_0, 1/2)$，其中 $x_0 \in [0,1)$。

3. Surjectivity.

为证明定理 1.2，我们验证全正函数 g 满足命题 2.4 的充分条件。首先证明其满射性。注意，本节中的论证对 $\alpha \in (0,1)$ 的任意取值都成立。

命题 3.1. 设 g 是 $L^1(\mathbb{R})$ 中任意一个全正函数，并假设其 Zak 变换在 $(x_0, 1/2)$ 处有唯一零点。设 $\epsilon \in (0, 1/2), M \in \mathbb{Z}$，且 $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq [x_0 + M - 1 + \epsilon, x_0 + M - \epsilon]$ 是一个扰动序列。那么，以 $G_{kl} = g(k + \delta_k - l)$ $k, l \in \mathbb{Z}$ 为元素的矩阵 G 将 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 映到 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$，并将 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 映到 $\ell^1(\mathbb{Z})$。

证明。证明中我们将使用 de Boor、Friedland 和 Pinkus 的以下基本结果 [8, 推论 1]。假设 G 是一个在 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$[1]上有界的全正矩阵。如果 G 的值域包含一个一致交错向量，那么 G 是 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$上的满射。该结果是我们证明中的关键工具。关于无限全正矩阵可逆性的相关结果可见 [4, 7, 10]。

一致交替意味着我们需要找到一个序列 $c \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$，使得 $u = Gc$ 满足 $u(k)u(k+1) < 0$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 都成立，并且 $\inf_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)| > 0$。

[1]Th这些原始结果是针对符号正则矩阵和更一般的指标集表述的 .

为此，我们取 $c_l = (-1)^l$ 并计算 $(Gc)_k$。这是

$$\begin{aligned}(Gc)_k &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(k+\delta_k-l)(-1)^l \\ &= Zg(k+\delta_k, \tfrac{1}{2}) \\ &= (-1)^k Zg(\delta_k, \tfrac{1}{2})\,,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式来自 Zg 的准周期性。由于 $Zg(x, \frac{1}{2})$ 是实值函数，并且根据假设，$Zg(x, \frac{1}{2})$ 在区间 $[x_0 - 1 + \epsilon, x_0 - \epsilon]$ 上没有任何零点，因此数值 $Zg(\delta_k, \frac{1}{2})$ 的符号都相同，且对所有 k，$|Zg(\delta_k, \frac{1}{2})| \geq \nu > 0$。因此，$u = Gc$ 是一致交替的。

为应用 [8], 的结果，我们注意到，元素为 $g(k+\delta_k-l)$ 的矩阵 G 确实是全正的，也就是说，G 的任意维数子式的行列式均非负。但这可由全正性的定义 (3) 得出。

因此，根据 [8, 推论 1]，矩阵 G 满射到 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$。根据命题 2，$2\,G$ 也满射到 $\ell^1(\mathbb{Z})$。 ∎

为了应用上述命题，我们需要选取 $x + \alpha\mathbb{Z}$ 的一个合适子集。利用下面的引理总能做到这一点。

引理 3.2. 设 $\alpha < 1$, $\epsilon < (1-\alpha)/2$, $M \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in [0,1]$ 固定，且 $x \in [0,1]$ 任意。

(i) 则 $x + \alpha\mathbb{Z}$ 包含一个子集 $\{k + \delta_k : k \in \mathbb{Z}\}$，使得对所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $\delta_k \in [x_0 + M - 1 + \epsilon, x_0 + M - \epsilon]$。

(ii) 若 α 是有理数，$\alpha = p/q$，则可将扰动 δ_k 选为 p-周期的，且对所有 k, $n \in \mathbb{Z}$，都有 $\delta_{k+np} = \delta_k$。

证明。(i) 对任意 $k \in \mathbb{Z}$，区间 $[k + x_0 - 1 + \epsilon, k + x_0 - \epsilon]$ 的长度为 $1 - 2\epsilon > \alpha$，因此至少包含 $x + \alpha\mathbb{Z}$ 中的一个点，我们可以将其写作 $k + \delta_k$。

(ii) 令 $\alpha = p/q \in \mathbb{Z}$。对于 $l = 0$, ..., $p-1$，选取一个整数 $j_l \in \{0, \dots, q-1\}$，使得

$$x + \tfrac{p}{q} j_l \in [l + x_0 - 1 + \epsilon, l + x_0 - \epsilon]$$

并设

$$\delta_l = x + \tfrac{p}{q} j_l - l\,.$$

显然，$0 \leq j_0 < j_1 < \cdots < j_{p-1} < q$。现在令 $m = l + np$，其中 $l \in [0, p-1] \cap \mathbb{Z}$ 且 $n \in \mathbb{Z}$。于是 $x + \frac{p}{q}(j_l + nq) = x + \frac{p}{q} j_l + np \in [l + np + x_0 - 1 + \epsilon, l + np + x_0 - \epsilon] = [m + x_0 - 1 + \epsilon, m + x_0 - \epsilon]$，且 $\delta_m = x_0 + \frac{p}{q}(j_l + nq) - m = x_0 + \frac{p}{q}(j_l + nq) - (l + np) = \delta_l$。因此 δ_k 是 p-周期的。

∎

4. Injectivity.

为了证明 G 的满射性，我们利用了 g 是全正的这一事实，但没有用到参数 α 的任何性质。现在我们进一步要求 $\alpha = p/q$ 是

有理数。在这种情况下， G 的作用与一个 $p \times p$-矩阵值函数酉等价。这有助于分析，因为对于方阵，满射性等价于单射性，也等价于可逆性。

再次令 G 为元素为 $G_{kl} = g(k + \delta_k - l)$ 的矩阵。由于 $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$，根据引理 3.2，扰动序列可以选为 p-周期的。现在我们利用 δ_k 的周期性，引入 Zibulski-Zeevi 矩阵 [41] 的一种变体。记 $k = r + mp$ 和 $l = s + np$，其中 r、$s = 0$、1、.....、$p-1$，以及 m、$n \in \mathbb{Z}$。于是$\delta_k = \delta_r$，并且对于所有 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $r = 0$，1、.....、$p-1$，我们有

$$\begin{aligned}(Gc)_k &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l g(k + \delta_k - l) \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{s+np} g(r + mp + \delta_r - s - np) = d_{r+mp}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

固定 r、s 时，对 n 求和就是卷积，因此我们可以取傅里叶级数，并得到一个函数的矩阵值方程。记 $x_s(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{s+pn} e^{2\pi i n p \xi}$ 为剩余类 s 中系数的傅里叶级数，并记 $x(\xi) = (x_0(\xi) \ldots, x_{p-1}(\xi))$ 为相应的向量值函数。类似地， $y_r(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_{r+pm} e^{2\pi i m p \xi}$ 和$y(\xi) = (y_0(\xi) \ldots, y_{p-1}(\xi))$。含有 g 的序列的傅里叶级数恰好是 g 的 Zak 变换，即

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(r + \delta_r - s - np) e^{2\pi i n p \xi} = Z_p g(r + \delta_r - s, \xi)\,.$$

因此，取傅里叶级数后，(7) 可改写为

$$\sum_{s=0}^{p-1} x_s(\xi) Z_p g(r + \delta_r - s, \xi) = y_r(\xi) \qquad \text{for } r = 0, 1, \ldots, p-1\,. \tag{8}$$

由于 $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$ 和 G 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上有界，(8) 对所有 $\xi \in [0, 1/p]$ 都逐点成立。令 $A(\xi)$ 为一个以 $p \times p$ 为值的矩阵函数，其元素为

$$A_{rs}(\xi) = Z_p g(r + \delta_r - s, \xi) \qquad r, s = 0, 1, \ldots, p-1\,.$$

这个矩阵与 Zeevi-Zibulski 矩阵有关；该矩阵出现在许多关于有理格上的 Gabor 框架的判据中 $[17, 40, 41]$。逐点恒等式 (8) 可写为

$$A(\xi) x(\xi) = y(\xi)\,. \tag{9}$$

现在，我们将无限矩阵 G 的满射性转化为矩阵值函数 $\det A(\xi)$ 的一个性质。

命题 4.1. 假设 $\alpha = p/q$ 是有理数， $|g(t)| \le C(1 + |t|)^{-\sigma}$ 对某些 C、$\sigma > 1$ 成立，并且 G 将 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 映射到 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上。那么， G 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上是单射，因此在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上可逆。

证明。 G 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$上的满射性特别意味着，每个向量 $d = (d_0, d_1, \ldots, d_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$，即，对于 $k < 0$和 $k \ge p$， $d \in \ell^1(\mathbb{Z})$ $d_k = 0$都属于 G的值域。在这种情况下， $y_r(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_{r+pm} e^{2\pi i m p \xi} = d_r$ ，且向量值

函数 $y(\xi) = d$ 是常数。由于 G 的满射性，存在一个序列$c = c(d) \in \ell^1(\mathbb{Z})$，其对应的傅里叶级数为 $x^{(d)}(\xi)$，使得 $Gc = d$。根据(9)

$$A(\xi)x^{(d)}(\xi) = d \qquad \text{for all } \xi \in [0, 1/p]\,.$$

由于 $d \in \mathbb{C}^p$ 是任意的，这意味着对固定的 ξ， $p \times p$-矩阵映射到 $\mathbb{C}^p$ 上。因此，对于每个 $\xi \in [0, 1/p]$， $A(\xi)$ 都是单射，因而可逆。

现在假设对于某个 $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$， $Gc = 0$。那么对于所有 $\xi \in [0, 1]$， $A(\xi)x(\xi) = 0$。由于 $A(\xi)$ 可逆，这意味着对于所有 ξ， $x(\xi) \in \mathbb{C}^p$ 必须是零向量。因此， $x \equiv 0$，从而 $c = 0$。我们已经证明， G 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上是单射，因此 G 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上可逆。 ■

最后，我们总结一下导出主要定理证明的步骤。

定理 1.2 的证明。由引理 3.2，我们可以从每个 $x + \alpha\mathbb{Z}$ 中提取一个集合 $\{k + \delta_k : k \in \mathbb{Z}\}$，使得 δ_k 避开 Zak 变换 Zg 的零 x_0。然后由命题 3.1，矩阵 $G = \big(g(k + \delta_k - l)\big)_{k,\ l\in\mathbb{Z}}$ 映射到 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上。

根据命题 4.1，对于 α 的有理数值，矩阵 G 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上也是单射。因此， G 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上可逆。

最后，命题 2.1(i) 所保证的谱不变性意味着 G在 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 上可逆。这正是命题 2.4 中保证 $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ 构成框架的充分条件。

至此，证明完成！ ■

或者，也可以从结构上进一步阐述命题 4.1。我们用T_p 表示作用于序列上的平移算子，其定义为 $(T_p c)_k = c_{k-p}$，并注意到命题 4.1 中的底层矩阵 G 与 T_p 可交换。

命题 题 4.2。设 $G = (G_{kl})_{k,\ l\in\mathbb{Z}}$ 是一个具有非对角衰减的双无限矩阵 y

$$|G_{kl}| \le C(1 + |k - l|)^{-\sigma} \qquad k, l \in \mathbb{Z}\,,$$

对某个 $\sigma > 1$。假设 G 与平移算子 T_p 对某个 $p \in \mathbb{N}$可交换。如果 G 映上 $\ell^1(\mathbb{Z})$，那么 G 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$ 上是单射，因此可逆。

证明与命题 4.1 的证明类似。

References

[1] A. Aldroubi、A. G. Baskakov 和 I. A. Krishtal。倾斜矩阵、Banach 框架与采样。《函数分析杂志》，255：1667–1691，2008年。[2] A. G. Baskakov。Wiener 定理与逆矩阵元素的渐近估计。《功能分析与应用》，24(3)：64–65，1990年。[3] Y. Belov、A. Kulikov 和 Y. Lyubarskii。有理函数的 Gabor 框架。《数学发明》，2022年。doi.org/10.1007/s00222-022-01151-8。[4] A. S. Cavaretta, Jr.、W. Dahmen、C. A. Micchelli 和 P. W. Smith。关于某些线性差分方程组的可解性。《SIAM 数学分析杂志》，12(6)：833–841，1981年。[5]X.-R. Dai 和 Q. Sun。Gabor 系统的 abc问题。《美国数学会回忆录》，244(1152)：ix+99，2016年。[6] X.-R. Dai 和 M. Zhu。Haar 窗下 Gabor 系统的框架集。预印本，2022年。arXiv:2205.06479。

[7] C. de Boor。全正双向无穷带状矩阵的逆。《美国数学会汇刊》，274(1)：45–58，1982年。[8] C. de Boor、S. Friedland 和 A. Pinkus。无穷符号正则矩阵的逆。《美国数学会汇刊》，274(1)：59–68，1982年。[9] E. Cordero 和 L. Rodino。算子的时频分析，德古意特数学研究丛书第75卷。德古意特，柏林，[2020]©2020年。[10] S. Demko。全正矩阵的满射性与可逆性。《线性代数及其应用》，45：13–20，1982年。[11] H. G. Feichtinger 和 N. Kaiblinger。改变 Gabor 框架的时频格。《美国数学会汇刊》，356(5)：2001–2023（电子版），2004年。[12] H. G. Feichtinger 和 T. Strohmer，编。Gabor分析与算法：理论与应用。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1998年。[13] H. G. Feichtinger 和 T. Stro hmer，编。Gabor分析进展。应用与数值调和分析。Birkh¨auser Boston Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2003年。[14] K. Gr¨ochenig。时频分析基础。Birkh¨auser Boston Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2001年。[15] K. Gr¨ochenig。Wiener 引理：主题与变奏。谱不变性导论。载于 B. Forster 和 P. Massopust 编，《调和分析四门短期课程》，应用与数值调和分析。Birkh¨auser，波士顿，2010年。[16] K. Gr¨ochenig。Gabor框架之谜。《傅里叶分析及其应用杂志》，20(4)：865–895，2014年。[17] K. Gr¨ochenig 和 S. Koppensteiner。Gabor 框架：刻画与粗结构。载于《应用调和分析新趋势》第2卷——调和分析、几何测度论与应用，应用与数值调和分析，第93–120页。Birkh¨auser/Springer，沙姆，[2019]©2019年。[18] K. Gr¨ochenig、J. L. Romero 和 J. St¨ockler。平移不变空间、Gabor 框架与全正函数的采样定理。《数学发明》，211(3)：1119–1148，2018年。[19] K. Gr¨ochenig 和 J. St¨ockler。Gabor 框架与全正函数。《杜克数学杂志》，162(6)：1003–1031，2013年。[20] C. Heil。Gabor 框架密度定理的历史与演变。《傅里叶分析及其应用杂志》，13(2)：113–166，2007年。[21] A. J. E. M. Janssen。Weyl-Heisenberg 框架的对偶性与双正交性。《傅里叶分析及其应用杂志》，1(4)：403–436，1995年。[22] A. J. E. M. Janssen。若干 Weyl-Heisenberg 框架界的计算。《数学探究》，7：165–182，1996年。[23] A. J. E. M. Janssen。零点较少的 Zak 变换及其关联。载于《Gabor分析进展》。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2002年。[24] A. J. E. M. Janssen。关于在临界密度下生成紧 Gabor 框架。《傅里叶分析及其应用杂志》，9(2)：175–214，2003年。[25] A. J. E. M. Janssen 和 T. Strohmer。双曲正割可生成 Gabor 框架。《应用与计算调和分析》，12(2)：259–267，2002年。[26] T. Kloos。全正函数的 Zak 变换的零点。《傅里叶分析及其应用杂志》，21(5)：1130–1145，2015年。[27] T. Kloos 和 J. St¨ockler。全正函数与指数B样条的 Zak 变换及 Gabor 框架。《逼近理论杂志》，184：209–237，2014年。[28] Y. I. Lyubarski˘ı。整函数 Bargmann 空间中的框架。载于《整函数与次调和函数》，第167–180页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992年。[29] A. Ron 和 Z. Shen。 $L_2(\mathbb{R}^d)$中的 Weyl–Heisenberg 框架与 Riesz 基。《杜克数学杂志》，89(2)：237–282，1997年。[30] W. Rudin。泛函分析。麦格劳-希尔图书公司，纽约，1973年。麦格劳-希尔高等数学丛书。[31] I. J. Schoenberg。关于 P´olya 频率函数。I. 全正函数及其拉普拉斯变换。《数学分析杂志》，1：331–374，1951年。

[32] I. J. Schoenberg 和 A. Whitney. 关于 P´olya 频率函数。III. 平移行列式的正性及其在样条曲线插值问题中的应用。《美国数学会汇刊》，74:246–259，1953年。[33] K. Seip. Bargmann-Fock 空间中采样与插值的密度定理。I.《J. Reine Angew. Math.》，429:91–106，1992年。[34] K. Seip 和 R. Wallst´en. Bargmann-Fock 空间中采样与插值的密度定理。II.《J. Reine Angew. Math.》，429:107–113，1992年。[35] C. E. Shin 和 Q. Sun. 局部化算子的稳定性。《函数分析杂志》，256(8):2417–2439，2009年。[36] J. Sj¨ostrand. 伪微分算子的 Wiener 型代数。载于 S´eminaire sur les ´Equations aux D´eriv´ees Partielles，1994–1995，第 Exp. No. IV 篇，21页。Ecole Polytech.，Palaiseau，1995年。[37] Q. Sun. 无限矩阵的 Wiener 引理。《美国数学会汇刊》，359(7):3099–3123（电子版），2007年。[38] R. Tessera. 具有多项式衰减的矩阵的左逆。《函数分析杂志》，259(11):2793–2813，2010年。[39] O. L. Vinogradov 和 A. Y. Ulitskaya. 平均全正函数 Zak 变换的零点。《逼近理论杂志》，222:55–63，2017年。[40] Y. Y. Zeevi、M. Zibulski 和 M. Porat. 信号与图像表示中的多窗 Gabor 方案。载于《Gabor 分析与算法》，第381–407页。Birkh¨auser Boston，波士顿，MA，1998年。[41] M. Zibulski 和 Y. Y. Zeevi. 用框架方法分析多窗 Gabor 型方案。《应用与计算调和分析》，4(2):188–221，1997年。

Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Vienna, Austria电子邮件地址：karlheinz.groechenig@univie.ac.at