arXiv:2301.00863v1 [math.AP] 2 Jan 2023

导体表面小扰动下电流、静电容量及电势远场的灵敏度分析

Jihene Lagha * Habib Zribi†

摘要

我们推导了具有 $\mathcal{C}^2$ 表面的孤立导体形状发生小扰动时，电流、静电容量以及静电势远场的渐近展开。我们采用层势技术和场展开法，通过系统的方法严格推导了这些结果。随后，我们利用这些结果研究了其区域表面发生小扰动时，Neumann-Poincar´e 算子 L^2 伴随算子的第一特征向量的灵敏度分析。

数学主题分类（MSC2000）：35B30，35B40 关键词：孤立导体，静电容量，表面小扰动，边界积分法，场展开法，拉普拉斯方程，Neumann-Poincar´e 算子类型

1 引言与主要结果陈述

假设一个孤立导体占据 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域 Ω，其边界 $\partial\Omega$ 是连通的$\mathcal{C}^2$表面。导体是含有自由电荷的体积。在外电场的作用下，导体中的每个自由电荷都会重新分布，并很快达到静电平衡（见 [17, 18]）。自由电荷以这样的方式重新分布：导体内部的电场消失，且电场处处与导体表面垂直。导体整个体积内的静电势为常数，在其表面也取相同的值，例如 1 伏。更确切地说，设 u 为 $\mathbb{R}^3$ 中导体 Ω 处于平衡态时的静电势。它是下列问题的唯一解

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}, \\ u = 1 \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

*突尼斯埃尔马纳尔大学，突尼斯理学院，LR11ES13 随机分析与应用实验室，2092 突尼斯，突尼斯（lagha.jihene@yahoo.fr）

†哈夫尔巴廷大学理学院数学系，邮政信箱 1803，哈夫尔巴廷 31991，沙特阿拉伯（zribi.habib@yahoo.fr）

导体 Ω 相对于无穷远处的静电容量，记作 cap(Ω)，定义为其处于平衡态时所带电荷与其表面 $\partial\Omega$ 上电势 u 的比值。也就是说，容量是产生该电势的电荷量，可由高斯积分给出（例如参见 [19, 21, 11]）

$$\mathrm{cap}(\Omega) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)d\sigma(x) \quad \Big(= -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)u(x)d\sigma(x)\Big), \tag{1.2}$$

其中，n 和 $d\sigma$ 分别为边界$\partial\Omega$的单位外法向量和弧长元。静电容量 cap(Ω) 也可定义为：为了将导体 Ω 的电势升至单位值而必须赋予它的电荷量。静电容量取决于导体自身的形状和大小；尺寸越大，静电容量也越大。本文研究区域形状发生微小变化时，静电容量的灵敏度分析。

众所周知，$0 \le \mathrm{cap}(\Omega) < +\infty$，这一点可通过将格林恒等式应用于无界区域$\mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}$上的积分 (1.2) 轻易证明。静电容量可由式 (1.1) 中定义的静电势 u 的远场确定。事实上，在 [20, 10]中，u 具有如下渐近展开

$$u(x) = \frac{\mathrm{cap}(\Omega)}{|x|} + O(\frac{1}{|x|^2}) \quad \text{as } |x| \to \infty. \tag{1.3}$$

因此，为了求出静电容量，我们必须从渐近展开式 (1.3) 中找出$1/|x|$ 的系数。对于球体、椭球体、透镜体、纺锤体和环面等少数简单形状，其静电容量已有解析解。参见 [22, 21]。

L且 Ω_ϵ 是 Ω 的 ϵ-扰动，即存在函数 $h \in C^1(\partial\Omega)$，使得 $\partial\Omega_\epsilon$ 为给定 by

$$\partial\Omega_\epsilon = \big\{\tilde{x} = x + \epsilon h(x)n(x) := \Psi_\epsilon(x) | x \in \partial\Omega\big\}.$$

我们将导体 Ω_ϵ处于静电平衡态时的扰动静电势记为 u_ϵ。它是下列问题的唯一解

$$\begin{cases} \Delta u_\epsilon = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}_\epsilon, \\ u_\epsilon = 1 & \text{on } \partial\Omega_\epsilon, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u_\epsilon(x) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

导体 Ω_ϵ 相对于无穷远处的扰动静电容量为

$$\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega_\epsilon}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tilde{n}}(y)d\tilde{\sigma}(y), \tag{1.5}$$

其中，$\tilde{n}$ 和 $d\tilde{\sigma}$ 分别是边界 $\partial\Omega_\epsilon$的单位外法向量和弧长元。与 (1.3) 类似，u_ϵ 满足

$$u_\epsilon(x) = \frac{\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon)}{|x|} + O(\frac{1}{|x|^2}) \quad \text{as } |x| \to \infty. \tag{1.6}$$

我们的目标是求出导体表面发生小扰动时，由此产生的电流、静电容量以及静电势远场的渐近展开

其中导体处于自由空间中的平衡态。主要思路是采用有限元方法推导形式渐近展开。随后，我们基于层势技术严格证明这些渐近展开。关于这一主题，我们还参考了近期的相关研究 [13, 23, 24, 16, 5, 6, 14, 12, 15]。

本文的第一个成果是以下定理，它严格推导了当 $\epsilon \to 0$ 时， $\partial u_\epsilon/\partial \tilde{n}$ 在 $\partial\Omega_\epsilon$ 上的扰动电流渐近展开。

定理 1.1 设 $\tilde{x} = x + \epsilon h(x)n(x) \in \partial\Omega_\epsilon$，其中 $x \in \partial\Omega$。设 u_ϵ 和 u 分别为方程 (1.4) 和 (1.1) 的解。以下渐近展开成立：

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tilde{n}}(\tilde{x}) = \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \epsilon\Big(2\tau(x)h(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \frac{\partial v}{\partial n}(x)\Big) + O(\epsilon^2), \tag{1.7}$$

其中，余项 $O(\epsilon^2)$ 仅取决于 X 的 $\mathcal{C}^2$-范数和 h的 $\mathcal{C}^1$-范数， τ 是 Ω 的平均曲率，而 v 是下列方程的唯一解

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & in\ \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}, \\ v = -h\dfrac{\partial u}{\partial n} & on\ \partial\Omega, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

本文的第二个结果是以下定理，它严格推导了当 $\epsilon \to 0$ 时 $\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon)$ 的渐近展开。

定理 1.2 以下渐近展开成立：

$$cap(\Omega_\epsilon) = cap(\Omega) + \frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega} h\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]^2 d\sigma + O(\epsilon^2), \tag{1.9}$$

其中，余项 $O(\epsilon^2)$ 仅取决于 X 的 $\mathcal{C}^2$-范数和 h 的 $\mathcal{C}^1$-范数。

值得注意的是，如果 h 在 $\partial\Omega$ 上具有恒定符号，则存在 $\epsilon_0 > 0$，使得对于 $\epsilon < \epsilon_0$，$\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon) - \mathrm{cap}(\Omega)$ 与 h 具有相同的符号。

下面的定理给出了本文的第三个结果，即严格推导静电势 u_ϵ 的远场在 $\epsilon \to 0$ 下的渐近展开。

定理 1.3 设 u_ϵ 和 u 分别为 (1.4) 和 (1.1) 的解。我们有如下渐近展开

$$u_\epsilon(x) = u(x) + \frac{\epsilon}{4\pi|x|}\int_{\partial\Omega} h\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]^2 d\sigma + O\big(\frac{\epsilon^2}{|x|}\big) + O\big(\frac{\epsilon}{|x|^2}\big) \tag{1.10}$$

当 $|x| \to \infty$ 和 $\epsilon \to 0$ 时，其中余项 $O(\epsilon^2/|x|)$ 和 $O(\epsilon/|x|^2)$ 仅取决于 X 的 $\mathcal{C}^2$-范数、 h 的 $\mathcal{C}^1$-范数以及 $distance(origin, \Omega)$。

此前尚未建立这些渐近展开。设计导体时可以将其考虑在内，以避免形状发生微小变化带来的负面影响。我们的渐近展开在电容器处于静电平衡时其中一面壁发生小扰动的情况下仍然有效；有限元方法效果良好，但层势技术方法则需要更复杂的论证。

这些渐近展开可用于设计有效的算法，以恢复孤立导体形状扰动的某些特性。也就是说，我们希望找到一种方法，通过测量电流、静电容量和静电势中的一项或多项来确定导体的形状。一种解决方案是通过使用静电容量测量，将这种优化方法扩展到 [2] 中。

本文结构如下。下一节中，我们将使用有限元方法，形式推导渐近展开式 (1.7)、(1.9) 和 (1.10)。第 2 节中，我们基于层势技术方法，严格证明这些形式展开式确实成立。最后一节中，我们将推导由其区域表面的微小扰动所导致的 L^2–NP算子的伴随算子的第一特征向量的渐近展开式。

2 形式推导：有限元方法

关于以下概念和定义的更多细节，请参见 [13] 。假设 $\partial\Omega$ 有一个正交参数化 $X(\xi,\theta)$，即存在 $\mathbb{R}^2$ 的一个开子集 ϑ ，使得 $\partial\Omega := \{x = X(\xi,\theta), (\xi,\theta) \in \vartheta\}$，其中 X 是一个满足 $(X_\xi := \frac{dX}{d\xi}) \cdot (X_\theta := \frac{dX}{d\theta}) = 0$ 和 $X_{\xi\theta} = X_{\theta\xi}$ 的 $\mathcal{C}^2$-函数。我们指出，旋转曲面具有正交参数化。向量 $T_\xi = X_\xi/|X_\xi|$ 和 $T_\theta = X_\theta/|X_\theta|$ 构成了 $x = X(\xi,\theta)$ 处 $\partial\Omega$ 切平面的正交归一基。 $\partial\Omega$ 上的切向导数定义为$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T_\xi}T_\xi + \frac{\partial}{\partial T_\theta}T_\theta$。我们用 $\mathcal{G}$ 表示相对于基 $\{X_\xi, X_\theta\}$ 的第一基本形式矩阵。

对于 $w \in \mathcal{C}^1(\vartheta)$，局部坐标中的梯度算子满足

$$\nabla_{\xi,\theta} w = \sqrt{\mathcal{G}_{11}}\frac{\partial w}{\partial T_\xi}T_\xi + \sqrt{\mathcal{G}_{22}}\frac{\partial w}{\partial T_\theta}T_\theta = \mathcal{G}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial w}{\partial T}. \tag{2.1}$$

对于 $w \in \mathcal{C}^2(\vartheta)$， Δ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\partial\Omega$ 中限制于 $\partial\Omega$ 的一个邻域时，可表示为:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} - 2\tau\frac{\partial w}{\partial n} + \Delta_{\mathcal{G}} w, \tag{2.2}$$

其中， $\Delta_{\mathcal{G}}$ 是与 $\mathcal{G}$ 相关联的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，其定义为

$$\Delta_{\mathcal{G}} w = \frac{1}{\sqrt{det\mathcal{G}}}\nabla_{\xi,\theta}\cdot\left(\sqrt{det\mathcal{G}}\mathcal{G}^{-1}\nabla_{\xi,\theta}w\right). \tag{2.3}$$

我们用 $h(\xi,\theta)$ 简化项 $h(X(\xi,\theta))$，并用 $h_\xi(\xi,\theta)$、 $h_\theta(\xi,\theta)$ 表示 $h(X(\xi,\theta))$ 的切向导数。于是，$\tilde{x} = X(\xi,\theta) + \epsilon h(\xi,\theta)n(x)$ 是 $\partial\Omega_\epsilon$ 的参数化表示。

法向导数 $\tilde{n}(\tilde{x})$ 和长度元 $d\tilde{\sigma}(\tilde{x})$ 的以下渐近展开成立。证明见 [13]。

引理 2.1 设 $\tilde{x} = x + \epsilon h(x)n(x) \in \partial\Omega_\epsilon$，对于 $x \in \partial\Omega$。则， $\partial\Omega_\epsilon$ 在 $\tilde{x}$ 处的外单位法向量$\tilde{n}(\tilde{x})$ 可一致展开为

$$\tilde{n}(\tilde{x}) := \frac{\tilde{X}_\xi \wedge \tilde{X}_\theta}{|\tilde{X}_\xi \wedge \tilde{X}_\theta|} = \sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k n_k(x), \tag{2.4}$$

其中，向量值函数 n_k 不受 k影响，且一致有界。特别地，对于 $x \in \partial\Omega$，我们有

$$n_0(x) = n(x), \qquad n_1(x) = -\frac{\partial h}{\partial T}(x)T(x).$$

同样，弧长元 $d\tilde{\sigma}(\tilde{x})$有如下的一致展开

$$d\tilde{\sigma}(\tilde{x}) := |\tilde{X}_\xi \wedge \tilde{X}_\theta| d\xi d\theta = \frac{|\tilde{X}_\xi \wedge \tilde{X}_\theta|}{\sqrt{det(\mathcal{G})}} d\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \sigma^{(k)}(x) d\sigma(x), \tag{2.5}$$

其中，无论 k 如何， $\sigma^{(k)}$ 都一致有界，且

$$\sigma^{(0)}(x) = 1, \qquad \sigma^{(1)}(x) = -2h(x)\tau(x).$$

设 u_ϵ 为方程 (1.4) 的解。为推导 u_ϵ的形式渐近展开，我们采用有限元方法，见 [24, 8, 13, 16, 23]。首先，将 u_ϵ 按 ϵ的幂展开，

$$u_\epsilon(x) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) + \epsilon^2 u_2(x) + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}_\epsilon, \tag{2.6}$$

其中， u_l 定义在 $\mathbb{R}^3\backslash\partial\Omega$上。由于 u_l 满足

$$\begin{cases} \Delta u_l = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u_l(x) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

为证明 (2.7) 中的第一个等式，我们将 (2.6) 代入$\mathbb{R}^3\backslash\Omega$中的拉普拉斯方程$\Delta u_\epsilon = 0$ ，得到对于 $\epsilon > 0$， $\Delta u_l = 0$ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$中。由于 ϵ 是任意的，我们确认 $\Delta u_l = 0$ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$中。

设 $\tilde{x} = x + \epsilon h(x)n(x) \in \partial\Omega_\epsilon$，其中 $x \in \partial\Omega$。以下泰勒展开成立：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tilde{n}}(\tilde{x}) =& \Big(\nabla u_0\big(x + \epsilon h(x)n(x)\big) + \epsilon \nabla u_1\big(x + \epsilon h(x)n(x)\big)\Big) \cdot \tilde{n}(\tilde{x}) + O(\epsilon^2) \\
=& \Big(\nabla u_0(x) + \epsilon h(x)\nabla^2 u_0(x)n(x) + \epsilon \nabla u_1(x)\Big) \cdot \Big(n(x) - \epsilon \frac{\partial h}{\partial T}(x)T(x)\Big) + O(\epsilon^2) \\
=& \frac{\partial u_0}{\partial n}(x) + \epsilon h(x)\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}(x) + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial n}(x) - \epsilon \frac{\partial h}{\partial T}(x) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial T}(x) + O(\epsilon^2) \\
=& \frac{\partial u_0}{\partial n}(x) + 2\epsilon\tau(x)h(x)\frac{\partial u_0}{\partial n}(x) + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial n}(x) \\
& - \epsilon \frac{\partial h}{\partial T}(x) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial T}(x) - \epsilon h(x)\Delta_{\mathcal{G}} u_0(x) + O(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

为证明最后一个等式，我们使用式 (2.2) 中给出的作用于 $\partial\Omega$ 上的拉普拉斯算子的表示式

$$0 = \Delta u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} - 2\tau \frac{\partial u_0}{\partial n} + \Delta_{\mathcal{G}} u_0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

对于 $\tilde{x} = x + \epsilon h(x)n(x) \in \partial\Omega_\epsilon$。我们有以下泰勒展开

$$u_\epsilon(\tilde{x}) = u_0\big(x + \epsilon h(x)n(x)\big) + \epsilon u_1\big(x + \epsilon h(x)n(x)\big) + O(\epsilon^2)$$

$$= u_0(x) + \epsilon h(x)\frac{\partial u_0}{\partial n}(x) + \epsilon u_1(x) + O(\epsilon^2). \tag{2.9}$$

利用边界条件 $u_\epsilon(\tilde{x}) = 1$ 对 $\tilde{x} = \Psi(x) \in \partial\Omega_\epsilon$，由（2.9）可得

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = -h(x)\frac{\partial u_0}{\partial n}(x), \quad \text{for } x \in \partial\Omega. \tag{2.10}$$

根据偏微分方程问题（1.1）和（1.8）的唯一性，我们得到 $u_0 \equiv u$ 和 $u_1 \equiv v$ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ 中成立。（2.8）中的第四项和第五项消失，这是因为 $u = 1$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，从而推出$\partial u/\partial T = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。于是，定理 1.1 立即由（2.8）形式化地得到。

在（1.5）中对 $x \in \partial\Omega$ 作变量替换 $y = \Psi_\epsilon(x)$，可得

$$\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tilde{n}}(\tilde{x})u_\epsilon(\tilde{x})d\tilde{\sigma}(\tilde{x}). \tag{2.11}$$

由（2.5）、（2.8）和（2.9）可知

$$\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}ud\sigma - \frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]^2 d\sigma$$

$$-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}ud\sigma - \frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vd\sigma + O(\epsilon^2). \tag{2.12}$$

根据格林恒等式和（2.7），我们有

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}ud\sigma = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vd\sigma.$$

由（2.10）可得

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}ud\sigma + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vd\sigma = 2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vd\sigma = -2\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]^2 d\sigma. \tag{2.13}$$

因此，根据 (1.2)、(2.12) 和 (2.13)，我们形式上得到了所需的定理 1.2，$i.\quad e.$，

$$\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon) = \mathrm{cap}(\Omega) + \frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]^2 d\sigma + O(\epsilon^2). \tag{2.14}$$

作为 (1.3)、(1.6) 和 (2.14) 的直接推论，定理 1.3 中远场 $u_\epsilon - u$ 的渐近展开的首项形式上成立

$$u_\epsilon(x) - u(x) = \frac{\epsilon}{4\pi|x|}\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]^2 d\sigma + O(\frac{\epsilon^2}{|x|}) + O(\frac{1}{|x|^2}) \tag{2.15}$$

当 $\epsilon \to 0$ 和 $\epsilon >> 1/|x|$时。我们将在第 3.3.3 小节通过层势技术证明渐近展开式 (2.15)，其余项为 $O(\epsilon^2/|x|) + O(\epsilon/|x|^2)$，当$\epsilon \to 0$ 和 $|x| \to \infty$ 时；这比当 $\epsilon \to 0$ 和 $\epsilon >> 1/|x|$时的 $O(\epsilon^2/|x|)+O(1/|x|^2)$ 更好。

3 层势技术方法

3.1 定义和预备结果

设 Ω 是一个有界的 $\mathcal{C}^2$-区域。设 $\Gamma(x)$ 是拉普拉斯算子 Δ在 $\mathbb{R}^3$中的基本解： $\Gamma(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$。 密度函数 ϕ 在$\partial\Omega$ 上的单层势和双层势定义为

$$\mathcal{S}_\Omega[\phi](x) = \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-y)\phi(y)d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{D}_\Omega[\phi](x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n(y)}\Gamma(x-y)\phi(y)d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega. \tag{3.2}$$

注意，对于 $x \in \mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega$ 和 $y \in \partial\Omega$， $\Gamma(x-y)$ 和 $\frac{\partial}{\partial n(y)}\Gamma(x-y)$ 是 L^∞-函数，在 y中调和，并且它们在 $|x| \to +\infty$ 时的行为由下式给出

$$\Gamma(x-y) = O(\frac{1}{|x|}), \qquad \frac{\partial}{\partial n(y)}\Gamma(x-y) = O(\frac{1}{|x|^2}). \tag{3.3}$$

因此，我们很容易看出， $\mathcal{D}_\Omega[\phi]$ 和 $\mathcal{S}_\Omega[\phi]$ 定义良好，并且在 $\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega$ 中调和，且满足

$$\mathcal{S}_\Omega[\phi](x) = O(\frac{1}{|x|}), \qquad \mathcal{D}_\Omega[\phi](x) = O(\frac{1}{|x|^2}), \quad \text{as } |x| \to +\infty. \tag{3.4}$$

我们记 $\frac{\partial w}{\partial n}|_\pm = n \cdot \nabla w^\pm|_{\partial\Omega}$，其中 $w^+ = w|_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega}$ 且 $w^- = w|_\Omega$。下列公式给出了双层势以及单层势法向导数所满足的跳跃关系。证明见 [9, 1]。

$$\mathcal{S}_\Omega[\phi]\big|_+(x) = \mathcal{S}_\Omega[\phi]\big|_-(x) \quad \text{a.e. } x \in \partial\Omega, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial(\mathcal{S}_\Omega[\phi])}{\partial T}\Big|_+(x) = \frac{\partial(\mathcal{S}_\Omega[\phi])}{\partial T}\Big|_-(x) \quad \text{a.e. } x \in \partial\Omega, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial(\mathcal{S}_\Omega[\phi])}{\partial n}\Big|_\pm(x) = \big(\pm\frac{1}{2}I + (\mathcal{K}_\Omega)^*\big)[\phi](x) \quad \text{a.e. } x \in \partial\Omega, \tag{3.7}$$

$$(\mathcal{D}_\Omega[\phi])\big|_\pm(x) = \big(\mp\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_\Omega\big)[\phi](x) \quad \text{a.e. } x \in \partial\Omega, \tag{3.8}$$

对于 $\phi \in L^2(\partial\Omega)$，其中 $\mathcal{K}_\Omega$ 是由下式定义的 NP算子

$$\mathcal{K}_\Omega[\phi](x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{\langle y-x, n(y)\rangle}{|x-y|^3}\phi(y)d\sigma(y),$$

且 $\mathcal{K}_\Omega^*$ 是 NP 算子 $\mathcal{K}_\Omega$的 L^2-伴随算子，也就是说，

$$\mathcal{K}_\Omega^*[\phi](x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{\langle x-y, n(x)\rangle}{|x-y|^3}\phi(y)d\sigma(y). \tag{3.9}$$

算子 $\mathcal{K}_\Omega$ 和 $\mathcal{K}_\Omega^*$ 是奇异积分算子，并且在 $L^2(\partial\Omega)$ 上有界。由于 Ω 的边界是 $\mathcal{C}^2$， $\frac{\partial(\mathcal{D}_\Omega[\phi])}{\partial n}$ 在 $\partial\Omega$两侧没有跳跃，~~也~~就是说，

$$\frac{\partial(\mathcal{D}_\Omega[\phi])}{\partial n}\Big|_+(x) = \frac{\partial(\mathcal{D}_\Omega[\phi])}{\partial n}\Big|_-(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.10}$$

令 $W_1^2(\partial\Omega) := \{f \in L^2(\partial\Omega) : \partial f/\partial T \in L^2(\partial\Omega)\}$. 以下引理对我们很重要。证明可参见例如 [4]。

引理 3.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个有界利普希茨区域。则

(i) $\mathcal{S}_\Omega$: $L^2(\partial\Omega) \longrightarrow W_1^2(\partial\Omega)$ 有有界逆算子。

(ii) $\mathcal{K}_\Omega$: $W_1^2(\partial\Omega) \longrightarrow W_1^2(\partial\Omega)$ 是一个有界算子。

我们将用到以下引理，该引理由 [9] 得出；另见 [1]。

引理3.2 若 Ω 是一个有界 $\mathcal{C}^2$-区域，则对于 $x \in \mathbb{R}^3\setminus\Omega$，有 $\mathcal{D}_\Omega[1](x) = 0$；对于 $x \in \Omega$，有 $\mathcal{D}_\Omega[1](x) = 1$；并且对于 $x \in \partial\Omega$，有 $\mathcal{K}_\Omega[1] = \frac{1}{2}$。

3.2 层势的渐近行为

通过对 $z = \Psi_\epsilon(y) = \tilde{y}$ 在 $y \in \partial\Omega$ 和 $z \in \partial\Omega_\epsilon$ 进行变量替换，我们可写为

$$\mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\tilde{\psi}](\tilde{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega_\epsilon}\frac{1}{|\tilde{x}-z|}\tilde{\psi}(z)d\tilde{\sigma}(z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}\tilde{\psi}(\tilde{y})d\tilde{\sigma}(\tilde{y}), \quad \tilde{x} \in \partial\Omega_\epsilon,$$

对于任意密度函数 $\tilde{\psi} \in L^2(\partial\Omega_\epsilon)$。对于 (ξ,θ)、$(\alpha,\beta) \in \vartheta$. 令

$$\begin{aligned} x = X(\xi,\theta), \qquad & \tilde{x} = \tilde{X}(\xi,\theta) = x + \epsilon h(\xi,\theta)n(x), \\ y = X(\alpha,\beta), \qquad & \tilde{y} = \tilde{X}(\alpha,\beta) = y + \epsilon h(\alpha,\beta)n(y), \end{aligned}$$

因此

$$\tilde{x} - \tilde{y} = x - y + \epsilon\Big(h(\xi,\theta)n(x) - h(\alpha,\beta)n(y)\Big).$$

由此可得

$$\begin{aligned} |\tilde{x}-\tilde{y}| =& |x-y|\left(1 + 2\epsilon\frac{\langle x-y, h(x)n(x)-h(y)n(y)\rangle}{|x-y|^2} + \epsilon^2\frac{\big|h(x)n(x)-h(y)n(y)\big|^2}{|x-y|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ :=& |x-y|\Big(1 + 2\epsilon F(x,y) + \epsilon^2 G(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

我们有 $h\nu \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$。于是，很容易看出

$$|F(x,y)| + |G(x,y)|^{\frac{1}{2}} \le C\|X\|_{\mathcal{C}^2(\partial\Omega)}\|h\|_{\mathcal{C}^1(\partial\Omega)} \quad \text{for } x, y \in \partial\Omega.$$

因此，由（2.5）和（3.11）可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}d\tilde{\sigma}(\tilde{y}) =& \frac{1}{|x-y|}\Big(1 + 2\epsilon F(x,y) + \epsilon^2 G(x,y)\Big)^{-\frac{1}{2}} \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k\sigma_k(y)d\sigma(y)\Big) \\ :=& \frac{1}{|x-y|}\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k\mathbb{L}_k(x,y)d\sigma(y), \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $|\mathbb{L}_k(x,y)| \le C\|X\|_{C^2(\partial\Omega)}\|h\|_{C^1(\partial\Omega)}$，对于 $x,y \in \partial\Omega$。特别地

$$\mathbb{L}_0(x,y) = 1, \qquad \mathbb{L}_1(x,y) = -F(x,y) - 2\tau(y)h(y).$$

引入一列积分算子 $(\mathcal{S}^{(k)}_\Omega)_{k\in\mathbb{N}}$，其对任意 $\psi \in L^2(\partial\Omega)$ 定义为

$$\mathcal{S}^{(k)}_\Omega\psi(x) := -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\mathbb{L}_k(x,y)}{|x-y|}\psi(y)d\sigma(y) \quad \text{for } k \ge 0.$$

注意，$\mathcal{S}^{(0)}_\Omega = \mathcal{S}_\Omega$ 且

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(1)}_\Omega[\psi](x) =& \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{|x-y|}\tau(y)h(y)\psi(y)d\sigma(y)\\ &+\frac{h(x)}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\langle x-y, n(x)\rangle}{|x-y|^3}\psi(y)d\sigma(y) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\langle x-y, n(y)\rangle}{|x-y|^3}h(y)\psi(y)d\sigma(y)\\ =& -2\mathcal{S}_\Omega[\tau h\psi](x) + h(x)\frac{\partial(\mathcal{S}_\Omega[\psi])}{\partial n}\Big|_\pm(x) + \mathcal{D}_\Omega[h\psi]\big|_\pm(x) \quad \text{for } x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

容易证明，具有核 $-\frac{1}{4\pi}\mathbb{L}_k(x,y)/|x-y|$ 的算子 $\mathcal{S}^{(k)}_\Omega$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 上有界。见 [9, 命题 3.10]。

设 $\tilde{x} = \Psi_\epsilon(x) = x + \epsilon h(\xi,\theta)n(x)$，其中 $x = X(\xi,\theta) \in \partial\Omega$。以下估计成立 s:

$$\Big\|\mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\tilde{\psi}]\circ\Psi_\epsilon - \mathcal{S}_\Omega[\psi] - \sum_{k=1}^N \epsilon^k\mathcal{S}^{(k)}_\Omega[\psi]\Big\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\epsilon^{N+1}\big\|\psi\big\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

其中 $\tilde{\psi} := \psi\circ\Psi_\epsilon$，且 C 仅依赖于 N, $\|X\|_{C^2(\partial\Omega)}$，以及 $\|h\|_{C^1(\partial\Omega)}$。

我们有

$$\begin{aligned}\nabla_x\frac{1}{|\tilde{x}-\tilde{y}|}\cdot T(x)d\tilde{\sigma}(\tilde{y}) =& \sum_{k=0}^\infty \epsilon^k\Big[\frac{\langle x-y, T(x)\rangle}{|x-y|^3}\mathbb{L}_k(x,y) + \frac{\langle\nabla_x\mathbb{L}_k(x,y), T(x)\rangle}{|x-y|}\Big]d\sigma(y)\\ :=& \sum_{k=0}^\infty \epsilon^k\mathbb{K}_k(x,y)d\sigma(y).\end{aligned}$$

通过考察 $\nabla F(x,y)\cdot T(x)$ 和 $\nabla G(x,y)\cdot T(x)$，我们确认 $\mathbb{K}_k(x,y)$ 是如下的线性组合

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_k(x,y) =& \alpha_k(x,y)\frac{\langle x-y, T(x)\rangle}{|x-y|^3} + \beta_k(x,y)\frac{\langle h(x)n(x) - h(y)n(y), T(x)\rangle}{|x-y|^3}\\ &+\gamma_k(x,y)\frac{\langle x-y, n(x)\rangle}{|x-y|^3} + \lambda_k(x,y)\frac{\langle h(x)n(x) - h(y)n(y), n(x)\rangle}{|x-y|^3},\end{aligned}$$

wher且 $|\alpha_k(x,y)| + |\beta_k(x,y)| + |\gamma_k(x,y)| + |\lambda_k(x,y)| \le C\|X\|_{C^2(\partial\Omega)}\|h\|_{C^1(\partial\Omega)}$，其中 $x,y \in \partial\Omega$。

容易证明，算子 $\partial\mathcal{S}^{(k)}_\Omega/\partial T$的核为 $-\frac{1}{4\pi}\mathbb{K}_k(x,y)$，且它在 $L^2(\partial\Omega)$ 上有界。事实上，这是著名的 Coifman-McIntosh-Meyer 定理的直接推论，参见 [7]。因此，有如下估计：

$$\Big\|\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\tilde{\psi}]\circ\Psi_\epsilon}{\partial T} - \frac{\partial\mathcal{S}_\Omega[\psi]}{\partial T} - \sum_{k=1}^N\epsilon^k\frac{\partial\mathcal{S}^{(k)}_\Omega[\psi]}{\partial T}\Big\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\epsilon^{N+1}\big\|\psi\big\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

上述渐近分析的结果总结如下定理所示。

定理 3.3 存在仅依赖于 $\|X\|_{C^2(\partial\Omega)}$ 和 $\|h\|_{C^1(\partial\Omega)}$ 的 C，使得对于任意 $\tilde{\psi} \in L^2(\partial\Omega_\epsilon)$，我们有

$$\left\| \mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\tilde{\psi}] \circ \Psi_\epsilon - \mathcal{S}_\Omega[\psi] - \sum_{k=1}^{N} \epsilon^k \mathcal{S}_\Omega^{(k)}[\psi] \right\|_{W_1^2(\partial\Omega)} \leq C\epsilon^{N+1} \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}, \tag{3.13}$$

其中 $\psi := \psi \circ \Psi_\epsilon$。

对于 $\psi \in L^2(\partial\Omega)$，我们引入

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\Omega^{(1)}[\psi](x) =& 2\left(\tau h \frac{\partial(\mathcal{S}_\Omega[\psi])}{\partial n} - \frac{\partial(\mathcal{S}_\Omega[\tau h \psi])}{\partial n} \right)\Big|_{\pm}(x) + \frac{\partial(\mathcal{D}_\Omega[h\psi])}{\partial n}(x) \\ & - \frac{1}{\sqrt{det(\mathcal{G})}} \left(\nabla_{\xi,\theta} \cdot \left(h\sqrt{det(\mathcal{G})} \mathcal{G}^{-1} \nabla_{\xi,\theta} \mathcal{S}_\Omega[\psi] \right) \right)(x), \quad \text{for } x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

文献 [13] 证明了算子 $\mathcal{K}^{(1)}$ Ω 在 $L^2(\partial\Omega)$ 中有界，并且以下命题成立。

命题 3.4 存在一个仅依赖于 $\|X\|_{C^2(\partial\Omega)}$ 和 $\|h\|_{C^1(\partial\Omega)}$ 的 C，使得对于任意 $\tilde{\psi} \in L^2(\partial\Omega_\epsilon)$，都有

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\tilde{\psi}]}{\partial \tilde{n}} \circ \Psi_\epsilon \Big|_{\pm} - \frac{\partial \mathcal{S}_\Omega[\psi]}{\partial n}\Big|_{\pm} - \epsilon \mathcal{K}_\Omega^{(1)}[\psi] \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\epsilon^2 \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}, \tag{3.14}$$

其中 $\psi := \psi \circ \Psi_\epsilon$。

3.3 定理的证明

下面的引理对我们很有用。

引理 3.5 设 $f \in W_1^2(\partial\Omega)$。以下问题的解

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & in\ \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \\ w = f & on\ \partial\Omega, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} w(x) = 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

可表示为

$$w(x) = \mathcal{S}_\Omega[\phi](x) - \mathcal{D}_\Omega[f](x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \quad \phi := \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}, \tag{3.16}$$

其中 $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ 满足以下积分方程

$$\mathcal{S}_\Omega[\phi] = (\frac{1}{2} I + \mathcal{K}_\Omega)[f] \quad on\ \partial\Omega.$$

表示公式 (3.16) 是唯一的。

证明。考虑以下问题

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3\backslash\partial\Omega, \\ U|_+ - U|_- = f & \text{on } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial n}\Big|_+ - \dfrac{\partial U}{\partial n}\Big|_- = \phi & \text{on } \partial\Omega, \\ U(x) = O(1/|x|) & \text{as } x \to \infty, \end{cases} \tag{3.17}$$

令 $U_1 = \mathcal{S}_\Omega[\phi] - \mathcal{D}_\Omega[f]$ 属于 $\mathbb{R}^3$。由 (3.4) 可得 $U_1(x) = O(1/|x|)$，因此根据跳跃公式 (3.5)–(3.8) 和 (3.10)，U_1 是 (3.17) 的一个解。若令 $U_2 = w$ 属于 $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ 且 $U_2 \equiv 0$ 属于 Ω，则 U_2 也是 (3.17) 的一个解。因此，为了证明 (3.16)，只需证明问题 (3.17) 在 $W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3\backslash\partial\Omega)$ 中有唯一解。

假设 $U \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3\backslash\partial\Omega)$ 是 (3.17) 的一个解，且满足 $f = \phi = 0$。那么 U 是整个区域 $\mathbb{R}^3$ 上 $\Delta U = 0$ 的弱解。因此，对于足够大的 R,

$$\int_{B_R(0)} |\nabla U|^2 dx = \int_{\partial B_R(0)} U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma(x) = -\int_{\mathbb{R}^3\backslash\overline{B_R(0)}} |\nabla U|^2 dx \le 0,$$

其中 $B_R(0) = \{|x| < R\}$。该不等式对所有 R 都成立，因此 U 是常数。由于 $U(x)$ 在无穷远处 $\to 0$，我们得出 $U = 0$。

由 (3.16) 和 (3.8)，我们得到 $\mathcal{S}_\Omega[\phi] = (\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_\Omega)[f]$ 在 $\partial\Omega$ 上。对于 $f \in W^2_1(\partial\Omega)$，有 $\mathcal{K}_\Omega[f] \in W^2_1(\partial\Omega)$，因此 $(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_\Omega)[f] \in W^2_1(\partial\Omega)$。由此，根据引理 3.1 (*i*)，可知 ϕ 唯一且属于 $L^2(\partial\Omega)$。因此，表示公式 (3.16) 是唯一的。

根据引理 3.2 和引理 3.5，方程 (1.1) 的解 u 有如下表示公式

$$u(x) = \mathcal{S}_\Omega[\phi_0](x) - \mathcal{D}_\Omega[1](x) = \mathcal{S}_\Omega[\phi_0](x), \quad x \text{ in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}, \quad \phi_0 := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}, \tag{3.18}$$

其中 ϕ_0 满足积分方程

$$\mathcal{S}_\Omega[\phi_0] = 1 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{3.19}$$

与 (3.18) 类似，方程 (1.4) 的解 u_ϵ 可表示为:

$$u_\epsilon(x) = \mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\phi_\epsilon](x), \quad x \text{ in } \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}_\epsilon, \tag{3.20}$$

其中，ϕ_ϵ 是以下方程的唯一解

$$\mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\phi_\epsilon] = 1 \quad \text{on } \partial\Omega_\epsilon. \tag{3.21}$$

以下引理成立。

引理 3.6 存在一个仅依赖于 X 的 $\mathcal{C}^2$-范数和 h 的 $\mathcal{C}^1$-范数的 C，使得

$$\left\|\phi_\epsilon \circ \Psi_\epsilon - \phi_0\right\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\epsilon, \tag{3.22}$$

其中 ϕ_0 和 ϕ_ϵ 分别在 (3.19) 和 (3.21) 中定义。

证明。设 $x \in \partial\Omega$，则 $\tilde{x} = \Psi_\epsilon(x) = x + \epsilon h(x) n(x) \in \partial\Omega_\epsilon$。根据 (3.19) 和 (3.21)，我们有

$$\mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\phi_\epsilon] \circ \Psi_\epsilon(x) = \mathcal{S}_\Omega[\phi_0](x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.23}$$

于是由定理 3.3 可得

$$\mathcal{S}_\Omega[\phi_\epsilon \circ \Psi_\epsilon - \phi_0](x) = O(\epsilon), \quad x \in \partial\Omega,$$

其中，$O(\epsilon)$在 $W_1^2(\partial\Omega)$中有界，其界为 $C\epsilon$，其中某个常数 $C > 0$ 仅取决于 X 的$\mathcal{C}^2$-范数和 h的 $\mathcal{C}^1$-范数。显然，由引理 3.1（i）立即得到所需的估计（3.22）。

3.3.1 定理 1.1 的证明

设 ϕ_ϵ 和 ϕ_0 分别为积分方程（3.21）和（3.19）的解。记 $\phi := \phi_\epsilon \circ \Psi_\epsilon$。由引理 3.6，我们可以写成

$$\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1, \tag{3.24}$$

其中，ϕ_1 在 $L^2(\partial\Omega)$中有界，并且仍然取决于 ϵ。定义

$$v_\epsilon(x) = \mathcal{S}_\Omega[\phi_1](x) - 2\mathcal{S}_\Omega[\tau h\phi_0](x) + \mathcal{D}_\Omega[h\phi_0](x), \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}. \tag{3.25}$$

由命题 3.4 和（3.24）可得

$$\Big\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tilde{n}} \circ \Psi_\epsilon - \frac{\partial u}{\partial n} - 2\epsilon\tau h \frac{\partial u}{\partial n} - \epsilon \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} \Big\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\epsilon^2 \big\|\phi\big\|_{L^2(\partial\Omega)}. \tag{3.26}$$

转而考虑定理 3.3 和 (3.23)，我们确认

$$\Big\| \mathcal{S}_\Omega[\phi_0] - \mathcal{S}_\Omega[\phi] - \epsilon\mathcal{S}_\Omega^{(1)}[\phi] \Big\|_{W_1^2(\partial\Omega)} \leq C\epsilon^2 \big\|\phi\big\|_{L^2(\partial\Omega)}. \tag{3.27}$$

将 $\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1$ 代入 (3.27)，得到

$$\Big\| h\frac{\partial \mathcal{S}_\Omega[\phi_0]}{\partial n}\Big|_+ + \mathcal{S}_\Omega[\phi_1] - 2\mathcal{S}_\Omega[\tau h\phi_0] + \mathcal{D}_\Omega[h\phi_0]\big|_+ \Big\|_{W_1^2(\partial\Omega)} \leq C\epsilon \big\|\phi\big\|_{L^2(\partial\Omega)}, \tag{3.28}$$

即，

$$\|v_\epsilon - v\|_{W_1^2(\partial\Omega)} \leq C\epsilon. \tag{3.29}$$

由于 $v_\epsilon - v$ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ 中调和，由引理 3.5 可得

$$(v_\epsilon - v)(x) = \mathcal{S}_\Omega\Big[\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n}\Big](x) - \mathcal{D}_\Omega[v_\epsilon - v](x), \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega},$$

因此，由 (3.8) 可推得

$$\mathcal{S}_\Omega\Big[\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n}\Big] = \big(\frac{1}{2} + \mathcal{K}_\Omega\big)[v_\epsilon - v] \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{3.30}$$

由引理 3.1、(3.29) 和 (3.30) 可得

$$\Big\| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} \Big\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\epsilon. \tag{3.31}$$

最后，我们由 (3.26) 和 (3.31) 按要求证明定理 1.1。

3.3.2 定理 1.2 的证明

由定理 3.3、命题 3.4、(2.5) 和 (2.11) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon) =& -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\phi_\epsilon]}{\partial\tilde{n}}\Big|_+(\tilde{x})\mathcal{S}_{\Omega_\epsilon}[\phi_\epsilon](\tilde{x})d\tilde{\sigma}(\tilde{x})\\ =& -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi]}{\partial n}\Big|_+\mathcal{S}_{\Omega}[\phi]d\sigma-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\Big[-2\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\tau h\phi]}{\partial n}\Big|_+ +\frac{\partial\mathcal{D}_{\Omega}[h\phi]}{\partial n}\Big]\mathcal{S}_{\Omega}[\phi]d\sigma\\ &-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\Big[-2\mathcal{S}_{\Omega}[\tau h\phi]+\mathcal{D}_{\Omega}[h\phi]\big|_+\Big]\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi]}{\partial n}\Big|_+d\sigma-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi]}{\partial n}\Big|_+\Big]^2d\sigma\\ &+\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\sqrt{det(\mathcal{G})}}\Big(\nabla_{\xi,\theta}\cdot\Big(h\sqrt{det(\mathcal{G})}\mathcal{G}^{-1}\nabla_{\xi,\theta}\mathcal{S}_{\Omega}[\phi]\Big)\Big)\mathcal{S}_{\Omega}[\phi]d\sigma+O(\epsilon^2),\end{aligned}$$

其中 $\phi:=\phi_\epsilon\circ\Psi_\epsilon$。由 (3.24) 中 ϕ 的分解，我们写出

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon) =& -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]}{\partial n}\Big|_+\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]d\sigma-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]}{\partial n}\Big|_+\Big]^2d\sigma\\ &-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\Big[\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_1]}{\partial n}\Big|_+-2\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\tau h\phi_0]}{\partial n}\Big|_+ +\frac{\partial\mathcal{D}_{\Omega}[h\phi_0]}{\partial n}\Big]\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]d\sigma\\ &-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\Big[\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_1]-2\mathcal{S}_{\Omega}[\tau h\phi_0]+\mathcal{D}_{\Omega}[h\phi_0]\big|_+\Big]\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]}{\partial n}\Big|_+d\sigma\\ &+\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\sqrt{det(\mathcal{G})}}\Big(\nabla_{\xi,\theta}\cdot\Big(h\sqrt{det(\mathcal{G})}\mathcal{G}^{-1}\nabla_{\xi,\theta}\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]\Big)\Big)\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]d\sigma+O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{S}_\Omega[\phi_0]=1$ 在 $\partial\Omega$ 上，我们得到 $\nabla_{\xi,\theta}\mathcal{S}_\Omega[\phi_0]=0$ 在 $\partial\Omega$ 上，因此最后一个积分等于零。利用格林公式，我们推得第三个积分等于第四个积分。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon) =&\mathrm{cap}(\Omega)-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]}{\partial n}\Big|_+\Big]^2d\sigma\\ &-\frac{\epsilon}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\Big[\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_1]-2\mathcal{S}_{\Omega}[\tau h\phi_0]+\mathcal{D}_{\Omega}[h\phi_0]\big|_+\Big]\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]}{\partial n}\Big|_+d\sigma+O(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{3.32}$$

由 (3.28) 可得

$$\int_{\partial\Omega}\Big[\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_1]-2\mathcal{S}_{\Omega}[\tau h\phi_0]+\mathcal{D}_{\Omega}[h\phi_0]\big|_+\Big]\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]}{\partial n}\Big|_+d\sigma=-\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial\mathcal{S}_{\Omega}[\phi_0]}{\partial n}\Big|_+\Big]^2d\sigma+O(\epsilon).\tag{3.33}$$

最后，由 u 的表示公式 (3.18)、(3.32) 和 (3.33)，我们得出

$$\mathrm{cap}(\Omega_\epsilon)=\mathrm{cap}(\Omega)+\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]^2d\sigma+O(\epsilon^2).$$

至此，定理 1.2 的证明完成，证毕。

3.3.3 定理 1.3 的证明

由 (3.20) 和 (3.18)，可得

$$u_\epsilon(x)-u(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\Gamma(x-\tilde{y})\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\tilde{n}}(\tilde{y})d\tilde{\sigma}(\tilde{y})+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)d\sigma(y).$$

由定理 1.1、(2.5) 和 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}u_\epsilon(x)-u(x)=&-\frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\Gamma(x-\tilde{y})\frac{\partial v}{\partial n}(y)d\sigma(y)\\&-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\Big[\Gamma(x-\tilde{y})-\Gamma(x-y)\Big]\frac{\partial u}{\partial n}(y)d\sigma(y)+O(\frac{\epsilon^2}{|x|}).\end{aligned}$$

由于

$$\Gamma(x-\tilde{y})=\frac{1}{|x|}+O(\frac{1}{|x|^2}),\qquad \Gamma(x-\tilde{y})-\Gamma(x-y)=O(\frac{\epsilon}{|x|^2})\quad\text{as } |x|\to+\infty.$$

因此

$$u_\epsilon(x)-u(x)=-\frac{\epsilon}{4\pi|x|}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}(y)d\sigma(y)+O(\frac{\epsilon}{|x|^2})+O(\frac{\epsilon^2}{|x|}).$$

根据格林公式，我们立即得到

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}ud\sigma=\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=-\int_{\partial\Omega}h\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]^2d\sigma.$$

定理 1.3 的证明至此完成。

4 算子 $\mathcal{K}_\Omega^*$ 的第一特征向量关于其区域表面小扰动的灵敏度分析

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 为 $\mathcal{C}^2$。$\mathcal{K}_\Omega^*$ 的谱：$L^2(\partial\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$ 是离散的，位于区间 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，并在零处聚集。更准确地说，设 $\{\lambda_j\}_0^\infty$ 是 $\mathcal{K}_\Omega^*$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 上的特征值，则第一特征值 λ_0 等于 $1/2$，其几何重数为 1；而对于 $j\geq 1$，$\lambda_j\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，其中 $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\to 0$ 按照各自的重数重复排列。参见例如 [3]。

记 φ_0 为 $\mathcal{K}_\Omega^*$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 上对应第一特征值 $1/2$（其中 $\|\varphi_0\|_{L^2(\partial\Omega)}=1$）的第一特征向量。我们断言，$\varphi_0$ 等于 $\frac{\partial u}{\partial n}/\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^2(\partial\Omega)}$，其中 u 表示导体 Ω 处于静电平衡时的电势，它是方程 (1.1) 的唯一解。事实上，由 (3.18) 和 (3.7) 可得

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\Big(\frac{1}{2}I+\mathcal{K}_\Omega^*\Big)\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]\quad\text{on }\partial\Omega,$$

也就是说，

$$\mathcal{K}_\Omega^*\Big[\frac{\partial u}{\partial n}\Big]=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial n}\quad\text{on }\partial\Omega.\tag{4.1}$$

根据 φ_0 的唯一性，我们推得 $\varphi_0 = \frac{\partial u}{\partial n}/\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^2(\partial\Omega)}$ 在 $\partial\Omega$ 上。

众所周知，第一特征值 $1/2$ 与 $\partial\Omega$无关，也就是说，它不受 $\partial\Omega$的任何光滑扰动的影响。鉴于这一点，孤立导体的静电容量也可以定义为：将$\mathcal{K}_{\Omega}^{*}$ 处的算子第一特征值升高所需的电荷量 $1/2$。

与 (4.1) 类似，我们有

$$\mathcal{K}_{\Omega_\epsilon}^{*}\left[\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tilde{n}}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tilde{n}} \quad \text{on } \partial\Omega_\epsilon,$$

其中， u_ϵ 是 (1.4) 的唯一解。因此，算子$\mathcal{K}_{\partial\Omega_\epsilon}^{*}$ 在 $L^2(\partial\Omega_\epsilon)$上的第一特征向量 φ_0^ϵ 对应特征值 $1/2$ ，等于$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tilde{n}}/\|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tilde{n}}\|_{L^2(\partial\Omega_\epsilon)}$。

由定理 1.1，我们在下述定理中得到本文的第四个结果：当 $\epsilon \to 0$时，Ω_ϵ 上的第一特征向量 φ_0^ϵ 的渐近展开 ∂。

定理4.1 设 $\tilde{x} = x + \epsilon h(x)n(x) \in \partial\Omega_\epsilon$，对于 $x \in \partial\Omega$。设 φ_0^ϵ 和 φ_0 分别为 $\mathcal{K}_{\Omega_\epsilon}^{*}$ 和 $\mathcal{K}_{\Omega}^{*}$ 对应特征值 $1/2$的第一特征向量。则有如下渐近展开：

$$\varphi_0^\epsilon(\tilde{x}) = \varphi_0(x) + 2\epsilon\tau(x)h(x)\varphi_0(x) + \epsilon\tilde{v}(x) - \epsilon\langle\tau h\varphi_0 + \tilde{v}, \varphi_0\rangle\varphi_0(x) + O(\epsilon^2),$$

其中 $\tilde{v} = \frac{\partial v}{\partial n}/\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^2(\partial\Omega)}$， u和 v分别是方程（1.1）和（1.8）的唯一解，余项 $O(\epsilon^2)$ 仅取决于 X的 $\mathcal{C}^2$-范数和 h的 $\mathcal{C}^1$-范数。

本文的第五个结果是以下定理，它给出了当 $\epsilon \to 0$ 时 $\int_{\partial\Omega}\left(\varphi_0^\epsilon(\tilde{x}) - \varphi_0(x)\right)\varphi_0(x)d\sigma(x)$ 的渐近展开。

定理4.2 设 φ_0^ϵ 和 φ_0 分别是 $\mathcal{K}_{\Omega_\epsilon}^{*}$ 和 $\mathcal{K}_{\Omega}^{*}$ 对应特征值$1/2$的第一特征向量。以下渐近展开成立：

$$\int_{\partial\Omega}\left(\varphi_0^\epsilon(\tilde{x}) - \varphi_0(x)\right)\varphi_0(x)d\sigma(x) = \epsilon\int_{\partial\Omega}\tau(x)h(x)[\varphi_0(x)]^2 d\sigma(x) + O(\epsilon^2), \tag{4.2}$$

其中余项 $O(\epsilon^2)$仅取决于 X 的 $\mathcal{C}^2$范数和 h的 $\mathcal{C}^1$范数。

渐近展开(4.2)可用于根据扰动后形状本身的测量（见 [24]），确定物体形状扰动的某些性质；这些测量是针对 NP 算子的 L^2伴随算子的第一特征向量进行的。

参考文献

[1] H. Ammari, 《新兴生物医学成像数学导论》，《数学及其应用》，第62卷，施普林格，柏林，2008年。

[2] H. Ammari、E. Beretta、E. Francini、H. Kang 和 M. Lim, 《基于模态测量重建电导率夹杂体界面变化的优化算法》，《数学计算》，79（2010年），1757-1777。

[3] H. Ammari、B. Fitzpatrick、H. Kang、M. Ruiz、S. Yu 和 H. Zhang, 《光子学与声子学中的数学与计算方法》，《数学调查与专著》第235卷，美国数学学会，普罗维登斯，2018年。

[4] H. Ammari 和 H. Kang, 《极化张量与矩张量：及其在反问题和有效介质理论中的应用》, 《应用数学科学》第162卷，SpringerVerlag，纽约，2007年。[5] H. Ammari、H. Kang、M. Lim 和 H. Zribi, 《电导率界面问题。第一部分：界面小扰动》, 《美国数学会汇刊》, 362（2010年）, 2435–2449。[6] H. Ammari、H. Kang、M. Lim 和 H. Zribi, 《用于分辨成像的广义极化张量。第一部分：电导率夹杂体的形状重建》, 《计算数学》, 81（2012年）, 367–386。[7] R.R. Coifman、A. McIntosh 和 Y. Meyer, 《柯西积分在利普希茨曲线上定义了一个有界算子》, 《数学年刊》, 116（1982年）, 361–387。[8] R. Coifman、M. Goldberg、T. Hrycak、M. Israeli 和 V. Rokhlin, 《一种用于直接和反向散射计算的改进算子展开算法》, 《波与随机介质》, 9（1999年）, 441–457。[9]G.B. Folland, 《偏微分方程导论》, 普林斯顿大学出版社，新泽西州, 1976年。[10] D. Jerison, 《一个关于静电容量的闵可夫斯基问题》, 《数学学报》, 176（1996年）, 1–47。[11] O.D. Kellogg, 《势理论基础》, Dover，纽约，1953年。[12] A. Khelifi 和 H. Zribi, 《具有二维和三维薄界面的电压势渐近展开》, 《数学方法与应用科学》, 34（2011年）, 2274–2290。[13] A. Khelifi 和 H. Zribi, 《电导率夹杂体表面小变化引起的边界电压扰动》, 《应用分析》, 第93卷（2014年）, 46–64。[14] J. Lagha、F. Triki 和 H. Zribi, 《弹性静力学问题中的界面小扰动》, 《数学方法与应用科学》, 40（10）（2017年）, 3608–3636。[15] J. Lagha 和 H. Zribi, 《薄界面存在所致位移场扰动的渐近展开》, 《应用分析》, 第1卷（2017年）, 1–23。[16] M. Lim、K. Louati 和 H. Zribi, 《根据电场或声场远场测量重建散射体的小扰动》, 《数学方法与应用科学》, 31（2008年）, 第11期, 1315–1332。[17] S. J. Ling、J. Sanny 和 W. Moebs, 《大学物理：第2卷》（OpenStax）, （2016年）。[18] J. C. Maxwell, 《电学初级论述》, 牛津克拉伦登出版社，1881年。[19] H. Poincaré, 《流体质量的平衡图形》, 巴黎，1902年。[20] G. Polya, 《静电容量估算》, 《美国数学月刊》, 54，第4期（1947年）, 201–206。[21] G. Pólya 和 G. Szegő, 《数学物理中的等周不等式》, 《数学研究年刊》第27号，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1951年。

[22] G. Szeg¨o, 《电容器的容量》, 美国数学会通报, 第 51 卷（1945 年）, 第 325–350 页。[23] H. Zribi, 《电磁夹杂界面发生小变化所引起电流的渐近展开》, 《应用分析》, 92（2013 年）, 172–190。[24] H. Zribi, 《根据扰动后形状本身的边界测量重建声波障碍物的小扰动》, 《数学方法与应用科学》, 45（2022 年）, 第 1 期, 93–112。