arXiv:2301.00875v1 [math.AC] 2 Jan 2023

经典素子超模及相关类

MAHDI ANBARLOEI

Abstract. 本文将素子超模的概念推广至交换 Kras-ner (m,n)-超环上的 (m,n)-超模，定义了 n元经典素、 n元弱经典素以及 n元 ϕ经典素子超模。本文介绍了它们的许多性质和刻画。此外，我们还研究了这些结构在超模同态、商超模和笛卡尔积下的性质。我们认为，在这一框架中获得的认识，为对子超模的一般研究迈出了重要一步。

1. Introduction

将素理想的概念从环范畴推广到模范畴，促使多位研究者探究环论中的许多结果（但并非全部）是否也适用于模。Behboodi 和 Koohy 在 [7] 中引入了经典素子模的概念，作为素子模概念的推广。若 Q 是 M 的真子模，且对每个 r、$s \in R$ 和 $a \in M$、 $rsm \in Q$，只要 $ra \in Q$，便有 $ra \in Q$ 或 $sa \in Q$，则称其为经典素子模。此外， [23] 研究了弱经典素子模这一经典素子模的推广概念。

代数超结构理论在经典代数理论中发挥着重要作用。1934年，法国数学家 F. Marty 在 8^{th}斯堪的纳维亚数学家大会上创立了该理论。关于超结构理论的综述见 [21, 22, 9, 10]。

n元代数的概念由 Kasner 在 1904 [15]的一次年会上所作的讲演中提出。关于 n 元群理论的第一篇论文由 Dorente 于 1928 [13]撰写。此外， [16] ， Krasner 首次提出了 Krasner 超环的概念。关于这些超环的一些性质可见 [20, 24]。 n元超群的概念于 [12] 被定义为 Marty 意义下超群的推广。在 [18], 引入(m,n)-超环的概念之后，Davvaz 等人将(m,n)-环推广为 Krasner (m,n)-超环，并在 [19]中研究了这一背景下的一些结果。在 Krasner (m,n)-超环中，若干类超理想，即极大超理想、 n元素超理想、 n元主超理想以及超理想的根，于 [1]被引入。

[19] 一个带有标量单位元 1 的交换 Krasner (m,n)-超环，是一个代数超结构 (R, f', g')，如果满足以下条件：(1) (R, f') 是一个典范 m 元超群，(2) (R, g') 是一个交换 n 元半群，(3)

2010 *Mathematics Subject Classification.* 16Y99,20N20 .*Key words and phrases.* n元经典素超子模、 n元弱经典素子超模、 n元 ϕ经典素超子模、(m,n)-超模。1

n元运算 g' 关于 m 元超运算 f'满足分配律，即 $g'(a_1^{i-1}, f'(x_1^m)\ a_{i+1}^n) = f'(g'(a_1^{i-1}, x_1, a_{i+1}^n)\ ..., g'(a_1^{i-1}, x_m, a_{i+1}^n))$，对每个$a_1^{i-1}$、$a_{i+1}^n$、$x_1^m \in R$和 $1 \leq i \leq n$均成立；(4) 0 是 n 元运算 g'的零元，即对每个 $x_2^n \in R$，都有 $g'(0, x_2^n) = g'(x_2, 0, x_3^n) = ... = g'(x_2^n, 0) = 0$；(5) 对所有 $x \in R$， $g(x, 1^{(n-1)}) = x$。

序列 $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ 记作 x_i^j。对于 $j < i$， x_i^j 为空符号。按照这一约定， $f'(x_1, ..., x_i, y_{i+1}, ..., y_j, z_{j+1}, ..., z_n)$ 将写作 $f'(x_1^i, y_{i+1}^j, z_{j+1}^n)$。当 $y_{i+1} = ... = y_j = y$ 时，最后一个表达式将写成 $f'(x_1^i, y^{(j-i)}, z_{j+1}^n)$的形式。对于 R的非空子集 $A_1, ..., A_n$，我们定义 $f'(A_1^n) = f'(A_1, ..., A_n) = \bigcup\{f'(x_1^n) \mid x_i \in A_i, i = 1, ..., n\}$。称 R的非空子集 S 为 R的超环子，如果 (S, f', g') 是一个 Krasner (m, n)-超环。设 R的非空子集为 I，如果 (I, f') 是 (R, f') 的一个 m-元子超群，并且对于每个 $x_1^n \in R$ 和 $1 \leq i \leq n$， $g'(x_1^{i-1}, I, x_{i+1}^n) \subseteq I$，则称 I为 (R, f', g') 的超理想。对于每个元素 $x \in R$，由 x 生成的超理想记作 $\langle x \rangle$，并定义为 $\langle x \rangle = g(R, x, 1^{(n-2)}) = \{g(r, x, 1^{(n-2)}) \mid r \in R\}$。回顾 [1]，Krasner (m, n)-超环 (R, f', g') 的真超理想 P 是一个 n-元素超理想，当对于 R 的超理想 $I_1, ..., I_n$， $g'(I_1^n) \subseteq P$ 蕴含 $I_1 \subseteq P$或 $I_2 \subseteq P$ 或 ...或 $I_n \subseteq P$。此外，Krasner (m, n)-超环 (R, f', g') 的真超理想P是一个 n-元素超理想，当对于所有$x_1^n \in R$，$g'(x_1^n) \in P$ 蕴含对于某个 $1 \leq i \leq n$ 有 $x_i \in P$，这一点由 [1] 中的引理4.5表明。

超环上的超模是环上经典模的推广。许多作者引入了若干类超模。在 [6] 中定义了 (m, n)-超环上的 (m, n)-超模的概念。随后， [5, 8, 2] 研究了超模的一些类。 [4] 讨论了 (m, n)-超模的素超子模和主超子模。

受上述论文的启发，本研究工作的目的是引入并研究素超子模的推广。我们定义了交换 Krasner (m, n)-超环（具有标量单位元 1）上的 (m, n)-超模的经典素超子模、弱经典素超子模和 ϕ-经典素超子模的概念。随后给出了一些重要结论，以阐明这些结构的一般框架。此外，我们还给出了这些概念在 (m, n)-超模的笛卡尔积上的一些刻画。

2. Preliminaries

本节回顾一些关于 n 元超结构的基本术语和定义，这些内容是开展本文研究所必需的。

定义 2.1.（[6]）设 M 是一个非空集合。若 (M, f, g) 是一个关于 (m, n)-超环 (R, f', g') 的 (m, n)-超模，简记为 R，则 (M, f) 是一个典范的 m 元超群，并且映射

$$g : \underbrace{R \times ... \times R}_{n-1} \times M \longrightarrow P^*(M)$$

满足以下条件:

(i) $g(r_1^{n-1}, f(x_1^m)) = f(g(r_1^{n-1}, x_1), ..., g(r_1^{n-1}, x_m))$ (ii) $g(r_1^{i-1}, f'(s_1^m)\ r_{i+1}^{n-1}, x) = f(g(r_1^{i-1}, s_1, r_{i+1}^{n-1}, x), ..., g(r_1^{i-1} s_m, r_{i+1}^{n-1}, x))$ (ii) $g(r_1^{i-1}, g'(r_i^{i+n-1})\ r_{i+m}^{n+m-2}, x) = g(r_1^{n-1}, g(r_m^{n+m-2}, x))$ (iv) $\{0\} = g(r_1^{i-1}, 0, r_{i+1}^{n-1}, x)$.

若 g 是一个 n 元超运算， A_1、...、 A_{n-1} 是 R 和 $M' \subseteq M$ 的子集，我们设

$g(A_1^{n-1}, M') = \bigcup\{g(r_1^{n-1}, m) \mid r_i \in A_i, 1 \leq i \leq n-1, m \in M'\}$.

设 R 中的 1 是一个标量单位元。对于任意 $a \in M$ 和 $r_1^{n-1} \in R$，有

$$g(1^{(n-1)}, a) = \{a\}, \qquad g(0^{(n-1)}, a) = \{0\}, \qquad g(r_1^{n-1}, 0) = \{0\}.$$

设 (M, f, g) 是 R 上的一个 (m,n)-超模。若 N 是 M 的非空子集，且 (N, f) 是 (M, f) 的一个 m 元子超群，并且 $g(R^{(n-1)}, N) \in P^*(N)$，则称 N 是 M 的一个 (m,n)-超子模。

[2] 设（M, f, g）是一个（m,n）-超模， N是 M的一个超子模，且 a 是 M的一个元素。那么，h 理想 S_N 和 N_a 定义如下： yp

$S_N = \{r \in R \mid g(r, 1^{(n-2)}, M) \subseteq N\}$

$N_a = \{r \in R \mid g(r, 1^{(n-2)}, a) \subseteq N\}$

定义 2.2.（[4]）设 M 是 R上的一个（m,n）-超模。若真子超模 K 满足：对于满足 $K \subseteq N \subseteq M$的 $N \leq M$，要么 $K = N$，要么 $N = M$，则称 K 是 M 的极大子超模。

定义 2.3.（[4]）设 M 是 R上的一个（m,n）-超模。若真子超模 N 满足：对于满足 $r_1^{n-1} \in R$ 且$a \in M - N$的 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq N$，有 $g(r_1^{n-1}, M) \subseteq N$，则称 N 是 M 的 n-元素素子超模。

在 [2], 中还给出了另一个 n-元素素子超模的定义，该定义与上述定义等价。若真子超模 N 满足：对于满足$r_1^{n-1} \in R$ 的 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq N$，存在某个$1 \leq i \leq n-1$使得 $a \in N$ 或 $r_i \in S_N$ 成立，则称 N 是 M 的 n-元素素子超模。

定义 2.4. ([4]) 设 N 是一个 (m,n)-超模 (M, f, g) 在 R 上的超子模。那么集合 $M/N = \{f(x_1^{i-1}, N, x_{i+1}^m) \mid x_1^{i-1}, x_{i+1}^m \in M\}$配备 m-元超运算 f，对于所有 x_{11}^{1m}, ..., $x_{m1}^{mm} \in MF(f(x_{11}^{1(i-1)}, N, x_{1(i+1)}^{1m})$ ..., $f(x_{m1}^{m(i-1)}, N, x_{m(i+1)}^{mm}))$= $\{(f(t_1^{i-1}, N, t_{i+1}^m) \mid t_1 \in f($ $x_{11}^{m1})$ ..., $t_m \in f(x_{1m}^{mm})\}$ 均成立；并配备 n-元超运算 G: $\underbrace{R \times ... \times R}\times M/N \longrightarrow P^*($ $M/N)$，对于所有 $_{n-1}x_1^{i-1}, x_{i+1}^m \in M$ 以及 $r_1^{n-1} \in RG(r_1^{n-1}, f(x_1^{i-1}, N, x_{i+1}^m))$= $\{f(z_1^{i-1},$ $N, z_{i+1}^m) \mid z_1 \in g(r_1^{n-1}, x_1)$ ..., $z_m \in g(r_1^{n-1}, x_m)\}$

是 R 上的 (m,n)-超模，并称 $(M/N, F, G)$ 为 M 对 N 的商 (m,n)-超模。

定义 2.5. ([2]) 对于 R 上的 (M, f, g) 这一 (m,n)-超模中的每个非零元 m，我们定义

$F_m = \{r \in R \mid 0 \in g(r, 1^{(n-2)}m);\ r \neq 0\}$.

显然， F_m是(R, h, k)的一个超理想。若对于所有非零元素 $m \in M$，都有 $F_m = \{0\}$，即 $0 \in g(r, 1^{(n-2)}, m)$蕴含 $r = 0$，其中 $r \in R$，则称(m,n)-超模(M, f, g)是忠实的。

定义 2.6. ([4]) 设(M_1, f_1, g_1)和 $M_2, f_2, g_2)$是 R上的两个(m, n)-超模。映射 h : $M_1 \longrightarrow M_2$ 是(m, n)-超模的同态，当且仅当对所有 $a_1^m, a \in M_1$ 和$r_1^{n-1} \in R$:

$$h(f_1(a_1^m)) = f_2(h(a_1), \cdots, h(a_m)),$$
$$h(g_1(r_1^{n-1}, a)) = g_2(r_1^{n-1}, h(a)).$$

3. n-ary classical prime subhypermodules

本节将考虑 n元经典素超子模的概念，它是素子模概念的推广。

定义 3.1. 设 Q 是一个 (m, n)-超模 M 的真子超模，其中该超模定义在 R 上。若对于 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M$， $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q$，则称 Q 为一个 n元经典素超子模，即存在某个 $1 \leq i \leq n-1$，使得 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。

例 3.2. 假设 $R = \{0, 1, 2\}$，并在 R 上定义如下的三元超运算 f' 和三元运算 $'$：

y p g

$f'(0,0,0) = 0, \quad f'(0,0,2) = 2, \quad f'(1,1,2) = f'(1,2,2) = \{1,2\},$
$f'(0,0,1) = 1, \quad f'(2,2,2) = 2, \quad f'(0,1,1) = \{0,1\},$
$f'(1,1,1) = 1, \quad f'(0,1,2) = R, \quad f'(0,2,2) = \{0,2\},$

and

$g'(r_1, r_2, r_3) = 0; \quad r_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3$
$g'(1,1,1) = 1, \quad g'(1,2,2) = g'(1,1,2) = g'(2,2,2) = 2$

则 $R(f, g$ 是一个交换的 (3, 3)-超环。现在，考虑集合 $M = \{0, 1, 2, 3\}$。(M, f, g) 是一个定义在 R 上的 (3, 3)-超模，其三元超运算 f 和三元外部超运算 g 定义如下：

$f(0,0,0) = 0, \quad f(0,0,1) = 1, \quad f(0,0,2) = 2,$
$f(0,0,3) = 3, \quad f(1,1,1) = 1, \quad f(2,2,2) = 2,$
$f(3,3,3) = 3, \quad f(0,1,1) = \{0,1\}, \quad f(0,2,2) = \{0,2\},$
$f(0,3,3) = \{0,3\}, \quad f(1,2,3) = \{1,2,3\}, \quad f(0,1,2) = \{0,1,2\},$
$f(0,1,3) = \{0,1,3\}, \quad f(0,2,3) = \{0,2,3\}, \quad f(2,2,3) = f(2,3,3) = \{2,3\},$
$f(1,1,2) = f(1,2,2) = \{1,2\}, \quad f(1,1,3) = f(1,3,3) = \{1,3\},$

一个或 $r_1^2 \in R$ $a \in$ ， M

$$g(r_1^2, a) = \begin{cases} \{0\} & \text{if } r_1 = 0 \text{ or } r_2 = 0 \text{ or } a = 0, \\ \{2\} & \text{if } r_1, r_2 \neq 0 \text{ and } a \neq 0, \\ \{a\} & \text{if } r_1 = r_2 = 0. \end{cases}$$

设 $Q = \{0, 2\}$。则 Q 是 M的三元经典素超子模。

定理 3.3. 设 Q 是一个定义在R上、属于 (m, n)-超模 M 的真子超模。则 Q 是一个 n元经典素超子模，当且仅当对于 R的超理想I_1^{n-1}和 M的超子模 N，若 $g(I_1^{n-1}, N) \subseteq Q$，则对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有 $g(I_i, 1^{(n-2)}, N) \subseteq Q$。

证明。可通过采用与 [11]中定理 2.14 的证明类似的论证来证明这一点。□

定理 3.4. 设 Q 是定义在 R 上的 (m, n)-超模 M 的真子超模，且 $S = M - Q$。那么，当且仅当对于 R 的超理想 I_1^{n-1} 以及 M 的超子模 N_1, N_2，

M，$f(N_1, g(I_i, 1^{(n-2)}, N_2)\ 0^{(m-2)}) \cap S \neq \varnothing$ 对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 都成立时，蕴含 $f(N_1, g(I_1^{n-1}, N_2)\ 0^{(m-2)}) \cap S \neq \varnothing$。

证明。($\Longrightarrow$) 设 I_1^{n-1}为 R 的超理想，且 N_1 和 N_2 为 R上的(m,n)-超模 M的两个超子模，并且对所有 $1 \leq i \leq n-1$，$f(N_1, g(I_i, 1^{(n-2)}, N_2)\ 0^{(m-2)}) \cap S \neq \varnothing$。假设 $f(N_1, g(I_1^{n-1}, N_2)\ 0^{(m-2)}) \cap S = \varnothing$。这意味着 $g(I_1^{i-1}, N_2) \subseteq Q$。于是，由于 Q 是 M的一个 n元经典素超子模，我们得到：对某个 $1 \leq i \leq n-1$，$g(I_i, 1^{(n-2)}, N_2) \subseteq Q$。因此，我们得到$f(N_1, g(I_i, 1^{(n-2)}, N_2)\ 0^{(m-2)}) \cap S = \varnothing$，这就产生了矛盾。

($\Longleftarrow$) 令 $g(I_1^{n-1}, N) \subseteq Q$，对于 R 的超理想 I_1^{n-1}，以及 R 上的 (m,n)-超模 M 的超子模 N，但对所有 $1 \leq i \leq n-1$，$g(I_i, 1^{(n-2)}, N) \nsubseteq Q$。于是我们得出，对所有 $1 \leq i \leq n-1$，$g(I_i, 1^{(n-2)}, N) \cap S \neq \varnothing$，这意味着$g(I_1^{n-1}, N) \cap S \neq \varnothing$，与假设矛盾。因此，$Q$ 是 M 的一个 n 元经典素超子模。□

定理 3.5. 设 Q 是 R 上的 (m,n)-超模 M 的真子超模。设 S 是 $M-\{0\}$ 的非空子集，使得对于 R 的超理想 I_1^{n-1}，以及 M 的超子模 N_1, N_2，若对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 有 $f(N_1, g(I_i, 1^{(n-2)}, N_2)\ 0^{(m-2)}) \cap S \neq \varnothing$，则 $f(N_1, g(I_1^{n-1}, N_2)\ 0^{(m-2)}) \cap S \neq \varnothing$。若 Q 关于性质 $Q \cap S = \varnothing$ 是极大的，则 Q 是 M 的一个 n 元经典素超子模。

证明。假设对于超理想 I_1^{n-1}（属于 R）以及超子模 N（属于 M），有 $g(I_1^{n-1}, N) \subseteq Q$。令对所有 $1 \leq i \leq n-1$，有 $g(I_i, 1^{(n-2)}, N) \nsubseteq Q$。由 Q 的极大性可知，对所有 $1 \leq i \leq n-1$，有 $f(Q, g(I_i, 1^{(n-2)}, N)\ 0^{(m-2)}) \cap S \neq \varnothing$。这意味着 $f(Q, g(I_1^{n-1}, N)\ 0^{(m-2)}) \cap S \neq \varnothing$，也就是说 $Q \cap S \neq \varnothing$，这与假设矛盾。因此，$Q$ 是 M 的一个 n 元经典素超子模。□

回顾 [8]：若 N 是 R 上的 (M, f, g) 的超子模，则我们考虑如下集合 M/N：

$$M/N = \{f(a, N, 0^{(m-2)}) \mid a \in M\}.$$

此外，回顾 [8]，若 (m,n)-超模 M（其上的超环为 R）中的元素 a 满足 $g(r_1^{n-1}, a) = 0$，则称其为无挠元素；此时存在 $1 \leq i \leq n-1$ 使得$r_i = 0$。如果 M 中的所有元素都是无挠元素，则称 M 为无挠。

定理 3.6. 设 M 是 R 上的 (m,n)-超模，且 M 的每个经典素超子模都是 M的极大超子模的交，并且 N是 M的一个超子模。若 M/N是 R上的无挠 (m,n)-超模，则 N 的每个经典素超子模都是 N的极大超子模的交。

证明。假设 Q 是 N 的经典素超子模。令 $g(r_1^{n-1}, m) \subseteq Q$，其中 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $m \in M$。若 $m \in N$，则 Q 是 M 的经典素超子模。因此，假设 $m \notin N$。于是我们有 $g(r_1^{n-1}, m) \subseteq Q \subseteq N$。由于 $m \notin N$，且 M/N 是 R 上无挠的 (m,n)-超模，我们得到某个 $1 \leq i \leq n-1$，使得 $r_i = 0$。因此可得 $g(r_i, 1^{(n-2)}, m) \subseteq Q$。这意味着 Q 是 M 的经典素超子模。根据假设，我们推知 Q 是 M 的极大子超模的交。令 $Q = \cap_{i \in I} K_i$ 表示 M 的极大超理想 K_i。考虑 $Q_i = K_i \cap N$，对于

每个 $i \in I$。显然 $Q = \cap_{i\in I} Q_i$，因为 $Q \subseteq N$。我们假设对每个 $i \in I$，都有 $Q_i \subset N$。令 $x \in N - Q_i$，其中某个 $i \in I$。这意味着 $x \notin K_i$。根据 M 的极大性 K_i，我们得出 $f(K_i, \langle x\rangle, 0^{(m-2)}) = M$。假设 $a \in N$。那么存在某些 $a_i \in K_i$ 和 $r_i^{n-1} \in R$，使得 $a \in f(a_i, g(r_1^{n-1}, x)\ 0^{(m-2)})$。因此我们有 $a_i \in f(a, -g(r_1^{n-1}, x)\ 0^{(m-2)}) \subseteq N$，这意味着 $a_i \in Q_i$。因此 $a \in f(a_i, \langle x\rangle, 0^{(m-2)}) \in f(Q_i, \langle x\rangle, 0^{(m-2)})$，这意味着 $f(Q_i, \langle x\rangle, 0^{(m-2)}) = N$。所以 Q_i 是 N 的极大子超模，得证。□

4. n-ary weakly classical prime subhypermodules

定义4.1. 设 Q 是 R上的(m,n)-超模M 的一个真子超模。若对于 $r_1^{n-1} \in R$和 $a \in M$，$0 \notin g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q$，则存在某个$1 \le i \le n-1$使得 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，此时称 Q 为一个 n元弱经典素超子模。

例4.2. 考虑交换群$(H = \{0, x, y, z\}, \oplus)$，其中 $\oplus$ 定义为

$\oplus$	0	x	y	z
0	0	x	y	z
x	x	0	z	y
y	y	z	0	x
z	z	y	x	0

显然，H 是一个 $\mathbb{Z}$-模。此外，整数环 $\mathbb{Z}$ 是一个Krasner (3, 3)-超环，其3元超运算 $f'(r_1^3) = \{r_1 + r_2 + r_3\}$ 以及3元运算$g'(r_1^3) = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ 对所有 $r_1^3 \in \mathbb{Z}$均成立。现在，我们有整数环$(\mathcal{Z}, f', g')$上的典范(3, 3)-超模(H, f, g)，其中3元超运算 f和 H 上的3元外超运算 g 定义如下:

$$
\begin{aligned}
&f(a,a,a) = \{a\}, \quad \text{for } a \in H\\
&f(0,a,a) = \{0\}, \quad \text{for } a \in H\\
&f(a,a,b) = \{b\}, \quad \text{for } a,b \in H\\
&f(a,b,c) = \{d\}, \quad \text{for } a \neq b \neq c \neq d \in H
\end{aligned}
$$

and

$$g(r_1^2, a) = \{\underbrace{a \oplus \cdots \oplus a}_{r_1 \cdot r_2}\}, \quad \text{for } r_1^2 \in \mathbb{Z} \text{ and } a \in H.$$

$Q = \{0, y\}$ 是 H的一个三元弱经典素子超模。

定理4.3. 设 Q 是 R和 $a \in M - Q$ 上的(m,n)-超模 M的一个 n元弱经典素子超模，且 $F_a = \{0\}$。若对于某个 $r_1^n \in R$，$0 \neq g'(r_1^n) \in Q_a$，则对于某个 $1 \le i \le n$，$r_i \in Q_a$。

证明。假设 Q 是 R 上的 (m,n)-超模 M 的 n 元弱经典素超子模，且满足 $F_a = 0$。设对于某个满足 $r_2^n \notin Q_a$的 $r_1^n \in R$，有 $0 \neq g'(r_1^n) \in Q_a$。我们必须证明 $r_1 \in Q_a$。由 $r_2^n \notin Q_a$ 可得，对于所有 $2 \le i \le n$，$g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \nsubseteq Q$。由 $g'(r_1^n) \in Q_a$ 可推出 $0 \notin g(g'(r_1^n)\ 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，因为 $F_a = \{0\}$。这意味着 $0 \notin g(g'(r_1^{n-2}, g'(r_{n-1}^n, 1^{(n-2)}))\ 1^{(n-2)}, a) = g(1^{(n-1)}, g(r_1^{n-2}, g'(r_{n-1}^n, 1^{(n-2)})\ a) = g(r_1^{n-2}, g'(r_{n-1}^n, 1^{(n-2)})\ a) \subseteq Q$。由于 Q 是 M 的 n 元弱经典素子模，因此对于某个 $1 \le i \le n-2$，有 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$；或者 $g(g'(r_{n-1}^n, 1^{(n-2)})\ 1^{(n-2)}, a) = g(r_{n-1}^n, 1^{(n-3)}, a) \subseteq Q$。在第二种可能下，我们得到 $r_{n-1} \in Q$ 或 $r_n \in Q$，因为 $1 \notin Q$，证明完成。□

定理 4.4。设 P 和 Q 是 R 上的 (m,n)-超模 M 的两个子超模，且满足 $P \subset Q$。若 P 是 M 的 n 元弱经典素超子模，且 Q/P 是 M/P 的 n 元弱经典素超子模，则 Q 是 M 的 n 元弱经典素超子模。

证明。假设 $0 \notin g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q$ for $r_1^{n-1} \in R$ and $a \in M$。若 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq P$，则结论成立。设 $g(r_1^{n-1}, a) \nsubseteq P$。因此 $0 \neq G(r_1^{n-1}, f(a, P, 0^{(m-2)})) = \{f(g(r_1^{n-1}, a)\ P, 0^{(m-2)}\} \subseteq Q/P$。由于 Q/P 是 M/P 的一个 n 元弱经典素子超模，因此我们得出 $G(r_i, 1^{(n-2)}, f(a, P, 0^{(m-2)})) = \{f(g(r_i, 1^{(n-2)}, a)\ P, 0^{(m-2)})\} \subseteq Q/P$，其中某个 $1 \leq i \leq n-1$ 满足该条件，这意味着 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，如所需。□

接下来，我们注意到弱经典素子超模在同态下具有自然的性质。

定理 4.5. 设 (M_1, f_1, g_1) 和 (M_2, f_2, g_2) 是定义在 (R, f', g') 上的两个 (m,n)-超模，且 Q_1, Q_2 分别是 M_1, M_2 的 n-元弱经典素子超模。若 h: $M_1 \longrightarrow M_2$ 是一个同态，则：

(1) 若 h 是满同态且 $Ker(h) \subseteq Q_1$，则 $h(Q_1)$ 是 M_2的一个 n-元弱经典素子超模。(2) 若 h 是一个单同态，且 $h^{-1}(Q_2) \neq M_1$，则 $h^{-1}(Q_2)$ 是 M_1的一个 n-元弱经典素子超模。

证明. (1) 设对于 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a_2 \in M_2$，有 $0 \notin g_2(r_1^{n-1}, a_2) \subseteq h(Q_1)$。由于 h 是满同态，因此存在 $a_1 \in M_1$ 使得 $h(a_1) = a_2$。于是我们得到

$$h(g_1(r_1^{n-1}, a_1)) = g_2(r_1^{n-1}, h(a_1)) = g_2(r_1^{n-1}, a_2) \subseteq h(Q_1)$$

这意味着 $g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq Q_1$。由于 Q_1 是 M_1 的 n元弱经典素子超模，且 $0 \notin g_1(r_1^{n-1}, a_1)$，因此对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$。因此

$$g_2(r_i, 1^{(n-2)}, a_2) = g_2(r_i, 1^{(n-2)}, h(a_1)) = h(g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1)) \subseteq h(Q_1).$$

因此， $h(Q_1)$ 是 M_2的 n元弱经典素子超模。
(2) 设 Q_2 是 M_2的 n元弱经典素子超模。设对于 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a_2 \in M_2$， $0 \notin g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq h^{-1}(Q_2)$。由于 h 是单同态，我们得到 $0 \notin h(g_1(r_1^{n-1}, a_1) = g_2(r_1^{n-1}, h(a_1)) \subseteq Q_2$。由于 Q_2 是 M_2 的 n 元弱经典素子超模，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有 $g_2(r_i, 1^{(n-2)}, h(a_1)) \subseteq Q_2$，因此 $h(g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1)) \subseteq Q_2$。故对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq h^{-1}(Q_2)$。因此， $h^{-1}(Q_2)$ 是 M_1的 n元弱经典素子超模。□

作为上述定理的直接推论，我们得到以下结果。

推论4.6. 设 P 和 Q 是 m 上的一个（n）-超模M 的两个子超模，且满足 R，其中 $P \subset Q$。若 Q 是 M 的一个 n-元弱经典素子超模，则 Q/P 是 M/P 的一个 n-元弱经典素子超模。
证明。考虑映射 π: $M \longrightarrow M/P$，其定义为 $a \longrightarrow f(a, P, 0^{(n-2)})$。根据 [4] 中的定理3.2， π 是一个满同态。假设 Q 是 M 的一个 n 元弱经典素子超模。由于 $Ker(\pi) = P \subset Q$，且 π 是满射，根据定理 4.5 (1)，我们得出 $\pi(Q) = Q/P$ 是 M/P 的一个 n 元弱经典素子超模。□

假设 Q 是 R 上的 (m,n)-超模 M 的一个 n 元弱经典素子超模。若对所有 $1 \leq i \leq n-1$, $r_1^{n-1}(r_1^{n-1}, X) \subseteq Q$ 且 $g(r_i, 1, X) \nsubseteq Q$, 则称 (r_1^{n-1}, X)（其中 $r_1^{n-1} \in R$, 且 X 是 M 的一个非空子集）为 Q 的经典 (m,n)-零点。

定理 4.7. 设 Q 是一个 $(3,3)$-超模 M 上的 3 元弱经典素子超模, 且 $g(r_1^2, P) \subseteq Q$, 其中 P是 M的某个超子模, 且 $r_1^2 \in R$。若对于 P的每个非空子集 X, (r_1^2, X) 都不是 Q的经典 $(3,3)$-零元, 则对于某个 $i \in \{1,2\}$, 有 $g(r_i, 1, P) \subseteq Q$。

证明. 设 $g(r_1^2, P) \subseteq Q$, 但对每个 $i \in \{1,2\}$, $g(r_i, 1, P) \nsubseteq Q$。这意味着对于每个 $i \in \{1,2\}$, 都存在 $p_i \in P$, 使得 $g(r_i, 1, p_i) \nsubseteq Q$。若 $0 \notin g(r_1^2, p_1) \subseteq Q$, 则 $g(r_2, 1, p_1) \subseteq Q$, 因为 Q 是 M的一个 n元弱经典素子超模, 且 $g(r_1, 1, p_1) \nsubseteq Q$。若 $0 \in g(r_1^2, p_1) \subseteq Q$, 则 $g(r_2, 1, p_1) \subseteq Q$, 因为 $g(r_1^2, p_1)$ 不是 Q的经典 $(3,3)$-零元。同理, 可得 $g(r_1, 1, p_2) \subseteq Q$。因此, 我们有 $g(r_1^2, f(p_1^2, 0)) \subseteq Q$。这意味着对于某个 $i \in \{1,2\}$, 有 $g(r_i, 1, f(p_1^2, 0)) \subseteq Q$, 即 $f(g(r_i, 1, p_1)\ g(r_i, 1, p_2), 0) \subseteq Q$。若 $i = 1$, 则得到 $g(r_1, 1, p_1) \subseteq Q$, 这与假设矛盾。若 $i = 2$, 则得到 $g(r_2, 1, p_2) \subseteq Q$, 矛盾。因此, 对于某个 $i \in \{1,2\}$, 有 $g(r_i, 1, P) \subseteq Q$。□

设 Q 是 n 元弱经典素子超模, 且它是 R 上的 (m,n)-超模 M 的一个子超模。令 $g(I_1^{n-1}, P) \subseteq Q$, 其中 I_1^{n-1} 是 R 的某些超理想, P 是 M 的某个子超模。若对于每个 $r_i \in I_i$ 以及 P 的每个非空子集 X, $g(r_1^{n-1}, X)$ 都不是 Q 的经典 (m,n)-零元, 则称 Q 是关于 $g(I_1^{n-1}, P)$ 的自由经典 (m,n)-零元。

推论 4.8. 设 Q 是 R 上的 $(3,3)$-超模 M 的一个 3 元弱经典素子超模, 并令 $g(I_1^2, P) \subseteq Q$, 其中 I_1^2 是 R 的某些超理想, P 是 M 的某个子超模。若 Q 是关于 $g(I_1^2, P)$ 的自由经典 $(3,3)$- 零元, 则对于某个 $i \in \{1,2\}$, 有 $g(I_i, 1, P) \subseteq Q$。

证明。设对每个 $i \in \{1,2\}$, $g(I_i, 1, P) \nsubseteq Q$。那么, 对每个 $i \in \{1,2\}$, 存在 $r_i \in I_i$ 使得 $g(r_i, 1, P) \nsubseteq Q$。因此我们有 $g(r_1^2, P) \subseteq Q$。根据定理 4.7, 由于 Q 是相对于 $g(I_1^2, P)$ 的一个自由经典 $(3,3)$-零元, 对于某个 $i \in \{1,2\}$, 我们得到 $g(r_i, 1, P) \subseteq Q$。这就产生了矛盾。因此, 对于某个 $i \in \{1,2\}$, $g(I_i, 1, P) \subseteq Q$。□

定理 4.9。设 M 是 R 上的一个 (m,n)-超模, 而 $Q_{g(r_1^{n-1}, a}$ 是其一个 n-元弱经典素子超模。那么, 对所有 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M$, $Q_{g(r_1^{n-1}, a)} \subseteq F_{g(r_1^{n-1}, a)} \cup Q_{g(r_1, 1^{(n-2)}, a)} \cup \cdots \cup Q_{g(r_{n-1}, 1^{(n-2)}, a)}$。

证明. 假设 $a \in M$ and$r_1^{n-1} \in R$. 假设 $x \in Q_{g(r_1^{n-1}, a)}$. 这意味着 $g(x, 1^{(n-2)}, g(r_1^{n-1}, a)) \subseteq Q$. 如果 $0 \in g(x, 1^{(n-2)}, g(r_1^{n-1}, a))$, 则 $x \in F_{g(r_1^{n-1}, a)}$. 如果 $0 \notin g(x, 1^{(n-2)}, g(r_1^{n-1}, a)) = g(r_1^{n-1}, g(x, 1^{(n-2)}, a))$, 则我们得出 $g(r_i, 1^{(n-2)}, g(x, 1^{(n-2)}, a) = g(x, 1^{(n-2)}, g(r_i, 1^{(n-2)}, a)) \subseteq Q$, 其中某个 $1 \leq i \leq n-1$, 因为 Q 是 M 的 n 元弱经典素子超模。这意味着 $x \in Q_{g(r_i, 1^{(n-2)}, a)}$, 也就是说 $Q_{g(r_1^{n-1}, a)} \subseteq F_{g(r_1^{n-1}, a)} \cup Q_{g(r_1, 1^{(n-2)}, a)} \cup \cdots \cup Q_{g(r_{n-1}, 1^{(n-2)}, a)}$, 证明完毕。□

回顾 [2], 如果 (M_1, f_1, g_1) 和 (M_2, f_2, g_2) 是 R 上的两个 (m,n)-超模, 那么 R 上的 (m,n)-超模 $(M_1 \times M_2, f_1 \times f_2, g_1 \times g_2)$ 定义为

由 m 元超运算 $f_1 \times f_2$ 和 n 元外部超运算 $g_1 \times g_2$ 定义如下:

$$f_1 \times f_2((a_1, b_1), \cdots, (a_m, b_m)) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in f_1(a_1^m), x_2 \in f_2(b_1^m)\}$$
$$g_1 \times g_2(r_1^{n-1}, (a, b)) = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in g_1(r_1^{n-1}, a), y_2 \in g_2(r_1^{n-1}, b)\}$$

定理4.10. 设 (M_1, f_1, g_1) 和 (M_2, f_2, g_2) 是 R 上的两个 (m, n)-超模，且 Q_1 是 M_1 的真子超模。那么， $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的一个 n 元弱经典素子超模，当且仅当 Q_1 是 M_1 的一个 n 元弱经典素子超模，并且对于 $r_1^{n-1} \in R$, $a_1 \in M_1$，存在 $0 \in g_1(r_1^{n-1}, a_1)$，使得对所有 $1 \leq i \leq n-1$， $g(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \nsubseteq Q_1$ 都蕴含 $g'(r_1^{n-1}, 1) \in F_{a_2}$。

证明. ($\Longrightarrow$) 设 $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的一个 n 元弱经典素子超模。假设对于某个 $r_1^{n-1} \in R$ 和某个 $a_1 \in M_1$，有 $0 \notin g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq Q_1$。那么我们有 $(0, 0) \notin g_1 \times g_2(r_1^{n-1}, (a_1, 0)) \subseteq Q_1 \times M_2$。因此，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$， $g_1 \times g_2(r_i, 1^{(n-1)}, (a_1, 0)) = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1)\ y_2 \in g_2(r_i, 1^{(n-2)}, 0)\} \subseteq Q_1 \times M_2$，这意味着 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$。于是，$Q_1$ 是 M_1 的一个 n 元弱经典素子超模。假设对于 $r_1^{n-1} \in R$, $a_1 \in M_1$，有 $0 \in g_1(r_1^{n-1}, a_1)$，且对所有 $1 \leq i \leq n-1$， $g(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \nsubseteq Q_1$。反设对于某个 $a_2 \in M_2$，有 $g'(r_1^{n-1}, 1) \notin F_{a_2}$。这意味着 $0 \notin g_2(g'(r_1^{n-1}, 1)\ 1^{(n-2)}, a_2)$。由此可得 $(0, 0) \notin g_1 \times g_2(r_1^{n-1}, (a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times M_2$。由于 $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的一个 n 元弱经典素子超模，我们得到 $g_1 \times g_2(r_i, 1^{(n-2)}, (a_1, a_2)) = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1)\ y_2 \in g_2(r_i, 1^{(n-2)}, a_2)\} \subseteq Q_1 \times M_2$，这意味着 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$，矛盾。因此，对所有 $a_2 \in M_2$，有 $g'(r_1^{n-1}, 1) \in F_{a_2}$。

($\Longleftarrow$) 令 $(0, 0) \notin g_1 \times g_2(r_1^{n-1}, (a_1, a_2)) = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in g_1(r_1^{n-1}, a_1)\ y_2 \in g_2(r_1^{n-1}, a_2)\} \subseteq Q_1 \times M_2$，其中某个 $r_1^{n-1} \in R$ 且 $(a_1, a_2) \in Q_1 \times M_2$。若 $0 \notin g_1(r_1^{n-1}, a_1)$，则得到 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$，其中某个 $1 \leq i \leq n-1$，这意味着 $g_1 \times g_2(r_i, 1^{(n-2)}, (a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times M_2$，其中某个 $1 \leq i \leq n-1$，如所需。若 $0 \in g_1(r_1^{n-1}, a_1)$，则得到 $0 \notin g_2(r_1^{n-1}, a_2)$，这意味着 $g'(r_1^{n-1}, 1) \notin F_{a_2}$。于是我们得出 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$，其中某个 $1 \leq i \leq n-1$，这意味着$g_1 \times g_2(r_i, 1^{(n-2)}, (a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times M_2$。因此， $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的 n 元弱经典素超子模。□

设（M_1， f_1， g_1）和（M_2， f_2， g_2）分别是关于（R_1， f_1'， g_1'）和（R_2， f_2'， g_2'）的两个（m， n）-超模。则关于（$R_1 \times R_2$， $f_1' \times f_2'$， $g_1' \times g_2'$）的（m， n）-超模（$M_1 \times M_2$, $f_1 \times f_2$， $g_1 \times g_2$）由 m 元超运算 $f_1 \times f_2$ and$n$ 元外超运算 $g_1 \times g_2$ 定义如下:

$f_1 \times f_2$（（a_1， b_1） $\cdots$， （a_m， b_m））＝{（x_1， x_2） | $x_1 \in f_1$（a_1^m） $x_2 \in f_2$（b_1^m）}
$g_1 \times g_2$（（r_1， s_1） $\cdots$， （r_{n-1}， s_{n-1}）， （a， b））＝{（y_1， y_2） | $y_1 \in g_1$（r_1^{n-1}， a） $y_2 \in g_2$（s_1^{n-1}， b）}对所有 a_1^m、 $a \in M_1$、 b_1^m、 $b \in M_2$、 $r_1^{n-1} \in R_1$ 和 $s_1^{n-1} \in R_2$ 均成立。

定理 4.11. 设 $(M_1 \times M_2, f_1 \times f_2, g_1 \times g_2)$ 是定义在 $(R_1 \times R_2, f_1' \times f_2', g_1' \times g_2')$ 上的 (m, n)-超模，且 (M_1, f_1, g_1) 是定义在 (R_1, f_1', g_1') 上的 (m, n)-超模，而 (M_2, f_2, g_2) 是定义在 (R_2, f_2', g_2') 上的 (m, n)-超模。设 $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的真子超模。则以下命题等价:

(1) Q_1 是 M_1的 n元经典素超子模。(2) $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$的 n元经典素超子模。(3) $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$的 n元弱经典素子超模。

证明。(1) $\Longrightarrow$(2) 令 $g_1 \times g_2((r_1, s_1) \cdots (r_{n-1}, s_{n-1}), (a, b)) = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in g_1(r_1^{n-1}, a)\ y_2 \in g_2(s_1^{n-1}, b)\} \subseteq Q_1 \times M_2$，其中某个$(r_1, s_1) \cdots$、$(r_{n-1}, s_{n-1}) \in R_1 \times R_2$、$(a, b) \in M_1 \times M_2$满足条件。因此 $g_1(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q_1$。由于 Q_1 是 M_1的 n元经典素超子模，我们得出 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q_1$，其中存在某个$1 \leq i \leq n-1$，这意味着 $g_1 \times g_2((r_i, s_i), (1, 1)^{n-2}, (a, b)) \subseteq Q_1 \times M_2$。这表明 $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的 n 元经典素超子模。

(2) $\Rightarrow$(3) 显然。(3) $\Longrightarrow$ (1) 假设对于某些 $r_1^{n-1} \in R_1$ 和 $a \in M_1$，$g_1(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q_1$。取 $0 \neq b \in M_2$。则 $(0, 0) \notin g_1 \times g_2((r_1, s_1) \cdots, (r_{n-1}, s_{n-1}), (a, b)) \subseteq Q_1 \times M_2$。由于 $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的一个 n 元弱经典素子超模，因此对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有 $g_1 \times g_2((r_i, s_i), (1, 1)^{(n-2)}, (a, b)) \subseteq Q_1 \times M_2$，这表明 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q_1$。因此，$Q_1$ 是 M_1 的一个 n 元经典素子超模。□

5. n-ary ϕ-classical prime subhypermodule

本节引入了 R 上的 (m, n)-超模中 n 元 ϕ-经典素子超模的概念。定理中得到的结果似乎对研究 n 元 ϕ-经典素子超模起着重要作用。

定义 5.1. 设 $\mathcal{SH}(M)$ 为 R 和 ϕ 上的 (m, n)-超模 M 的所有子超模构成的集合，且 $\mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。若真子超模 Q 属于 M，则称其为 n 元 ϕ-经典素子超模，如果 $r_1^{n-1} \in R$ 且 $a \in M$, $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$ 蕴含存在某个 $1 \leq i \leq n-1$ 使得 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。

例5.2. 假设 $\mathbb{Z}$ 是整数环，且$(\mathbb{Z}, f, g)$是 [2]的例3.5中定义在$(\mathbb{Z}, h, k)$上的(m, n)-超模。对于 $\mathbb{Z}$的每个超子模 N，令 $S_N = \{r \in \mathbb{Z} \mid g(r, 1^{(n-2)}, \mathbb{Z}) \subseteq N\}$。考虑函数$\phi$：$\mathcal{SH}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{SH}(\mathbb{Z}) \cup \{\varnothing\}$，定义为：对于 $\mathbb{Z}$的每个超子模 N，$\phi(N) = g(S_N, 1^{(n-2)}, N)$。则 $\mathbb{Z}$ 的超子模 $g(\mathbb{Z}^{n-1}, p)$是一个 n元 ϕ-经典素超子模。

设 N 是 R 上的(m, n)-超模 M 的一个超子模，且ϕ：$\mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$是一个函数。定义映射 ϕ_N：$\mathcal{SH}(M/N) \to \mathcal{SH}(M/N) \cup \{\varnothing\}$为 $\phi_N(K/N) = f(\phi(K)\ N, 0^{(m-2)})/N$，对所有满足 $N \subseteq K$的 $K \in \mathcal{SH}(M)$都成立。若 $\phi_N(K) = \varnothing$，则考虑 $\phi_N(K/N) = \varnothing$。

定理5.3。设 $N \subseteq Q$ 是 M上的(m, n)-超模的真超子模，且 $\mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$ 是函数。如果 Q 是 M的 n元 ϕ-经典素超子模，那么 Q/N是M/N的 ϕ_N-经典素超子模。

证明。设 $G(r_1^{n-1}, f(a, N, 0^{(n-m)})) \subseteq Q/N - \phi_N(Q/N)$。因此 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$，这意味着对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，因为 Q 是 M的 n元 ϕ-经典素超子模。因此 $G(r_i, 1^{(n-2)}, f(a, N, 0^{(m-2)})) \subseteq Q/N$。这表明 Q/N是 M/N的 ϕ_N-经典素超子模。□

定理 5.4. 设 N 和 Q 是 m 上的 (n,M)-超模 R 的真超子模，且 $N \subseteq Q$。假设 ϕ：$\mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。则有以下结论：

(1) 若 Q 是 M 的一个 n-元 ϕ-经典素超子模，且 $\phi(Q) \subseteq N$，则 Q/N 是 M/N 的一个 n-元弱经典素子超模。(2) 若 Q/N 是 M/N 的一个 n-元 ϕ_N-经典素超子模，且 $N \subseteq \phi(Q)$，则 Q 是 M 的一个 n-元 ϕ-经典素超子模。(3) 若 N 是 M 的一个 n-元 ϕ-经典素超子模，且 $\phi(N) \subseteq \phi(Q)$，并且 Q/N 是 M/N 的一个 n-元弱经典素子超模，则 Q 是 M 的一个 n-元 ϕ-经典素超子模。

证明。(1) 设 $0 \notin G(r_1^{n-1}, f(a, N, 0^{(m-2)})) \subseteq Q/N$，其中 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M$。由于 $\phi(Q) \subseteq N$，我们得出 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$。由于 Q 是 M 的一个 n 元 ϕ-经典素超子模，我们得到 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，其中某个$1 \leq i \leq n-1$。这意味着 $G(r_i, 1^{(n-2)}, f(a, N, 0^{(m-2)})) \subseteq Q/N$。因此，$Q/N$ 是 M/N 的一个 n 元弱经典素子超模。

(2) 设 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$，其中某个 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M$。那么我们得出 $G(r_1^{n-1}, f(a, N, 0^{(m-2)})) \subseteq Q/N - \phi_N(Q/N) = Q/N - (\phi(Q)/N)$。由于 Q/N 是 M/N 的一个 n 元 ϕ_N-经典素超子模，我们得到$G(r_i, 1^{(n-2)}, f(a, N, 0^{(m-2)})) \subseteq Q/N$，其中某个 $1 \leq i \leq n-1$。由此可得$g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。因此，$Q$ 是 M 的一个 n 元 ϕ-经典素超子模。

(3) 假设对于某些 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M$，有 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$。由 $\phi(N) \subseteq \phi(Q)$，可得 $g(r_1^{n-1}, a) \nsubseteq \phi(N)$。令 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq N$。由于 N 是 M 的一个 n-元 ϕ-经典素超子模，我们得到对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，$g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq N \subseteq Q$。现在，令 $g(r_1^{n-1}, a) \nsubseteq N$。这意味着 $0 \notin G(r_1^{n-1}, f(a, N, 0^{(m-2)})) \subseteq Q/N$，因此，由于 Q/N 是 M/N 的一个 n-元弱经典素子超模，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有 $G(r_i, 1^{(n-2)}, f(a, N, 0^{(m-2)})) \subseteq Q/N$。这表明对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，$g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。因此，$Q$ 是 M 的一个 n-元 ϕ-经典素超子模。□

根据定理 5.4，可得以下结果。

推论 5.5. 设 Q 是一个 (m, n)-超模 M 在 R 上的真子超模，且 $\phi: \mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。那么以下条件等价:

(1) Q 是 M 的一个 n-元 ϕ-经典素超子模。(2) $Q/\phi(Q)$ 是 $M/\phi(Q)$ 的一个 n-元弱经典素超子模。

定理 5.6. 设 Q 是一个 (m, n)-超模 M 在 R 上的真子超模，且 $\phi: \mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$ 和 $\phi': \mathcal{HI}(R) \longrightarrow \mathcal{HI}(R) \cup \{\varnothing\}$ 是两个函数，使得 $\mathcal{HI}(R)$ 是 R 的所有超理想的集合。那么以下结论成立:

(1) 设 Q 是 M 的一个 n 元 ϕ 经典素超子模。则对于 $r_1^n \in R$ 以及所有满足 $\phi(Q)_a \subseteq \phi'(Q_a)$ 的 $a \in M - Q$，若 $g'(r_1^n) \in Q_a - \phi'(Q_a)$，则存在某个 $1 \leq i \leq n$ 使得 $r_i \in Q_a$。(2) 若对于某个 $r_1^n \in R$ 以及每个满足 $\phi'(Q_a) \subseteq \phi(Q)_a$ 的 $a \in M - Q$，$g'(r_1^n) \in Q_a - \phi(Q_a)$ 蕴含存在某个 $1 \leq i \leq n$ 使得 $r_i \in Q_a$，则 Q 是 M 的一个 n 元 ϕ 经典素超子模。

证明。（1）设 Q 是 M 的 ϕ 元经典素超子模。取 $a \in M - Q$，使得 $\phi(Q)_a \subseteq \phi'(Q_a)$。假设对于某个 $r_1^n \in R$，有 $g'(r_1^n) \in Q_a - \phi'(Q_a)$。这意味着 $g(g'(r_1^n)\ 1^{(n-2)}, a) = g(r_1^{n-2}, g'(r_{n-1}^n, 1^{(n-2)})\ a) \subseteq Q - \phi(Q)$。由于 Q 是 M 的 n 元 ϕ 经典素超子模，因此 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$ 对于

某个 $1 \leq i \leq n-2$，或者 $g(g'(r_{n-1}^n, 1^{(n-2)})\ 1^{(n-2)}, a) = g(r_{n-2}, r_n, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。在第二种可能性下，对于某个 $i \in \{n-1, n\}$，我们有 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。于是我们得出，对于某个 $1 \leq i \leq n$，有 $r_i \in Q_a$，证毕。

(2) 假设对于某些 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M$，$g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$。令 $a \in Q$。则结论成立。若 $a \notin Q$。由 $g'(r_1^{n-1}, 1) \in Q_a - \phi'(Q_a)$ 可知，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有 $r_i \in Q_a$。因此 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。所以，$Q$ 是 M 的一个 n 元 ϕ 经典素超子模。□

定理 5.7. 设 (M_1, f_1, g_1) 和 (M_2, f_2, g_2) 是 R 上的两个 (m,n)-超模，并且 $h: M_1 \longrightarrow M_2$ 是一个满同态。设 $\phi_1: \mathcal{SH}(M_1) \longrightarrow \mathcal{SH}(M_1) \cup \{\varnothing\}$ 和 $\phi_2: \mathcal{SH}(M_2) \longrightarrow \mathcal{SH}(M_2) \cup \{\varnothing\}$ 是两个函数。

(1) 若 Q_2 是 M_2 的一个 n 元 ϕ_2-经典素超子模，且 $\phi_1(h^{-1}(Q_2)) = h^{-1}(\phi_2(Q_2))$，则 $h^{-1}(Q_2)$ 是 M_1 的一个 n 元 ϕ_1-经典素超子模。(2) 若 Q_1 是 M_1 的一个 n 元 ϕ_1-经典素超子模，且 $Ker(h) \subseteq Q_1$ 并且 $\phi_2(h(Q_1)) = h(\phi_1(Q_1))$，则 $h(Q_1)$ 是 M_2 的一个 n 元 ϕ_2-经典素超子模。

证明。(1) 假设对于某个 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a_1 \in M_1$，有 $g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq h^{-1}(Q_2) - \phi_1(h^{-1}(Q_2))$。这意味着 $h(g_1(r_1^{n-1}, a_1) = g_2(r_1^{n-1}, h(a_1)) \subseteq Q_2$。由 $\phi_1(h^{-1}(Q_2)) = h^{-1}(\phi_2(Q_2))$，可得 $g_2(r_1^{n-1}, h(a_1)) \nsubseteq \phi_2(Q_2)$。由于 Q_2 是 M_2 的一个 n 元 ϕ_2-经典素超子模，且 $g_2(r_1^{n-1}, h(a_1)) \subseteq Q_2 - \phi_2(Q_2)$，我们得到，对于某个 $1 \leq i \leq i-1$，有 $g_2(r_i, 1^{(n-2)}, h(a_1)) \subseteq Q_2$。于是 $h(g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_2$，因此 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq h^{-1}(Q_2)$。故 $h^{-1}(Q_2)$ 是 M_1 的一个 n 元 ϕ_1-经典素超子模。

(2) 假设对于某些 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a_2 \in M_2$，$g_2(r_1^{n-1}, a_2) \subseteq h(Q_1) - \phi_2(h(Q_1))$。由于 h 是满同态，对于某个 $a_1 \in M_1$，我们有 $h(a_1) = a_2$。因此，$h(g_1(r_1^{n-1}, a_1)) = g_2(r_1^{n-1}, h(a_1)) = g_2(r_1^{n-1}, a_2) \subseteq h(Q_1)$，于是 $g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq Q_1$。由 $\phi_2(h(Q_1)) = h(\phi_1(Q_1))$，可得 $g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq Q_1 - \phi(Q_1)$。由于 Q_1 是 M_1 的一个 n 元 ϕ_1-经典素超子模，我们得出，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，$g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$。因此，我们得到 $h(g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1)) = g_2(r_i, 1^{(n-2)}, h(a_1)) = g_2(r_i, 1^{(n-2)}, a_2) \subseteq h(Q_1)$。因此，$h(Q_1)$ 是 M_2 的一个 n 元 ϕ_2-经典素超子模。□

定理 5.8. 设 Q 是 R 上的 (m,n)-超模 M 的真子超模，且 $\phi: \mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。若 Q 是 M 的 n 元 ϕ-经典素超子模，则对所有 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M$，$Q_{g(r_1^{n-1}, a)} \subseteq \phi(Q)_{g(r_1^{n-1}, a)} \cup Q_{g(r_1, 1^{(n-2)}, a)} \cup \cdots \cup Q_{g(r_{n-1}, 1^{(n-2)}, a)}$。

证明。令 $x \in Q_{g(r_1^{n-1}, a)}$。这意味着 $g(x, 1^{(n-2)}, g(r_1^{n-1}, a)) \subseteq Q$。令 $g(x, 1^{(n-2)}, g(r_1^{n-1}, a)) \subseteq \phi(Q)$。这意味着 $x \in \phi(Q)_{g(r_1^{n-1}, a)}$，如所需。因此，我们考虑 $g(x, 1^{(n-2)}, g(r_1^{n-1}, a)) \nsubseteq \phi(Q)$。由于 Q 是 n元 ϕ经典素超模类的 M，且 $g(x, 1^{(n-2)}, g(r_1^{n-1}, a)) = g(r_1^{n-2}, g'(r_{n-1}, x, 1^{(n-2)})\ a) \subseteq Q - \phi(Q)$，我们得出，对于某个 $1 \leq i \leq n-2$，有 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，或者 $g(g'(r_{n-1}, x, 1^{(n-2)})\ 1^{(n-2)}, a) = g(x, 1^{(n-2)}, g(r_{n-1}, 1^{(n-2)}, a)) \subseteq Q$。在前一种情况下，我们得到 $g(x, 1^{(n-2)}, g(r_i, 1^{(n-1)}, a)) \subseteq Q$，这意味着对于某个 $1 \leq i \leq n-2$有 $x \in Q_{g(r_i, 1^{(n-2)}, a)}$。在后一种情况下，我们得到 $x \in Q_{g(r_{n-1}, 1^{(n-2)}, a)}$。于是断言得证。□

下面的定理刻画了 M 的 n元 ϕ经典素超模。

定理 5.9. 设 Q 是 (m,n)-超模 M在 R上的真子超模，且 ϕ: $\mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$是一个函数。那么，当且仅当对于$R$的每个超理想 I_1^{n-1}以及 $a \in M$，若 $g(I_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$，则存在某个$1 \leq i \leq n-1$使得 $g(I_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$， Q是 M的 n元ϕ-经典素超子模。

证明. ($\Longrightarrow$) 假设对于某些R和 $a \in M$的超理想 I_1^{n-1}，有 $g(I_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$，但对于所有 $1 \leq i \leq n-1$，均有 $g(I_i, 1^{(n-2)}, a) \nsubseteq Q$。那么，对每个 $1 \leq i \leq n-1$，存在$r_i \in I_i$使得 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \nsubseteq Q$。由于 Q是 M的 n元ϕ-经典素超子模，且 $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$，我们得出结论：存在某个 $1 \leq i \leq n-1$使得 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，这与假设矛盾。

($\Longleftarrow$) 假设对于某些 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M$， $g(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$。那么我们有 $g(\langle r_1 \rangle, \cdots, \langle r_{n-1} \rangle, a) \subseteq Q$。由于 $g(r_1^{n-1}, a) \nsubseteq \phi(Q)$，因此可得$g(\langle r_1 \rangle, \cdots, \langle r_n \rangle, a) \nsubseteq \phi(Q)$。根据假设，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，我们有 $g(\langle r_i \rangle, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。因此可得 $g(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，这意味着 Q 是 M 的一个n元 ϕ-经典素超子模。□

回顾 [2] 中的定义，环 R 上的 (m,n)-超模 M 称为乘法 (m,n)-超模，若对 M 的每个超子模 K，都存在 R 的一个超理想 I，使得 $K = g(I, 1^{(n-2)}, M)$。设 K_i 是乘法 (m,n)-超模 M 的一个超子模，对每个 $1 \leq i \leq n-1$，若存在 R 的某个超理想 I_i 使得 $K_i = g(I_i, 1^{(n-2)}, M)$。则 K_1、 $\cdots$、 K_n 的乘积记为 $g(K_1^n)$，定义为 $g(K_1^n) = g(g'((I_1^n)\ 1^{(n-2)}, M)$。此外，对每个 $1 \leq i \leq n-1$ 以及任意 $a \in M$，我们定义 $g(K_1^{n-1}, a) = g(I_1^{n-1}, a)$，且$g(K_i, M^{(n-2)}\ a) = g(I_i, 1^{(n-2)}, a)$。

定理 5.10. 设 Q 是乘法型 (m,n)-超模 M（定义在 R 上）中的真子超模，且 ϕ: $\mathcal{SH}(M) \longrightarrow \mathcal{SH}(M) \cup \{\varnothing\}$ 是一个函数。那么， Q 是 M 的 n 元 ϕ-经典素超子模，当且仅当对于 M 的某些超子模 Q_1^{n-1} 和 $a \in M$，若 $g(Q_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$，则存在某个 $1 \leq i \leq n-1$ 使得 $g(Q_i, M^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。

证明. ($\Longrightarrow$) 假设对于 M 的某些超子模 Q_1^{n-1} 和 $a \in M$，有 $g(Q_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$。由于 M 是乘法型 (m,n)-超模，因此存在 R 的某些超理想 I_1^{n-1}，使得对每个 $1 \leq i \leq n-1$，都有 $Q_i = g(I_i, 1^{(n-2)}, M)$。因此，我们有 $g(Q_1^{n-1}, a) = g(I_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$。由于 Q 是 M 的 n 元 ϕ-经典素超子模，根据定理 5.9，存在某个 $1 \leq i \leq n-1$，使得 $g(I_i, 1^{(n-1)}, a) \subseteq Q$。这意味着 $g(Q_i, M^{(n-2)}, a) \subseteq Q$，得证。

($\Longleftarrow$) 对于某些超理想 I_1^{n-1}，设 R 和 $a \in M$ 的 $g(I_1^{n-1}, a)$ 满足 $\subseteq Q - \phi(Q)$。现在，对每个 $1 \leq i \leq n-1$，令 $Q_i = g(I_i, 1^{(n-2)}, M)$。于是有 $g(Q_1^{n-1}, a) \subseteq Q - \phi(Q)$，这意味着对于某个 $1 \leq i \leq n-1$， $g(Q_i, M^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。因此 $g(I_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q$。由定理 5.9，故 Q 是 M 的 n-元 ϕ-经典素超子模。□

定理 5.11. 设 $(M_1 \times M_2, f_1 \times f_2, g_1 \times g_2)$ 是 (m,n)-超模，其定义在 $(R_1 \times R_2, f_1' \times f_2', g_1' \times g_2')$ 上；(M_1, f_1, g_1) 是 (m,n)-超模，其定义在 (R_1, f_1', g_1') 上；且 (M_2, f_2, g_2) 是 (m,n)-超模，其定义在 (R_2, f_2', g_2') 上。令ϕ: $\mathcal{SH}(M_1 \times M_2) \longrightarrow \mathcal{SH}(M_1 \times M_2) \cup \{\varnothing\}$ 为一个函数。如果 Q_1是一个 n元弱

经典素超子模，且属于 M_1，则 $Q_1 \times M_2$是 n元 ϕ-经典素超子模，且属于 $M_1 \times M_2$。

证明。设对于某个 $(r_1, s_1) \cdots、(r_{n-1}, s_{n-1}) \in R_1 \times R_2$和$(a, b) \in M_1 \times M_2$，有 $g_1 \times g_2((r_1, s_1) \cdots (r_{n-1}, s_{n-1}), (a, b)) = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in g_1(r_1^{n-1}, a)\ y_2 \in g_2(s_1^{n-1}, b)\} \subseteq Q_1 \times M_2 - \phi(Q_1 \times M_2)$。因此，$0 \notin g_1(r_1^{n-1}, a) \subseteq Q_1$。由于 Q_1是 M_1的一个 n元弱经典素子超模，我们得出 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a) \subseteq Q_1$，其中 $1 \leq i \leq n-1$，这意味着 $g_1 \times g_2((r_i, s_i), (1, 1)^{n-2}, (a, b)) \subseteq Q_1 \times M_2$。这表明 $Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$的一个 n元 ϕ经典素子超模。□

定理5.12. 假设 $(M_1 \times M_2, f_1 \times f_2, g_1 \times g_2)$ 是 (m, n)-超模，且其上的 (M_1, f_1, g_1) 是 (m, n)-超模，而 (M_2, f_2, g_2) 是 (m, n)-超模。设$\phi_1 : \mathcal{SH}(M_1) \longrightarrow \mathcal{SH}(M_1) \cup \{\varnothing\}$ 和 $\phi_2 : \mathcal{SH}(M_2) \longrightarrow \mathcal{SH}(M_2) \cup \{\varnothing\}$ 是两个函数，满足 $\phi_2(M_2) = M_2$。那么，$Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的一个 n-元 $\phi_1 \times \phi_2$-经典素超子模，当且仅当 Q_1 是 M_1的一个 n-元 ϕ_1-经典素超子模。

证明。($\Longrightarrow$) 假设 $Q_1 \times M_2$ 是 n-元 $\phi_1 \times \phi_2$-经典素超子模 $M_1 \times M_2$。令 $g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq Q_1 - \phi_1(Q_1)$，其中 $r_1^{n-1} \in R$和 $a_1 \in M_1$。因此，对于所有 $a_2 \in M_2$，我们有 $g_1 \times g_2((r_1, 1) \cdots, (r_{n-1}, 1)(a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times M_2 - \phi_1 \times \phi_2(Q_1 \times M_2) = Q_1 \times M_2 - (\phi_1(Q_1) \times \phi_2(M_2))$。由于$Q_1 \times M_2$ 是 n-元 $\phi_1 \times \phi_2$-经典素超子模 $M_1 \times M_2$，我们得到 $g_1 \times g_2((r_i, 1), (1, 1)^{(n-2)}, (a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times M_2$，其中 $1 \leq i \leq n-1$，这意味着 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$。这表明 Q_1是 n-元 ϕ_1-经典素超子模 M_1。

($\Longleftarrow$) 令 Q_1 为 M_1的一个 n元 ϕ_1经典素超子模。假设 $g_1 \times g_2((r_1, s_1) \cdots, (r_{n-1}, s_{n-1})(a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times M_2 - \phi_1 \times \phi_2(Q_1 \times M_2)$。由 $\phi_2(M_2) = M_2$，可得 $g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq Q_1 - \phi_1(Q_1)$。于是，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，有$g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$。因此我们得出，$g_1 \times g_2((r_i, s_i), (1, 1)^{(n-2)}, (a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times M_2$。由此，$Q_1 \times M_2$ 是 $M_1 \times M_2$的一个 n元$\phi_1 \times \phi_2$经典素超子模。□

定理 5.13. 设 $(M_1 \times M_2, f_1 \times f_2, g_1 \times g_2)$ 是 (m, n) 上的超模，且 (M_1, f_1, g_1) 是 (R_1, f_1', g_1') 上的 (m, n)-超模，(M_2, f_2, g_2) 是 (R_2, f_2', g_2') 上的 (m, n)-超模。假设 $\phi_1 : \mathcal{SH}(M_1) \longrightarrow \mathcal{SH}(M_1) \cup \{\varnothing\}$ 和 $\phi_2 : \mathcal{SH}(M_2) \longrightarrow \mathcal{SH}(M_2) \cup \{\varnothing\}$ 是两个函数。若 $Q_1 \times Q_2$ 是 n元 $\phi_1 \times \phi_2$-经典素超子模，则 Q_1 是 n元 ϕ_1-经典素超子模，且 Q_2 是 n元 ϕ_2-经典素超子模。

证明。设 $Q_1 \times Q_2$ 是 $M_1 \times M_2$的一个 n-元 $\phi_1 \times \phi_2$-经典素子超模。假设对于某些 $r_1^{n-1} \in R$ 和 $a \in M_1$，$g_1(r_1^{n-1}, a_1) \subseteq Q_1 - \phi_1(Q_1)$。取 $a_2 \in Q_2$。因此，$g_1 \times g_2((r_1, 1) \cdots, (r_{n-1}, 1)(a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times Q_2 - \phi_1 \times \phi_2(Q_1 \times Q_2)$。于是，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，我们得到 $g_1 \times g_2((r_i, 1), (1, 1)^{(n-2)}, (a_1, a_2)) \subseteq Q_1 \times Q_2$，这意味着 $g_1(r_i, 1^{(n-2)}, a_1) \subseteq Q_1$。因此，$Q_1$ 是 M_1的一个 n-元 ϕ_1-经典素子超模。类似地，我们可以证明 Q_2 是 M_2. □的一个 n-元 ϕ_2-经典素子超模

6. CONCLUSION

素子模的概念在模理论中占有重要地位，并被用于刻画某些模类。在本文中，我们在 (m,n)-超模的背景下研究了这一问题的一些推广。我们引入了 n-元经典素子超模、n-元弱经典素子超模和 n-元 ϕ-经典素子超模。针对这一方向，我们给出了这类超子模的一些刻画。未来的工作可以是定义 Krasner (m,n)-超环上 (m,n)-超模的经典主超子模、弱经典主超子模和 ϕ-经典主超子模的概念。

REFERENCES

[1] R. Ameri, M. Norouzi, Krasner (m n *European*,)-超环中的素超理想与主超理想, , ( ) - . *J. Combin.* **34** 2013 379 390 [2] R. Ameri, M. Norouzi, 关于乘法 (m,n)-超模, *European J. Combin.*, 44 (2015) 153-171. [3] R. Ameri, M. Norouzi, "关于乘法 (m, n)-超模"一文的勘误 [European J. Combin. 44 (2015) 153–171] , *European J. Combin.*, 44 (2015) 172-174. [4] R. Ameri, M. Norouzi, V. Leoreanu-fotea, 关于 (m,n)-超模的素子超模与主超子模, *European J. Combin.*, 44 (2015) 175-190. [5] S.M. Anvariyeh, S. Mirvakili, Krasner (m,n)-超环上的典范 (m,n)-超模, *Iranian J. Math. Sci. Inf.*, 7 (2) (2012) 17–34. [6] S.M. Anvariyeh, S. Mirvakili, B. Davvaz, 关于 (m,n)-元超环上的 (m,n)-元超模的基本关系, *Ars Combin.*, 94 (2010) 273–288. [7] M. Behboodi, H. Koohy, 弱素子模, *Vietnam J. Math.*, 32 (2004) 185-195. [8] Z. Belali, S.M. Anvariyeh, S. Mirvakili, 自由循环典范 (m,n)-元超模, *Tamkang J. Math.*, 42 (1) (2011) 105–118. [9] S. Corsini, 超群理论导论, *Second edition, Aviani editor, Italy*, (1993). [10] S. Corsini, V. Leoreanu, 超结构理论的应用, *Advances in Mathematics*, vol. 5, Kluwer Academic Publishers, (2003). [11] A. Y. Darani, S. Ebrahimiyan, S. Fathivee, 关于经典素超子模, *Transactions on Algebra and its Applications* **1** 1 2015 33 42 , ( ) ( ) - .

[12] B. Davvaz, T. Vougiouklis, n元超群, *Iran. J. Sci. Technol.* **30** (A2) (2006) 165-174. [13] W. Dorente, 关于广义群概念的研究 ¨uber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, *Math. Z.*, 29 (1928) 1-19. [14] V. Leoreanu, 典范 n 元超群, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 24(2008). [15] E. Kasner, 群概念的扩展（L.G. Weld 报道）, *Bull. Amer. Math.*, ( ) - . [16] *Soc.* **10** 1904 290 291 M. Krasner, 一类超环与超域, *International J. Math. and Math. Sci.*, 6 (1983) 307-312. [17] F. Marty, 关于群概念的一种推广, 8^{th} *Congress Math. Scandenaves, Stockholm* 1934 45 49 , ( ) - . [18] S. Mirvakili, B. Davvaz, (m,n)-超环的构造, *Matematicki Vesnik*, 67 (1) (2015) 1-16. [19] S. Mirvakili, B. Davvaz, Krasner (m,n)-超环上的关系, *European J. Combin.*, 31 2010 790 802 ( ) - . [20] S. Mirvakili, B. Davvaz, $\alpha^{\star}$ *Journal of*-关系在 *Algebra* **362** 2012 145 156 Krasner 超环中的应用, , ( ) - . [21] J. Mittas, 典范超结构, *Mathematica Balkanica*, 2 (1972) 165-179. [22] J. Mittas, 超结构及其某些性质, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. A-B, 269 (1969) A623-A626. [23] H. Mostafanasab, U. Tekir, K. Hakan Oral, 弱经典素子模, *Kyungpook Math. J.* 56 2016 1085 1101 , bf ( ) - .

[24] S.,Omid, B., Davvaz, 关于有序 Krasner 超环, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics* **12** 2 2017 35 49 , ( ) ( ) - .

[25] S. Omidi, B. Davvaz, 对有序半超环中特殊类型超理想的研究贡献, *J. Taibah Univ. Sci.*, (2016), http://dx.doi.org/10.1016/j.jtusci.2016.09.001.

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.*Email address*: m.anbarloei@sci.ikiu.ac.ir