时空调制超材料中弹性波传播的多重散射公式

Xingbo Pu[a]、Alessandro Marzani[a, *]、Antonio Palermo[a, *]

[a]*Department of Civil, Chemical, Environmental and Materials Engineering, University of Bologna, 40136 Bologna, Italy*

arXiv:2301.00874v1 [physics.app-ph] 2 Jan 2023

摘要

通过利用时间反演对称性破缺，材料参数的时空调制为操控弹性波传播提供了新的可能性。本文提出并验证了一种基于多重散射理论的通用框架，用于模拟时空调制弹性超材料，即配备调制谐振器的弹性波导。该公式能够处理具有通用时空调制轮廓的任意谐振器分布，并计算谐振器区域内外的波场。此外，在适当的假设下，同一框架还可用于预测波导色散关系。我们通过重新考察两个具有代表性的时空调制系统的动力学，展示了该公式的能力，例如：（i）沿超材料梁传播的弯曲波，以及（ii）沿超表面传播的表面声波的非互易传播。由于具有灵活性，所提出的方法有望为新型器件的设计铺平道路，实现弹性能量的单向传输，以用于振动隔离、信号处理和能量采集。

关键词：时空调制、非互易性、超材料、超表面、单向模态转换

1. 引言

过去十年间，对主动（或激活）材料的研究推动了新型动态功能的发现，为振动和波的控制器件设计提供了新思路 [1, 2]。激活材料通常具有按外部能源在空间和时间上调制的本构特性。对此类时空调制材料的研究最初始于光学领域 [3] ，随后不久扩展至声学领域 [4]和弹性力学领域 [1]。在这些时空变化的介质中传播的弹性波尤其值得关注，因为调制能够产生方向偏置，从而打破时间反演对称性。打破互易性能够实现丰富而非常规的现象，包括但不限于单向波传播、绝热能量泵浦 [5, 6], 、频率转换 [7]。这些效应可用于设计新型器件，例如声学整流器 [8], 、环行器 [9], 和拓扑绝缘体[10], ，其应用领域包括声通信、信号处理、能量采集和振动隔离 [11, 12, 13]。

在弹性动力学领域，时空调制可以通过两种策略实现。第一种是在波导中直接引入偏置，对弹性特性和／或质量特性进行调制，从而获得调制后的声子晶体 [14, 15, 16]。第二种方案是在未调制的波导上连接时空调制的机械振子 [17, 18, 19] ，以获得调制后的弹性超材料。这两种方法均已通过一系列实验研究证实在技术上可行，其中

*通讯作者*Email addresses:* alessandro.marzani@unibo.it (Alessandro Marzani), antonio.palermo6@unibo.it (Antonio Palermo)

使用了可编程电气元件对介质／振子进行调制 [20, 21, 22, 7, 23]。不过，与其声子学对应物相比，调制超材料更容易实现，因为只需调制共振元件，且能在亚波长尺度上支持非互易效应。

除了大量关于调制波导的研究实例外， [24, 25], 大多数已开展的研究都依赖数值模拟，通常采用有限元（FE）或有限差分（FD）算法来描述预期的非互易效应。然而，数值模拟始终受计算成本的限制，这在本质上制约了设计与优化研究的发展。因此，开发用于调制介质且计算成本低廉的解析工具十分必要，这不仅有助于降低计算负担，也能加深对非互易效应的理解。目前，时变调制系统的解析公式主要用于预测离散 [26, 27, 28] 和连续介质 [15, 17, 20, 21, 22, 18, 19]的色散关系。

尽管了解色散关系有助于深入理解定向带隙的存在，但只有通过计算有限调制系统中的瞬态或稳态响应，才能发现非互易现象的证据。据我们所知，用于计算波场和透射/反射系数的解析方法目前仅限于一维（1D）问题[29, 30, 20, 16]。此外，目前还没有一个统一框架，能够同时计算一般调制系统的色散关系和波场。

为弥补这一空白，我们在此提出一种广义多重散射公式，用于模拟时空调制谐振器与一般弹性波导耦合时的动态响应。正如实验所观察到的，时空调制谐振器能够产生频率低于和高于激励频率 [20]的谐波散射场。为捕捉这一响应，我们首先采用专门设计的阻抗算子描述振动谐振器与波导运动之间的耦合，并将预期产生的额外谐波纳入考量。随后，我们通过格林函数计算波导中的散射场。最后，我们建立多重散射方案，将入射场与散射场耦合起来，并通过在每个谐振器基座处施加适当的边界条件，计算相应的未知振幅。所提出的公式能够研究任意数量 N 的谐振器及其任意时空调制轮廓，因为所有时空变化的振子都可以单独描述。此外，通过引入适当的假设，同一公式还可用于推导相应的色散方程。

下文将讨论该方法的细节及其建模能力。具体而言，在第2 节中，我们将介绍所提出的通用多重散射公式，用于计算与时空调制谐振器耦合的波导的波场和色散关系。在第3节中，我们将应用该公式对两种情况进行建模：与调制表面谐振器阵列耦合的梁中的弯曲波，以及基底上的瑞利波。对于这两种情况，我们将展示该公式预测非互易导波的能力。最后，我们将在第4节中总结本文并展望未来工作。

2. 理论表述

2.1. 问题陈述

我们提出一种通用分析框架，用于对连接至给定弹性波导的时空调制振子簇进行建模（图 1）。该公式包括以下三个步骤：(i) 定义

时变调制谐振器受基座运动激励时施加于波导上的弹性力；(ii) 利用格林函数描述谐振器在波导中产生的散射波场；(iii) 构建多重散射公式，将波导与任意数量的时变调制谐振器耦合起来。该方法能够计算由时变调制谐振器的集体响应产生的低阶和高阶散射谐波，这些谐波是波导中非互易波动的成因。

首先，我们以最一般的形式介绍这一框架，即考虑一组机械属性遵循相同调制周期 T_m 、且以任意方式排列在波导表面上的有限时变调制振子阵列。随后，我们将说明如何通过引入适当的假设推导波导色散关系，例如，考虑沿弹性支撑规则排列的无限相同谐振器阵列。

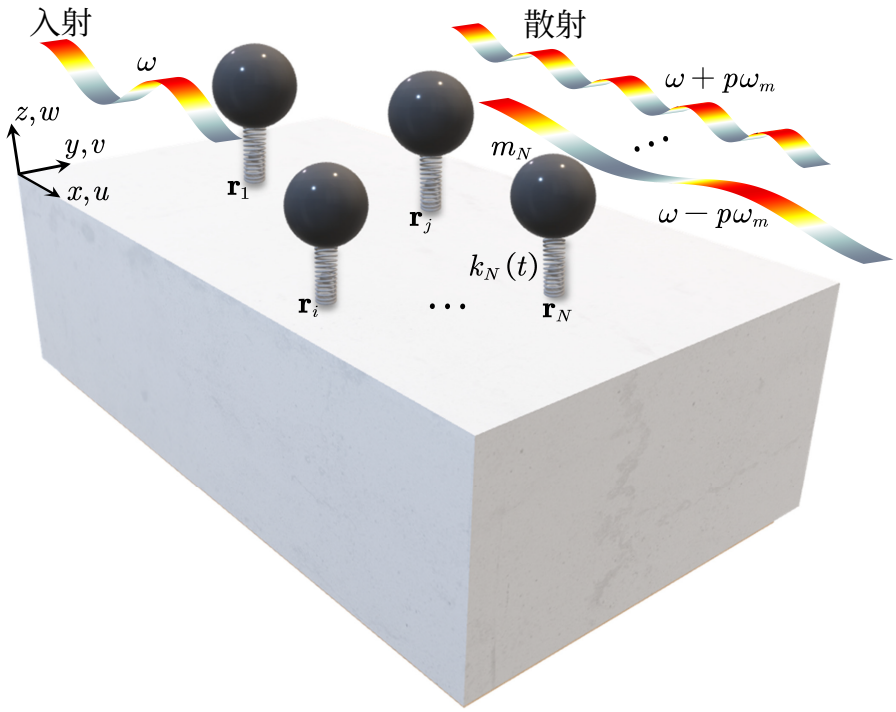

图1. 时空调制谐振器置于弹性波导上的示意图。

2.2 时变调制谐振器的弹性力

回顾一下附着在波导表面位置 n处的第 $\mathbf{r}_n$ 个一般谐振器的动力学（见图 1）。该谐振器的质量为 m_n，阻尼系数为 c_n，时变弹簧刚度为 $k_n(t)$:

$$k_n(t) = k_n(t + T_m), \tag{1}$$

其中 T_m 为调制周期。第 n个谐振器的运动控制方程为 s:

$$m_n \frac{\partial^2 W_n(t)}{\partial t^2} + c_n \left[\frac{\partial W_n(t)}{\partial t} - \frac{\partial w_n(t)}{\partial t} \right] + k_n(t)[W_n(t) - w_n(t)] = 0, \tag{2}$$

其中， $W_n(t) = W(\mathbf{r}_n, t)$ 表示质量的竖向位移，而 $w_n(t) = w(\mathbf{r}_n, t)$ 表示谐振器基座的垂直运动。因此，谐振器施加于波导表面的点力 $F_n(t) = F(\mathbf{r}_n, t)$

为：

$$F_n(t) = -m_n \frac{\partial^2 W_n(t)}{\partial t^2}. \tag{3}$$

由于　　调制刚度 $k_n(t)$ 在式 (1) 中是时间周期性的，因此我们将其表示为傅里叶级数形式：

$$k_n(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}_n^{(j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\omega_m t}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 是虚数单位，$\omega_m = 2\pi/T_m$ 是调制频率，傅里叶系数定义为：

$$\hat{k}_n^{(j)} = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} k_n(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\omega_m t} \, \mathrm{d}t. \tag{5}$$

正如我们将在下一节看到的，由谐波（$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$）入射场激发的波导中的运动，包含时变调制机械谐振器散射产生的若干低阶和高阶谐波。因此，谐振器基座处的垂直运动，即波导表面处的运动，可写为 [29]：

$$w_n(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{w}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega + h\omega_m)t}, \quad h \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

因此，式 (2) 的解设为 [21, 20, 16]：

$$W_n(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{W}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega + h\omega_m)t}, \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

将式 (4)、(6) 和 (7) 代入式 (2)，得到：

$$\begin{aligned} &\sum_{h=-\infty}^{\infty} [-m_n(\omega + h\omega_m)^2 + \mathrm{i}c_n(\omega + h\omega_m)] \hat{W}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}h\omega_m t} + \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}_n^{(j)} \hat{W}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+h)\omega_m t} \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}c_n(\omega + h\omega_m) \hat{w}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}h\omega_m t} + \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}_n^{(j)} \hat{w}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+h)\omega_m t}. \end{aligned} \tag{8}$$

利用谐波函数的正交性，我们将式（8）乘以 $\omega_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\omega_m t}/(2\pi)$，并对其从 $-\pi/\omega_m$ 到 π/ω_m 进行积分，得到：

$$[-m_n(\omega + p\omega_m)^2 + \mathrm{i}c_n(\omega + p\omega_m)] \hat{W}_n^{(p)} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}_n^{(j)} \hat{W}_n^{(p-j)} = \mathrm{i}c_n(\omega + p\omega_m) \hat{w}_n^{(p)} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}_n^{(j)} \hat{w}_n^{(p-j)}, \quad p \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

将阶数从 $-P$ 截断至 P后，式（9）可重组为矩阵形式：

$$\mathbf{M}_n \hat{\mathbf{W}}_n = \mathbf{Q}_n \hat{\mathbf{w}}_n, \tag{10}$$

其中：

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} \hat{m}_n^{(-P)} & \hat{k}_n^{(-1)} & \hat{k}_n^{(-2)} & \cdots & \hat{k}_n^{(-2P)} \\ \hat{k}_n^{(1)} & \hat{m}_n^{(-P+1)} & \hat{k}_n^{(-1)} & \cdots & \hat{k}_n^{(-2P+1)} \\ \hat{k}_n^{(2)} & \hat{k}_n^{(1)} & \hat{m}_n^{(-P+2)} & \cdots & \hat{k}_n^{(-2P+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{k}_n^{(2P)} & \hat{k}_n^{(2P-1)} & \hat{k}_n^{(2P-2)} & \cdots & \hat{m}_n^{(P)} \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} \hat{q}_n^{(-P)} & \hat{k}_n^{(-1)} & \hat{k}_n^{(-2)} & \cdots & \hat{k}_n^{(-2P)} \\ \hat{k}_n^{(1)} & \hat{q}_n^{(-P+1)} & \hat{k}_n^{(-1)} & \cdots & \hat{k}_n^{(-2P+1)} \\ \hat{k}_n^{(2)} & \hat{k}_n^{(1)} & \hat{q}_n^{(-P+2)} & \cdots & \hat{k}_n^{(-2P+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{k}_n^{(2P)} & \hat{k}_n^{(2P-1)} & \hat{k}_n^{(2P-2)} & \cdots & \hat{q}_n^{(P)} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_n = [\hat{W}_n^{(-P)}, \hat{W}_n^{(-P+1)}, \cdots, \hat{W}_n^{(P-1)}, \hat{W}_n^{(P)}]^T, \hat{\boldsymbol{w}}_n = [\hat{w}_n^{(-P)}, \hat{w}_n^{(-P+1)}, \cdots, \hat{w}_n^{(P-1)}, \hat{w}_n^{(P)}]^T, \tag{11}$$

其中 $\hat{m}_n^{(j)} = \hat{k}_n^{(0)} - m_n(\omega + j\omega_m)^2 + \mathrm{i}c_n(\omega + j\omega_m)$，以及 $\hat{q}_n^{(j)} = \hat{k}_n^{(0)} + \mathrm{i}c_n(\omega + j\omega_m)$。

垂直力　　谐振器底部的力因此可将式（7）代入式（3）得到：

$$F_n(t) = -m_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{W}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega + h\omega_m)t} = m_n \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\omega + h\omega_m)^2 \hat{W}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega + h\omega_m)t} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n^{(h)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega + h\omega_m)t}, \quad h \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

其中，从 $h = -P$ 到 $h = P$ 的 $\hat{F}_n^{(h)}$ 系数汇集于向量 $\hat{\mathbf{F}}_n$ 中，表示为：

$$\hat{\mathbf{F}}_n = \mathbf{D}_n \hat{\mathbf{W}}_n = \mathbf{D}_n \mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{Q}_n \hat{\mathbf{w}}_n =: \mathbf{Z}_n \hat{\mathbf{w}}_n, \tag{13}$$

其中：

$$\hat{\mathbf{F}}_n = \begin{bmatrix} \hat{F}_n^{(-P)} \\ \hat{F}_n^{(-P+1)} \\ \vdots \\ \hat{F}_n^{(P)} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} m_n(\omega - P\omega_m)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_n[\omega + (-P+1)\omega_m]^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n(\omega + P\omega_m)^2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

在式（13）中，矩阵 $\mathbf{Z}_n$ 是阻抗算子，用于关联谐振器底座运动与谐振器底座力。可以看出，每个调制谐振器作用于弹性基底的力都包含多个谐波（$\omega + h\omega_m$）。下一节将讨论这些力如何产生相应的多重散射波场。

2.3. 调制谐振器有限簇的弹性波场

现在考虑在给定弹性波导上方任意分布的 N 时空调制谐振器。假设这些谐振器具有相同的刚度调制频率 ω_m。当入射波场$\mathbf{u}_0 = [u_0, v_0, w_0]$ 作用于这些谐振器的底座时，会激发它们振动，进而在波导中产生散射波。按照标准的多重散射描述[31, 32, 33],，波导上一般位置$\mathbf{r}$ 处的总波场$\mathbf{u} = (u, v, w)$可表示为

N 谐振器的入射波场与散射波场之和：

$$u(\mathbf{r},t) = u_0(\mathbf{r},t) + \sum_{n=1}^{N} F_n(t) G_u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n), \tag{15a}$$

$$v(\mathbf{r},t) = v_0(\mathbf{r},t) + \sum_{n=1}^{N} F_n(t) G_v(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n), \tag{15b}$$

$$w(\mathbf{r},t) = w_0(\mathbf{r},t) + \sum_{n=1}^{N} F_n(t) G_w(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n), \tag{15c}$$

其中， G_u、 G_v、 G_w 分别是沿 x、 y、 z方向位移的相关格林函数。与上一节一样，我们将式（15a）、（15b）、（15c）中的位移表示为包含多次谐波的形式：

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{u}^{(h)}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{u}_0^{(h)}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n^{(h)} \hat{G}_u^{(h)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n, \omega+h\omega_m) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t}, \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{16a}$$

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{v}^{(h)}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{v}_0^{(h)}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n^{(h)} \hat{G}_v^{(h)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n, \omega+h\omega_m) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t}, \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{16b}$$

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{w}^{(h)}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{w}_0^{(h)}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n^{(h)} \hat{G}_w^{(h)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n, \omega+h\omega_m) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+h\omega_m)t}, \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{16c}$$

将谐波项从 $h=-P$ 截断至 $h=P$后，式（16a）、（16b）、（16c）可改写为：

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{N} \hat{\mathbf{G}}_u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) \hat{\mathbf{F}}_n, \tag{17a}$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{v}}_0(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{N} \hat{\mathbf{G}}_v(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) \hat{\mathbf{F}}_n, \tag{17b}$$

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{w}}_0(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{N} \hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) \hat{\mathbf{F}}_n, \tag{17c}$$

其中：

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r})=\begin{bmatrix}\hat{\varphi}^{(-P)}(\mathbf{r})\\ \hat{\varphi}^{(-P+1)}(\mathbf{r})\\ \vdots\\ \hat{\varphi}^{(P)}(\mathbf{r})\end{bmatrix},\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0(\mathbf{r})=\begin{bmatrix}\hat{\varphi}_0^{(-P)}(\mathbf{r})\\ \hat{\varphi}_0^{(-P+1)}(\mathbf{r})\\ \vdots\\ \hat{\varphi}_0^{(P)}(\mathbf{r})\end{bmatrix},\ \varphi=u,v,w.$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\varphi}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)=\begin{bmatrix}\hat{G}_{\varphi}^{(-P)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n,\omega-P\omega_m) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \hat{G}_{\varphi}^{(-P+1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n,\omega-P\omega_m+\omega_m) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \hat{G}_{\varphi}^{(P)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n,\omega+P\omega_m)\end{bmatrix},$$

并且，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0$ 仅在入射场 $\varphi_0=u_0,v_0,w_0$中具有非零分量：

$$\hat{\varphi}_0^{(j)}=\begin{cases}\varphi_0 & j=0\\ 0 & j\neq 0\end{cases},\quad j\in[-P,-P+1,...,P] \tag{18}$$

注意，在方程（17a）、（17b）、（17c）中，总位移分量$\hat{\mathbf{u}}$、$\hat{\mathbf{v}}$、$\hat{\mathbf{w}}$ 以及弹性力$\hat{}$系数$\mathbf{F}_n$ 均为未知量。不过，采用经典的多重散射方法，我们可以通过在谐振器底部施加边界条件，求得系数$\hat{\mathbf{F}}_n$ 。具体而言，将方程（13）代入方程（17c），并在谐振器位置$\mathbf{r}_m$处指定其值：

$$\mathbf{Z}_m^{-1}\hat{\mathbf{F}}_m=\hat{\mathbf{w}}_0(\mathbf{r}_m)+\sum_{n=1}^{N}\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_n)\hat{\mathbf{F}}_n,\quad n,m=1,...,N. \tag{19}$$

方程（19）得到一个由 $m=N$ 个方程组成的方程组，我们可以将其改写为矩阵形式：

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}, \tag{20}$$

其中：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1^{-1}-\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{0}) & -\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) & \cdots & -\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_N)\\ -\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) & \mathbf{Z}_2^{-1}-\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{0}) & \cdots & -\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_N)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_1) & -\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_2) & \cdots & \mathbf{Z}_N^{-1}-\hat{\mathbf{G}}_w(\mathbf{0})\end{bmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{F}}_1\\ \hat{\mathbf{F}}_2\\ \vdots\\ \hat{\mathbf{F}}_N\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{w}}_0(\mathbf{r}_1)\\ \hat{\mathbf{w}}_0(\mathbf{r}_2)\\ \vdots\\ \hat{\mathbf{w}}_0(\mathbf{r}_N)\end{bmatrix}. \tag{21}$$

$\hat{}$由此可知，对于给定的入射波场$\hat{\mathbf{w}}_0$，，力幅值$\mathbf{F}_n$ 对应的向量$\mathbf{X}$ **=可通过$^{-1}$计算得到，而波导中的总波场则可利用方程**（15a）、（15b）、（15c）求得。

此外，我们将在下一小节中说明，在适当的假设下，方程（20）可以用于推导时变调制波导的色散关系。

2.4. 色散关系

我们在此考虑一个等间距排列在弹性波导上的无限阵列谐振器（见图2），其晶格间距为 a。我们将研究范围限定为质量相同且弹簧刚度相同的振子

其时空调制呈波状，周期为 $T_m = 2\pi/\omega_m$ ，波长为 $\lambda_m = 2\pi/\kappa_m$，其一般形式如下：

$$k(x,t) = k(x + \lambda_m, t + T_m). \tag{22}$$

与之前一样，我们将 $k(x,\ t)$ 表示为傅里叶级数形式：

$$k(x,t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k}^{(j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\omega_m t - \kappa_m x)}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

其中傅里叶系数计算如下：

$$\hat{k}^{(j)} = \frac{\kappa_m}{2\pi} \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{\kappa_m}}^{\frac{\pi}{\kappa_m}} \int_{\frac{-\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} k(x,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j(\omega_m t - \kappa_m x)} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{24}$$

如 [29, 19], 所述，调制系统的稳定响应要求每个调制幅度 $\hat{k}^{(j)}(j \neq 0)$ 相对于静态刚度 $\hat{k}^{(0)}$足够小。在此假设下，对于所设定的由相同谐振器构成的无限（$N \to \infty$）周期阵列，散射方程（19）在任意位置 x_m 均相同，并满足：

$$\mathbf{Z}^{-1}\hat{\mathbf{F}} = \sum_{n=-N}^{N} \hat{\mathbf{G}}_w(x_n)\hat{\mathbf{F}}(x_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{G}}_w(x_n)\hat{\mathbf{F}}(x_n) \tag{25}$$

其中， x_m 已方便地设为 0。按照有效介质方法 [34, 35, 36], ，即认为晶格间距 a 远小于特征波长，我们将离散点力近似为平均线载荷。因此，通用谐振器基座处的总竖向位移可计算为：

$$\mathbf{Z}^{-1}\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{x_n - a/2}^{x_n + a/2} \hat{\mathbf{G}}_w(x)\hat{\mathbf{F}}(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{G}}_w(x)\hat{\mathbf{F}}(x) \,\mathrm{d}x. \tag{26}$$

由于谐振器特性的时空调制，我们可以将方程（12）中的力表示为：

$$F(x,t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \hat{F}^{(h)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa + h\kappa_m)x + \mathrm{i}(\omega + h\omega_m)t}, \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

将式（27）代入式（26，并截断从 $h = -P$ 到 $h = P$ 的各阶项，可得：

$$
a\mathbf{Z}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{F}^{(-P)}\\ \hat{F}^{(-P+1)}\\ \vdots\\ \hat{F}^{(P)}\end{bmatrix}=
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}\hat{G}_w^{(-P)}(x,\omega-P\omega_m) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \hat{G}_w^{(-P+1)}(x,\omega-P\omega_m+\omega_m) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \hat{G}_w^{(P)}(x,\omega+P\omega_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{F}^{(-P)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa-P\kappa_m)x}\\ \hat{F}^{(-P+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa-P\kappa_m+\kappa_m)x}\\ \vdots\\ \hat{F}^{(P)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa+P\kappa_m)x}\end{bmatrix}\mathrm{d}x. \tag{28}
$$

经过简单的代数运算，可得以下齐次方程组：

$$
\left(a\mathbf{Z}^{-1}-\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{G}}(\kappa-P\kappa_m,\omega-P\omega_m) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tilde{\mathbf{G}}(\kappa-P\kappa_m+\kappa_m,\omega-P\omega_m+\omega_m) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\mathbf{G}}(\kappa+P\kappa_m,\omega+P\omega_m)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\hat{F}^{(-P)}\\ \hat{F}^{(-P+1)}\\ \vdots\\ \hat{F}^{(P)}\end{bmatrix}=\mathbf{0}, \tag{29}
$$

其中 $\tilde{\mathbf{G}}(\kappa+P\kappa_m,\ \omega+P\omega_m)$ 是通过以下方式获得的空间域中 P 阶格林函数 s:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}_w^{(P)}(x,\omega+P\omega_m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa+P\kappa_m)x}\,\mathrm{d}x=\tilde{\mathbf{G}}(\kappa+P\kappa_m,\omega+P\omega_m). \tag{30}
$$

方程（29的非平凡解给出色散关系：

$$
\tilde{\mathcal{C}}(\kappa,\omega):=\left|a\mathbf{Z}^{-1}-\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{G}}(\kappa-P\kappa_m,\omega-P\omega_m) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tilde{\mathbf{G}}(\kappa-P\kappa_m+\kappa_m,\omega-P\omega_m+\omega_m) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\mathbf{G}}(\kappa+P\kappa_m,\omega+P\omega_m)\end{bmatrix}\right|=0. \tag{31}
$$

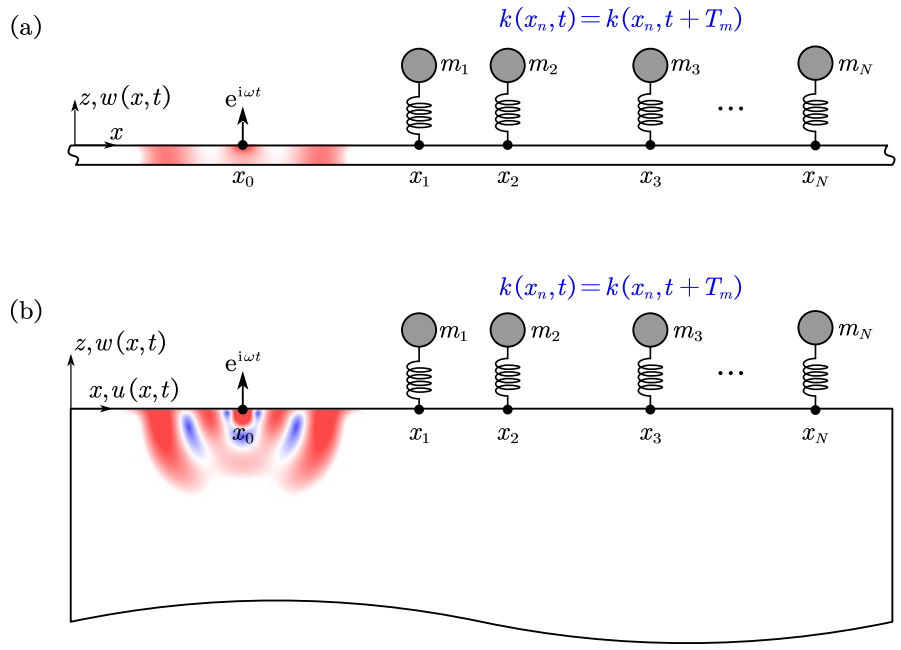

图 2. 波传播示意图　在时空调制的 (a) 超材料梁　和 (b) 超表面中的波传播。

3. 示例与应用

为展示我们所提出方法的潜力，我们考虑两个在先前研究中已被深入讨论的时空调制波导 [17, 20, 18, 19]。首先，我们研究一根与调制谐振器阵列耦合的欧拉梁。对于这一示例，我们将所提出的方法与传递矩阵法（TMM）的结果进行验证。为求完整，我们在 附录 A 中给出了所采用 TMM 的完整推导 [20]。作为第二个示例，我们考虑一个与调制谐振器耦合的二维弹性半空间。对于这一配置，由于不存在闭式解，我们将所得结果与文献 [19]中的有限元仿真结果进行比较。

3.1. 时空调制梁中的非互易弯曲波建模

我们考虑一根配有无阻尼谐振器阵列的欧拉-伯努利梁，见图 2a，其调制方式为波状变化，遵循以下关系 [27, 17, 20, 26]:

$$k(t,x) = k_0 + k_a \cos(\omega_m t - \kappa_m x), \tag{32}$$

其中，k_0 表示静态刚度，k_a 表示调制幅值，ω_m 表示调制角频率，κ_m 表示调制波数。在任意位置 x_n处，调制刚度均为时间周期函数，其非零傅里叶系数为:

$$\hat{k}_n^{(0)} = k_0, \quad \hat{k}_n^{(-1)} = \frac{1}{2}k_a e^{i\kappa_m x_n}, \quad \hat{k}_n^{(1)} = \frac{1}{2}k_a e^{-i\kappa_m x_n}, \tag{33}$$

对于 $|j|>1$，取为 $\hat{k}_n^{(j)}=0$ 。在数值算例中，我们采用文献 [17]，中原先使用的机械参数，即谐振器质量为 $m_0=\rho\mathcal{A}a$，其中 ρ 为梁的质量密度，$\mathcal{A}$ 为梁的横截面积。同样，调制频率设为 $\omega_m = 0.25\omega_0$ ，调制幅度设为 $k_a = 0.2k_0$，其中 ω_0 为谐振器的共振频率，$k_0 = m_0\omega_0^2$ 为未调制刚度；调制波数为 $\kappa_m = 1.25\kappa_0$，其中 $\kappa_0 = \sqrt[4]{k_0/(a\mathcal{D})}$ ，$\mathcal{D}$ 为梁的弯曲刚度。

3.1.1. 色散关系

根据欧拉–伯努利梁理论，在谐点力作用下的第 P 阶控制方程可写为：

$$\mathcal{D}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho\mathcal{A}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\delta\left(x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_P t},\quad P\in\mathbb{Z}. \tag{34}$$

对式（34）沿 x 方向进行傅里叶变换，得到空间域中的 P阶变换格林函数：

$$\tilde{G}(\kappa_P,\omega_P)=\frac{1}{\mathcal{D}\kappa_P^4-\rho\mathcal{A}\omega_P^2}, \tag{35}$$

其中，移频和波数定义如下：

$$\omega_P=\omega+P\omega_m,\quad \kappa_P=\kappa+P\kappa_m,\quad P\in\mathbb{Z}. \tag{36}$$

首先，令 $P=0$ 由式（ Z 13）可得非调制阻抗参数：

$$Z=\frac{m_0\omega_0^2\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{37}$$

将式（35）和式（37）代入式（31），立即得到非调制超材料梁的色散关系：

$$\mathcal{C}(\kappa,\omega):=\mathcal{D}\kappa^4-\left(\rho\mathcal{A}+\frac{m_0}{a}\frac{1}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)\omega^2=0. \tag{38}$$

该色散方程与参考文献 [17, 20] 中得到的方程相同，并且与有限元仿真给出的色散曲线吻合，详情见附录B 。

在存在调制的情况下，当满足相位匹配条件时，预计会出现散射波，即 $\mathcal{C}(\kappa,\ \omega)=\mathcal{C}(\kappa_P,\ \omega_P)$ [27]。例如，图 3a 展示了原始色散曲线（$\mathcal{C}$）和两条移位色散曲线（$\mathcal{C}^{\pm1}$），分别对应 $P=\pm1$。原始曲线与移位曲线的交点满足相位匹配条件，即六个洋红色点，分别位于数对（A）、（B）和（C）处。这些交点的不对称分布表明时间反演对称性遭到破坏，进而导致超材料梁 [20]中的方向相关现象。

现在，我们预测调制超材料梁的色散特性。为此，将式（35）代入式（31），并将波截断至一阶（$P=1$），得到：

$$\tilde{\mathcal{C}}(\kappa,\omega):=\left|a\mathbf{Z}^{-1}-\begin{bmatrix}1/[\mathcal{D}(\kappa-\kappa_m)^4-\rho\mathcal{A}(\omega-\omega_m)^2] & 0 & 0\\ 0 & 1/[\mathcal{D}\kappa^4-\rho\mathcal{A}\omega^2] & 0\\ 0 & 0 & 1/[\mathcal{D}(\kappa+\kappa_m)^4-\rho\mathcal{A}(\omega+\omega_m)^2]\end{bmatrix}\right|=0, \tag{39}$$

阻抗算子为:

$$\mathbf{Z} = m_0 \begin{bmatrix} (\omega-\omega_m)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega+\omega_m)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 - m_0(\omega-\omega_m)^2 & 0.5k_a & 0 \\ 0.5k_a & k_0 - m_0\omega^2 & 0.5k_a \\ 0 & 0.5k_a & k_0 - m_0(\omega+\omega_m)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_0 & 0.5k_a & 0 \\ 0.5k_a & k_0 & 0.5k_a \\ 0 & 0.5k_a & k_0 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

我们指出，式（39）中的耦合色散关系仅在图 3a [28]中上述交点附近成立。因此，我们在每个交叉点周围的 $\pm 0.1\kappa$ 和 $\pm 0.1\omega$ 范围内计算并绘制耦合色散，如图 3b（红色圆形标记）所示。作为对比，我们还在同一图中给出了未调制色散曲线（式（38）的解）及其平移后的曲线。如参考文献 [17],所述，在一对 B 附近不会产生方向性带隙，因为两种模式的群速度均为正。相反，对于一对 A 和 C这样的反向分支，排斥效应可能产生狭窄的方向性带隙，例如 A附近。在这些带隙内，波仅在沿特定方向传播时受到阻碍（该方向由相关波数的符号决定）；相反，沿相反方向传播时则可完全透射 [27]。这种方向性波滤波通常伴随着相位匹配频率处低阶/高阶波的产生，从而导致反射与频率转换并存 [17]。下一节将通过计算波在有限调制超材料梁上传播时的稳态解，展示这些效应的证据。

3.1.2. 稳态解

为验证色散分析所预测的非互易行为，我们利用式（17c）计算有限超材料梁的稳态响应。具体而言，我们希望验证图 A 中成对出现的方向性带隙内的非互易反射/透射3。例如，本研究考虑一个50个谐振器阵列。响应在位置 x_r 和 x_t处记录，随后分别用于计算反射和透射值。在这两种情况下，谐波点源 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 和接收器距最近的振子分别为 $d_s = 600a$ 和 $d_r = 300a$ 。

根据第2节讨论的公式，阻抗算子 $\mathbf{Z}_1$ 至 $\mathbf{Z}_N$ 由式（13）得到，而式（ P 阶格林函数由对式（20）应用傅里叶逆变换得到:

$$\hat{G}_w^{(P)}(x, \omega + P\omega_m) = \frac{-1}{4\mathcal{D}\beta_P^3}(\mathrm{e}^{-\beta_P|x|} + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_P|x|}), \tag{41}$$

其中，弯曲波的 P 阶波数为:

$$\beta_P = \sqrt[4]{\frac{\rho\mathcal{A}(\omega + P\omega_m)^2}{\mathcal{D}}}. \tag{42}$$

将式（41）代入式（20），得到弹性力系数 $\hat{\mathbf{F}}_n$，将其代入式（17c），即可计算梁中的位移分量 $\hat{\mathbf{w}}(x)$ 。

我们首先考察频率为 $\omega = 1.66\omega_0$、向右传播（$\kappa > 0$）的弯曲波，即图 A 3a 中的交点对。相对于入射波归一化的反射系数 $|w_r/w_0|$显示于图 3c 中，其中散射波截断于 $P = \pm 5$ 阶。

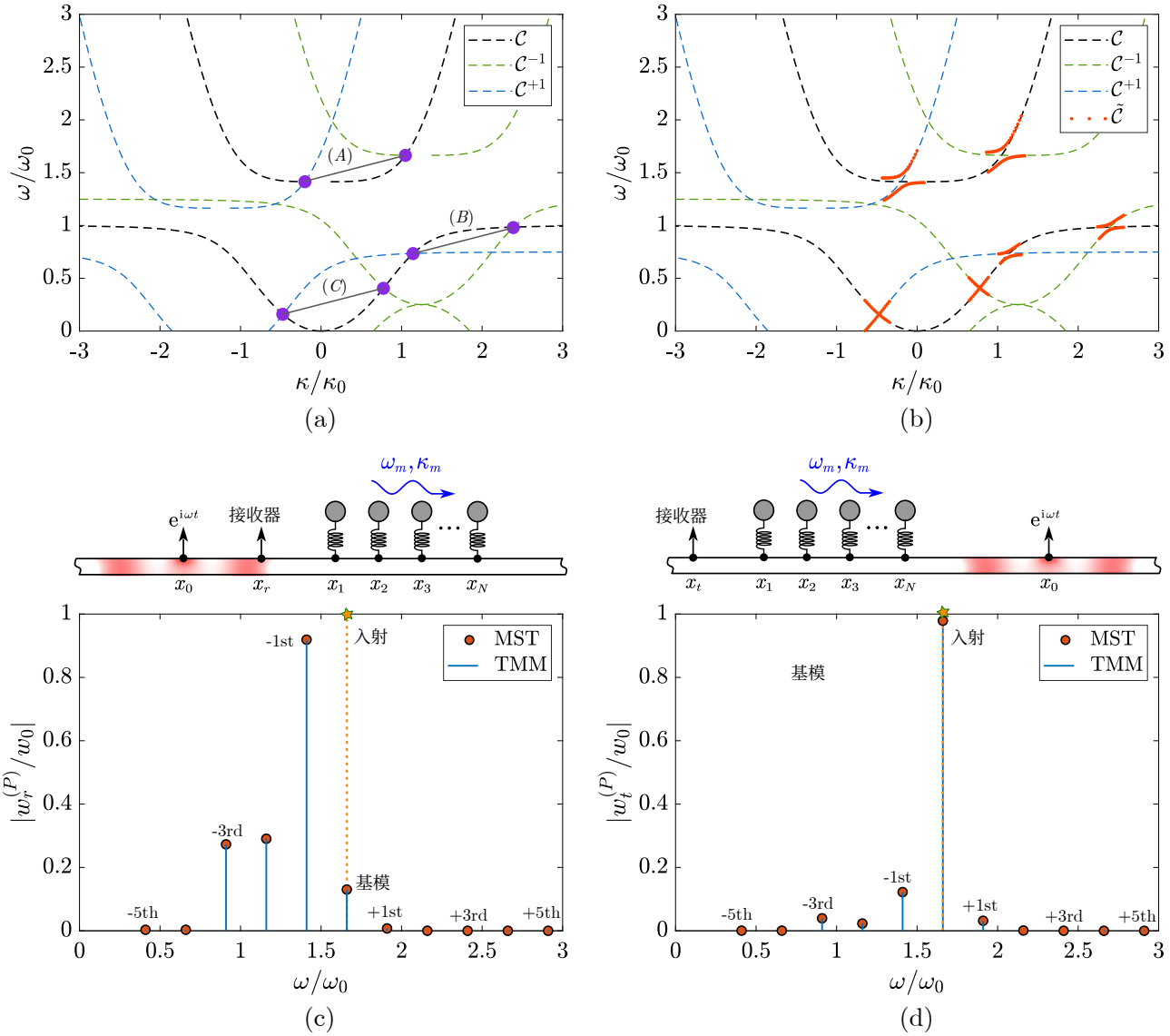

图 3. (a) 非调制超材料梁的色散曲线（黑色虚线）及其分别对应 $P = -1$ 和 $P = 1$ 的平移曲线。(b) 在相位匹配对附近，调制超材料梁的色散曲线（红色圆形标记）。对于 (c) 向右传播和 (d) 向左传播的入射波（星形标记），分别给出了在方向性带隙（对 A）内以 $\omega = 1.66\omega_0$ 传播的弯曲波的归一化反射和透射系数。作为比较，还给出了通过传递矩阵法（TMM）获得的结果（蓝色实线）。

正如预期，在 $\omega = 1.66\omega_0$ 处向右传播的入射波（图3c 中的虚线）会发生强烈反射，反射波包含不同频率成分，其中最大成分位于一阶谐波（$1.66\omega_0 - \omega_m$），而二阶（$1.66\omega_0 - 2\omega_m$）和三阶谐波（$1.66\omega_0 - 3\omega_m$）成分也不可忽略。其他更高阶谐波的振幅可以忽略。相反，频率相同的向左传播波（传播方向与调制方向相反）$\omega = 1.66\omega_0$ 几乎不受干扰地穿过谐振器，如图 $|w_t/w_0|$ 中的归一化透射率3d 所示。为验证我们的方法所作出的预测，我们使用传递矩阵法计算相同的透射系数和反射系数。图3c、d 中以实线标出的结果与我们的解析解高度吻合（有关传递矩阵法的更多细节，见附录 A）。

3.2. 空间-时间调制超表面中的非互易瑞利波传播建模 *ce*

现在，我们考虑瑞利波穿过由调制谐振器组成的簇时的传播。近期已有研究借助有限元数值模拟探讨了这一问题 [18, 19]。我们的目的是展示所提出的解析公式在这一复杂构型中再现非互易色散以及反射/透射系数的能力。

在本例中，我们采用参考文献 [19] 中近期使用的参数：具有 $c_L/c_T = 2$ 的半空间、质量比为 $m_0\omega_0/(\rho a c_T) = 0.15$ 的谐振器、调制频率 $\omega_m/\omega_0 = 0.25$ 和调制波数 $\kappa_m/\kappa_r = 2.5$，其中 $\kappa_r = \omega_0/c_T$。

3.2.1. 色散关系

简要回顾一下二维各向同性弹性半空间在表面受谐波竖向载荷作用时的格林函数。对于这一构型，平衡方程可表述为一个边值问题：

$$c_L^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_T^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \text{for } z < 0, \tag{43a}$$

$$\tau_{zx}(x,0) = 0, \quad \sigma_z(x,0) = \delta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_P t}, \tag{43b}$$

其中，c_L 和 c_T 分别表示纵波（L）和横波（T）的波速，τ_{zx}和 σ_z 分别表示剪切应力和正应力；$\mathbf{u}$ 是由分量 u 和 w构成的位移场；$\delta(x)$是狄拉克δ函数。

类比超材料梁问题，我们沿 x 方向对平衡方程（43a）和（43b）进行傅里叶变换，并得到在 $z = 0$ 处的变换后的 P阶格林函数：

$$\tilde{G}(\kappa_P, \omega_P) = \frac{1}{\rho c_T^4} \frac{\omega_P^2 \sqrt{\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_L^2}}}{4\kappa_P^2 \sqrt{\left(\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2}\right)\left(\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_L^2}\right)} - \left(2\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2}\right)^2}, \tag{44}$$

其中 ρ 为基底的密度，移频 ω_P 和波数 κ_P 定义见式（36）。将式（37）和（44）代入式（31），并令 $P = 0$，即可立即得到色散关系

非调制超表面中存在的瑞利波的关系：

$$\mathcal{C}(\kappa,\omega) := \left(2\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right)^2 - 4\kappa^2\sqrt{\left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right)\left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}\right)} - \frac{m_0\omega^4\sqrt{\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}}}{\rho a c_T^4(\omega^2/\omega_0^2 - 1)} = 0. \tag{45}$$

该色散方程与文献 [35, 36], 中得到的方程完全相同，并且与通过有限元法计算得到的数值色散曲线吻合，见附录B。

与超材料梁的情形一样，我们首先绘制 $P = \pm 1$ 的未调制 $\mathcal{C}(\kappa,\omega)$ 色散曲线，以及平移后的 $\mathcal{C}(\kappa_P,\omega_P)$ 色散曲线，如图 4a 所示。同样，当满足 $\mathcal{C}(\kappa,\omega) = \mathcal{C}(\kappa_P,\omega_P)$ 时，会出现相位匹配点（例如， A to E 对）。我们利用式（31）预测这些点附近调制超表面的色散特性。为此，将式（44）代入式（31），并采用根据式（38）计算得到的阻抗算子 $\mathbf{Z}$，将展开截断至一阶。

我们在图 $\pm 0.1\kappa$ 和 $\pm 0.1\omega$ 各交点附近的范围内绘制调制色散关系，见图 4b（红色圆形标记）。例如，反向分支的交点会产生锁定对 C，从而形成方向性带隙。在方向性带隙内，波数-频率落在 $(1.21\kappa_r, 1.185\omega_0)$ 范围内传播的谐波，会被超表面反射为处于相位匹配频率-波数对 $(1.21\kappa_r - \kappa_m, 1.185\omega_0 - \omega_m)$ 上的传播模态。相反，在相同频率 $1.185\omega_0$下沿相反方向传播的波不会发生这种转换反射，这证实了时间反演对称性破缺导致的非互易性 [19]。下一节将通过计算瑞利波沿有限长度调制超表面传播时的稳态解，再次清晰地验证色散曲线所预测的这些效应。

3.2.2. 稳态解

为展示上述讨论的非互易瑞利波传播，我们使用公式（17c）计算有限超表面的稳态响应。阻抗算子 $\mathbf{Z}_1$ 至 $\mathbf{Z}_N$ 由公式（13）计算，而公式（20）中的格林函数则通过对公式（44）应用傅里叶逆变换获得，从而得到 P阶波场（格林函数），其位置为 $z = 0$:

$$\hat{G}_w^{(P)}(x,0,\omega_P) = \frac{1}{2\pi\rho c_T^4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_P^2\sqrt{\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_L^2}}}{4\kappa_P^2\sqrt{\left(\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2}\right)\left(\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_L^2}\right)} - \left(2\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2}\right)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa_P x}\,\mathrm{d}\kappa_P. \tag{46}$$

我们注意到，与欧拉梁的格林函数（公式 41）不同，二维弹性基底的格林函数在原点处发散（公式 46）。为避免收敛问题，我们为每个谐振器引入长度为 ℓ_s的小占地尺寸，使得相应的格林函数为 [33]:

$$\hat{G}_w^{(P)}(x,z,\omega_P) = \frac{1}{\pi\rho c_T^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\kappa_P\ell_s/2)}{\kappa_P} \frac{2\kappa_P^2\beta_L\mathrm{e}^{\beta_T z} - \beta_L(2\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2})\mathrm{e}^{\beta_L z}}{4\kappa_P^2\beta_L\beta_T - \left(2\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2}\right)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa_P x}\,\mathrm{d}\kappa_P, \tag{47a}$$

对于垂直位移分量和

$$\hat{G}_u^{(P)}(x,z,\omega_P) = \frac{\mathrm{i}}{\pi\rho c_T^2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\kappa_P\ell_s/2) \frac{2\beta_L\beta_T\mathrm{e}^{\beta_T z} - (2\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2})\mathrm{e}^{\beta_L z}}{4\kappa_P^2\beta_L\beta_T - \left(2\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2}\right)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa_P x}\,\mathrm{d}\kappa_P, \tag{47b}$$

对于水平方向的情况，其中：

$$\beta_L = \sqrt{\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_L^2}}, \quad \beta_T = \sqrt{\kappa_P^2 - \frac{\omega_P^2}{c_T^2}}. \tag{48}$$

将式（47a）代入式（20），得到弹性力系数 $\hat{\mathbf{F}}_n$，并将其用于式（17a）、（17c）来计算基底中的波场 $\hat{\mathbf{u}}(x,\ z)$，$\hat{\mathbf{w}}(x,\ z)$。

以本例为例，我们计算基底表面上位置（x_r，0）和（x_t，0）处的稳态响应，考虑由 100 个谐振器组成的阵列，其占地宽度为 $\ell_s = a/20$，其中谐波点源和接收器距最近谐振器分别为 $d_s = 600a$ 和 $d_r = 300a$。对于在 $\kappa > 0$处向右传播（ $\omega = 1.185\omega_0$ ）的入射瑞利波（虚线），反射场如图 4c 所示，证实在耦合频率 $\omega = 1.185\omega_0 - \omega_m$处发生了后向散射。相反，在相同频率 $\kappa < 0$处向左传播（ $\omega = 1.185\omega_0$ ）的入射瑞利波（虚线）在传播过程中没有发生反射或频率转换现象（见图 4d）。

现在，我们采用有限元法来验证解析解。为此，我们使用商用有限元软件（COMSOL Multiphysics）建立一个二维平面应变模型。数值模型的详细信息见附录 C。具体而言，我们计算系统在中心频率为 $\omega = 1.185\omega_0$ 的竖向音调猝发形力作用下的瞬态响应，并分析垂直位移场 w（见图 4中的插图）。接收器处记录的时域数据经傅里叶变换（FFT）得到的相应频谱（实线）如图 4c、d 所示。可以看出，数值结果与解析解吻合。

最后，我们考察图中“回避交叉对”（两个同向分支之间的交点）处的稳态响应 [19] E ， 4，此处我们预期瑞利波会透射，并从一个谐波转换为另一个谐波 [18, 19]。为了验证这种转换，我们采用相同的模型（见图5），并以频率为 $\omega = 0.734\omega_0$的右行入射瑞利波激励该模型。解析解和有限元模型得到的结果汇总于图5b。如预期，调制超表面能够将入射波（$\omega = 0.734\omega_0$）转换为频率成分不同的透射波，例如频率为 $\omega = 0.734\omega_0 + \omega_m$的相位匹配的一阶谐波。

为了更好地观察这一效应，我们利用方程（17a）、（17c）、~~（47a）和（47b）~~，在区域 $x = [550, 750]a$, $z = [-150, 0]a$内计算总波场 $\sqrt{\Re(u)^2 + \Re(w)^2}$, 。图5c所示的总波场可根据方程（17a）、（17c）分解为 $\omega = 0.734\omega_0$处的入射场（图5d）以及散射波场： $\omega = 0.734\omega_0$ 处的基模（图5e）和 $\omega = 0.734\omega_0 + \omega_m$ 处的一阶谐波（图5f）。两种散射场均呈现明显的不对称性：右侧的振幅大于左侧，这是调制超表面回避交叉对处前向散射行为的显著特征。

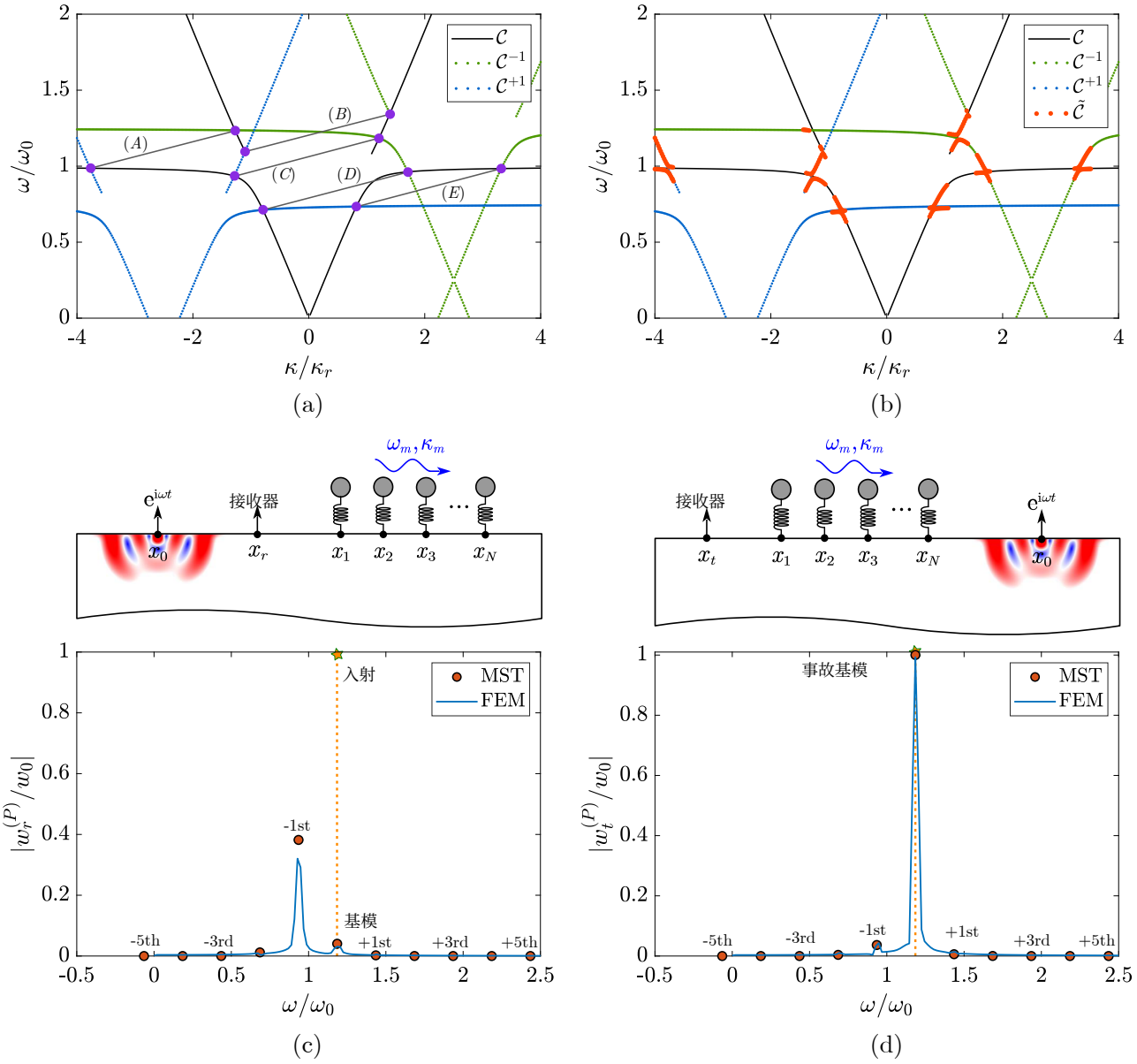

图 4. 超表面的解析建模。（a）非调制超表面的色散关系（黑色实线）及其分别对应于 $P=-1$ 和 $P=1$ 的平移类比。（b）调制超表面在相位匹配对附近的色散关系（圆形标记）。在窄方向性带隙内 $\omega=1.185\omega_0$ 处（相位匹配对 C），瑞利波传播的稳态解分别对应于（c）向右传播和（d）向左传播的入射波（星形标记）。

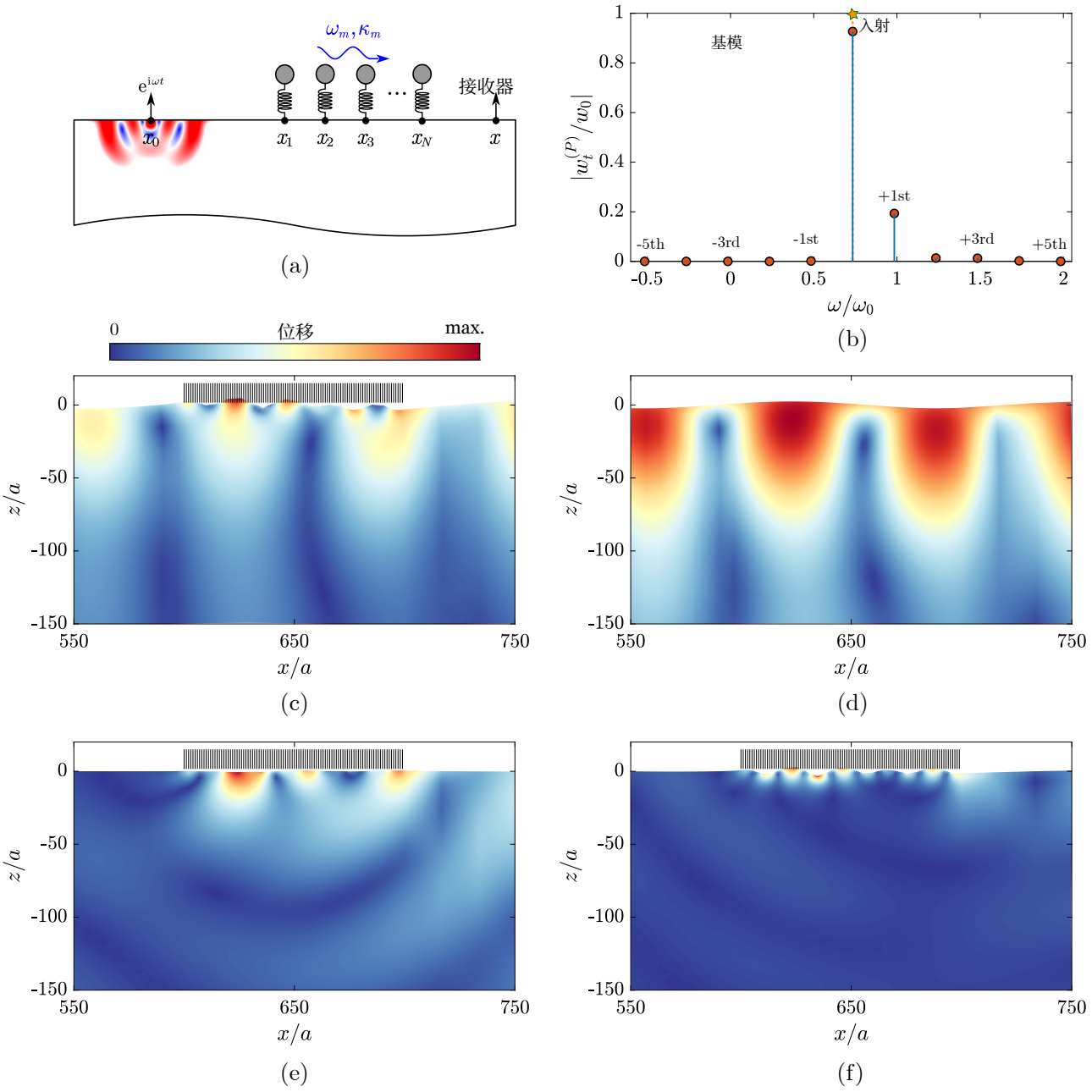

图5。调制超表面的谐波响应。(a) 右向传播瑞利波的示意图。(b) 在 $\omega = 0.734\omega_0$ 处的瑞利波传播稳态解（图 E 中的配对4）。(c)、(d)、(e)和(f)分别显示了由位于$\omega = 0.734\omega_0$处的源激发的总波场、自由场、基频散射场（$\omega = 0.734\omega_0 + \omega_m$）和一阶散射场（ $\omega = 0.734\omega_0$ ）。

4. 结论

我们建立了一种多重散射公式，用于模拟给定入射场与位于给定弹性波导表面的时空调制谐振器簇之间的相互作用。时变谐振器的效应通过阻抗算子建模，该算子能够考虑调制振子产生的低阶和高阶谐波。由入射场驱动的谐振器垂直运动会在波导中产生散射场，这些散射场通过专门构造的格林函数加以表征。随后，通过确保谐振器占地范围内位移的连续性，利用多重散射方案求得散射场的未知振幅。

我们通过分别计算沿调制梁和基底传播的弯曲波与瑞利波的色散关系及波场，展示了该框架的能力和准确性。

与目前用于研究时空调制超材料中弹性波的方法相比，我们的方法具有多项优势。首先，除调制周期相同外，该方法允许研究任意数量的谐振器，不受其空间构型和调制轮廓的限制 T_m。其次，该方法能够对高维系统（二维和三维）中的非互易波传播进行解析处理，从而突破现有解析方法（例如传递矩阵法）的局限；后者仅适用于一维波传播问题 [29]。第三，与经典数值方案相比，我们的方法无需对整个系统进行离散化，因此能够降低计算成本。这一特点对于模拟高维系统中的波传播尤具吸引力，也将在未来的设计与优化研究中发挥重要作用。第四，该方法拓展了我们对多重散射理论的认识；该理论已展现出在模拟振子与弹性弯曲波及表面声波相互作用方面的卓越能力 [31, 32, 33, 37]。

总体而言，我们预计，所提出的公式将成为研究弹性波导上各种调制轮廓的有力工具，并为未来针对时空调制系统的实验提供指导。由于本研究建立的框架具有通用性，我们还期待将其拓展至声学和电磁学领域，从而推动声学和光学非互易器件的发展。

CRediT 作者贡献声明

Xingbo Pu: 概念构思、方法学、研究、形式分析、验证、软件、撰写——初稿。**Antonio Palermo:** 概念构思、软件、形式分析、撰写——审阅与编辑、监督。**Alessandro Marzani:** 概念构思、撰写——审阅与编辑、监督、经费获取。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在任何利益冲突。

致谢

本项目获得了欧盟 Horizon 2020 研究与创新计划资助，资助依据为玛丽·斯克洛多夫斯卡-居里资助协议（编号 813424）。

附录 A. 传递矩阵法（TMM）的详细说明

在本附录中，我们详细介绍调制梁的传递矩阵法（见图A.1） [20]。根据欧拉梁理论， p阶位移在第 n个单元中可表示为：

$$\hat{w}_n^{(p)}(x) = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^{(p)}(x-x_n)}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta^{(p)}(x-x_n)}, \mathrm{e}^{\beta^{(p)}(x-x_n)}, \mathrm{e}^{-\beta^{(p)}(x-x_n)}][A_n^{(p)}, B_n^{(p)}, C_n^{(p)}, D_n^{(p)}]^T := \mathcal{L}_n^{(p)}(x)\mathbf{U}_n^{(p)}, \quad \text{(A.1)}$$

其中， $\beta^{(p)} = \sqrt[4]{\rho\mathcal{A}(\omega + p\omega_m)^2/\mathcal{D}}$ 是 p阶波数。

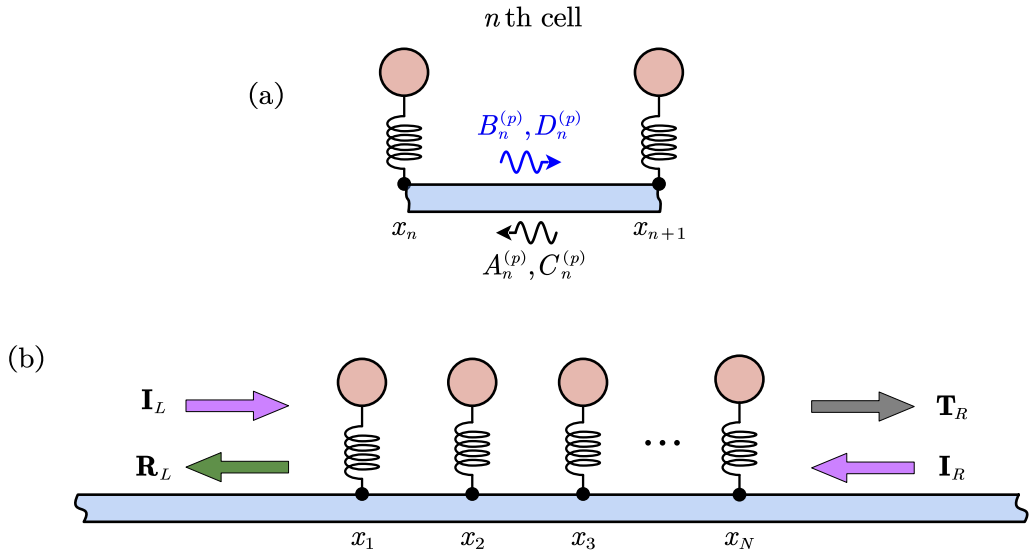

图 A.1. 传递矩阵法示意图：(a) 第 n个单元，(b) 全局系统。

将阶数从 $p = -P$ 截断至 $p = P$后，位移可表示为矩阵形式$\hat{\mathbf{w}}_n(x) = \mathbf{L}_n(x)\mathbf{A}_n$，其中：

$$\hat{\mathbf{w}}_n(x) = \begin{bmatrix} \hat{w}^{(-P)}(x) \\ \hat{w}^{(-P+1)}(x) \\ \vdots \\ \hat{w}^{(P)}(x) \end{bmatrix}, \ \mathbf{L}_n(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_n^{(-P)}(x) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}_n^{(-P+1)}(x) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathcal{L}_n^{(P)}(x) \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n^{(-P)} \\ \mathbf{U}_n^{(-P+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n^{(P)} \end{bmatrix}. \quad \text{(A.2)}$$

因此，方程（$\hat{\mathbf{F}}_n$ 中的竖向力（13）可写为：

$$\hat{\mathbf{F}}_n = \mathbf{D}_n\mathbf{M}_n^{-1}\mathbf{Q}_n\hat{\mathbf{w}}_n(x_n) = \mathbf{D}_n\mathbf{M}_n^{-1}\mathbf{Q}_n\mathbf{L}_n(x_n)\mathbf{A}_n. \quad \text{(A.3)}$$

对于任意的 p 阶，在 x_n 处位移、斜率、弯矩和剪力的连续性给出：

$$\hat{w}_{n-1}^{(p)}(x_n) = \hat{w}_n^{(p)}(x_n), \quad \text{(A.4a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{w}_{n-1}^{(p)}(x_n) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{w}_n^{(p)}(x_n), \quad \text{(A.4b)}$$

$$\mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{w}_{n-1}^{(p)}(x_n) = \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{w}_{n}^{(p)}(x_n), \tag{A.4c}$$

$$\mathcal{D}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\hat{w}_{n-1}^{(p)}(x_n) = \mathcal{D}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\hat{w}_{n}^{(p)}(x_n) - \hat{F}_n^{(p)}. \tag{A.4d}$$

将式（A.1）代入式（A.4a）–（A.4d）可得：

$$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(p)}\mathbf{U}_{n-1}^{(p)} = \boldsymbol{\zeta}_n^{(p)}\mathbf{U}_n^{(p)} + \boldsymbol{\gamma}_n^{(p)}, \tag{A.5}$$

其中系数为：

$$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(p)} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^{(p)}\ell_n} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta^{(p)}\ell_n} & \mathrm{e}^{\beta^{(p)}\ell_n} & \mathrm{e}^{-\beta^{(p)}\ell_n} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^{(p)}\ell_n} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta^{(p)}\ell_n} & \mathrm{e}^{\beta^{(p)}\ell_n} & -\mathrm{e}^{-\beta^{(p)}\ell_n} \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^{(p)}\ell_n} & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta^{(p)}\ell_n} & \mathrm{e}^{\beta^{(p)}\ell_n} & \mathrm{e}^{-\beta^{(p)}\ell_n} \\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^{(p)}\ell_n} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta^{(p)}\ell_n} & \mathrm{e}^{\beta^{(p)}\ell_n} & -\mathrm{e}^{-\beta^{(p)}\ell_n} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\zeta}_n^{(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\gamma}_n^{(p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{F}_n^{(p)}\chi^{(p)} \end{bmatrix}, \tag{A.6}$$

其中 $\ell_n = x_n - x_{n-1}$，且 $\chi^{(p)} = -1/[(\beta^{(p)})^3\mathcal{D}]$。类似地，将阶数从 $-P$ 截断至 P 后，位移可表示为矩阵形式：

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}_{n-1} = \boldsymbol{\zeta}\mathbf{A}_n + \boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{F}}_n, \tag{A.7}$$

其中：

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(-P)} & & & \\ & \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(-P+1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(P)} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_n^{(-P)} & & & \\ & \boldsymbol{\zeta}_n^{(-P+1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\zeta}_n^{(P)} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \chi^{(-P)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \chi^{(-P+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \chi^{(P)} \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

结合式（A.3）和式（A.7），我们得到：

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}_{n-1} = \boldsymbol{\zeta}\mathbf{A}_n + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{D}_n\mathbf{M}_n^{-1}\mathbf{Q}_n\mathbf{L}_n(x_n)\mathbf{A}_n, \tag{A.9}$$

由此得到联系$\mathbf{A}_{n-1}$ 与$\mathbf{A}_n$的局部传递矩阵:

$$\mathbf{T}_n\mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{A}_n, \tag{A.10}$$

其中:

$$\mathbf{T}_n = [\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{D}_n\mathbf{M}_n^{-1}\mathbf{Q}_n\mathbf{L}_n(x_n)]^{-1}\boldsymbol{\alpha}. \tag{A.11}$$

T因此，对于与 N 个谐振器耦合的无限梁，全局方程可表示为 s:

$$\mathcal{T}\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_N, \tag{A.12}$$

其中，全局传递矩阵 $\mathcal{T}$为:

$$\mathcal{T} = \mathbf{T}_N\mathbf{T}_{N-1}\cdots\mathbf{T}_1. \tag{A.13}$$

经过一些代数运算，式（A.12）可进一步写为:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L \\ \mathbf{R}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_R \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix}, \tag{A.14}$$

系数为:

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{P}^T, \tag{A.15a}$$

$$\mathbf{I}_L = [B_0^{(-P)}, D_0^{(-P)}, B_0^{(-P+1)}, D_0^{(-P+1)}, \cdots, B_0^{(P)}, D_0^{(P)}]^T, \tag{A.15b}$$

$$\mathbf{R}_L = [A_0^{(-P)}, C_0^{(-P)}, A_0^{(-P+1)}, C_0^{(-P+1)}, \cdots, A_0^{(P)}, C_0^{(P)}]^T, \tag{A.15c}$$

$$\mathbf{T}_R = [B_N^{(-P)}, D_N^{(-P)}, B_N^{(-P+1)}, D_N^{(-P+1)}, \cdots, B_N^{(P)}, D_N^{(P)}]^T, \tag{A.15d}$$

$$\mathbf{I}_R = [A_N^{(-P)}, C_N^{(-P)}, A_N^{(-P+1)}, C_N^{(-P+1)}, \cdots, A_N^{(P)}, C_N^{(P)}]^T, \tag{A.15e}$$

其中， $\mathcal{P}$ 是一个初等矩阵，表示为：

$$\mathcal{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.16}$$

式（A.14）可进一步变换为：

$$\boldsymbol{\psi}_{\text{out}}=\mathcal{S}\boldsymbol{\psi}_{\text{in}}, \tag{A.17}$$

其中：

$$\boldsymbol{\psi}_{\text{out}}=\begin{pmatrix}\mathbf{R}_L\\ \mathbf{T}_R\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\psi}_{\text{in}}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_L\\ \mathbf{I}_R\end{pmatrix},\quad \mathcal{S}=\begin{pmatrix}-\mathcal{M}_{22}^{-1}\mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22}^{-1}\\ \mathcal{M}_{11}-\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{22}^{-1}\mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{22}^{-1}\end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

利用式（A.17），我们可以直接计算透射系数和反射系数。值得一提的是，由于 $\boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{(p)}$ 式（A.5）中存在指数放大项，传递矩阵法在某些情况下可能会出现数值发散，例如考虑大量振子或较大的谐振器间距时。本研究提出的多重散射公式可以很好地解决这一局限。

附录B. 非调制色散方程的验证

本附录通过有限元法（FEM）验证非调制超材料的解析色散方程。为此，我们在 COMSOL Multiphysics 中利用二维弹性建立二维有限元模型（单胞）。具体而言，欧拉梁采用尺寸为 $a\times h_b$（图 B.1a）的二维平面应力有限元模型进行建模，而半空间则采用高度为 $\ell_z=4\pi c_T/\omega_0$ （图B.1b）的二维平面应变有限元模型进行建模。为对线性弹簧建模，我们采用横截面积和高度均为单位值的桁架模型，其等效杨氏模量满足 $E_t=m_0\omega_0^2$。此外，谐振器质量采用质量为 m_0的点质量模型进行建模。为模拟无限阵列中周期性谐振器的动力学，我们在基底的垂直边缘施加一对 Floquet周期边界条件。在图 B.1b 中，底边施加固定边界条件，以避免刚体运动。

超材料梁所用参数设置如下：质量密度 $\rho=2700$ kg/m^3, 、杨氏模量 $E=69$ GPa、泊松比 $\nu=0.33$、晶格常数 $a=0.04$ m、梁厚度 $h_b=0.002$ m、梁宽度 $b_w=0.03$ m、振子的共振频率 $\omega_0=80\pi$ rad/s，以及振子的阻尼系数$c=0$。超表面所用参数为：质量密度 $\rho=2700$ kg/m^3, 、杨氏模量 $E=69$

GPa、泊松比 $\nu = 0.33$、晶格常数 $a = 0.3$ m、振子的共振频率 $\omega_0 = 200\pi$ rad/s，以及振子的阻尼系数 $c = 0$。通过求解波数在 $k = [0, \pi/a]$范围内变化时的特征值问题，得到数值色散曲线。图 38、（45）中计算得到的解析色散曲线与非调制超材料梁和超表面的有限元仿真结果对比如图 B.1c 和图 B.1d 所示。二者吻合良好。

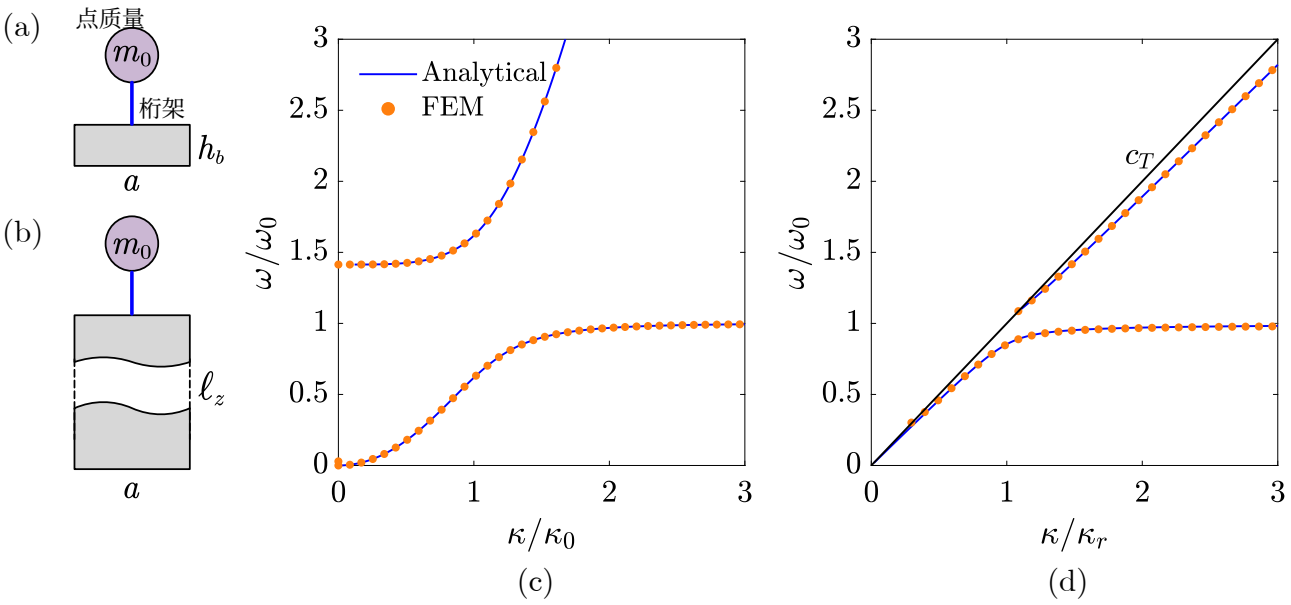

图 B.1. 非调制（原始）色散曲线的解析解与有限元解对比。(a, b) 有限元仿真所用单胞的示意图。分别为 (c) 超材料梁中的弯曲波和 (d) 超表面中的瑞利波的色散曲线。

附录 C. 瞬态仿真的有限元模型详情

本附录详细介绍用于验证第 3.2.2 节解析解的二维平面应变有限元模型。该模型在 COMSOL Multiphysics 中实现，由一个谐振器阵列和一个宽度为 $\ell_x = 32\lambda_0$ 、深度为 $\ell_x = 8\lambda_0$ 的基底组成，其中 $\lambda_0 = 2\pi c_T/\omega_0$ （见图 C.1a,b）。与 附录B 中一样，谐振器采用点质量 m_0建模，而弹簧则采用单位长度、横截面积为相应数值的桁架单元建模，其杨氏模量为 $E_t = k_0 + k_a \cos(\omega_m t - \kappa_m x)$ 。为尽量减少计算域边界处的反射，我们在基底周围添加低反射边界条件（以虚线表示）。基底采用二次缩减积分元精细网格（$\lambda_0/10$）离散，从而能够在关注频率处获得收敛结果。

我们在时域中进行数值模拟。采用形式为 $F_0(t) = A_0[H(t) - H(t - 2\pi N/\omega)]\sin(\omega t)[1 - \cos(\omega t/N)]$的窄带音调猝发信号来产生瑞利波，其中 $H(t)$ 是赫维赛德函数。在数值示例中，振幅设为 $A_0 = 1$，中心频率为 $\omega = 1.185\omega_0$，周期数为 $N = 60$。信号及其傅里叶频谱见图 C.1c、d。

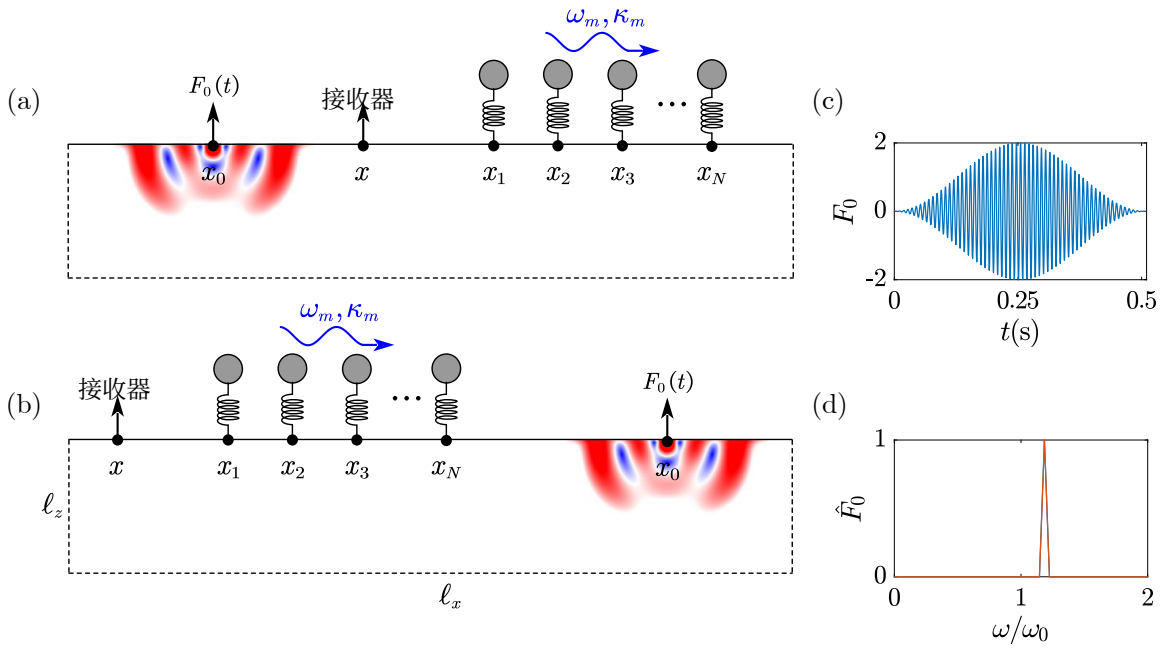

Fig. C.1. 瞬态仿真有限元模型示意图

</
style>

参考文献

[1] H. Nassar、B. Yousefzadeh、R. Fleury、M. Ruzzene、A. Al`u、C. Daraio、A. N. Norris、G. Huang、M. R. Haberman，《声学与弹性材料中的非互易性》，《自然综述：材料》5 (9) (2020) 667–685。doi:10.1038/s41578-020-0206-0。

[2] Y. Chen, X. Li, C. Scheibner, V.Vitelli, G. Huang，奇微极弹性主动超材料的实现，Nature Communications 12 (1) (2021) 1–12. doi:10.1038/s41467-021-26034-z。

[3] D. L. Sounas，A. Alu，基于时间调制的非互易光子学，《自然·光子学》11（12）（2017）774–783。doi:10.1038/s41566-017-0051-x。

[4] C. Rasmussen，L. Quan，A. Al`u，声学非互易性，《应用物理学杂志》129（21）（2021）210903。doi:10.1063/5.0050775。

[5] X. Xu，Q.Wu，H. Chen，H. Nassar，Y. Chen，A. Norris，M. R. Haberman，G. Huang，具有动态边界的波导中稳健声泵浦的物理观测，Physical Review Letters 125（25）（2020）253901。doi:10.1103/PhysRevLett.125.253901。

[6] E. Riva, G. Castaldini, F. Braghin, 时变弹性晶格中的绝热边缘到边缘变换与非厄米捷径，New Journal of Physics 23 (9) (2021) 093008. doi:10.1088/1367-2630/ac1ed4。

[7] Q. Wu, X. Zhang, P. Shivashankar, Y. Chen, G. Huang, 通过线性有源超层实现独立弯曲波频率转换, Physical Review Letters 128 (24) (2022) 244301. doi:10.1103/PhysRevLett.128.244301。

[8] B. Liang, X. Guo, J. Tu, D. Zhang, J. Cheng, 声学整流器, 自然材料 9 (12) (2010年) 989–992。doi:10.1038/nmat2881。

[9] R. Fleury, D. L. Sounas, C. F. Sieck, M. R. Haberman, A. Al`u，声音隔离和紧凑型声学环行器中的巨大线性非互易性，Science 343 (6170) (2014年) 516–519。 doi:10.1126/science.1246957。[10] R. Fleury, A. B. Khanikaev, A. Alu，声音的Floquet拓扑绝缘体，Nature Communications 7 (1) (2016年) 1–11。 doi:10.1038/ncomms11744。

[11] N.Reiskarimian, H.Krishnaswamy，基于交错换向的无磁非互易性，Nature Communications 7 (1) (2016年) 1–10。 doi:10.1038/ncomms11217。

[12] M. Jal˘si´c, N. Alujevi´c, T. Garma, I. ´Catipovi´c, M.Joki´c, H. Wolf，非互易振声传输的主动超材料单元概念，Mechanical Systems and Signal Processing 186 (2023) 109829。 doi:10.1016/j.ymssp.2022.109829。

[13] X. Huang, B. Yang，迈向受能量分流器启发的新型振动抑制技术：原理、设计与应用，Mechanical Systems and Signal Processing 182 (2023) 109496。 doi:10.1016/j.ymssp.2022.109496。

[14] G. Trainiti, M. Ruzzene，《时空周期结构中的非互易弹性波传播》，New Journal of Physics 18 (8) (2016年) 083047。doi:10.1088/1367-2630/18/8/083047。

[15] H. Nassar, X. Xu, A. Norris, G. Huang，《调制声子晶体：非互易波传播与 Willis材料》，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 101 (2017) 10–29。doi:10.1016/j.jmps.2017.01.010。

[16] B. M. Goldsberry, S. P. Wallen, M. R. Haberman，《具有时空调制材料属性的有限弹性结构的非互易振动》，Physical Review B 102(1)(2020)014312。doi:10.1103/PhysRevB.102.014312。

[17]H. Nassar, H. Chen, A. Norris, G. Huang，《调制超材料梁中的非互易弯曲波传播》，Extreme Mechanics Letters 15 (2017) 97–102。doi:10.1016/j.eml.2017.07.001。

[18] Q. Wu, H. Chen, H. Nassar, G. Huang，《时空调制表面中的非互易瑞利波传播》，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 146 (2021) 104196。doi:10.1016/j.jmps.2020.104196。

[19] A. Palermo, P. Celli, B. Yousefzadeh, C. Daraio, A. Marzani，《通过时间调制超材料实现表面波非互易性》，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 145 (2020) 104181。 doi:10.1016/j.jmps.2020.104181。

[20] Y. Chen, X. Li, H. Nassar, A. N. Norris, C. Daraio, G. Huang，《采用时空调制谐振器的基于连续体的超材料中的非互易波传播》，Physical Review Applied 11 (6) (2019)064052。 doi:10.1103/PhysRevApplied.11.064052。

[21] G. Trainiti、Y. Xia、J. Marconi、G. Cazzulani、A. Erturk、M. Ruzzene，《弹性超材料中的时间周期性刚度调制，用于选择性波滤波：理论与实验》，Physical Review Letters 122 (12) (2019) 124301. doi:10.1103/PhysRevLett.122.124301。

[22] J. Marconi、E. Riva、M. Di Ronco、G. Cazzulani、F. Braghin、M. Ruzzene，《利用并联分流压电阵列在时空调制梁中实验观测到非互易带隙》，Physical Review Applied 13 (3)(2020) 031001. doi:10.1103/PhysRevApplied.13.031001。

[23] S. Wan、L. Cao、Y. Zeng、T. Guo、M. Oudich、B. Assouar，通过紧凑型级联时变谐振器实现低频非互易弯曲波传播，Applied Physics Letters 120(23)(2022) 231701。 doi:10.1063/5.0097501。

[24] M. Attarzadeh、M.Nouh，具有时空变化材料属性的二维声子膜中的非互易弹性波传播，Journal of Sound and Vibration 422 (2018) 264–277。 doi:10.1016/j.jsv.2018.02.028。

[25] Z. Chen、Y. Peng、H. Li、J. Liu、Y. Ding、B. Liang、X.-F. Zhu、Y. Lu、J. Cheng、A. Al`u，在时空调制声学超材料中实现高效的非互易模式转换，Science Advances 7 (45) (2021) eabj1198。doi:10.1126/sciadv.abj1198。

[26] J. Vila, R. K. Pal, M. Ruzzene, G. Trainiti，《具有周期性时变属性的晶格色散分析的基于布洛赫理论的流程》，Journal of Sound and Vibration 406 (2017) 363–377。 doi:10.1016/j.jsv.2017.06.011。

[27] H. Nassar, H. Chen, A. Norris, M. Haberman, G. Huang，《调制弹性超材料中的非互易波传播》，Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physicaland Engineering Sciences 473 (2202) (2017) 20170188。 doi:10.1098/rspa.2017.0188。

[28] Y. Wang, B. Yousefzadeh, H. Chen, H. Nassar, G. Huang, C. Daraio，《动态声子晶格中非互易波传播的观测》，PhysicalReviewLetters121(19) (2018)194301。 doi:10.1103/PhysRevLett.121.194301。

[29] J. Li, X. Zhu, C. Shen, X. Peng, S. A. Cummer，时空调制介质与系统分析的传递矩阵法，Physical Review B100 (14) (2019)144311. doi:10.1103/PhysRevB.100.144311.

[30] J. Li, C. Shen, X.Zhu, Y. Xie, S. A. Cummer，时空调制介质中的非互易声传播，Physical Review B 99 (14) (2019) 144311. doi:10.1103/PhysRevB.99.144311.

[31] D. Torrent, D.Mayou, J. S´anchez-Dehesa，石墨烯的弹性类似物：薄板中弯曲波的狄拉克锥与边缘态，Physical Review B 87 (11) (2013) 115143. doi:10.1103/PhysRevB.87.115143.

[32] P. Packo, A. N. Norris, D. Torrent，《逆光栅问题：异常弯曲波反射器和折射器的高效设计》，Physical Review Applied 11 (1) (2019) 014023. doi:10.1103/PhysRevApplied.11.014023。

[33] X. Pu, A. Palermo, A. Marzani，《有限尺寸弯曲超表面的多重散射公式》，Proceedings of the Royal Society A 478 (2262) (2022)20210669. doi:10.1098/rspa.2021.0669。

[34] E. Garova, A. Maradudin, A. Mayer，瑞利波与表面上随机分布振子的相互作用，Physical Review B 59 (20) (1999) 13291. doi:10.1103/PhysRevB.59.13291。

[35] N. Boechler, J.Eliason, A. Kumar, A. Maznev, K. Nelson, N. Fang，微球接触共振与表面声波的相互作用，Physical Review Letters 111 (3) (2013) 036103. doi:10.1103/PhysRevLett.111.036103。

[36] A. Maznev，关于瑞利波与表面质量–弹簧振子相互作用的有效介质模型，Wave Motion 115 (2022) 103074。doi:10.1016/j.wavemoti.2022.103074。

[37] X. Pu、A. Palermo、A. Marzani，准周期弹性超表面的拓扑边缘态，Mechanical Systems and Signal Processing 181 (2022) 109478。doi:10.1016/j.ymssp.2022.109478。