arXiv:2301.00865v1 [math.NA] 2 Jan 2023

隐式-显式多速率无穷小阶段重启方法 *

Alex C. Fish†, Daniel R. Reynolds†, 和 Steven B. Roberts‡

摘要。 隐式-显式（IMEX）方法是一类灵活的数值时间积分方法，用于求解划分为刚性过程与非刚性过程的初值问题（IVP），其目标是比纯隐式或纯显式方法具有更低的计算成本。另一类互补的灵活初值问题求解器是多速率无穷小方法，适用于划分为快变与慢变动力学的问题；这类方法通过依次演化一系列“快速”初值问题来求解多速率初值问题，其中每个初值问题都可采用任意精度足够高的算法。本文介绍了一类新的高阶隐式-显式多速率方法，专为慢变动力学进一步按 IMEX 方式划分的多速率初值问题而设计。我们将这一新方法类称为隐式-显式多速率阶段重启（IMEX-MRI-SR）方法。它既改进了此前的隐式-显式多速率广义结构加性龙格–库塔（IMEX-MRI-GARK）方法，也将多速率指数龙格-库塔（MERK）方法扩展到了 IMEX 框架中。我们利用 GARK 理论推导出保证精度阶最高可达四阶的条件，并给出二阶、三阶和四阶精度的示例方法，同时通过数值模拟展示这些方法在固定步长和自适应步长设置下的收敛率与计算性能。

关键词。多速率时间积分、初值问题、隐式-显式方法

AMS学科分类。65L20,65L05, 65L06

1. 引言。近年来，用于求解初值问题（IVP）系统的灵活时间积分方法日益受到关注，这主要得益于它们能够以更高的计算效率，对初值问题的解给出高精度近似。这类积分方法通过将初值问题划分为不同的组成部分，并对各部分采用不同的步长或数值方法，以降低计算成本。灵活方法的主要类别包括隐式-显式（IMEX）分裂 [2, 9, 11, 23], 线性-非线性分裂[8, 13, 14, 15, 16], 以及多速率分裂 [6, 22, 24, 26]。

IMEX 时间积分方法求解如下初值问题：其右端函数

*已提交给编辑，日期：**经费支持：**Alex Fish 和 Daniel Reynolds 的研究由美国能源部科学办公室高级科学计算研究办公室通过高级计算实现科学发现（SciDAC）计划及 FASTMath研究所提供支持，资助编号为 DE-SC0021354。Steven Roberts 的研究是在美国能源部的主持下，由劳伦斯利弗莫尔国家实验室执行的，合同编号为 DEAC52-07NA27344；并由美国能源部科学办公室高级科学计算研究办公室提供支持。LLNL-JRNL-843436。本文件是对美国政府机构资助的研究工作的说明。美国政府、劳伦斯利弗莫尔国家安全有限责任公司及其任何雇员，均不对本文披露的任何信息、设备、产品或流程的准确性、完整性或实用性作出明示或默示的保证，也不承担任何法律责任或义务，亦不声明其使用不会侵犯私人所有的权利。本文提及任何具体商业产品、流程或服务时，无论使用其商品名、商标、制造商名称或其他方式，均不一定构成或暗示美国政府或劳伦斯利弗莫尔国家安全有限责任公司的认可、推荐或支持。作者在此表达的观点和意见不一定代表或反映美国政府或劳伦斯利弗莫尔国家安全有限责任公司的立场，不得用于广告或产品背书。

†美国得克萨斯州达拉斯南卫理公会大学数学系（afish@smu.edu，reynolds@smu.edu）。

‡美国加利福尼亚州利弗莫尔劳伦斯利弗莫尔国家实验室应用科学计算中心（roberts115@llnl.gov）。

$f(t,y(t))$ 被加性分解为刚性 $\{I\}$ 和非刚性 $\{E\}$ 过程，

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t,y) := f^{\{I\}}(t,y) + f^{\{E\}}(t,y), \quad t \geq t_0, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

隐式-显式方法随后将两种不同的数值方法结合起来处理这些分量： $f^{\{I\}}$通常采用刚性但计算成本高昂的求解器，而 $f^{\{E\}}$则可采用成本较低但非刚性的求解器。例如，加性龙格–库塔方法通常将A稳定的对角隐式龙格–库塔方法与显式龙格–库塔方法相结合。

类似地，多速率方法求解右端项按快速演化和缓慢演化动力学加性分割的初值问题， $\{F\}$ 和 $\{S\}$，

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t,y) := f^{\{F\}}(t,y) + f^{\{S\}}(t,y), \quad t \geq t_0, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

随后，多速率方法对每个分量采用不同步长的数值方法，以节省计算时间，同时保持所需的精度。

在本研究中，我们结合上述方法，考虑一个三分量加性分割初值问题，其中慢速分量 $f^{\{S\}}$ 来自（1.2）并以隐式-显式方式进行分割 ，

$$\begin{aligned} y'(t) &= f^{\{F\}}(t,y) + f^{\{I\}}(t,y) + f^{\{E\}}(t,y), \quad t \geq t_0, \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

具体而言，我们为不断壮大的多速率无穷小（MRI）方法家族增添了一类新方法。这类方法通过依次求解一系列“快速”初值问题，来近似求解（1.2）或（1.3），

$$\begin{aligned} v_i'(\theta) &= f^{\{F\}}(\theta, v_i) + g_i(\theta), \quad \theta \in [\theta_{0,i}, \theta_{f,i}], \\ v(\theta_{0,i}) &= v_{0,i}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

强迫函数 $g_i(\theta)$以方法所规定的方式，融入了由 $f^{\{I\}}$和 $f^{\{E\}}$定义的慢动力学信息。MRI 方法假设这些快速初值问题（1.4）能够精确求解，但在实际中，通常使用步长小于多速率方法的另一种“内层”数值方法对其进行近似求解。该内层方法还可以通过 IMEX 、线性 - 非线性或多速率方法进一步分解问题。

我们提出的这类方法称为 隐式-显式多速率无穷小阶段重启 (IMEX-MRI-SR) 方法。IMEX-MRI-SR 方法的每个阶段都包含对快速初值问题的演化，随后进行一次隐式求解。这样便可通过扩展基础加性龙格–库塔方法，推导出 IMEX-MRI-SR 方法。我们将在第 2.1节进一步讨论基础方法的作用，尤其关注其在满足阶条件方面的作用。

IMEX-MRI-SR 方法由以下内容定义： n_Ω 系数矩阵 $\Omega^{\{k\}} \in \mathbb{R}^{s^{\{S\}} \times s^{\{S\}}}$， $k = 0,$ ..... $n_\Omega - 1$， 一个系数矩阵 $\Gamma \in \mathbb{R}^{s^{\{S\}} \times s^{\{S\}}}$以及一个节点向量 $c^{\{S\}} \in \mathbb{R}^{s^{\{S\}}}$。这些方法的嵌入版本还包括额外的系数向量 $\hat{}\omega^{\{k\}} \in \mathbb{R}^{s^{\{S\}}}$ 和 $\hat{}\gamma \in \mathbb{R}^{s^{\{S\}}}$。将解推进至如下形式的初值问题 (1.3) 的算法定义如下。

Definition 1.1（用于加法分割系统的 IMEX-MRI-SR 方法）。*IMEX-MRI-SR 方法* 按照以下方式推进问题 （1.3）从 t_n 到 $t_n + H$

根据以下算法。

$$\text{(1.5a)}\quad \begin{aligned}&\text{Let: } Y_1^{\{S\}} := y_n\\ &\text{For: } i = 2, ..., s^{\{S\}}\end{aligned}$$

$$\text{(1.5b)}\quad \begin{cases}\text{Let:} & v_i(0) := y_n,\\ \text{Solve:} & v_i'(\theta) = f^{\{F\}}(t_n+\theta, v_i(\theta)) + g_i(\theta),\ \text{for } \theta\in[0, c_i^{\{S\}}H]\\ & \text{where } g_i(\theta) = \dfrac{1}{c_i^{\{S\}}}\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\omega_{i,j}\left(\dfrac{\theta}{c_i^{\{S\}}H}\right)\left(f_j^{\{E\}}+f_j^{\{I\}}\right)\\ \text{Solve:} & Y_i^{\{S\}} = v_i\left(c_i^{\{S\}}H\right) + H\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\gamma_{i,j}f_j^{\{I\}},\end{cases}$$

$$\text{(1.5c)}\quad \text{令:}\quad y_{n+1} := Y_{s^{\{S\}}}^{\{S\}},$$

$$\text{(1.5d)}\quad \begin{cases}\text{Let:} & \hat{v}(0) := y_n,\\ \text{Solve:} & \hat{v}(\theta) = f^{\{F\}}(t_n+\theta, \hat{v}(\theta)) + \hat{g}(\theta),\ \text{for } \theta\in[0, H]\\ & \text{where } \hat{g}(\theta) = \displaystyle\sum_{j=1}^{s^{\{S\}}-1}\hat{\omega}_j\left(\dfrac{\theta}{H}\right)\left(f_j^{\{E\}}+f_j^{\{I\}}\right)\\ \text{Solve:} & \hat{y}_{n+1} = \hat{v}(H) + H\displaystyle\sum_{j=1}^{s^{\{S\}}-1}\hat{\gamma}_j f_j^{\{I\}} + H\hat{\gamma}_{s^{\{S\}}}f^{\{I\}}(t_n+H, \hat{y}_{n+1}),\end{cases}$$

其中 $f_j^{\{E\}} := f^{\{E\}}\left(t_n + c_j^{\{S\}}H, Y_j^{\{S\}}\right)$ 且 $f_j^{\{I\}} := f^{\{I\}}\left(t_n + c_j^{\{S\}}H, Y_j^{\{S\}}\right)$。这里$y_{n+1}$是对 y（t_n+H）的时间演化近似，而 $\hat{}y_{n+1}$ 是用于时间误差估计的嵌入解。如果不需要进行时间误差估计，则可以省略步骤（1.5d）。

Definition 1.2（慢趋势系数）。系数 $\omega_{i,\ j}$ 在 （1.5b）中的定义与 *[3]*

$$\text{(1.6)}\qquad \omega_{i,j}(\tau) := \sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\omega_{i,j}^{\{k\}}\tau^k,\quad \overline{\omega}_{i,j} := \int_0^1\omega_{i,j}(\tau)\mathrm{d}\tau = \sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\frac{\omega_{i,j}^{\{k\}}}{k+1},$$

并将 $\Omega^{\{k\}}$、Ω和 Γ 称为包含系数 $s^{\{S\}}\times s^{\{S\}}$ 的矩阵 $\{\omega_{i,j}^{\{k\}}\}$，$\{\omega_{i,j}\}$和 $\{\gamma_{i,j}\}$。与 *[3]* 中一样，我们假设系数矩阵的第一行恒为零，并且 $\Omega^{\{k\}}$ 和 Ω 均为严格下三角矩阵。嵌入函数 $\hat{}\omega_j$（τ）的定义与 （1.6）类似，使用的系数向量为 $\overline{\hat{}\omega^{\{k\}}}$。

本文其余部分的结构如下。在下一小节中，我们将介绍与 IMEX-MRI-SR 相关的方法，讨论它们的相似之处，以及拟议方法所改进的局限性。在第 2 节中，我们证明 IMEX-MRI-SR 方法截至四阶的阶条件；在第3 节中，我们考察其线性稳定性。在第 4 节中，我们给出二阶至四阶的嵌入式 IMEX-MRI-SR 方法。在第 5节中，我们说明先前的一类多速率方法可以重新表述为 IMEX-MRI-SR 方法，并利用我们的收敛理论证明这些方法此前尚未得到证明的性质。随后，我们在第 6节中给出数值结果，以验证我们的收敛理论，并比较 IMEX-MRI-SR 方法与现有方法在形如（1.3）的问题上的效率。

最后，在第 7 节中，我们总结本文的研究贡献，并展望未来工作。

1.1. 相关方法。据我们所知，现有三种 MRI算法，既支持对慢动力学进行 IMEX划分，也能对快动力学进行无穷小处理。它们分别是具有一阶精度的“Lie–Trotter” [4, 21] 和具有二阶精度的“Strang–Marchuk” [17, 25] 算子分裂方法，以及近期提出的四阶 IMEX-MRI-GARK [3] 方法，即 MRI-GARK [22] 方法的一种 IMEX 变体。Lie–Trotter 和 Strang–Marchuk 均通过依次对各个分量应用不同的求解器来运行，求解器之间只通过各子求解过程中采用的初始条件相互传递信息。针对 IMEX多速率分裂（1.3）的这两类方法的变体见 [3]。然而，由于它们的“初始条件”耦合较弱，Lie–Trotter 和 Strang–Marchuk 的时间精度阶数至多分别为一阶和二阶，与各分量求解器的精度阶数无关。

IMEX-MRI-GARK 方法的组织方式与 IMEX-MRI-SR 类似：它们通过交替演化快速初值问题和求解涉及 $f^{\{I\}}$ 的隐式代数方程来推进解，并利用每个阶段的结果为后续阶段的 $g_i(\theta)$ 提供贡献。不过，与 IMEX-MRI-SR 方法不同，IMEX-MRI-GARK 方法会在区间 $[c_{i-1}H, c_iH]$ 上演化每个快速初值问题，其初始条件由前一阶段的结果给出。在每个阶段中，可能进行快速演化，也可能进行隐式求解，具体取决于节点：当 Δc_i 时，$= c_i - c_{i-1} > 0$ 会进行快速演化；而当 $\Delta c_i = 0$ 时，则必须求解一个代数系统。在所有现有的隐式 MRI-GARK 和 IMEX-MRI-GARK 方法中，研究者都是从一个基础 DIRK 或 ARK 方法出发推导方案，然后引入额外的内部阶段，以确保交替进行 $\Delta c_i \neq 0$ 和 $\Delta c_{i+1} = 0$，从而保证适当的结构[3, 22]。然而，这些方法本质上要求节点向量 $c^{\{S\}}$ 非递减。这在 RK 方法中通常并不常见，尤其是精度阶高于二阶时 [2, 9, 10, 11, 19, 20, 23], ，因此可用于推导新 MRI-GARK 和 IMEX-MRI-GARK 方法的基础 DIRK 和 ARK 方法相对较少。此外，为确保 $\Delta c_i = 0$ 而添加内部阶段的“填充”过程并不明确，而且往往需要通过过于复杂的反复试错来决定应在哪些位置插入阶段。由于这些挑战，尚无研究者成功构造出带有用于时间误差估计的嵌入的 IMEX-MRI-GARK 方法。

与 IMEX-MRI-SR 密切相关的另一类方法是多速率指数型龙格–库塔（MERK）方法 [13]。虽然这些方法不支持慢时间尺度上的隐式性（即 $f^{\{I\}} = 0$），并且假设快速分区是线性的（即 $f^{\{F\}}(t, y) = \mathcal{L}y$），但其结构与（1.5）相匹配。每个内部阶段都通过在区间 $[0, c_iH]$上演化一个快速初值问题来计算，所使用的强迫函数由 $f^{\{E\}}$ 在先前慢阶段的取值确定。

2. IMEX-MRI-SR 阶条件。 类似于 IMEX-MRI-GARK 方法，我们首先将算法表示为 GARK 形式，从而推导出 IMEX-MRI-SR 方法的阶条件。由于采用三分量划分（ 1.3 ），我们必须确定 $\mathbf{A}^{\{\sigma,\nu\}}$、$\mathbf{b}^{\{\nu\}}$ 和 $\mathbf{c}^{\{\nu\}}$ 对于 $\sigma \in \{S, F\}$ 以及 $\nu \in \{I, E, F\}$。我们将 $\mathbf{A}^{\{F,\nu\}}$、$\nu \in \{I, E, F\}$ 称为快速 GARK 表，将 $\mathbf{A}^{\{S,\nu\}}$、 $\nu \in \{I, E, F\}$ 称为慢速 GARK 表。我们假设快速初值问题（1.5b）通过使用一个具有足够高精度的 Runge–Kutta 方法执行一步来求解，该方法具有 $s^{\{F\}}$ 个阶段，并由 Butcher 表（$A^{\{F\}}$、 $b^{\{F\}}$、 $c^{\{F\}}$）定义。在计算 j^{th} 的解时，子阶段

快速初值问题 $v_i'(\theta)$ 可表示为

$$V_{i,j} = y_n + c_i^{\{S\}} H \sum_{k=1}^{s^{\{F\}}} a_{j,k}^{\{F\}} f_{i,k}^{\{F\}} + H \sum_{k=1}^{s^{\{F\}}} a_{j,k}^{\{F\}} \sum_{\ell=1}^{i-1} \omega_{i,\ell}(c_k^{\{F\}}) \left(f_\ell^{\{E\}} + f_\ell^{\{I\}} \right) \tag{2.1}$$

对于 $i = 1, ..., s^{\{S\}}$ 和 $j = 1, ..., s^{\{F\}}$，其中 $f_{i\,k}^{\{F\}} := f^{\{F\}}(t_n + c_k^{\{F\}} H, V_{i,k})$，$f_\ell^{\{E\}} := f^{\{E\}}(t_n + c_\ell^{\{S\}} H, Y_\ell^{\{S\}})$，且 $f_\ell^{\{I\}} := f^{\{I\}}(t_n + c_\ell^{\{S\}} H, Y_\ell^{\{S\}})$。随后，IMEX-MRI-SR 方法的慢阶段 $Y_i^{\{S\}}$, $i = 1, \ldots, s^{\{S\}}$ 通过以下方式计算

$$\begin{aligned} Y_i^{\{S\}} = y_n &+ c_i^{\{S\}} H \sum_{j=1}^{s^{\{F\}}} b_j^{\{F\}} f_{i,j}^{\{F\}} \\ &+ H \sum_{j=1}^{s^{\{F\}}} b_j^{\{F\}} \sum_{\ell=1}^{i-1} \omega_{i,\ell} \left(c_j^{\{F\}} \right) \left(f_\ell^{\{E\}} + f_\ell^{\{I\}} \right) + H \sum_{\ell=1}^{i} \gamma_{i,\ell} f_\ell^{\{I\}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

我们利用 GARK 理论 [23] 来构造阶条件，如 [3, 22]所示。由于慢分区共享相同的阶段，$Y_i^{\{S\}}$，这些方法具有六个 GARK 矩阵，$\mathbf{A}^{\{F,F\}}$、$\mathbf{A}^{\{F,E\}}$、$\mathbf{A}^{\{F,I\}}$、$\mathbf{A}^{\{S,F\}}$、$\mathbf{A}^{\{S,E\}}$和$\mathbf{A}^{\{S,I\}}$以及三个 GARK 向量$\mathbf{b}^{\{F\}}$、$\mathbf{b}^{\{E\}}$和$\mathbf{b}^{\{I\}}$，

$$\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}^{\{F,F\}} & \mathbf{A}^{\{F,E\}} & \mathbf{A}^{\{F,I\}} \\ \hline \mathbf{A}^{\{S,F\}} & \mathbf{A}^{\{S,E\}} & \mathbf{A}^{\{S,I\}} \\ \hline \mathbf{b}^{\{F\},\,T} & \mathbf{b}^{\{E\},\,T} & \mathbf{b}^{\{I\},\,T} \end{array}.$$

这里，$\mathbf{A}^{\{F,F\}}$是一个方形的 $s^{\{SF\}} \times s^{\{SF\}}$矩阵（其中我们定义 $s^{\{SF\}} = s^{\{S\}} s^{\{F\}}$），包含将快阶段 $\{V_{i,j}\}$彼此关联的系数。它是块对角的，因为$V_{i,\,j}$只依赖于$V_{i,\,k}$, $k = 1, ..., s^{\{F\}}$ 所对应的 $A^{\{F\}}$ 系数，而绝不依赖于 $V_{\ell j}$, $\ell \neq i$。这些 $s^{\{F\}} \times s^{\{F\}}$ 块对角元素称为 $A^{\{F,F,i\}}$。

$\mathbf{A}^{\{F,E\}}$ 和$\mathbf{A}^{\{F,I\}}$ 是高矩阵 $s^{\{SF\}} \times s^{\{S\}}$，用于将快阶段 $\{V_{i,j}\}$与慢阶段 $\{Y_i^{\{S\}}\}$的显式和隐式函数求值相关联，由 $s^{\{S\}}$ 个名为 $A^{\{F,E,i\}}$的块组成。

$\mathbf{A}^{\{S,F\}}$是一个宽矩阵，其中包含将慢阶段 $\{Y_i^{\{S\}}\}$与快阶段 $\{V_{i,j}\}$关联起来的系数。我们将构成$\mathbf{A}^{\{S,F\}}$的 $s^{\{S\}}$个总块命名为 $A^{\{S,F,i\}}$。每个 $A^{\{S,F,i\}}$至多包含一行非零项，且该行位于第 i行，因为 $Y_i^{\{S\}}$ 仅依赖于$V_{i,j}$, $j = 1, ..., s^{\{F\}}$，而从不依赖于$V_{\ell,j}$, $\ell \neq i$。

$\mathbf{A}^{\{S,E\}}$ 和$\mathbf{A}^{\{S,I\}}$ 是方阵，用于将慢阶段 $\{Y_i^{\{S\}}\}$与这些慢阶段的显式和隐式函数求值相关联。

向量$\mathbf{b}^{\{\sigma\}}$等于$\mathbf{A}^{\{S,\sigma\}}$ $\sigma \in \{F, E, I\}$的最后一行，这是因为 IMEX-MRI-SR 方法具有首末相同（FSAL）性质，即将最后阶段用作该步的解。

当包含一个嵌入（1.5d）时，它将对应另外三个 GARK 向量，$\hat{}\mathbf{b}^{\{F\}}$ $\hat{}\mathbf{b}^{\{E\}}$ 和 $\hat{}\mathbf{b}^{\{I\}}$。由于（1.5d）在结构上与最后阶段 $Y_{s^{\{S\}}}^{\{S\}}$ 相似，这些向量的内容与 $\mathbf{b}^{\{F\}}$、$\mathbf{b}^{\{E\}}$ 和$\mathbf{b}^{\{I\}}$ 的差异仅在于，它们依赖于 $\hat{}\omega_j^{\{k\}}$ 和 $\hat{}\gamma_j$，而非 $\omega_{s^{\{S\}},j}^{\{k\}}$ 和$\gamma_{s^{\{S\}},j}$。因此

后续针对主要 GARK 矩阵和向量给出的阶条件同样适用于该嵌入。

经过上述简化后，GARK 表可表示为分块矩阵形式：

$$\begin{array}{ccc|c|c} A^{\{F,F,1\}} & & & A^{\{F,E,1\}} & A^{\{F,I,1\}} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & A^{\{F,F,s^{\{S\}}\}} & A^{\{F,E,s^{\{S\}}\}} & A^{\{F,I,s^{\{S\}}\}} \\ \hline A^{\{S,F,1\}} & \dots & A^{\{S,F,s^{\{S\}}\}} & \mathbf{A}^{\{S,E\}} & \mathbf{A}^{\{S,I\}} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{b}^{\{F\},T}} & \mathbf{b}^{\{E\},T} & \mathbf{b}^{\{I\},T} \end{array}.$$

具有这种表格结构的 GARK 方法，其阶段更新公式为

$$V_{i,j} = y_n + H\sum_{k=1}^{s^{\{F\}}} a_{j,k}^{\{F,F,i\}} f_{i,j}^{\{F\}} + H\sum_{k=1}^{s^{\{F\}}} a_{j,k}^{\{F,E,i\}} f_j^{\{E\}} + H\sum_{k=1}^{s^{\{F\}}} a_{j,k}^{\{F,I,i\}} f_j^{\{I\}}, \tag{2.3a}$$

$$Y_i^{\{S\}} = y_n + H\sum_{j=1}^{s^{\{F\}}} a_{i,j}^{\{S,F,i\}} f_{ij}^{\{F\}} + H\sum_{j=1}^{s^{\{F\}}} \mathbf{A}_{i,j}^{\{S,E\}} f_j^{\{E\}} + H\sum_{j=1}^{s^{\{F\}}} \mathbf{A}_{i,j}^{\{S,I\}} f_j^{\{I\}}. \tag{2.3b}$$

通过比较（2.1）和（2.3a）中的系数，我们可以确定快速 GARK 系数：

$$a_{j,k}^{\{F,F,i\}} = c_i^{\{S\}} a_{j,k}^{\{F\}}, \tag{2.4a}$$

$$a_{j,\ell}^{\{F,E,i\}} = \sum_{l=1}^{s^{\{F\}}} a_{j,k}^{\{F\}} \omega_{i,\ell}(c_l^{\{F\}}) = \sum_{l=1}^{s^{\{F\}}} \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \omega_{i,\ell}^{\{k\}} a_{j,l}^{\{F\}} c_l^{\{F\}\times k}, \tag{2.4b}$$

$$a_{j,\ell}^{\{F,I,i\}} = a_{j,\ell}^{\{F,E,i\}} = \sum_{k=1}^{s^{\{F\}}} b_{j,k}^{\{F\}} \omega_{i,\ell}(c_k^{\{F\}}), \tag{2.4c}$$

其中，上标 $\times k$ 表示对向量的各元素进行 k 次方运算。将这些结果转换为矩阵形式，可得快速 GARK 表：

$$\mathbf{A}^{\{F,F\}} = C^{\{S\}} \otimes A^{\{F\}} \in \mathbb{R}^{s^{\{SF\}} \times s^{\{SF\}}}, \tag{2.5a}$$

$$\mathbf{A}^{\{F,E\}} = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \otimes A^{\{F\}} c^{\{F\}\times k} \in \mathbb{R}^{s^{\{SF\}} \times s^{\{S\}}}, \tag{2.5b}$$

$$\mathbf{A}^{\{F,I\}} = \mathbf{A}^{\{F,E\}} = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \otimes A^{\{F\}} c^{\{F\}\times k} \in \mathbb{R}^{s^{\{SF\}} \times s^{\{S\}}}, \tag{2.5c}$$

其中，$\otimes$ 表示克罗内克积，$C^{\{\sigma\}}$ =diag($c^{\{\sigma\}}$)。

同理，通过比较（2.2）和（2.3b），我们可以求得慢速 GARK 表系数。

$$a_{i,j}^{\{S,F,i\}} = c_i^{\{S\}} b_j^{\{F\}}, \tag{2.6a}$$

$$a_{i,\ell}^{\{S,E\}} = \sum_{k=1}^{s^{\{F\}}} b_k^{\{F\}} \omega_{i,\ell}(c_k^{\{F\}}) = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \omega_{i,\ell}^{\{k\}} b^{\{F\},T} c^{\{F\}\times k}, \tag{2.6b}$$

$$a_{i,\ell}^{\{S,I\}} = \sum_{k=1}^{s^{\{F\}}} b_k^{\{F\}} \omega_{i,\ell}\left(c_j^{\{F\}}\right) + \gamma_{i,\ell} = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \omega_{i,\ell}^{\{k\}} b^{\{F\},T} c^{\{F\}\times k} + \gamma_{i,\ell}. \tag{2.6c}$$

由于快速方法具有无穷小性质，我们假设它满足所有丛树阶条件，

$$b^{\{F\},T} c^{\{F\}\times k} = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, ..., n_\Omega - 1.$$

利用这一点并考察（2.6），可得矩阵形式的慢速 GARK 表为

$$\mathbf{A}^{\{S,F\}} = C^{\{S\}} \otimes b^{\{F\},T} \in \mathbb{R}^{s^{\{S\}}\times s^{\{SF\}}}, \tag{2.7a}$$

$$\mathbf{A}^{\{S,E\}} = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{k+1} = \overline{\Omega} \in \mathbb{R}^{s^{\{S\}}\times s^{\{S\}}}, \tag{2.7b}$$

$$\mathbf{A}^{\{S,I\}} = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{k+1} + \Gamma = \overline{\Omega} + \Gamma \in \mathbb{R}^{s^{\{S\}}\times s^{\{S\}}}. \tag{2.7c}$$

此外，鉴于 IMEX-MRI-SR 方法相对于慢阶段具有 FSAL 性质，我们定义以下变量 $Y^{\{S\}}$,

$$\mathbf{b}^{\{F\},T} = e_{s^{\{S\}}}^T \mathbf{A}^{\{S,F\}} = (C^{\{S\}} e_{s^{\{S\}}} \otimes b^{\{F\},T}) = (e_{s^{\{S\}}} \otimes b^{\{F\}})^T, \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{b}^{\{E\},T} = e_{s^{\{S\}}}^T \mathbf{A}^{\{S,E\}} = e_{s^{\{S\}}}^T \overline{\Omega}, \tag{2.8b}$$

$$\mathbf{b}^{\{I\},T} = e_{s^{\{S\}}}^T \mathbf{A}^{\{S,I\}} = e_{s^{\{S\}}}^T (\overline{\Omega} + \Gamma), \tag{2.8c}$$

其中 $e_{s^{\{S\}}}$ 是一个长度为 $s^{\{S\}}$ 的向量，除最后一个位置为 1 外，其余元素均为 0。

2.1. 基一致性。如果 $f^{\{F\}}(t, y) = 0$，那么 IMEX-MRI-SR 方法将退化为由慢显式和隐式基方法定义的简单加性龙格–库塔方法，

$$(A^{\{E\}}, b^{\{E\}}, c^{\{E\}}) = (\mathbf{A}^{\{S,E\}}, \mathbf{b}^{\{E\}}, \mathbf{A}^{\{S,E\}} \mathbb{1}^{s^{\{S\}}}),$$
$$(A^{\{I\}}, b^{\{I\}}, c^{\{I\}}) = (\mathbf{A}^{\{S,I\}}, \mathbf{b}^{\{I\}}, \mathbf{A}^{\{S,I\}} \mathbb{1}^{s^{\{S\}}}),$$

其中 $\mathbb{1}^{s^{\{S\}}}$ 是一个长度为 $s^{\{S\}}$ 的全 1 向量。该加性龙格–库塔方法的阶段为

$$Y_i^{\{S\}} = y_n + H \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}^{\{E\}} f^{\{E\}}(t_n + c_j^{\{E\}} H, Y_j^{\{S\}}) + H \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}^{\{I\}} f^{\{I\}}(t_n + c_j^{\{I\}} H, Y_j^{\{S\}}),$$

最后阶段等于该步的解。在推导阶条件的过程中，我们将这种 ARK 方法称为慢基方法。

注 2.1（一阶条件）。只要慢基方法和任意快方法的阶数至少为一，GARK 方法就不存在额外的一阶耦合条件。因此，有效的一阶 IMEX-MRI-SR 条件是 $\mathbf{A}^{\{S,E\}} = \Omega$ 和 $\mathbf{A}^{\{S,I\}} = \Omega + \Gamma$构成一个一阶 ARK 方法；只要 $\mathbf{A}^{\{S,E\}}$ 和 $\mathbf{A}^{\{S,I\}}$ 具有一阶精度，就能轻松满足这一条件。

注2.2（从现有 ARK 方法推导 IMEX-MRI-SR 方法）。由于 IMEX-MRI-SR 的结构，基础 ARK 方法应为刚性准确；否则，必须先在末尾附加 b 向量，并在 ARK 的 A 矩阵右侧补上一列零，将其转换为刚性准确形式。

2.2. 克罗内克积恒等式。在接下来的推导中，我们将用到以下恒等式：

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T, \tag{2.9a}$$
$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD), \tag{2.9b}$$
$$(A \otimes v)\mathbb{1}^{\{r(A)\}} = (A\mathbb{1}^{\{r(A)\}}) \otimes v, \tag{2.9c}$$
$$(v \otimes A)\mathbb{1}^{\{r(A)\}} = v \otimes (A\mathbb{1}^{\{r(A)\}}), \tag{2.9d}$$

其中 A，B，C，D是维度兼容的任意矩阵，v是任意向量，而 $\mathbb{1}^{\{r_{(A)}\}}$ 是一个全 1 向量，其长度等于 A的行数。恒等式 (2.9a) 和 (2.9b) 可见 [12]。恒等式 (2.9c) 和 (2.9d) 可通过初等计算得出。

2.3. GARK 内部一致性。

THEOREM 2.3（GARK 内部一致性）。一个 *IMEX-MRI-SR* 方法满足 *GARK* 内部一致性条件，

$$\mathbf{c}^{\{F,F\}} = \mathbf{c}^{\{F,E\}} = \mathbf{c}^{\{F,I\}}, \tag{2.10a}$$
$$\mathbf{c}^{\{S,F\}} = \mathbf{c}^{\{S,E\}} = \mathbf{c}^{\{S,I\}}, \tag{2.10b}$$

其中 $c^{\{F,\nu\}} = A^{\{F,\nu\}}\mathbb{1}^{s^{\{SF\}}}$，$c^{\{S,\nu\}} = \mathbf{A}^{\{S,\nu\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}}$，$\nu \in \{I, E, F\}$，若以下条件成立：

$$\Omega^{\{0\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = c^{\{S\}}, \tag{2.11a}$$
$$\Omega^{\{k\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = 0^{s^{\{S\}}},\ k = 1, ..., n_\Omega - 1, \tag{2.11b}$$
$$\Gamma\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = 0^{s^{\{S\}}}, \tag{2.11c}$$

其中，$0^{s^{\{S\}}}$ 是一个长度为 $s^{\{S\}}$ 的零向量。

证明。根据相应的快速 GARK 表计算快速 GARK 节点，

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^{\{F,F\}} &= \mathbf{A}^{\{F,F\}}\mathbb{1}^{s^{\{SF\}}} = (C^{\{S\}} \otimes A^{\{F\}})\mathbb{1}^{s^{\{SF\}}} = c^{\{S\}} \otimes c^{\{F\}}, \\
\mathbf{c}^{\{F,E\}} &= \mathbf{A}^{\{F,E\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \otimes A^{\{F\}}c^{\{F\}\times k}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} \\
&= (\Omega^{\{0\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}}) \otimes c^{\{F\}} + \sum_{k=1}^{n_\Omega - 1} (\Omega^{\{k\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}}) \otimes A^{\{F\}}c^{\{F\}\times k}, \\
\mathbf{c}^{\{F,I\}} &= \mathbf{A}^{\{F,I\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = \mathbf{A}^{\{F,E\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = \mathbf{c}^{\{F,E\}},
\end{aligned}$$

因此，当 $\Omega^0\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = c^{\{S\}}$ 且 $\Omega^{\{k\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = 0^{s^{\{S\}}}$，$k$ =1，..... $n_\Omega - 1$时，$\mathbf{c}^{\{F,F\}} = \mathbf{c}^{\{F,I\}} = \mathbf{c}^{\{F,E\}}$。根据慢速 GARK 表计算慢速 GARK 节点，

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^{\{S,F\}} &= \mathbf{A}^{\{S,F\}}\mathbb{1}^{s^{\{SF\}}} = (C^{\{S\}} \otimes b^{\{F\}})\mathbb{1}^{s^{\{SF\}}} = c^{\{S\}}, \\
\mathbf{c}^{\{S,E\}} &= \mathbf{A}^{\{S,E\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = \overline{\Omega}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}}\frac{1}{k+1},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{c}^{\{S,E\}} = \mathbf{A}^{\{S,I\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = (\overline{\Omega}+\Gamma)\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = \sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\mathbb{1}^{s^{\{S\}}}\frac{1}{k+1} + \Gamma\mathbb{1}^{s^{\{S\}}},$$

因此，使用与上述相同的条件，并附加约束 $\Gamma\mathbb{1}^{s^{\{S\}}} = 0^{s^{\{S\}}}$，即可满足$\mathbf{c}^{\{S,F\}} = \mathbf{c}^{\{S,I\}} = \mathbf{c}^{\{S,E\}}$。 ∎

备注 2.4（二阶条件）。当构成 GARK 方法的各个表都至少具有二阶精度，且满足内部一致性时，不存在额外的二阶耦合条件。因此，当慢基方法和任意快方法都至少具有二阶精度时，内部一致性条件即为二阶条件。

2.4. 高阶条件。

THEOREM 2.5（三阶条件）。一个具有内部一致性、慢基础方法达到三阶精度且快速方法具有$\max(3, n_\Omega+1)$ 精度的 *IMEX-MRI-SR* 方法，若满足以下条件，则具有三阶精度：

$$e_{s^{\{S\}}}^T\left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)c^{\{S\}} = \frac{1}{6}. \tag{2.12}$$

证明。根据 [3], ，这种结构的内部一致 GARK 方法，其慢基础方法具有三阶精度，快速方法具有 $\max(3, n_\Omega+1)$ 阶精度时，有四个三阶耦合条件，

$$\mathbf{b}^{\{\sigma\},T}\mathbf{A}^{\{S,F\}}\mathbf{c}^{\{F\}} = \frac{1}{6}, \tag{2.13a}$$

$$\mathbf{b}^{\{F\},T}\mathbf{A}^{\{S,\sigma\}}\mathbf{c}^{\{S\}} = \frac{1}{6}, \tag{2.13b}$$

对于 $\sigma \in \{I, E\}$。一个具有内部一致性的 IMEX-MRI-SR 方法满足

$$\mathbf{c}^{\{F\}} = \mathbf{c}^{\{F,F\}} = \mathbf{c}^{\{F,E\}} = \mathbf{c}^{\{F,I\}} = c^{\{S\}}\otimes c^{\{F\}}, \tag{2.14a}$$

$$\mathbf{c}^{\{S\}} = \mathbf{c}^{\{S,F\}} = \mathbf{c}^{\{S,E\}} = \mathbf{c}^{\{S,I\}} = c^{\{E\}} = c^{\{I\}} = c^{\{S\}}. \tag{2.14b}$$

条件（2.13a）对以下两个 σ值均自动满足：

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} &= \mathbf{b}^{\{\sigma\},T}\mathbf{A}^{\{S,F\}}\mathbf{c}^{\{F\}}\\ &= b^{\{\sigma\},T}(C^{\{S\}}\otimes b^{\{F\},T})(c^{\{S\}}\otimes c^{\{F\}}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

条件（2.13b）可化简为单一条件（2.12），因为对于 IMEX-MRI-SR 方法，有 $\mathbf{A}^{\{F,E\}} = \mathbf{A}^{\{F,I\}}$：

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} = \mathbf{b}^{\{F\},T}\mathbf{A}^{\{F,\sigma\}}\mathbf{c}^{\{S\}} &= (e_{s^{\{S\}}}^T\otimes b^{\{F\},T})\left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\otimes A^{\{F\}}c^{\{F\}\times k}\right)c^{\{S\}}\\ &= e_{s^{\{S\}}}^T\left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)c^{\{S\}}.\end{aligned}$$ ∎

THEOREM 2.6（四阶条件）。满足定理 2.5 的 *IMEX-MRI-SR* 方法具有四阶精度的条件是：慢基方法具有四阶精度，任意快方法具有 $\max(4, n_\Omega+2)$ 阶精度，且满足以下条件：

$$e_{s^{\{S\}}}^T \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+3)} \right) c^{\{S\}} = \frac{1}{8}, \tag{2.15a}$$

$$e_{s^{\{S\}}}^T \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) C^{\{S\}} c^{\{S\}} = \frac{1}{12}, \tag{2.15b}$$

$$e_{s^{\{S\}}}^T \Gamma C^{\{S\}} \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) c^{\{S\}} = 0, \tag{2.15c}$$

$$e_{s^{\{S\}}}^T \overline{\Omega} C^{\{S\}} \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) c^{\{S\}} = \frac{1}{24}, \tag{2.15d}$$

$$e_{s^{\{S\}}}^T \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \overline{\Omega} c^{\{S\}} = \frac{1}{24}, \tag{2.15e}$$

$$e_{s^{\{S\}}}^T \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \Gamma c^{\{S\}} = 0. \tag{2.15f}$$

证明。 由 [3], 可知，具有此结构的三阶 GARK 方法有 26 个四阶耦合条件；当 $\mathbf{A}^{\{F,E\}} = \mathbf{A}^{\{F,I\}}$ 时，条件进一步减少至 21 个。这些 GARK 耦合条件为：

$$\mathbf{b}^{\{\sigma\},T} \mathbf{C}^{\{S\}} \mathbf{A}^{\{S,F\}} \mathbf{c}^{\{F\}} = \frac{1}{8} \tag{2.16a}$$

$$\mathbf{b}^{\{\sigma\},T} \mathbf{A}^{\{S,\nu\}} \mathbf{A}^{\{S,F\}} \mathbf{c}^{\{F\}} = \frac{1}{24} \tag{2.16b}$$

$$\mathbf{b}^{\{\sigma\},T} \mathbf{A}^{\{S,F\}} \mathbf{C}^{\{F\}} \mathbf{c}^{\{F\}} = \frac{1}{12} \tag{2.16c}$$

$$\mathbf{b}^{\{\sigma\},T} \mathbf{A}^{\{S,F\}} \mathbf{A}^{\{F,F\}} \mathbf{c}^{\{F\}} = \frac{1}{24} \tag{2.16d}$$

$$\mathbf{b}^{\{F\},T} \mathbf{C}^{\{F\}} \mathbf{A}^{\{F,\sigma\}} \mathbf{c}^{\{S\}} = \frac{1}{8} \tag{2.16e}$$

$$\mathbf{b}^{\{F\},T} \mathbf{A}^{\{F,\sigma\}} \mathbf{C}^{\{S\}} \mathbf{c}^{\{S\}} = \frac{1}{12} \tag{2.16f}$$

$$\mathbf{b}^{\{\sigma\},T} \mathbf{A}^{\{S,F\}} \mathbf{A}^{\{F,\nu\}} \mathbf{c}^{\{S\}} = \frac{1}{24} \tag{2.16g}$$

$$\mathbf{b}^{\{F\},T} \mathbf{A}^{\{F,F\}} \mathbf{A}^{\{F,\sigma\}} \mathbf{c}^{\{S\}} = \frac{1}{24} \tag{2.16h}$$

$$\mathbf{b}^{\{F\},T} \mathbf{A}^{\{F,\sigma\}} \mathbf{A}^{\{S,\nu\}} \mathbf{c}^{\{S\}} = \frac{1}{24} \tag{2.16i}$$

$$\mathbf{b}^{\{F\},T} \mathbf{A}^{\{F,\sigma\}} \mathbf{A}^{\{S,F\}} \mathbf{c}^{\{F\}} = \frac{1}{24} \tag{2.16j}$$

对于 σ， $\nu \in \{I, E\}$。 $\mathbf{c}^{\{F\}}$ 和 $\mathbf{c}^{\{S\}}$ 分别按（2.14a）和（2.14b）定义。逐一检验条件（2.15）中的各个条件（2.16），即可得到条件（2.15）。

前四个条件（2.16a）-（2.16d）自动成立：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} &= \mathbf{b}^{\{\sigma\},T}\mathbf{C}^{\{S\}}\mathbf{A}^{\{S,F\}}\mathbf{c}^{\{F\}} \\
&= b^{\{\sigma\},T}C^{\{S\}}(C^{\{S\}}\otimes b^{\{F\},T})(c^{\{S\}}\otimes c^{\{F\}}) \\
&= b^{\{\sigma\},T}C^{\{S\}}C^{\{S\}}c^{\{S\}}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}, \\
\frac{1}{24} &= \mathbf{b}^{\{\sigma\},T}\mathbf{A}^{\{S,\nu\}}\mathbf{A}^{\{S,F\}}\mathbf{c}^{\{F\}} \\
&= b^{\{\sigma\},T}A^{\{\nu\}}(C^{\{S\}}\otimes b^{\{F\},T})(c^{\{S\}}\otimes c^{\{F\}}) \\
&= b^{\{\sigma\},T}A^{\{\nu\}}C^{\{S\}}c^{\{S\}}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}, \\
\frac{1}{12} &= \mathbf{b}^{\{\sigma\},T}\mathbf{A}^{\{S,F\}}\mathbf{C}^{\{F\}}\mathbf{c}^{\{F\}} \\
&= b^{\{\sigma\},T}(C^{\{S\}}\otimes b^{\{F\},T})\,\mathrm{diag}(c^{\{S\}}\otimes c^{\{F\}})(c^{\{S\}}\otimes c^{\{F\}}) \\
&= b^{\{\sigma\},T}C^{\{S\}}C^{\{S\}}c^{\{S\}}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}, \\
\frac{1}{24} &= \mathbf{b}^{\{\sigma\},T}\mathbf{A}^{\{S,F\}}\mathbf{A}^{\{F,F\}}\mathbf{c}^{\{F\}} \\
&= b^{\{\sigma\},T}(C^{\{S\}}\otimes b^{\{F\},T})(C^{\{S\}}\otimes A^{\{F\}})(c^{\{S\}}\otimes c^{\{F\}}) \\
&= b^{\{\sigma\},T}C^{\{S\}}C^{\{S\}}c^{\{S\}}\frac{1}{6} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

条件 (2.16e) 不会自动满足，且可简化为 (2.15a)：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} &= \mathbf{b}^{\{F\},T}\mathbf{C}^{\{F\}}\mathbf{A}^{\{F,\sigma\}}\mathbf{c}^{\{S\}} \\
&= (e_{s^{\{S\}}}\otimes b^{\{F\}})^T\,\mathrm{diag}(c^{\{S\}}\otimes c^{\{F\}})\left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\otimes A^{\{F\}}c^{\{F\}\times k}\right)c^{\{S\}} \\
&= e_{s^{\{S\}}}^T\left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\frac{1}{(k+1)(k+3)}\right)c^{\{S\}}.
\end{aligned}$$

条件 (2.16f) 不会自动满足，且可简化为 (2.15b)。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} &= \mathbf{b}^{\{F\},T}\mathbf{A}^{\{F,\sigma\}}\mathbf{C}^{\{S\}}\mathbf{c}^{\{S\}} \\
&= (e_{s^{\{S\}}}\otimes b^{\{F\}})^T\left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\otimes A^{\{F\}}c^{\{F\}\times k}\right)C^{\{S\}}c^{\{S\}} \\
&= e_{s^{\{S\}}}^T\left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)C^{\{S\}}c^{\{S\}}.
\end{aligned}$$

条件（2.16g）不会自动满足，并且在 $\sigma = I$、E 时分别化简为（2.15c）和（2.15d），且两个条件会同时强制执行，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{24} &= \mathbf{b}^{\{\sigma\},T}\mathbf{A}^{\{S,F\}}\mathbf{A}^{\{F,\nu\}}\mathbf{c}^{\{S\}} \\
&= b^{\{\sigma\},T}(C^{\{S\}}\otimes b^{\{F\}})\left(\sum_{k=0}^{n_\Omega-1}\Omega^{\{k\}}\otimes A^{\{F\}}c^{\{F\}\times k}\right)c^{\{S\}}
\end{aligned}$$

$$= b^{\{\sigma\},T} C^{\{S\}} \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) c^{\{S\}}.$$

条件（2.16h）不会自动满足，但可化简为（2.12）减去（2.15a），

$$\begin{aligned}
\frac{1}{24} &= \mathbf{b}^{\{F\},T} \mathbf{A}^{\{F,F\}} \mathbf{A}^{\{F,\sigma\}} \mathbf{c}^{\{S\}} \\
&= (e_{s^{\{S\}}} \otimes b^{\{F\}})^T (C^{\{S\}} \otimes A^{\{F\}}) \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \otimes A^{\{F\}} c^{\{F\} \times k} \right) c^{\{S\}} \\
&= e_{s^{\{S\}}}^T \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) c^{\{S\}}.
\end{aligned}$$

条件 (2.16i) 并非自动满足；当 $\nu = I$、E 时，分别化简为 (2.15e) 和 (2.15f)，且两个条件须同时满足：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{24} &= \mathbf{b}^{\{F\},T} \mathbf{A}^{\{F,\sigma\}} \mathbf{A}^{\{S,\nu\}} \mathbf{c}^{\{S\}} \\
&= (e_{s^{\{S\}}} \otimes b^{\{F\}})^T \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \otimes A^{\{F\}} c^{\{F\} \times k} \right) \mathbf{A}^{\{S,\nu\}} c^{\{S\}} \\
&= e_{s^{\{S\}}}^T \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \mathbf{A}^{\{S,\nu\}} c^{\{S\}}.
\end{aligned}$$

最后，条件 (2.16j) 化简后与条件 (2.15b) 相同，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{24} &= \mathbf{b}^{\{F\},T} \mathbf{A}^{\{F,\sigma\}} \mathbf{A}^{\{S,F\}} \mathbf{c}^{\{F\}} \\
&= (e_{s^{\{S\}}} \otimes b^{\{F\}}) \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \otimes A^{\{F\}} c^{\{F\} \times k} \right) (C^{\{S\}} \otimes b^{\{F\}})(c^{\{S\}} \otimes c^{\{F\}}) \\
&= e_{s^{\{S\}}}^T \left(\sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \Omega^{\{k\}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) C^{\{S\}} c^{\{S\}} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

∎

THEOREM 2.7（达到三阶精度所需的最小 n_Ω）。三阶精度的 *IMEX-MRI-SR* 方法至少需要 $n_\Omega = 2$。

证明。具有一个 Ω 矩阵 $\Omega^{\{0\}}$ 的 IMEX-MRI-SR 方法满足 $\mathbf{A}^{\{S,E\}} = \Omega = \Omega^{\{0\}}$；根据 FSAL 性质，$\mathbf{b}^{\{E\},T} = e_{s^{\{S\}}}^T \Omega = e_{s^{\{S\}}}^T \Omega^{\{0\}}$。对于阶数为 p 的 IMEX-MRI-SR 方法，我们假设慢显式基方法也满足所有不超过 p 阶的标准龙格–库塔阶条件。因此，具有一个 Ω 的三阶 IMEX-MRI-SR 慢显式基方法满足二阶条件 $b^{\{E\},T} c^{\{S\}} = \frac{1}{2}$，其化简为

$$\frac{1}{2} = \sum_{j=1}^{s^{\{S\}}} \omega_{s^{\{S\}},j}^{\{0\}} c_j^{\{S\}}.$$

然而，三阶 IMEX-MRI-SR 耦合条件（2.12）可简化为

$$\frac{1}{3} = \sum_{j=1}^{s^{\{S\}}} \omega_{s^{\{S\}},j}^{\{0\}} c_j^{\{S\}}.$$

由于这些条件无法同时成立，因此不可能构造仅含一个 Ω 矩阵的三阶 IMEX-MRI-SR 方法。对于 $n_\Omega > 1$，不存在此类互斥条件；在第 4 节中，我们将介绍采用 $n_\Omega = 2$的三阶和四阶方法。□

3. 线性稳定性。 与 [3, 22]，中一样，我们分析 IMEX-MRI-SR 方法应用于线性标量测试问题时的稳定性

$$y'(t) = \lambda^{\{F\}} y + \lambda^{\{E\}} y + \lambda^{\{I\}} y, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1, \tag{3.1}$$

其中 $\lambda^{\{F\}}$，$\lambda^{\{E\}}$，$\lambda^{\{I\}} \in \mathbb{C}^-$。为方便起见，我们还定义 $z^{\{F\}} = H\lambda^{\{F\}}$，$z^{\{E\}} = H\lambda^{\{E\}}$，以及 $z^{\{I\}} = H\lambda^{\{I\}}$。将其应用于（3.1）时，初值问题（1.5b）变为

$$\begin{aligned} v_i'(\theta) &= \lambda^{\{F\}} v_i(\theta) + \frac{1}{c_i^{\{S\}}} \sum_{j=1}^{i-1} \omega_{i,j} \left(\frac{\theta}{c_i^{\{S\}} H} \right) (\lambda^{\{E\}} Y_j^{\{S\}} + \lambda^{\{I\}} Y_j^{\{S\}}) \\ &= \lambda^{\{F\}} v_i(\theta) + \frac{1}{c_i^{\{S\}}} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \omega_{i,j}^{\{k\}} \left(\frac{\theta}{c_i^{\{S\}} H} \right)^k (\lambda^{\{E\}} Y_j^{\{S\}} + \lambda^{\{I\}} Y_j^{\{S\}}) \end{aligned}$$

对于 $i = 2, \ldots\ldots, s^{\{S\}}$，其中 $\theta \in [0, c_i^{\{S\}} H]$，且 $v_i(0) = y_n$。其在 $\theta = c_i^{\{S\}} H$ 时的解为

$$\begin{aligned} v_i(c_i^{\{S\}} H) &= e^{c_i^{\{S\}} z^{\{F\}}} y_n + (z^{\{E\}} + z^{\{I\}}) \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \omega_{i,j}^{\{k\}} \left(\int_0^1 e^{c_i^{\{S\}} z^{\{F\}} (1-t)} t^k \mathrm{d}t \right) Y_j^{\{S\}} \\ &= \varphi_0(c_i^{\{S\}} z^{\{F\}}) y_n + (z^{\{E\}} + z^{\{I\}}) \sum_{j=1}^{i-1} \eta_{i,j}(z^{\{F\}}) Y_j^{\{S\}}. \end{aligned}$$

这里我们按照 [3] 中的定义，将 η 表示为快速特征值 $z^{\{F\}}$ 的函数，

$$\eta_{i,j}(z^{\{F\}}) = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \omega_{i,j}^{\{k\}} \varphi_{k+1}(c_i^{\{S\}} z^{\{F\}}), \tag{3.2}$$

其中，解析函数族 $\{\varphi_k\}$ 由 [22], 给出

$$\varphi_0(z) = e^z, \quad \varphi_k(z) = \int_0^1 e^{z(1-t)} t^{k-1} \mathrm{d}t, \quad k \geq 1.$$

该 i^{th} 稳定性问题的 IMEX-MRI-SR 阶段（3.1）随之变为

$$Y_i^{\{S\}} = \varphi_0(c_i^{\{S\}} z^{\{F\}}) y_n + (z^{\{E\}} + z^{\{I\}}) \sum_{j=1}^{i-1} \eta_{i,j}(z^{\{F\}}) Y_j^{\{S\}} + z^{\{I\}} \sum_{j=1}^{i} \gamma_{i,j} Y_j^{\{S\}}. \tag{3.3}$$

将 $Y = [Y_1^{\{S\}} \ \cdots \ Y_{s^{\{S\}}}^{\{S\}}]^T$拼接起来，并将（3.3）写成矩阵形式，

$$\begin{aligned} Y &= \varphi_0(c^{\{S\}} z^{\{F\}}) y_n + (z^{\{E\}} + z^{\{I\}}) \eta(z^{\{F\}}) Y + z^{\{I\}} \Gamma Y \\ &= \left(I - (z^{\{E\}} + z^{\{I\}}) \eta(z^{\{F\}}) - z^{\{I\}} \Gamma \right)^{-1} \varphi_0(c^{\{S\}} z^{\{F\}}) y_n \end{aligned}$$

其中

$$\eta(z^{\{F\}}) = \sum_{k=0}^{n_\Omega - 1} \mathrm{diag}(\varphi_{k+1}(c^{\{S\}} z^{\{F\}}))\Omega^{\{k\}}.$$

因此，将 IMEX-MRI-SR 方法应用于（3.1）时，其稳定性函数为

$$R(z^{\{F\}}, z^{\{E\}}, z^{\{I\}}) = e_{s^{\{S\}}}^T \left(I - (z^{\{E\}} + z^{\{I\}})\eta(z^{\{F\}}) - z^{\{I\}}\Gamma\right)^{-1} \varphi_0(c^{\{S\}} z^{\{F\}}). \tag{3.4}$$

我们考虑 IMEX-MRI-SR 方法的几种联合稳定性定义。与 IMEX-MRI-GARK 方法一样，我们考虑一个涵盖全部三个 z 的区域，

(3.5)

$$\mathcal{J}_{\alpha,\rho,\beta,\xi} = \{z^{\{E\}} \in \mathbb{C}^- : |R(z^{\{F\}}, z^{\{E\}}, z^{\{I\}})| \le 1,\ \forall z^{\{F\}} \in \mathcal{S}_{\alpha,\rho}^{\{F\}},\ \forall z^{\{I\}} \in \mathcal{S}_{\beta,\xi}^{\{I\}}\},$$

其中 $\mathcal{S}_{\alpha,\ \rho}^{\{\sigma\}} = \{z^{\{\sigma\}} \in \mathbb{C}^- : \ |\arg(z^{\{\sigma\}}) - \pi| \le \alpha, \quad |z^{\{\sigma\}}| \le \rho\}$。我们注意到，这种联合稳定性定义可能过于严格，因为它要求方法的隐式部分和快部分分别满足 A(β) 稳定和 A(α) 稳定，联合稳定区域才可能存在。因此，我们还分别分析 IMEX-MRI-SR 方法的隐式和显式稳定区域，稳定区域定义如下：

$$\mathcal{J}_{\alpha,\rho}^{\{I\}} = \{z^{\{I\}} \in \mathbb{C}^- : |R(z^{\{F\}}, 0, z^{\{I\}})| \le 1,\ \forall z^{\{F\}} \in \mathcal{S}_{\alpha,\rho}^{\{F\}}\}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{J}_{\alpha,\rho}^{\{E\}} = \{z^{\{E\}} \in \mathbb{C}^- : |R(z^{\{F\}}, z^{\{E\}}, 0)| \le 1,\ \forall z^{\{F\}} \in \mathcal{S}_{\alpha,\rho}^{\{F\}}\}. \tag{3.7}$$

这些定义与 ARK 方法的标准稳定性分析更加一致；在标准分析中，显式稳定性和隐式稳定性是分别考察的。

4. 示例方法。 我们介绍三种阶数分别为 2、3 和 4 的 IMEX-MRI-SR 方法，每种方法都包含一个精度低一阶（分别为 1、2 和 3 阶）的嵌入，用于时间误差估计。需要指出的是，我们在设计嵌入系数时考虑了效率，因此计算嵌入解无需在慢时间尺度上额外进行隐式求解（即 $\hat{}\gamma_{s^{\{S\}}} = 0$）。

在给出每种方法的系数时，我们采用以下记号

$$\Omega^{\{k\}} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}^{\{\mathbf{k}\}} \\ \hline \hat{\omega}^{\{k\}} \end{array}\right],\ \Gamma = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\Gamma} \\ \hline \hat{\gamma} \end{array}\right],$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}^{\{\mathbf{k}\}}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是定义主方法的系数矩阵，而 $\hat{}\omega^{\{k\}}$ 和 $\hat{}\gamma$ 是系数嵌入行。

4.1. IMEX-MRI-SR2(1)。 第一种方法为二阶方法，配有一阶嵌入。它有 4 个阶段，$n_\Omega = 1$，每步需要进行 3 次慢非线性求解。系数见附录 A。

为了构造此方法，我们使用主方法的自由系数，最大化由（3.5）定义的稳定区域的大小。我们使用嵌入方法的自由系数，最小化 Prince 和 Dormand 提出的 C统计量 [18]，

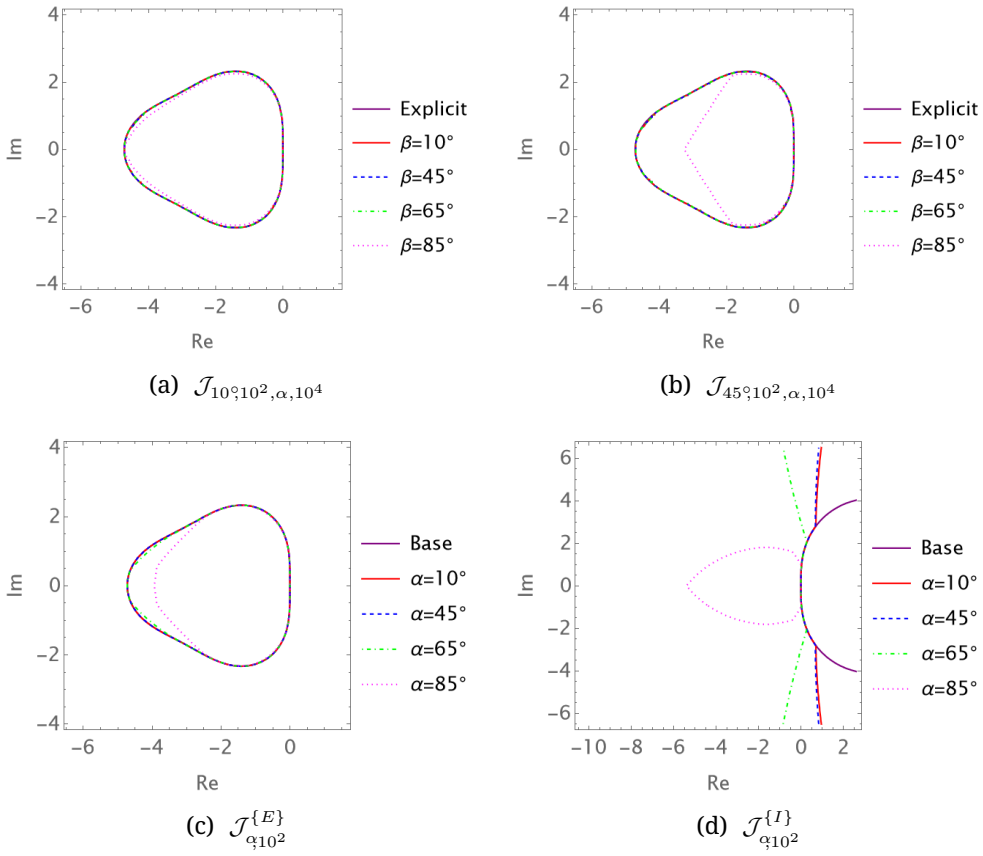
$$C^{(p+1)} = \frac{\|\hat{\tau}^{(p+1)} - \tau^{(p+1)}\|_2}{\|\hat{\tau}^{(p)}\|_2}, \tag{4.1}$$

其中， $\tau^{(p)}$ 是主方法在 p 阶的阶条件残差向量，$\hat{}\tau^{(p)}$ 是嵌入方法在 p 阶的阶条件残差向量，而p 是主方法的阶数（本例中为 $p=2$）。C统计量估计了主方法中未满足的（$p+1$）阶条件所产生的误差，会在多大程度上影响嵌入方法给出的误差估计。

该方法具有大而稳健的稳定区域。图 1a 和 1b 展示了 $\mathcal{J}_{\alpha,10^2,\beta,10^4}$在 $\alpha \in \{10°, 45°\}$ 和不同 β下的结果，以及显式慢基方法的稳定区域。我们看到，对于任意 $z^{\{I\}}$值，当 $\alpha = 10°$ 时，多速率方法的稳定区域与显式慢基方法的稳定区域基本相同。当 α 增至 $45°$ 时，可以看到与 $\beta = 85°$相关的稳定区域有所缩小，而与较小的 β 值相关的区域几乎没有缩小，甚至完全没有缩小。

图 1c 展示了 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\{E\}}{}_{,10^2}$ 在不同 α下的结果。我们看到，当 $z^{\{I\}} = 0$时，稳定区域仍然很大；当 $\alpha = 85°$时，面积仅略有缩小。

图 1c 展示了 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\{I\}}{}_{,10^2}$ 随 α变化的情况。当 $z^{\{E\}} = 0$时，该多速率方法对于 $0° \le \alpha \le 45°$是 A稳定的。当 α 进一步增大到 $65°$时，稳定区域略有缩小，但仍近似为 A(80°)-稳定。当 $\alpha = 85°$时，稳定区域缩小为一个封闭气泡，与图 1c中的区域相似。



(a) $\mathcal{J}_{10°,10^2,\alpha,10^4}$ (b) $\mathcal{J}_{45°,10^2,\alpha,10^4}$

(c) $\mathcal{J}_{\alpha,10^2}^{\{E\}}$ (d) $\mathcal{J}_{\alpha,10^2}^{\{I\}}$

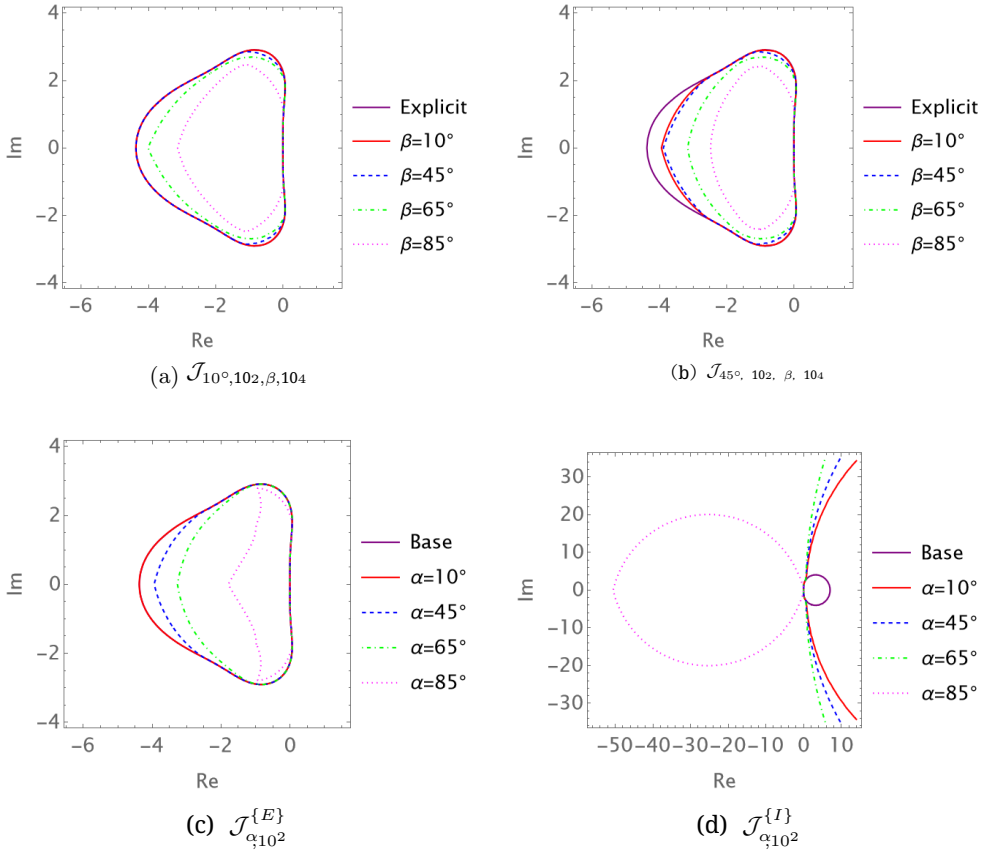
图1：IMEX-MRI-SR2(1) 的联合稳定区域

4.2. IMEX-MRI-SR3(2)。我们的第二种方法是三阶方法，并具有二阶嵌入。它有 5 个阶段， $n_\Omega = 2$，每步需要进行 4 次非线性求解。系数见附录 B。

为了构造该方法，我们采用了第 4.1 节中所述的方法和嵌入的自由系数，此次使用 C统计量（4.1），其中 $p = 3$。

图 2a 和 2b分别展示了较大的联合稳定区域 $\mathcal{J}_{\alpha,\ 10^2,\ \beta,\ 10^4}$，对应于 $\alpha = \{10°, 45°\}$，并同时给出了显式慢基方法的稳定区域。同样，当 $\alpha = 10°$ 且 β较小时，该方法的稳定性基本与显式慢基方法相当。随着 β 的增大，这些稳定区域的面积会缩小。当 α 增至 $45°$ 时，图 2b中的稳定区域相比图 $\alpha = 10°$ 2a中的区域略有缩小。

图2c 和2d 分别展示了 $\mathcal{J}_\alpha^{\{E\}}{}_{,10^2}$ 和 $\mathcal{J}_\alpha^{\{I\}}{}_{,10^2}$ 随 α 变化的情况。我们看到，当 $z^{\{I\}} = 0$ 时，对于较小的 α，稳定区域相当大，但随着 α 增大，区域会缩小；不过，即使对于 $\alpha = 85°$，该区域在虚轴方向上仍保持较大的范围。与二阶方法类似，当 $z^{\{E\}} = 0$ 时，对于大多数 α 值，稳定区域都是 A-稳定的；只有在 $\alpha = 85°$ 时才会失去 A-稳定性，此时区域收缩为一个相当大的封闭气泡。



(a) $\mathcal{J}_{10°,10^2,\beta,10^4}$ (b) $\mathcal{J}_{45°,\ 10^2,\ \beta,\ 10^4}$

(c) $\mathcal{J}^{\{E\}}_{\alpha;10^2}$ (d) $\mathcal{J}^{\{I\}}_{\alpha;10^2}$

图 2：IMEX-MRI-SR3(2) 的联合稳定区域

4.3. IMEX-MRI-SR4(3)。我们的最后一个方法是四阶方法，具有三阶嵌入，有 7 个阶段， $n_\Omega = 2$，每步需要进行 5 次非线性求解。系数见附录 C。

由于同时求解所有 IMEX-MRI-SR 耦合条件和四阶基 ARK 阶数条件时涉及的条件数量较多，我们以现有的 4(3) 阶 ARK 方法 LIRK4 [2]为基础构建此方法。由于该方法并非刚性精确，因此，正如备注 2.2 中所述，我们用 $A^{\{E\}}$ 和 $A^{\{I\}}$矩阵补齐 b 向量，即

$$\mathbf{A}^{\{S,E\}} = \begin{bmatrix} A^{\{E\}} & 0^{\{6\}} \\ b^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{\{S,I\}} = \begin{bmatrix} A^{\{I\}} & 0^{\{6\}} \\ b^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

其中 $0^{\{6\}} \in \mathbb{R}^6$ 全为零。

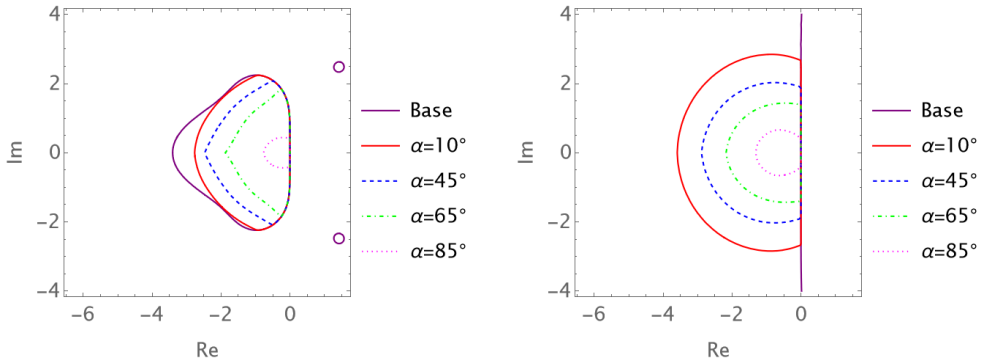
由于 $\mathbf{A}^{\{S,E\}}$ 和 $\mathbf{A}^{\{S,I\}}$ 的最后一行均等于 b^T，根据定义（ Γ 2.7b）和（2.7c），的最后一行等于零。当 $\mathbf{A}^{\{S,I\}}$ 的右下角元素为零时（因此，根据（ Γ 2.7c），的右下角元素也为零），计算最后阶段以及更新后的时间步解无需进行非线性求解。我们认为这会对稳定性产生负面影响，正如图3所示。

与之前一样，我们使用 IMEX-MRI-SR 方法的自由变量来优化稳定性。对于所有尝试选择或优化自由变量取值的方案，该方法由（3.5）定义的联合稳定区域都是空集，因此我们转而优化由（3.7）定义的稳定区域大小。为了优化嵌入方法，我们最小化四阶条件残差的 2-范数 $\|\hat{}\tau^{(4)}\|_2$，以降低嵌入解的整体误差。我们注意到，之前通过最小化 C统计量（4.1）进行优化的方法并不可行，因为我们尚未得到五阶 IMEX-MRI-SR耦合条件。

图 3a 展示了随 α变化的稳定区域 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\{E\}}{}_1$ 。与低阶方法不同，该方法的显式稳定区域始终无法与显式基方法的稳定区域完全吻合。与其他方法类似，随着 α 增大，稳定区域会缩小。

图 3b 展示了稳定区域 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\{I\}}{}_1$ 对应不同的 α。与低阶方法不同，这些稳定区域在 $\alpha \neq 0$ 时并非 A稳定。由于 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\{I\}}{}_\rho$ 对于该方法而言永远不是 A稳定的，因此稳定区域（3.5）始终为空。我们推测，这主要是因为该方法的最后阶段缺少隐式求解。未来的工作中，我们计划进一步研究这一问题，以更好地理解影响 IMEX-MRI-SR 联合稳定性的因素。

5. 将 MERK 方法视为显式 IMEX-MRI-SR 方法。在 [13], 中，Luan 等人通过显式定义节点 $c_i^{\{S\}}$ 和强迫函数 $g_i(\theta)$，构造了精度阶从二阶到五阶不等的 MERK 方法。由于它们与 IMEX-MRI-SR 方法的结构相似，我们可以运用第2节中的理论分析 MERK 方法。由于 MERK 方法始终是显式的，其 IMEX-MRI-SR Γ 矩阵将全部为零。我们回顾一下，MERK 方法是在快函数为线性的假设下定义的， $f^{\{F\}}(t, y) = \mathcal{L}y$，但慢函数可以是任意的。因此，自然可以推测，MERK 方法可能只满足 IMEX-MRI-SR 阶条件的一个子集，而可能无法满足处理 $f^{\{F\}}$中的非线性的那些条件。



(a) $\mathcal{J}^{\{E\}}_{\alpha\in 10^2}$ (b) $\mathcal{J}^{\{I\}}_{\alpha\in 10^2}$

图 3：IMEX-MRI-SR4(3) 的联合稳定区域

5.1. MERK2。将 [13] 中的三阶段二阶精度 MERK2 方法转换为 IMEX-MRI-SR 形式，可得

$$\Omega^{\{0\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_2^{\{S\}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega^{\{1\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/c_2^{\{S\}} & 1/c_2^{\{S\}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

有趣的是，这些系数（以及 $\Gamma = 0$）满足所有三阶及以下的耦合条件，而由 Ω 确定的慢基方法满足所有二阶及以下的条件。因此，我们预期 MERK2 具有二阶精度，即使对于非线性 $f^{\{F\}}$也是如此。我们在第6节涉及非线性 $f^{\{F\}}$的数值测试中验证了这一点，其中我们使用 $c_2^{\{S\}} = \frac{1}{2}$，因为 [13]中未指定该项。

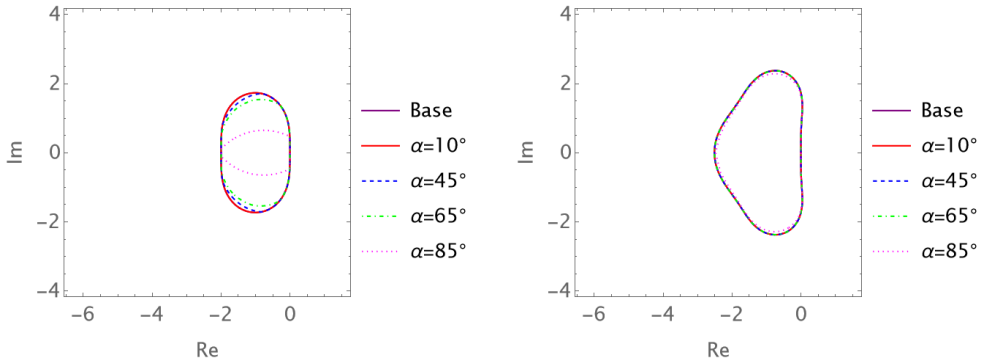
图 4a 展示了 MERK2 的稳定区域。由于该方法是显式方法，我们只绘制 $\mathcal{J}^{\{E\}}_{\alpha\ 10^2}$。值得注意的是，对于所考察的大多数 α 取值，这些区域与基础显式方法的稳定区域几乎一致。

5.2. MERK3。将四阶段、具有三阶精度的 MERK3 从[13]转换为 IMEX-MRI-SR 方法，可得

$$\Omega^{\{0\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2^{\{S\}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega^{\{1\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3c_2^{\{S\}}} & \frac{2}{3c_2^{\{S\}}} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

这些方法满足所有三阶及以下的耦合条件，相应的慢基方法满足所有三阶及以下的条件。因此，与 MERK2 类似，我们预计它在具有非线性 $f^{\{F\}}$的问题上能够达到三阶精度。我们再次在第6 节中使用 $c_2^{\{S\}} = 1/2$进行数值测试，以确认这一结果。

图4b 展示了 MERK3 的稳定区域 $\mathcal{J}^{\{E\}}_{\alpha\ 10^2,}$。值得注意的是，随着 α 增大，这些区域的稳定性并未降低。



(a) MERK2 (b) MERK3

图4： $\mathcal{J}_{\alpha}^{\{E\}}$，$_{10_2}$ MERK2 和 MERK3 的区域

5.3. MERK4。我们可以将 MERK4 表示为一种具有 7 个阶段且 $n_\Omega = 3$ 的 IMEX-MRI-SR 方法。相应的系数见附录 D。

我们发现，只要满足 $c_6^{\{S\}} = (3-4c_5^{\{S\}})/(4-6c_5^{\{S\}})$，该方法就满足四阶以内的所有 IMEX-MRI-SR耦合条件，且其慢基方法满足四阶及以下的所有阶条件。对 $c_6^{\{S\}}$ 的这一限制，在 [13] 中的 $c_2^{\{S\}} = 1/2$、$c_3^{\{S\}} = 1/2$、$c_4^{\{S\}} = 1/3$、$c_5^{\{S\}} = 5/6$和 $c_6^{\{S\}} = 1/3$所给出的取值均满足。因此，与此前一样，我们预计该方法对非线性 $f^{\{F\}}$具有四阶精度，并在第 6节通过数值计算予以验证。有趣的是，MERK4 的联合稳定区域 $\mathcal{J}_{\alpha\ 10^2}^{\{E\}}$、均为空。然而，鉴于该方法在 [13] 中的可靠性以及我们在第 6节得到的结果，我们认为，这些空区域更可能表明联合稳定性的定义存在缺陷，而非 MERK4 本身确实存在问题。

5.4. MERK5。与 MERK5 对应的 IMEX-MRI-SR 方法有 11 个阶段，且 $n_\Omega = 4$。这些系数见附录E。分析此方法时，我们发现，当

$$c_9^{\{S\}} = \frac{12 - 15c_{10}^{\{S\}} - 15c_8^{\{S\}} + 20c_{10}^{\{S\}}c_8^{\{S\}}}{15 - 20c_{10}^{\{S\}} - 20c_8^{\{S\}} + 30c_{10}^{\{S\}}c_8^{\{S\}}}$$

该方法满足所有四阶及以下的 IMEX-MRI-SR耦合条件，且其慢基方法满足所有五阶及以下的阶条件。通过在 [13] 中选择 $c_2^{\{S\}} = 1/2$, $c_3^{\{S\}} = 1/2$, $c_4^{\{S\}} = 1/3$, $c_5^{\{S\}} = 1/2$, $c_6^{\{S\}} = 1/3$, $c_7^{\{S\}} = 1/4$, $c_8^{\{S\}} = 7/10$, $c_9^{\{S\}} = 1/2$ 和 $c_{10}^{\{S\}} = 2/3$, 即可满足此条件，因此我们预计该方法至少具有四阶精度，且不受 $f^{\{F\}}$ 线性性的限制。由于我们没有五阶IMEX-MRI-SR阶条件，因此无法检验 MERK5 是否满足这些条件；不过，第6 节中的数值测试确实表明，对于非线性 $f^{\{F\}}$，该方法具有五阶收敛。与 MERK4 一样，MERK5 的联合稳定区域 $\mathcal{J}_{\alpha}^{\{E\}}$，$_{10_2}$ 为空。

6. 数值结果。本节考察第 4 节中提出的新型 IMEX-MRI-SR 方法以及 MERK 方法的收敛率

应用于具有非线性 $f^{\{F\}}$ 的问题。我们还将 IMEX-MRI-SR 方法与 IMEX-MRI-GARK 方法以及早期的李-特罗特和斯特朗-马尔丘克方法进行效率比较，相关内容见 [3]。

6.1. KPR. Kværnø-Prothero-Robinson问题是一个由多个初值问题耦合而成的系统，广泛用于测试多速率算法，因为它是非线性、非自治的，包含刚性和多速率调节参数，并且具有解析解。我们对 [3], 中的 使用相同的表述和划分方式

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \frac{-3+u^2-\cos(\beta t)}{2u} \\ \frac{-2+u^2-\cos(t)}{2v} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\beta \sin(\beta t)}{2u} \\ \frac{\sin(t)}{2v} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda^{\{F\}} & \frac{1-\varepsilon}{\alpha}(\lambda^{\{F\}} - \lambda^{\{S\}}) \\ -\alpha\varepsilon(\lambda^{\{F\}} - \lambda^{\{S\}}) & \lambda^{\{S\}} \end{bmatrix}$$

参数为 $\lambda^{\{F\}} = -10$、 $\lambda^{\{S\}} = -1$、 $\varepsilon = 0.1$、 $\alpha = 1$ 和$\beta = 20$。该问题的解为

$$u(t) = \sqrt{3 + \cos(\beta t)}, \quad v(t) = \sqrt{2 + \cos(t)}. \tag{6.2}$$

我们将该问题划分为

$$f^{\{E\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sin(t)}{2v} \end{bmatrix}, \quad f^{\{I\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} \frac{-3+u^2-\cos(\beta t)}{2u} \\ \frac{-2+u^2-\cos(t)}{2v} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$
$$f^{\{F\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} \frac{-3+u^2-\cos(\beta t)}{2u} \\ \frac{-2+u^2-\cos(t)}{2v} \end{bmatrix}.$$

在图 5中，我们绘制了当 H 逐渐细化时，MERK方法和隐式-显式方法的收敛情况，其中包括第4节中给出的所有 IMEX-MRI-SR 方法、IMEX-MRI-GARK3(a,b)、IMEX-MRI-GARK4、李-特罗特法和斯特朗-马尔丘克法。可以看到，所有方法均以预期的阶数收敛。值得注意的是，与第5节中的预期一致，尽管 $f^{\{F\}}$ 在（6.3）中是非线性的，MERK方法仍未出现收敛问题。

在这些测试中，我们将多速率方法与同阶的显式内层龙格–库塔方法相结合，唯一的例外是将二阶内层求解器与一阶李-特罗特方法配对。李-特罗特、斯特朗-马尔丘克和 IMEX-MRI-SR2(1) 均采用了Butcher表给出的二阶Heun方法

0 0 0 表 1 1 0 。 IMEX-MRI-SR3(2) 和 IMEX-MRI-GARK3(a,b) 方法$1/2 \quad 1/2$

采用了Bogacki和Shampine提出的三阶方法 [1]。IMEX-MRI-SR4(3) 和 IMEX-MRI-GARK4 方法采用了Zonneveld提出的四阶方法 [27]。

我们在时间区间内 10 个等间距点处测量误差。图例括号中列出了每种方法的估计收敛率，该收敛率通过对 log(Max Error) 与 log(H) 进行最小二乘拟合得到。对于 MERK 收敛性测试，我们使用了$H = \pi/2^k$, $k = 2, ...,9$；对于隐式-显式方法收敛性测试，我们使用了$H = \pi/2^k$, $k = 4, ...,11$。所有测试均使用快速时间步长 $h = H/10$。

隐式-显式方法在进行隐式求解时，使用标准的牛顿-拉夫森方法和带状线性求解器。

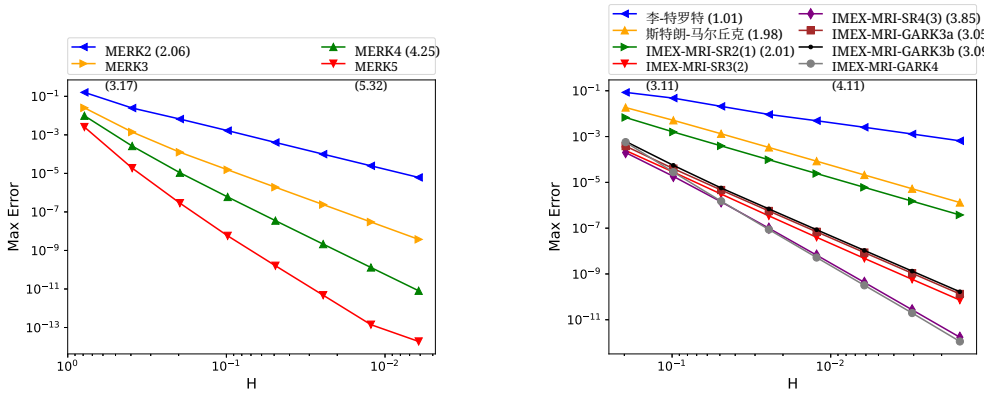


图 5：采用分区（6.1）时，KPR 测试问题（6.3）的收敛情况：左图为 MERK方法，右图为隐式-显式方法。所有方法均以预期的理论收敛率收敛（括号内为实测收敛率），包括采用给定非线性快速分区的 MERK方法。

6.2. 刚性布鲁塞尔振子。 刚性 Brusselator 问题是一个非线性偏微分方程的对流-反应系统。它是对标准布鲁塞尔振子的改进 [7]，我们沿用 [3], 中的相同公式和分区：

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha_u u_{xx} + \rho_u u_x + r_u(a - (w-1)u + u^2 v), \\ v_t &= \alpha_v v_{xx} + \rho_v v_x + r_v(wu - u^2 v), \\ w_t &= \alpha_w w_{xx} + \rho_w w_x + r_w(\frac{b-w}{\varepsilon} - wu), \end{aligned}$$

对于 $t \in [0,3]$ 和 $x \in [0,1]$，采用定常边界条件

$$u_t(t,0) = u_t(t,1) = v_t(t,0) = v_t(t,1) = w_t(t,0) = w_t(t,1),$$

以及初始条件

$$\begin{aligned} u(0,x) &= a + 0.1\sin(\pi x), \\ v(0,x) &= b/a + 0.1\sin(\pi x), \\ w(0,x) &= b + 0.1\sin(\pi x). \end{aligned}$$

我们将问题分区为

$$f^{\{I\}} = \begin{bmatrix} \alpha_u u_{xx} \\ \alpha_v v_{xx} \\ \alpha_w w_{xx} \end{bmatrix}, \quad f^{\{E\}} = \begin{bmatrix} \rho_u u_x \\ \rho_v v_x \\ \rho_w w_x \end{bmatrix}, \quad f^{\{F\}} = \begin{bmatrix} r_u(a - (w-1)u + u^2 v) \\ r_v(wu - u^2 v) \\ r_w(\frac{b-w}{\varepsilon} - wu) \end{bmatrix},$$

并对所有空间导数算子采用二阶中心差分近似。该问题没有解析解，因此我们使用 MATLAB 的 *ode15s*，并采用严格的容差 $AbsTol = 10^{-14}$ 和 $RelTol = 2.5 \times 10^{-14}$ 生成参考解。

6.2.1. 固定时间步。在本节中，我们比较采用固定时间步长时分裂方法、IMEX-MRI-SR 和 IMEX-MRI-GARK 方法的运行时间效率。我们使用相同的固定参数 $\alpha_u = \alpha_v = \alpha_w = 10^{-2}$、$\rho_u = \rho_v = \rho_w = 10^{-3}$、$r_u = r_v = r_w = 1$、$a = 0.6$、$b = 2$ 和 $\varepsilon = 10^{-2}$，以及以下初始条件

$$u(0) = a + 0.1\sin(\pi x),\ v(0) = b/a + 0.1\sin(\pi x),\ w(0) = b + 0.1\sin(\pi x),$$

与 [3]中的 201 和 801 个网格点相同。所有方法均使用快速时间步长 $h = H/10$，并且所有方法使用的内部方法和隐式代数求解器均与第 6.1 节相同。

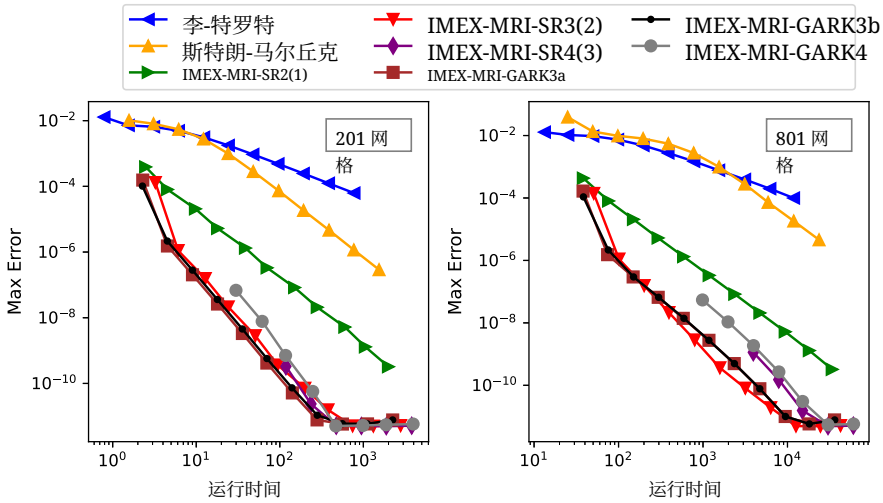


图 6：使用 201 个网格点（左）和 801 个网格点（右）求解刚性 Brusselator 问题的效率。在误差趋于误差下限之前，估计得到的最小二乘收敛率分别为 (0.76,1.59,2.00,3.09,3.00,3.36,3.25,3.41) 和 (0.72,1.24,2.01,2.90,1.90,2.71,2.69,2.42)，对应于 201 网格和 801 网格；方法依次为李 - 特罗特、斯特朗-马尔丘克、IMEX-MRI-SR2(1)、IMEX-MRI-SR3(2)、IMEX-MRI-SR4(3)、IMEX-MRI-GARK3a、IMEX-MRI-GARK3b 和 IMEX-MRI-GARK4。

在图6 中，我们绘出了时间区间内十个等间距点上的最大解误差，所用步长为 $H = 0.1\cdot 2^{-k}$，$k = 0$，.....，10。两种分裂方法和两种四阶方法都出现了显著的阶数降低。其中，IMEX-MRI-SR4(3) 受到的影响最大：在 201 网格上精度阶数整整降低一阶，在 801 网格上则降低两阶。二阶和三阶的 IMEX-MRI-SR 及 IMEX-MRI-GARK 方法在 201 网格上均达到预期阶数。三阶精度方法在 801 网格上仅出现轻微的阶数降低，而 IMEX-MRI-SR2(1) 则保持在预期阶数。所有方法的误差都呈现约为 10^{-11}的误差下限，这很可能是由参考解的精度所致。

该问题的刚性凸显了四阶方法 IMEX-MRI-SR4(3) 和 IMEX-MRI-GARK4 的稳定性局限，这一点已在[3]中观察到。对于 201 网格，当步长大于 $1/320$ 和 $1/80$ 时，IMEX-MRI-SR4(3) 和 IMEX-MRI-GARK4 分别不稳定。对于 801 网格，IMEX-MRI-

当步长大于 $1/640$ 和$1/160$时，SR4(3) 和 IMEX-MRI-GARK4 分别不稳定。

我们可以看到，IMEX-MRI-SR2(1) 的效率远高于一阶和二阶分裂方法，在运行时间相同的情况下，误差小了两到三个数量级。随着运行时间增加，它的误差持续稳步降低，而分裂方法在步长较大时则会出现误差停滞期。

在这个问题上，三阶和四阶方法的效率往往相近，在运行时间相近时误差也相近。对于 201 网格，以及 801 网格上的部分误差范围，三阶 IMEX-MRI-GARK 方法略占优势；但在 801 网格上，当误差介于约 10^{-7} 和 10^{-11}之间时，IMEX-MRI-SR3(2) 成为效率最高的方法。三阶方法的效率均高于四阶方法；在四阶方法中，IMEX-MRI-SR4(3) 始终略胜 IMEX-MRI-GARK4。

6.2.2. 自适应时间步长。本节比较在自适应时间步长情境下 IMEX-MRI-SR 方法的工作量—精度效率。由于分裂方法和 IMEX-MRI-GARK 方法没有嵌入，因此不将它们纳入这些测试。我们采用 [5] 中推荐参数 $k_1 = 0.42$， $k_2 = 0.44$，以及推荐的快速误差测量策略 LASA-mean。该控制器会调整 H 和 M，使内部时间步长 $h = H/M$ 以类似于标准 I 控制器的方式变化。

我们采用从 [5] 改编的时变参数 $\alpha_u = \alpha_v = \alpha_w = \rho_u = \rho_v = \rho_w = 6 \times 10^{-5}$ +5 $\times 10^{-5}$ cos(πt)、 $r_u = r_v = r_w = 0.6 + 0.5$cos($4\pi t$)，并使用相同的固定参数 $a = 1, b = 3.5, \varepsilon = 10^{-3}$ 和初始条件

$$u(0) = 1.2 + 0.1\sin(\pi x),\ v(0) = 3.1 + 0.1\sin(\pi x),\ w(0) = 3 + 0.1\sin(\pi x),$$

使用 101 个网格点。所有 IMEX-MRI-SR 方法均采用与第6.1节相同的内部方法和隐式代数求解器。

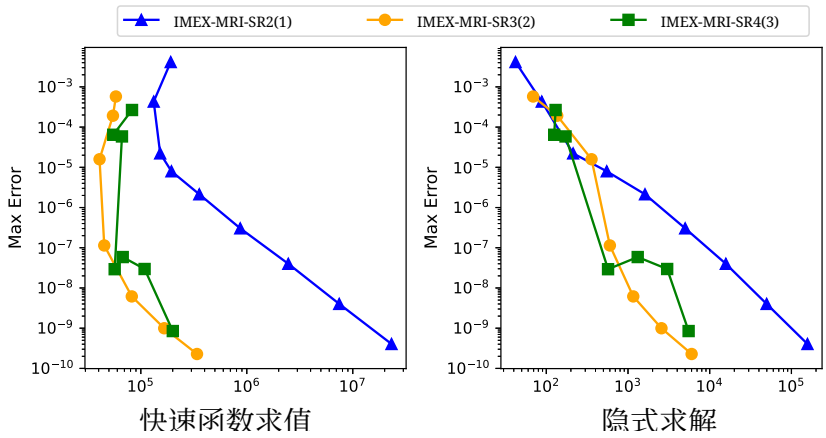


图 7：刚性 Brusselator 问题中，快速函数求值次数（左）和隐式求解总次数（右）随观测到的最大误差的变化。

在图7中，我们绘制了快速函数求值次数和隐式求解次数。这些指标可以很好地反映快、慢时间尺度上的总体成本；横轴为

在时间区间内十个等间距采样点上观测到的最大解误差。运行时采用的控制器容差值为 $\text{TOL} = 10^{-k}$、 $k = 1$，.....，9。为简便起见，我们在测试中使用 $\text{TOL}^{\{S\}} = \text{TOL}^{\{F\}} = \frac{1}{2}\text{TOL}$。我们注意到，IMEX- MRI-SR3(2) 在 $\text{TOL} = 10^{-3}$， 10^{-5} 时未通过测试，而 IMEX-MRI-SR4(3) 在 $\text{TOL} = 10^{-4}$， 10^{-5} 时未通过测试，原因是它们陷入了成功步和失败步之间的振荡。

可以看出，与高阶方法相比，IMEX-MRI-SR2(1) 的效率低得多（快速函数求值次数最多，离左下角最远）；在各种误差水平下，IMEX-MRI-SR3(2) 通常效率最高（离左下角最近）。就快速函数求值次数而言，IMEX-MRI-SR4(3) 通常与 IMEX-MRI-SR3(2) 相当，但有时会“卡住”：根据 TOL 的取值，在不同的快速函数总求值次数下，误差值大致相同。这可能表明 IMEX-MRI-SR4(3) 的嵌入质量较差，导致误差估计不准确；这或许是因为其嵌入系数是通过最小化 $\|\tau^{(4)}\|_2$ 而非 C统计量来确定的。

当误差大于约 10^{-5} 时，这三种方法的隐式求解总次数相近。误差低于该值后，IMEX-MRI-SR3(2) 与 IMEX- MRI-SR4(3) 再次表现相近，而 IMEX-MRI-SR2(1) 则进一步落后。我们还观察到 IMEX-MRI-SR4(3) 会在某些误差值处“卡住”：隐式求解总次数虽有变化，却得到相同的误差。

7. 结论。我们提出了一类新的多速率时间积分方法，它以先前的 IMEX-MRI-GARK 和 MERK 方法为基础，旨在改进各自的若干方面。所提出的 IMEX-MRI-SR 方法具有灵活性，既允许对慢时间尺度进行 IMEX 处理，也允许快速时间尺度采用任何可行的初值问题求解器。这些方法不再要求 IMEX-MRI-GARK 方法满足有序节点要求，因为它们会在每个内部阶段开始时从时间步起点出发，从而大幅简化其阶条件，并使引入嵌入成为可能。IMEX-MRI-SR 方法也可视为对 MERK 方法的扩展，因为这类方法允许慢时间尺度具有隐式性，并允许快速时间尺度具有非线性。

IMEX-MRI-SR 方法的收敛理论借助 GARK 理论 [23]，由此我们建立了适用于一至四阶方法的阶条件。由于这些方法在结构上与 IMEX-MRI-SR 方法相似，我们利用这些新的阶条件分析了此前提出的 MERK 方法，并将其适用范围扩展到线性快分区之外。借助这一分析框架，我们首次从理论上证明，这些 MERK 方法（至少四阶及以下）即使面对非线性快分区问题，也应能保持其高精度阶。

我们按照 [3]，中的方式分析了联合稳定性，也考察了简化的、仅针对隐式或显式情形的联合稳定性。采用这些简化的稳定性定义，我们得以深入了解联合稳定区域失效时会发生什么。

借助这一理论框架，我们提出了三种新的 IMEX-MRI-SR 方法。其中包括一种二阶方法，嵌入一阶方法；以及一种三阶方法，嵌入二阶方法。这两种方法都是从头开始，通过同时求解所有阶条件推导得出的。此外，我们还提出了一种四阶方法，嵌入三阶方法；该方法基于现有的 LIRK4 ARK 方法 [2] 推导而来。

我们通过实验考察了三种新方法和现有 MERK 方法在 KPR 测试问题上的收敛性，发现它们都以

预期的精度阶收敛。我们还给出了刚性 Brusselator 问题上的实验效率结果。该问题是一个非线性对流-反应-扩散偏微分方程组。结果表明，我们的方法可与 IMEX-MRI-GARK 方法相媲美，且在某些情况下甚至优于后者。我们还发现，IMEX-MRI-SR2(1) 的效率远高于同为二阶方法的斯特朗-马尔丘克算子分裂方法。在自适应时间步进的情形下，三阶和四阶 IMEX-MRI-SR 方法为达到给定误差所需的计算量相当，而二阶方法则表现较差。

关于 IMEX-MRI-SR 方法，仍有许多工作有待完成。可以推导更高阶的条件。尽管高阶条件数量较多，推导过程繁琐，但借助克罗内克积恒等式，仍然是可行的。还应进一步分析哪些因素对联合稳定性影响最大，以及是否存在可强制实施的条件，以确保联合稳定区域非空。此外，还应推导更多方法，尤其是一个联合稳定性优于本文所给方法的嵌入式四阶方法。

8. 致谢。作者感谢 Vu Thai Luan 帮助加深了对 MERK 方法的理解。作者还感谢 SMU 研究计算中心提供 Maneframe2 计算集群供本文所报告的所有模拟使用。

参考文献

[1] P. Bogacki and L. Shampine, *A 3(2) pair of Runge–Kutta formulas*,《应用数学快报》, 2 (1989), pp. 321–325, https://doi.org/10.1016/0893-9659(89)90079-7, https:// linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0893965989900797（访问于 2022-02-21）。[2] M. Calvo, J. De Frutos and J. Novo *Linearly implicit Runge–Kutta methods for advection– , , , reaction–diffusion equations* 37 2001 535 549 《应用数值数学》, ( ), pp. – . [3] R. Chinomona and D. R. Reynolds, *Implicit-explicit multirate infinitesimal GARK methods*, SIAM科学计算杂志, 43 (2021), pp. A3082–A3113, https://doi.org/10.1137/20M1354349. [4] D. Estep, V. Ginting, D. Ropp, J. N. Shadid, and S. Tavener, *An a posteriori–a priori analysis of multiscale operator splitting*, SIAM数值分析杂志, 46 (2008), pp. 1116–1146, https://doi.org/10.1137/07068237x, https://doi.org/10.1137/07068237x. [5] A. C. Fish and D. R Reynolds, *Adaptive time step control for multirate infinitesimal methods* 2022 10 48550 2202 10484, 2202 , , https://doi.org/ . /ARXIV. . https://arxiv.org/abs/ . 10484. [6] M. Günther and A. Sandu, *Multirate generalized additive Runge Kutta methods*,《数值数学》, 133 (2016), pp. 497–524, https://doi.org/10.1007/s00211-015-0756-z. [7] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems* 14, 1996 , vol. 施普林格, . [8] M. Hochbruck and A. Ostermann, *Explicit exponential Runge–Kutta methods for semilinear parabolic problems* 43 2005 1069 1090, 10 , SIAM J. Numer. Anal., ( ), pp. – https://doi.org/ . 1137/040611434, https://doi.org/10.1137/040611434. [9] C. A. Kennedy and M. H. Carpenter, *Additive Runge–Kutta schemes for con-vection–diffusion–reaction equations*,《应用数值数学》, 44 (2003), pp. 139–181, https://doi.org/10.1016/s0168-9274(02)00138-1, https://doi.org/10.1016/ s0168-9274(02)00138-1. [10] C. A. Kennedy and M. H. Carpenter, *Diagonally implicit Runge–Kutta methods for stiff ODEs* 146 2019 221 244, 10 1016 ,《应用数值数学》, ( ), pp. – https://doi.org/ . / j.apnum.2019.07.008, https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.07.008. [11] C. A. Kennedy and M. H. Carpenter, *Higher-order additive Runge–Kutta schemes for ordinary differential equations* 136 2019 183 ,《应用数值数学》, ( ), pp. – 205, https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018.10.007, https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018. 10.007. [12] A. N. Langville and W. J. Stewart, *The kronecker product and stochastic automata networks* 167 2004 429 447, ,《计算与应用数学杂志》, ( ), pp. –

https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.10.010, https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.10.010. [13] V. T. Luan, R. Chinomona, and D. R. Reynolds, *A New Class of High-Order Methods for Multirate Differential Equations*, SIAM科学计算杂志, 42 (2020), pp. A1245–A1268, https://doi.org/10.1137/19M125621X. [14] V. T. Luan, R. Chinomona, and D. R. Reynolds, *Multirate exponential Rosenbrock methods*, 2021 2106 05385 , https://arxiv.org/abs/ . . [15] V. T. Luan and A. Ostermann, *Explicit exponential runge–kutta methods of high order for parabolic problems*, 《计算与应用数学杂志》, 256 (2014), pp. 168–179, https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.07.027, https://doi.org/10.1016/j.cam. 2013.07.027. [16] V. T. Luan and A. Ostermann, *Parallel exponential rosenbrock methods*, Computers & Mathematics with Applications, 71 (2016), pp. 1137–1150, https://doi.org/10.1016/j.camwa. 2016.01.020, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.01.020. [17] G. I. Marchuk, *Some application of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems* 13 1968 103 132, , 数学应用, ( ), pp. – http://eudml.org/doc/ 14518. [18] P. Prince and J. Dormand, *High order embedded runge-kutta formulae*, 《计算与应用数学杂志》, 7 (1981), pp. 67–75, https://doi.org/ https://doi.org/10.1016/0771-050X(81)90010-3, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0771050X81900103. [19] S. Roberts, J. Loffeld, A. Sarshar, C. S. Woodward, and A. Sandu, *Implicit multirate gark methods* 87 2021 1 32 , 科学计算杂志, ( ), pp. – . [20] S. Roberts, A. Sarshar, and A. Sandu, *Coupled multirate infinitesimal gark schemes for stiff systems with multiple time scales*, SIAM科学计算杂志, 42 (2020), pp. A1609–A1638. [21] D. L. Ropp and J. N. Shadid, *Stability of operator splitting methods for systems with indefinite operators: reaction-diffusion systems*, 计算物理学杂志, 203 (2005), pp. 449–466, https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.09.004, https://doi.org/10.1016/ j.jcp.2004.09.004. [22] A. Sandu, *A class of multirate infinitesimal GARK methods*, SIAM数值分析杂志, 57 (2019), pp. 2300–2327, https://doi.org/10.1137/18M1205492. [23] A. Sandu and M. Günther, *A generalized-structure approach to additive Runge–Kutta methods* , SIAM数值分析杂志, 53 2015 17 42, 10 1137 ( ), pp. – https://doi.org/ . / 130943224, https://doi.org/10.1137/130943224. [24] A. Sarshar, S. Roberts, and A. Sandu, *Design of High-Order Decoupled Multirate GARK Schemes* 41 2019 816 847, , SIAM科学计算杂志, ( ), pp. A –A https://doi. org/10.1137/18M1182875. [25] G. Strang, *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM数值分析杂志, 5 (1968), pp. 506–517, https://doi.org/10.1137/0705041, https://doi.org/10.1137/0705041. [26] J. Wensch, O. Knoth, and A. Galant, *Multirate infinitesimal step methods for atmospheric flow simulation* 49 2009 449 473 , BIT数值数学, ( ), pp. – . [27] J. Zonneveld, *Automatic integration of ordinary differential equations*, Stichting Mathematisch Centrum. Rekenafdeling, 743 (1963)。

附录 A. IMEX-MRI-SR2(1) 系数。

(A.1)
$$c^{\{S\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{15} \\ 1 \end{bmatrix},\ \Omega^{\{0\}} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{14}{165} & \frac{2}{11} & 0 & 0 \\ -\frac{13}{54} & \frac{137}{270} & \frac{11}{15} & 0 \\ \hline -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \end{array}\right],\ \Gamma = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{23} & \frac{11}{23} & 0 & 0 \\ -\frac{6692}{52371} & -\frac{18355}{52371} & \frac{11}{23} & 0 \\ \frac{11621}{90666} & -\frac{215249}{226665} & \frac{17287}{50370} & \frac{11}{23} \\ \hline -\frac{31}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{4} & 0 \end{array}\right].$$

附录 B. IMEX-MRI-SR3(2) 系数。

$$c^{\{S\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{23}{34} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{17}{15} \\ 1 \end{bmatrix},\ \Omega^{\{0\}} = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{23}{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{71}{70} & -\frac{3}{14} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{124}{1155} & \frac{4}{7} & \frac{5}{11} & 0 & 0 \\ \frac{162181}{187680} & \frac{119}{1380} & \frac{11}{32} & -\frac{5}{17} & 0 \\ \hline \frac{76355}{74834} & -\frac{46}{31} & \frac{67}{34} & -\frac{36}{71} & 0 \end{array}\right],$$

(B.1)
$$\Omega^{\{1\}} = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{14453}{63825} & \frac{14453}{63825} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2101267877}{1206582300} & -\frac{2476735438}{301645575} & -\frac{13575085}{2098404} & 0 & 0 \\ -\frac{762580446799}{588660102960} & \frac{11083240219}{4328383110} & -\frac{211274129}{100368304} & \frac{89562055}{106641323} & 0 \\ \hline -\frac{3732974}{2278035} & \frac{13857574}{2278035} & -\frac{52}{9} & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\Gamma = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2707004}{3127425} & \frac{919904}{3127425} & \frac{4}{7} & 0 & 0 \\ \frac{852879271}{703839675} & -\frac{1575000496}{703839675} & \frac{5}{11} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{43136869}{2019912118} & -\frac{73810600}{1009956059} & -\frac{17653551}{87822266} & -\frac{13993902}{43911133} & \frac{4}{7} \\ \hline -\frac{179}{4140} & \frac{799}{14490} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{12} & 0 \end{array}\right]$$

附录 C. IMEX-MRI-SR4(3) 系数。

$$c^{\{S\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{11}{20} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \Omega^{\{0\}} = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{187}{2340} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{64}{165} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{5} & \frac{6}{11} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1816283}{549120} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{11} & -\frac{1}{6} & -\frac{2561809}{1647360} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{11} & -\frac{2203}{264} & \frac{10825}{792} & -\frac{85}{12} & \frac{841}{396} & 0 \\ \hline \frac{1}{400} & \frac{49}{12} & \frac{43}{6} & -\frac{7}{10} & -\frac{85}{12} & -\frac{2963}{1200} & 0 \end{array}\right]$$

(C.1)
$$\Omega^{\{1\}} = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{4} & \frac{11}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1228}{2925} & -\frac{92}{225} & \frac{808}{975} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2572}{2805} & \frac{167}{255} & \frac{199}{136} & \frac{1797}{1496} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1816283}{274560} & \frac{253}{36} & -\frac{23}{44} & \frac{76}{3} & \frac{20775791}{823680} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{107}{132} & \frac{1289}{88} & \frac{9275}{792} & 0 & -\frac{371}{99} & 0 \\ \hline -\frac{1}{200} & -\frac{137}{24} & -\frac{235}{16} & \frac{1237}{80} & 0 & \frac{2963}{600} & 0 \end{array}\right]$$

$$\Gamma = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{13}{100} & -\frac{7}{30} & -\frac{11}{75} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{85} & -\frac{301}{1360} & -\frac{99}{544} & \frac{45}{544} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{19}{48} & -\frac{75}{16} & \frac{85}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

附录D. MERK4 IMEX-MRI-SR 系数。下面列出了 MERK5 方法的 IMEX-MRI-SR 公式中的非零系数。

(D.1)
$$\Omega_{i,1}^{\{0\}} = c_i^{\{S\}}, \ i = 1, ..., s^{\{S\}}$$

(D.2)

$$\Omega_{3,1}^{\{1\}} = -\Omega_{3,2}^{\{1\}},\ \Omega_{3,2}^{\{1\}} = \frac{c_3^{\{S\}\times 2}}{c_2^{\{S\}}},\ \Omega_{4,1}^{\{1\}} = -\Omega_{4,2}^{\{1\}},\ \Omega_{4,2}^{\{1\}} = \frac{c_4^{\{S\}\times 2}}{c_2^{\{S\}}},$$

$$\Omega_{5,1}^{\{1\}} = -(\Omega_{5,3}^{\{1\}} + \Omega_{5,4}^{\{1\}}),\ \Omega_{5,3}^{\{1\}} = -\frac{c_4^{\{S\}} c_5^{\{S\}\times 2}}{c_3^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})},\ \Omega_{5,4}^{\{1\}} = \frac{c_3^{\{S\}} c_5^{\{S\}\times 2}}{c_4^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})}$$

$$\Omega_{6,1}^{\{1\}} = -(\Omega_{6,3}^{\{1\}} + \Omega_{6,4}^{\{1\}}),\ \Omega_{6,3}^{\{1\}} = -\frac{c_4^{\{S\}} c_6^{\{S\}\times 2}}{c_3^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})},\ \Omega_{6,4}^{\{1\}} = \frac{c_3^{\{S\}} c_6^{\{S\}\times 2}}{c_4^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})}$$

$$\Omega_{7,1}^{\{1\}} = -(\Omega_{7,5}^{\{1\}} + \Omega_{7,6}^{\{1\}}),\ \Omega_{7,5}^{\{1\}} = -\frac{c_6^{\{S\}}}{c_5^{\{S\}}(c_5^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})},\ \Omega_{7,6}^{\{1\}} = \frac{c_5^{\{S\}}}{c_6^{\{S\}}(c_5^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})}$$

(D.3)

$$\Omega_{5,1}^{\{1\}} = -(\Omega_{5,3}^{\{1\}} + \Omega_{5,4}^{\{1\}}),\ \Omega_{5,3}^{\{1\}} = \frac{1}{c_3^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})},\ \Omega_{5,4}^{\{1\}} = -\frac{1}{c_4^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})}$$

$$\Omega_{6,1}^{\{1\}} = -(\Omega_{6,3}^{\{1\}} + \Omega_{6,4}^{\{1\}}),\ \Omega_{6,3}^{\{1\}} = \frac{1}{c_3^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})},\ \Omega_{6,4}^{\{1\}} = -\frac{1}{c_4^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})}$$

$$\Omega_{7,1}^{\{1\}} = -(\Omega_{7,5}^{\{1\}} + \Omega_{7,6}^{\{1\}}),\ \Omega_{7,5}^{\{1\}} = \frac{1}{c_5^{\{S\}}(c_5^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})},\ \Omega_{7,6}^{\{1\}} = -\frac{1}{c_6^{\{S\}}(c_5^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})}$$

该方法在以下条件下可达到一般四阶精度

(D.4)
$$c_6^{\{S\}} = \frac{3 - 4c_5^{\{S\}}}{4 - 6c_5^{\{S\}}}.$$

附录 E. MERK5 IMEX-MRI-SR 系数。
下面列出 MERK5 方法的 IMEX-MRI-SR 形式中非零的系数。

$$\Omega^{\{0\}}_{i,1} = c_i^{\{S\}},\ i = 1, ..., s^{\{S\}} \tag{E.1}$$

(E.2)

$$\begin{aligned}
&\Omega^{\{1\}}_{3,1} = -\Omega^{\{1\}}_{3,2},\ \Omega^{\{1\}}_{3,2} = c_3^{\{S\}\times 2}\alpha_2,\\
&\Omega^{\{1\}}_{4,1} = -\Omega^{\{1\}}_{4,2},\ \Omega^{\{1\}}_{4,2} = c_4^{\{S\}\times 2}\alpha_2,\\
&\Omega^{\{1\}}_{5,1} = -\left(\Omega^{\{1\}}_{5,3} + \Omega^{\{1\}}_{5,4}\right),\ \Omega^{\{1\}}_{5,3} = c_5^{\{S\}\times 2}\alpha_3,\ \Omega^{\{1\}}_{5,4} = c_5^{\{S\}\times 2}\alpha_4\\
&\Omega^{\{1\}}_{6,1} = -\left(\Omega^{\{1\}}_{6,3} + \Omega^{\{1\}}_{6,4}\right),\ \Omega^{\{1\}}_{6,3} = c_6^{\{S\}\times 2}\alpha_3,\ \Omega^{\{1\}}_{6,4} = c_6^{\{S\}\times 2}\alpha_4\\
&\Omega^{\{1\}}_{7,1} = -\left(\Omega^{\{1\}}_{7,3} + \Omega^{\{1\}}_{7,4}\right),\ \Omega^{\{1\}}_{7,3} = c_7^{\{S\}\times 2}\alpha_3,\ \Omega^{\{1\}}_{7,4} = c_7^{\{S\}\times 2}\alpha_4\\
&\Omega^{\{1\}}_{8,1} = -\left(\Omega^{\{1\}}_{8,5} + \Omega^{\{1\}}_{8,6} + \Omega^{\{1\}}_{8,7}\right),\ \Omega^{\{1\}}_{8,5} = c_8^{\{S\}\times 2}\alpha_5,\ \Omega^{\{1\}}_{8,6} = c_8^{\{S\}\times 2}\alpha_6,\ \Omega^{\{1\}}_{8,7} = c_8^{\{S\}\times 2}\alpha_7\\
&\Omega^{\{1\}}_{9,1} = -\left(\Omega^{\{1\}}_{9,5} + \Omega^{\{1\}}_{9,6} + \Omega^{\{1\}}_{9,7}\right),\ \Omega^{\{1\}}_{9,5} = c_9^{\{S\}\times 2}\alpha_5,\ \Omega^{\{1\}}_{9,6} = c_9^{\{S\}\times 2}\alpha_6,\ \Omega^{\{1\}}_{9,7} = c_9^{\{S\}\times 2}\alpha_7\\
&\Omega^{\{1\}}_{10,1} = -\left(\Omega^{\{1\}}_{10,5} + \Omega^{\{1\}}_{10,6} + \Omega^{\{1\}}_{10,7}\right),\ \Omega^{\{1\}}_{10,5} = c_{10}^{\{S\}\times 2}\alpha_5,\ \Omega^{\{1\}}_{10,6} = c_{10}^{\{S\}\times 2}\alpha_6,\ \Omega^{\{1\}}_{10,7} = c_{10}^{\{S\}\times 2}\alpha_7\\
&\Omega^{\{1\}}_{11,1} = -\left(\Omega^{\{1\}}_{11,8} + \Omega^{\{1\}}_{11,9} + \Omega^{\{1\}}_{11,10}\right),\ \Omega^{\{1\}}_{11,8} = \alpha_8,\ \Omega^{\{1\}}_{11,9} = \alpha_9,\ \Omega^{\{1\}}_{11,10} = \alpha_{10}
\end{aligned}$$

其中

(E.3)

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = \frac{1}{c_2^{\{S\}}},\ \alpha_3 = \frac{c_3^{\{S\}}}{c_3^{\{S\}}(c_4^{\{S\}} - c_3^{\{S\}})},\ \alpha_4 = \frac{c_4^{\{S\}}}{c_4^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})}\\
&\alpha_5 = \frac{c_6^{\{S\}}c_7^{\{S\}}}{c_5^{\{S\}}(c_5^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})(c_5^{\{S\}} - c_7^{\{S\}})},\ \alpha_6 = \frac{c_5^{\{S\}}c_7^{\{S\}}}{c_6^{\{S\}}(c_6^{\{S\}} - c_5^{\{S\}})(c_6^{\{S\}} - c_7^{\{S\}})},\\
&\alpha_7 = \frac{c_5^{\{S\}}c_6^{\{S\}}}{c_7^{\{S\}}(c_7^{\{S\}} - c_5^{\{S\}})(c_7^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})},\ \alpha_8 = \frac{c_9^{\{S\}}c_{10}^{\{S\}}}{c_8^{\{S\}}(c_8^{\{S\}} - c_9^{\{S\}})(c_8^{\{S\}} - c_{10}^{\{S\}})}\\
&\alpha_9 = \frac{c_8^{\{S\}}c_{10}^{\{S\}}}{c_9^{\{S\}}(c_9^{\{S\}} - c_8^{\{S\}})(c_9^{\{S\}} - c_{10}^{\{S\}})},\ \alpha_{10} = \frac{c_8^{\{S\}}c_9^{\{S\}}}{c_{10}^{\{S\}}(c_{10}^{\{S\}} - c_8^{\{S\}})(c_{10}^{\{S\}} - c_9^{\{S\}})}
\end{aligned}$$

(E.4)

$$\begin{aligned}
&\Omega^{\{2\}}_{5,1} = -\left(\Omega^{\{2\}}_{5,3} + \Omega^{\{2\}}_{5,4}\right),\ \Omega^{\{2\}}_{5,3} = c_5^{\{S\}\times 2}\beta_3,\ \Omega^{\{2\}}_{5,4} = -c_5^{\{S\}\times 2}\beta_4\\
&\Omega^{\{2\}}_{6,1} = -\left(\Omega^{\{2\}}_{6,3} + \Omega^{\{2\}}_{6,4}\right),\ \Omega^{\{2\}}_{6,3} = c_6^{\{S\}\times 2}\beta_3,\ \Omega^{\{2\}}_{6,4} = -c_6^{\{S\}\times 2}\beta_4\\
&\Omega^{\{2\}}_{7,1} = -\left(\Omega^{\{2\}}_{7,3} + \Omega^{\{2\}}_{7,4}\right),\ \Omega^{\{2\}}_{7,3} = c_7^{\{S\}\times 2}\beta_3,\ \Omega^{\{2\}}_{7,4} = -c_7^{\{S\}\times 2}\beta_4\\
&\Omega^{\{2\}}_{8,1} = -\left(\Omega^{\{2\}}_{8,5} + \Omega^{\{2\}}_{8,6} + \Omega^{\{2\}}_{8,7}\right),\ \Omega^{\{2\}}_{8,5} = -c_8^{\{S\}\times 2}\beta_5,\ \Omega^{\{2\}}_{8,6} = -c_8^{\{S\}\times 2}\beta_6,\ \Omega^{\{2\}}_{8,7} = -c_8^{\{S\}\times 2}\beta_7\\
&\Omega^{\{2\}}_{9,1} = -\left(\Omega^{\{2\}}_{9,5} + \Omega^{\{2\}}_{9,6} + \Omega^{\{2\}}_{9,7}\right),\ \Omega^{\{2\}}_{9,5} = -c_9^{\{S\}\times 2}\beta_5,\ \Omega^{\{2\}}_{9,6} = -c_9^{\{S\}\times 2}\beta_6,\ \Omega^{\{2\}}_{9,7} = -c_9^{\{S\}\times 2}\beta_7\\
&\Omega^{\{2\}}_{10,1} = -\left(\Omega^{\{2\}}_{10,5} + \Omega^{\{2\}}_{10,6} + \Omega^{\{2\}}_{10,7}\right),\ \Omega^{\{2\}}_{10,5} = -c_{10}^{\{S\}\times 2}\beta_5,\ \Omega^{\{2\}}_{10,6} = -c_{10}^{\{S\}\times 2}\beta_6,\ \Omega^{\{2\}}_{10,7} = -c_{10}^{\{S\}\times 2}\beta_7\\
&\Omega^{\{2\}}_{11,1} = -\left(\Omega^{\{2\}}_{11,8} + \Omega^{\{2\}}_{11,9} + \Omega^{\{2\}}_{11,10}\right),\ \Omega^{\{2\}}_{11,8} = \beta_8,\ \Omega^{\{2\}}_{11,9} = \beta_9,\ \Omega^{\{2\}}_{11,10} = \beta_{10}
\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\beta_3 = \frac{1}{c_3^{\{S\}}(c_4^{\{S\}} - c_3^{\{S\}})},\ \beta_4 = \frac{1}{c_4^{\{S\}}(c_3^{\{S\}} - c_4^{\{S\}})} \\
&\beta_5 = \frac{c_6^{\{S\}} + c_7^{\{S\}}}{c_5^{\{S\}}(c_5^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})(c_5^{\{S\}} - c_7^{\{S\}})},\ \beta_6 = \frac{c_5^{\{S\}} + c_7^{\{S\}}}{c_6^{\{S\}}(c_6^{\{S\}} - c_5^{\{S\}})(c_6^{\{S\}} - c_7^{\{S\}})}, \\
&\beta_7 = \frac{c_5^{\{S\}} + c_6^{\{S\}}}{c_7^{\{S\}}(c_7^{\{S\}} - c_5^{\{S\}})(c_7^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})},\ \beta_8 = \frac{c_9^{\{S\}} + c_{10}^{\{S\}}}{c_8^{\{S\}}(c_8^{\{S\}} - c_9^{\{S\}})(c_8^{\{S\}} - c_{10}^{\{S\}})} \\
&\beta_9 = \frac{c_8^{\{S\}} + c_{10}^{\{S\}}}{c_9^{\{S\}}(c_9^{\{S\}} - c_8^{\{S\}})(c_9^{\{S\}} - c_{10}^{\{S\}})},\ \beta_{10} = \frac{c_8^{\{S\}} + c_9^{\{S\}}}{c_{10}^{\{S\}}(c_{10}^{\{S\}} - c_8^{\{S\}})(c_{10}^{\{S\}} - c_9^{\{S\}})}
\end{aligned}
\tag{E.5}
$$

(E.6)

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{8,1}^{\{3\}} = -\left(\Omega_{8,5}^{\{3\}} + \Omega_{8,6}^{\{3\}} + \Omega_{8,7}^{\{3\}}\right),\ \Omega_{8,5}^{\{3\}} = c_8^{\{S\}\times 2}\gamma_5,\ \Omega_{8,6}^{\{3\}} = c_8^{\{S\}\times 2}\gamma_6,\ \Omega_{8,7}^{\{3\}} = c_8^{\{S\}\times 2}\gamma_7 \\
&\Omega_{9,1}^{\{3\}} = -\left(\Omega_{9,5}^{\{3\}} + \Omega_{9,6}^{\{3\}} + \Omega_{9,7}^{\{3\}}\right),\ \Omega_{9,5}^{\{3\}} = c_9^{\{S\}\times 2}\gamma_5,\ \Omega_{9,6}^{\{3\}} = c_9^{\{S\}\times 2}\gamma_6,\ \Omega_{9,7}^{\{3\}} = c_9^{\{S\}\times 2}\gamma_7 \\
&\Omega_{10,1}^{\{3\}} = -\left(\Omega_{10,5}^{\{3\}} + \Omega_{10,6}^{\{3\}} + \Omega_{10,7}^{\{3\}}\right),\ \Omega_{10,5}^{\{3\}} = c_{10}^{\{S\}\times 2}\gamma_5,\ \Omega_{10,6}^{\{3\}} = c_{10}^{\{S\}\times 2}\gamma_6,\ \Omega_{10,7}^{\{3\}} = c_{10}^{\{S\}\times 2}\gamma_7 \\
&\Omega_{11,1}^{\{3\}} = -\left(\Omega_{11,8}^{\{3\}} + \Omega_{11,9}^{\{3\}} + \Omega_{11,10}^{\{3\}}\right),\ \Omega_{11,8}^{\{3\}} = \gamma_8,\ \Omega_{11,9}^{\{3\}} = \gamma_9,\ \Omega_{11,10}^{\{3\}} = \gamma_{10}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\gamma_5 = \frac{1}{c_5^{\{S\}}(c_5^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})(c_5^{\{S\}} - c_7^{\{S\}})},\ \gamma_6 = \frac{1}{c_6^{\{S\}}(c_6^{\{S\}} - c_5^{\{S\}})(c_6^{\{S\}} - c_7^{\{S\}})}, \\
&\gamma_7 = \frac{1}{c_7^{\{S\}}(c_7^{\{S\}} - c_5^{\{S\}})(c_7^{\{S\}} - c_6^{\{S\}})},\ \gamma_8 = \frac{1}{c_8^{\{S\}}(c_8^{\{S\}} - c_9^{\{S\}})(c_8^{\{S\}} - c_{10}^{\{S\}})} \\
&\gamma_9 = \frac{1}{c_9^{\{S\}}(c_9^{\{S\}} - c_8^{\{S\}})(c_9^{\{S\}} - c_{10}^{\{S\}})},\ \gamma_{10} = \frac{1}{c_{10}^{\{S\}}(c_{10}^{\{S\}} - c_8^{\{S\}})(c_{10}^{\{S\}} - c_9^{\{S\}})}
\end{aligned}
\tag{E.7}
$$

该方法满足所有可用的耦合条件（最高至四阶），且其基础方法在满足以下条件时满足最高至五阶的所有阶条件

$$
c_9^{\{S\}} = \frac{12 - 15c_{10}^{\{S\}} - 15c_8^{\{S\}} + 20c_{10}^{\{S\}}c_8^{\{S\}}}{15 - 20c_{10}^{\{S\}} - 20c_8^{\{S\}} + 30c_{10}^{\{S\}}c_8^{\{S\}}}. \tag{E.8}
$$