arXiv:2301.00895v1 [math.OA] 2 Jan 2023

带单位 JB*-代数的强化版 Kadison 传递性定理及其在 Mazur–Ulam 性质中的应用

ANTONIO M. PERALTA 和 RADOVAN ˇSVARC

Abstract. 本文的主要结果是带单位 JB*-代数的 Kadison 传递性定理的一个强化版本。该结果表明，对于带单位 JB*-代数 $\mathfrak{A}$的双对偶 $\mathfrak{A}^{**}$中的每个极小三重幂等元 e，都存在一个自伴元 h 属于 $\mathfrak{A}$，满足 $e \leq \exp(ih)$；也就是说，e 被 $\mathfrak{A}$中酉元主连通分支内的一个酉元所控制。这一新结果为研究新的几何结果开辟了道路，例如，针对 $\mathfrak{A}$ 闭单位球的极大范数闭真面的一种 Russo–Dye 型定理：该定理断言，每个这样的 F，即 $\mathfrak{A}$ 的面，都与 $\mathfrak{A}$ 中属于 F的酉元的范数闭凸包重合。由我们的结果导出的另一项几何性质表明，从带单位 JB*-代数 $\mathfrak{A}$的单位球面到任意其他巴拿赫空间单位球面的每个满射等距映射，在每个极大真面上都是仿射的。作为最后一项应用，我们证明每个带单位 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 都满足 Mazur–Ulam 性质；也就是说，从 $\mathfrak{A}$ 的单位球面到任意其他巴拿赫空间 Y 的单位球面的每个满射等距映射，都可扩张为从 $\mathfrak{A}$ 到 Y的满射实线性等距映射。这推广了 M. Mori 和 N. Ozawa 的一项结果，他们已证明带单位 C*-代数也具有同样的性质。

1. Introduction

Kadison 传递性定理是 C*-代数理论中的一项重要结果，它出人意料地揭示了 C*-代数表示的拓扑不可约性与代数不可约性这两个概念等价。更具体地说，设A是作用在希尔伯特空间 H上的一个非零 C*-代数，并设 $\xi_1, \ldots, \xi_n$和 $\eta_b, \ldots, \eta_n$是 H中的元素，且 $\xi_1, \ldots, \xi_n$线性无关。则存在算子 $a \in A$，使得对于 j =1, . . . , n，均有 $a(\xi_j) = \eta_j$。若 $B(H)$中存在自伴算子 b，使得对于$j = 1, \ldots, n$，均有 $b(\xi_j) = \eta_j$，则可选择 a为 A中的自伴元。若 A 含有 H 上的恒等算子，且 $B(H)$中存在酉元 u，使得对于$j = 1, \ldots, n$，均有 $a(\xi_j) = \eta_j$，则可选择 a为酉元——甚至可以假设$a = \exp(iw)$，其中 $w \in A_{sa}$ 是自伴元（参见 [68, 定理 5.4.3], [81, 定理 3.13.2]或 [80, 定理 5.2.2]）。一种等价的表述指出，若 C*-代数 A 的双对偶 A^{**} 中，$p_1, \ldots, p_n$是两两正交的极小投影，则存在 A 中的两两正交的范数为一的正元$a_1, \ldots, a_k$，使得对于所有 $j = 1, \ldots, n$，均有 $a_j = p_j + (1 - p_j)a_j(1 - p_j)$（注意

Date：2022年12月24日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 47B49，次分类号 46A22、46B20、46B04、46A16、46E40。*Key words and phrases.*Tingley 问题；等距映射的延拓；含幺 JB*-代数；Russo–Dye 定理；酉元；面结构。

$(\mathbf{1}-p_j)a_j(\mathbf{1}-p_j)$ 是将 Peirce-0投影作用于 p_j 所得的值 a）。J. Hamhalter 将该结果推广至 JB*-代数的情形，见 [51, [命题 2。3]。

一种更具非结合性的方法引导我们得到一个适用于 JB*-三重系统的 Kadison 传递性定理版本，该定理由 L.J. Bunce、F.J. Fern´andez-Polo、J. Mart´ınez 及本文第一作者提出。该定理断言：对于 JB*-三重系统 E 的双对偶 E^{**} 中任意一族有限个两两正交的极小三重幂等元 $e_1, \ldots, e_n$，我们可以在 E 中找到两两正交的范数为一的元素 $a_1, \ldots, a_n$，使得对于 $j = 1, \ldots, n$ [18,, $a_j = e_j + P_0(e_j)(a_j)$，见定理 3.3]。JB*-代数和 JB*-三重系统的详细定义以及基本术语均汇集于第 1.1 小节。

Kadison 传递性定理，特别是其中关于含幺 C*-代数和酉元的论述，是 M. Mori 和 N. Ozawa 最近一项研究成果中的关键工具（参见 [79, §5]）。他们证明，每个含幺 C*-代数 A都满足 Mazur–Ulam 性质，即从 A 的单位球面到任意其他巴拿赫空间的单位球面的每个满射等距映射，都可以延拓为这两个空间之间的满射实线性等距映射。其关键改进表明，对于 e 中的每个极小偏等距 A^{**}，都存在 u 中的一个酉元 A，使得 $e \leq u$ 在偏等距的自然序下成立（即 $u - e$ 是偏等距，且 $u - e$ 与 e正交）。本文的主要目标之一，也可能是最引人注目的目标，是在更广泛的含幺 JB*-代数框架下确立这类支配结果。

为支持我们的研究计划，我们提及近期关于文献 [52] 中有限 JB*-代数和 JB*-三重系统的一项研究；其中有限性的概念与冯·诺伊曼代数中投影的通常概念一致。根据刚才引用的文献，JBW*-三重系统中的每个极小三重幂等元（即同时也是对偶巴拿赫空间的 JB*-三重系统）都是有限的 [52, 引理 3.2(e)], ; 并且对于 JBW*-代数 $\mathfrak{M}$ 中的每个有限三重幂等元e，都存在一个酉元 $u \in \mathfrak{M}$，使其满足 $e \leq u$，其中所依据的是三元幂等元上的自然序 [52, 命题 7.5]。

本文为含幺 JB*-代数建立 Kadison 传递性定理的一个强化版本，证明对于每个极小三重幂等元 e （位于其双对偶 $\mathfrak{A}^{**}$ 中），含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$中都存在一个自伴元 h， $\mathfrak{A}$ 满足$e \leq \exp(ih)$，也就是说， e 被 $\mathfrak{A}$ 中酉元的主连通分支内的一个酉元所控制（见定理 5.4）。这一结果的证明采用了全新的方法，其基础是详细研究一般 JB*-代数中由极小三重幂等元生成的 JB 子代数（参见命题5.1），并巧妙结合了 JB*-三重系统的经典 Kadison 传递性定理[18] 与近期关于有限 JBW*-代数 [52]的研究成果。

JBW*-代数中的元素缺乏极分解，这一直阻碍着将冯·诺依曼代数和 C*-代数中的经典结果推广到 Jordan 框架。我们针对含幺 JB*-代数给出的 Kadison 传递性定理强化版本，为在完全不使用极分解的情况下研究新的几何结果开辟了道路。例如，由于一般 JB*-三重系统 E 的闭单位球 $\mathcal{B}_E$的面结构取决于对其二次对偶 [34], 中紧三重幂等元的了解，特别是 $\mathcal{B}_E$ 的极大范数闭真面与 E^{**}中的极小三重幂等元一一对应，因此，我们可以将该结果首先应用于极大范数的 Russo–Dye 型定理

含幺 JB 代数的闭单位球的闭真面*-代数 $\mathfrak{A}$。具体而言，每个极大范数闭真面 F 都 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}$ 中落在 F 内的酉元的范数闭凸包（见定理 3.4 和5.5）相重合；这是一种改进版的含幺 JB*-代数 [99, 93, 91, 92, 75]Russo–Dye 定理。

本文还介绍了一些几何工具，例如研究 JB*-三元组闭单位球的真范数闭面的凸组合与其对跖面（见第2节），以及一项技术性结果，证明从单单位元 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 的单位球面到任意其他巴拿赫空间单位球面的每个满射等距映射，在每个极大真面上都是仿射的（见命题4.4和定理5.6）。尽管一般实 JBW*-代数的 Russo–Dye 型定理仍是一个未解决问题，但我们证明，实 JBW $\mathcal{K}$ 代数*中的每个凸体都具有强 Mankiewicz 性质，具体定义见 [79],,。也就是说，从 $\mathcal{K}$ 到赋范空间 L 中任意凸子集的每个满射等距映射 Y 都是仿射的（参见命题3.5，其中得到了一个更一般的结论）。

由此，我们自然地转向泛函分析中最引人注目的未解决问题之一，即 Tingley 问题：能否将两个赋范空间的单位球面之间的满射等距映射延拓为整个空间之间的满射实线性等距映射（例如，参见 [97, 31, 100, 37, 26, 84, 94, 95, 96, 88, 65, 85, 42, 43, 44, 45, 38, 39, 29, 22, 78, 79, 14, 69, 60, 7, 9, 86, 61] ，以了解围绕这一问题开展的大量研究）。即使对于维数大于或等于三的有限维巴拿赫空间，Tingley 问题仍未解决；而当所涉及的空间之一为二维时，T. Banakh 已在 2022 [8]中给出了肯定的解答。回顾一下，若巴拿赫空间 X 满足Mazur–Ulam 性质，则当 X 是所涉及的空间之一时，Tingley 问题有肯定的答案 [26]。M. Mori 和 N. Ozawa 在 [79] 中证明，每个含幺 C*-代数都满足 Mazur–Ulam 性质。[14, 69]中的主要结果证明，同样的结论也适用于 JBW*-三元组（即作为对偶巴拿赫空间的 JB*-三元组），尤其适用于 JBW*-代数。任意含幺 JB*-代数是否自动满足 Mazur–Ulam 性质（无需假设其具有对偶性），至今仍是一个自然的问题。研究这一问题花了数年时间，才发展出本文所展示的几何工具。本文最后一节将证明每个含幺 JB*-代数都满足 Mazur–Ulam 性质（见定理6.5）。

1.1. JB*-三重系统、闭单位球的面结构与强 Mankiewicz 性质的背景。

JB*代数是一种经过深入研究的数学模型，它为 C*代数提供了非结合扩展，并保留了后者的大部分几何性质。P. Jordan、J. von Neumann 和 E. Wigner 的开创性贡献 [66] 引入了 Jordan 代数，旨在为公理化量子力学提供一种合适的框架。JB 和 JB*代数的概念从泛函分析的角度开始于20世纪60年代中期和20世纪70年代得到研究（参见专著 [57, 4, 23]）。一个Jordan 代数在域 $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$)上是一个不一定满足结合律的代数 $\mathfrak{A}$ ，其（Jordan）乘积记作 $\circ$，满足 $x \circ y = y \circ x$ 以及所谓的Jordan 恒等式：

$$(x \circ y) \circ x^2 = x \circ (y \circ x^2) \text{ for all } x, y \in \mathfrak{A}.$$

Jordan 代数是幂结合的，也就是说，由单个元素 a 生成的每个子代数都是结合的。等价地，令 $a^0 = \mathbf{1}$，并令 $a^{n+1} = a \circ a^n$，则有$a^n \circ a^m = a^{n+m}$ 对所有 n， $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。（参见 [57, 引理 2.4。5] 或 [4, 推论 1。4]。）给定一个元素 $a \in \mathfrak{A}$，符号 U_a 表示定义在$\mathfrak{A}$ 上的线性映射，其定义为 $U_a(b) := 2(a \circ b) \circ a - a^2 \circ b$.

约当-巴拿赫代数 $\mathfrak{A}$ 是一个配备完备范数的 Jordan 代数，并且对所有 a, $b \in \mathfrak{A}$，该范数满足 $\|a \circ b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$。JB*-代数是配备代数对合 * 的复约当-巴拿赫代数 $\mathfrak{A}$，满足以下 Gelfand-Naimark 公理的 Jordan 版本：

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3, \ (a \in \mathfrak{A}).$$

注意到，关于自然 Jordan 乘积 $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$、相同的对合和范数，每个 C*-代数都是一个 JB*-代数。在这一特定情形下， $U_a(a^*) = aa^*a$，因此 $\|aa^*a\| = \|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$ 是 Gelfand–Naimark 公理的一种等价改写。C*-代数的 JB*-子代数称为 JC*-代数。JC*-代数类严格小于 JB*-代数类；存在无法嵌入为 C*-代数 Jordan *-子代数的例外 JB*-代数（例如，参见 [57, 推论 2.8.5]）。

JB-代数是一个实约当代数 $\mathfrak{J}$，配备满足以下条件的完备范数

$$\|a^2\| = \|a\|^2, \text{ and } \|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\| \text{ for all } a, b \in \mathfrak{J}. \tag{1}$$

JB-代数与 JB*-代数之间密不可分的联系，早在 I. Kaplansky 为 1976 年爱丁堡数学学会圣安德鲁斯学术研讨会所作的著名演讲中就已提出。J.D.M. Wright 的关键贡献表明，每个 JB-代数 $\mathfrak{J}$ 都唯一对应于某个 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ [98]的自伴部分 $\mathfrak{A}_{sa} = \{x \in \mathfrak{A} : x^* = x\}$。JBW*-代数（分别地，JBW-代数）是同时也是对偶巴拿赫空间的 JB*-代数（分别地，JB-代数）。每个 JBW*-代数（分别地，每个 JBW-代数）都含有一个单位元（见[57, §4] 或 [4]）。值得注意的是，JBW-代数恰好是 JBW*-代数的自伴部分（见 [32, 定理 3.2 和 3.4] 或 [76, 推论 2.12]）。

JB*-代数理论中的若干基本概念，从更广阔的 JB*-三重系统视角来看会更容易理解。如 [70], 所示，复巴拿赫空间的开单位球具有某些双全纯性质（即为有界对称域），而在属于 JB*-三重系统类的复巴拿赫空间中，只有其开单位球才具有这些性质。JB*-三重系统是一个复巴拿赫空间 E，其上定义了连续的三重乘积 $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : E \times E \times E \to E$，该乘积关于外变量对称且双线性，关于内变量共轭线性，并满足以下公理：

(a)（Jordan 恒等式）

$$L(a,b)L(x,y) = L(x,y)L(a,b) + L(L(a,b)x,y) - L(x,L(b,a)y)$$

对于 $a, b, x, y \in E$，其中 $L(a,b)$ 是定义在 E 上的算子，由 $x \mapsto \{a,b,x\}$ 给出；(b) 对所有 $a \in E$， $L(a,a)$ 都是具有非负谱的厄米算子；(c) 对每个 $a \in E$, $\|\{a,a,a\}\| = \|a\|^3$。

对于每个元素，符号 $Q(a)$ 表示由 $Q(a)(x) = \{a,x,a\}$ $(x \in E)$ 定义在 E 上的共轭线性算子。

一个 JBW*-三重是一个 JB*-三重，同时也是对偶巴拿赫空间。在这种情况下，它有唯一的等距预对偶，且其三重乘积分别关于弱*连续（参见 [12]）。

Harris [59, 推论 2] 证明了，C*-代数的开单位球 A 是一个有界对称域。事实上， A 在由下式给出的三重乘积下是一个 JB*-三重系：

$$\{a,b,c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a) \quad (a,b,c \in A). \tag{2}$$

刚才所述的三重乘积同样可用于在空间 $B(H,K)$ 上诱导 JB*-三重系结构；该空间由两个复希尔伯特空间 H 和 K之间的所有有界线性算子组成。形如 $B(H,K)$ 的 JB*-三重系称为第 1 型 Cartan 因子。其余五种 Cartan 因子将在下文描述。第 2 型和第 3 型嘉当因子是 $B(H)$ 的子三重系，分别类似于复对称矩阵和斜对称复矩阵。在复希尔伯特空间 H 上固定一个共轭 j （即一个共轭线性等距映射，且周期为 2），并在 $B(H)$ 上定义一个线性对合 $x \mapsto x^t := jx^*j$ ——这是 $M_n(\mathbb{C})$ 中转置运算的无限维版本。第 2 型和第 3 型嘉当因子分别是 $B(H)$ 中所有 t-斜对称算子和 t-对称算子所构成的 JB*-子三重系。

第 4 型嘉当因子又称自旋因子，是一个配有共轭 $x \mapsto \overline{x}$ 的复 Hilbert 空间M，其三重乘积和范数分别定义为

$$\{x,y,z\} = \langle x,y\rangle z + \langle z,y\rangle x - \langle x,\overline{z}\rangle \overline{y}, \tag{3}$$

and

$$\|x\|^2 = \langle x,x\rangle + \sqrt{\langle x,x\rangle^2 - |\langle x,\overline{x}\rangle|^2}, \tag{4}$$

（参见 [46, 第 3] 章）。第 5 型和第 6 型嘉当因子（也称为例外嘉当因子）是由八维凯莱数复代数上的矩阵构成的空间；第 6 型由所有 3×3 自伴矩阵组成，并具有自然的 JB*-代数结构；第 5 型则是由所有 1×2 矩阵构成的子三重系，但它不是 JB*-代数（更多详情参见 [72, 59] 以及近期参考文献 [52, 第 6.3 节和第 6. 4], [53, §3] ）。

JB*-三重系理论中的一个核心结果，即 Kaup–Banach–Stone 定理，断言 JB*-三重系之间的线性双射是等距映射，当且仅当它是三重同构（参见 [70, 命题 55]）。

从本文论证的角度来看，值得注意的是，每个 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 都是一个 JB*-三元组，其三重乘积定义如下：

$$\{a,b,c\} := (a \circ b^*) \circ c + (c \circ b^*) \circ a - (a \circ c) \circ b^* \quad (a,b,c \in \mathfrak{A}).$$

正如我们将在第 3 节中看到的，当讨论含幺 JB*-代数中的酉元时，每个含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的酉元都会导出一个 Jordan 乘积和一个对合，从而在 * 上定义一种新的含幺 JB $\mathfrak{A}$-代数结构。尽管 $\mathfrak{A}$ 中不同的酉元可能产生并非 Jordan*-同构的 JB *-代数结构（参见第 $\mathcal{PU}2$ 页的（16）），但根据 Kaup–Banach–Stone 定理，巴拿赫空间 $\mathfrak{A}$ 上只有一个三重乘积（参见第 $\mathcal{PU}3$ 页的（16））。

回到用于将每个 C*-代数 A 视为 JB*-三重系统的三重乘积（参见（2））， 我们发现，元素 $e \in A$ 是偏等距，当且仅当 $\{e,e,e\} = e$。一般 JB e -三重系统中的元素 * E 称为三重幂等元 ，如果

$\{e,e,e\}=e$。每个三重幂等元 e 在 E 中都会诱导出一个分解（称为与 e关联的 E 的 Peirce 分解），将空间 E 按算子 $L(e,e)$ 的特征子空间分解为：

$$E=E_0(e)\oplus E_1(e)\oplus E_2(e), \tag{5}$$

其中 $E_k(e):=\{x\in E\colon L(e,e)x=\frac{k}{2}x\}$ 是 E的一个子三重系，称为 Peirce-k 子空间（$k=0,1,2$）。Peirce-k 投影是指将E 自然投影到 $E_k(e)$ 上，通常记作 $P_k(e)$。Peirce 子空间中元素之间的三重乘积遵循以下模式：包含关系 $\{E_k(e)\ E_l(e)\ E_m(e)\}\subseteq E_{k-l+m}(e)$，以及恒等式 $\{E_0(e)\ E_2(e)\ E\}=\{E_2(e)\ E_0(e)\ E\}=\{0\}$，对所有 $k,l,m\in\{0,1,2\}$均成立，其中只要 $k-l+m$ 不属于 $\{0,1,2\}$，就有 $E_{k-l+m}(e)=\{0\}$。我们将这些规则称为 Peirce 算术。

值得回顾的是，将 E 投影到 $E_j(e)$ 上的投影（记作 $P_j(e)$，称为 Peirce-j 投影）对于所有 $j=0$、1、2 都是压缩映射（参见 [47]）。Peirce 投影满足以下恒等式 $P_2(e)=Q(e)^2$、$P_1(e)=2(L(e,e)-Q(e)^2)$，以及 $P_0(e)=Id_E-2L(e,e)+Q(e)^2$.

Peirce-2 子空间 $E_2(e)$ 关于分别由 $x\circ_e y=\{x,e,y\}$ 和 $x^{*_e}=\{e,x,e\}$ 给出的乘积与对合构成一个含单位的 JB*-代数。

JB*-三重系统 E 中的非零三重幂等元 e 若满足 $E_2(e)=\mathbb{C}e\neq\{0\}$，则称其为（代数意义下的）极小元。满足 $E_0(e)=\{0\}$ 的三重幂等元 $e\in E$（分别地，满足 $E_2(e)=E$ 的三重幂等元）称为完备三重幂等元（分别称为酉元）。当 C*-代数 A被视为 JB*-三重系统时，极小偏等距元、极大偏等距元和酉元分别对应于极小、完备和酉三幂等元。

已知，JB*-三重系 E 的闭单位球的极点恰好是 E 中的完备三幂等元，即

$$\partial_e(\mathcal{B}_E)=\{\text{complete tripotents in } E\}, \tag{6}$$

（参见 [16, 引理 4.1] 和 [73, 命题 3.5]）。

JB*-三重系 E 的一个（闭）子三重系 I，如果满足 $\{E,E,I\}+\{E,I,E\}\subseteq I$，则称为 E 的理想或三重理想。如果我们只能保证包含关系 $\{I,E,I\}\subseteq I$ 成立，则称 I 为 E 的内理想。

JB*-三重系具有 Gelfand 理论，可用于研究 JB*-三重系 E 中由单个元素 a 生成的子三重系。若记 $a^{[1]}:=a$，$a^{[3]}:=\{a,a,a\}$，以及 $a^{[2n+1]}:=\{a,a^{[2n-1]},a\}$（$n\in\mathbb{N}$），并将 E 中由 a 生成的 JB*-子三重系记为 E_a，则已知存在一个等距三重同构 Ψ_a，将 E_a 映射到 $C_0(\Omega_a)$ 上，其中 Ω_a 是包含于 $[0,\|a\|]$ 中的某个紧豪斯多夫空间，并且$\|a\|\in\Omega_a$，其中 $C_0(\Omega_a)$ 表示当 $0\in\Omega_a$ 时所有在 0 处消失的复值连续函数构成的巴拿赫空间，使得 $\Psi_a(a)$ 对应于 Ω_a 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入（参见[70, 引理 1.14]或 [71]）。集合 Ω_a 称为 a 的三重谱。借助这一局部 Gelfand 理论，对于每个 $f\in C_0(\Omega_a)$，我们记$f_t(a)=\Psi_a^{-1}(f)$。由此定义了 f 在元素 a处的三重函数演算。作为应用，给定一个自然数 n，存在（唯一的）$a^{[1/(2n-1)]}$属于 E_a，满足 $(a^{[1/(2n-1)]})^{[2n-1]}=a.$。对于任意 $a\in E$，序列 $(a^{[1/(2n-1)]})$ 在 E^{**} 的弱* 拓扑下收敛到一个三重幂等元，记作 $r(a)$，称为 E^{**} 中 a 的值域三幂等元。三重幂等元 $r(a)$ 是 E^{**} 中满足 a 在 JBW*-代数 $E_2^{**}(e)$ 中为正元的最小三重幂等元。已知序列 $(a^{[2n-1]})$ 也在 E^{**} 的弱* 拓扑下收敛到一个三重幂等元（称为

支撑三幂等元 的 a） u（a）在 E^{**} 中，其满足 u（a） $\leq a \leq r$（a）在 E_2^{**}（r（a））（比较 [35, 引理 3。3]）。

正交性是我们论证中需要用到的另一个概念。回顾一下，JB*-三元系 E 中的元素 a、b 称为正交（记作 $a \perp b$），若 $L(a,b) = 0$。已知 [19, 引理 1]，$a \perp b$ 当且仅当以下任一陈述成立：

$$a \perp b; \qquad \{a,a,b\} = 0; \qquad a \perp r(b);$$

$$r(a) \perp r(b); \quad E_2^{**}(r(a)) \perp E_2^{**}(r(b)); \quad r(a) \in E_0^{**}(r(b)); \tag{7}$$

$$a \in E_0^{**}(r(b)); \qquad b \in E_0^{**}(r(a)); \qquad E_a \perp E_b.$$

JB*-三元系 E 的子集 S 称为正交子集，若其不含零且满足：对于 S中的每个 $x \neq y$，都有 $x \perp y$。E 的秩是满足以下条件的最小基数 r：对于每个正交子集 $S \subseteq E$，均有 card(S) $\leq r$。关于 Cartan 因子和 JB*-三元系的秩的基本理论及其与自反性的关系，读者可参阅文献 [72], [17] 和 [13]。

Peirce 规则保证，对于 JB*-三重系 E 中的每个三重幂等元 u，集合 $E_0(u)$ 与 $E_2(u)$ 正交。

在 JB*-三重系 E 的三重幂等元之间，存在一种以正交关系定义的自然序：当且仅当 $v - e$ 是与 e 正交的三重幂等元时，$e \leq v$ 成立（参见 [52, 54]）。

设 X 是巴拿赫空间的对偶 X^* 中的一个弱* 稠密子集 E。若 $\mathcal{O}$ 是 X^* 的非零子集，且 $\mathcal{O} \cap E$ 在 $\sigma(X^*, X)$ 意义下稠密于 $\overline{\mathcal{O}}^{\sigma(X^*,X)}$，则称 $\mathcal{O}$ 相对于 E 是开集（参见 [40]）。设 E 是 JBW*-三重系 W 的一个弱* 稠密 JB*-子三重系。若三重幂等元 u 满足 $W_2(u)$ 相对于 E 是开集，则称其相对于 E 是开三重幂等元（比较 [36, 第 167] 页和 [40, 第 78] 页）。若三重幂等元 u 满足 $W_0(u)$ 相对于 E 是开集，则称其相对于 E 是闭的。最后，若存在 E 中范数为一的元素 x，使得 $x = u + P_0(u)(x)$，则称三重幂等元 u 相对于 E 有界（参见 [40]）。

相对于 E 的紧三重幂等元概念见 Edwards 和 Ruttimann [36, §4]。依照 [36],，我们称 W 中的三重幂等元 u 相对于 E 是紧的，若 $u = 0$，或者存在一个递减网 $(u_\lambda) \subseteq W$，其元素是与 E 中范数为一的元素相关联的支撑三幂等元，并且在 W 的弱* 拓扑下收敛到 u。根据 [40, 定理 2.6]，三重幂等元 $u \in W$ 相对于 E 是紧的，当且仅当 u 相对于 E 是闭且有界的。

三重幂等元的紧性概念与 C*-代数框架下投影和偏等距的紧性概念一致。此外，若将 C*-代数 A 视为 JB*-三重系统，则 A^{**} 中的投影（分别地，偏等距）p 相对于 A 是开的，当且仅当 p 是相对于 A 的开三重幂等元（比较 [1] 或 [2, 3] 或 [81, 命题 3.11.9]）。

紧三重幂等元是理解 JB*-三重系统闭单位球面结构的自然概念。设 F 和 G 是巴拿赫空间 X 的闭单位球 $\mathcal{B}_X$的两个子集，而 $\mathcal{B}_{X^*}$是其对偶的闭单位球。我们定义

$$F' = F^{\prime,X^*} = \{a \in \mathcal{B}_{X^*} : a(x) = 1 \ \forall x \in F\},$$
$$G_\prime = G_{\prime,X} = \{x \in \mathcal{B}_X : a(x) = 1 \ \forall a \in G\}.$$

显然， F' 是 $\mathcal{B}_{X^*}$ 的弱* 闭面，而 $G_{,}$ 是 $\mathcal{B}_X$的范数闭面。若 $F=(F')_{,}$（分别地，若 $G=(G_{,})'$），则称 F 为 $\mathcal{B}_X$ 的范数半暴露面（分别地，称 G 为 $\mathcal{B}_{X^*}$的弱* 半暴露面）。已知映射$F\mapsto F'$ 和 $G\mapsto G_{,}$ 是完备格$\mathcal{S}_n(\mathcal{B}_X)$（ $\mathcal{B}_X$的范数半暴露面）与完备格 $\mathcal{S}_{w^*}(\mathcal{B}_{X^*})$（ $\mathcal{B}_{X^*}$的弱* 半暴露面）之间的反序同构，并且互为逆映射。

若 M 是一个 JBW*-三重系统，Edwards 和 Ruttimann 在 [35] 证明，每个弱*闭面 $\mathcal{B}_M$ 都是弱* 半暴露的；此外，映射

$$u\mapsto (\{u\}_{,})'=u+\mathcal{B}_{M_0(u)} \tag{8}$$

是从 M 中所有三重幂等元的集合到 $\mathcal{B}_M$ 的所有弱* 闭面的完备格的反序同构（见 [35, 定理 4.6]）。刚才引用的文献中的另一项结果证明，若 M_* 表示 M 的预对偶，则 $\mathcal{B}_{M_*}$ 的每个范数闭面都是范数半暴露的，并且映射

$$u\mapsto \{u\}_{,} \tag{9}$$

是从 M 中所有三重幂等元的集合到 $\mathcal{B}_{M_*}$ [35, 的所有范数闭面的完备格的序同构。定理 4.4]。

1992年，Akemann 和 Pedersen 根据 A^{**} 中的紧偏等距，描述了 C*-代数 A 的闭单位球的所有范数闭面，以及 $\mathcal{B}_{A^*}$ 的弱* 闭面（见 [3]）。2010年，Edwards、Fern´andez-Polo、Hoskin 和本文第一作者对 JB*-三重系统的闭单位球的范数闭面进行了描述——结果如下：

定理 1.1。（[34, 推论 3.11 和 3.12] 以及 [18, 推论 3.5 和前述评论]）设 E 是一个 JB*-三重系统。则 $\mathcal{B}_E$的每个范数闭面都是范数半显露的，并且映射

$$u\mapsto F_u:=(\{u\}_{,})_{,}=(u+\mathcal{B}_{E_0^{**}(u)})\cap E$$

是从 E^{**} 中所有紧三重幂等元的集合到 $\mathcal{B}_E$的所有范数闭面的完备格上的一个反序同构。此外， $\mathcal{B}_E$ 的每个极大真面都具有 F_e 的形式，其中 E^{**}中的某个极小三重幂等元适合该表示。

为了我们的目的，还需要考察 JBW*-三重系统的另一个几何方面。JBW*-三重系统 W 的预对偶 W_*的闭单位球 $\mathcal{B}_{W_*}$的极点 $\partial_e(\mathcal{B}_{W_*})$ 被称为纯原子（参见 [47]）。对于每个纯原子 $\varphi\in\partial_e(\mathcal{B}_{W_*})$，存在唯一的极小三重幂等元 $e=e_\varphi\in W$（称为 φ的支撑极小三幂等元），满足对所有 $x\in W$均有 $P_2(e)(x)=\varphi(x)e$；反过来，W 中的每个极小三重幂等元所关联的 Peirce-2投影都由 W_* 的闭单位球的一个极点给出（见 [47, 命题 4]）。当且仅当 $\varphi(e)=1$时，极小三重幂等元 $e\in W$ 是纯原子 $\varphi\in\partial_e(\mathcal{B}_{W_*})$的支撑三幂等元。根据 [19, 34] 已知，对于每个 JB*-三重系统 E， $\mathcal{B}_E$ 的每个极大真面都具有 $\{\varphi\}_{,}$ 的形式，其中存在唯一的 $\varphi\in\partial_e(\mathcal{B}_{E^*})$，且$\{\varphi\}_{,}=(e_\varphi+\mathcal{B}_{E_0^{**}(e_\varphi)})\cap E$，其中 e_φ 表示 φ 在E^{**}中的支撑极小三幂等元。如果 $E=\mathfrak{A}$ 是一个 JB*-代数，则 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}^*}$ 的正部的极点被称为 $\mathfrak{A}$ 的纯态，并且与 $\mathfrak{A}^{**}$中的极小投影一一对应。

在本文中，我们回顾一下，L. Chen 和 Y. Dong 首先观察到，两个巴拿赫空间的单位球面之间的每个满射等距映射 Δ 都将极大凸子集映射为极大凸子集 [26,

引理 5。1], 等价地， Δ 保持相应闭单位球的极大真面（参见 [95, 引理 3。3], [94, 引理 3。5]）。

对于 JB*-三重系统 E， $\mathcal{B}_E$ 的每个真范数闭面都是范数半暴露面（参见定理 1.1 或 [34, 推论 3。11]）。在 [38, 命题 2.4] 的证明中，我们可以找到这样一个事实的证明： $\mathcal{B}_E$ 的每个范数半暴露面都与所有包含它的极大真范数闭面的交集重合；也就是说，按照 $\mathcal{B}_E$ 中的记号， [79]的每个真范数闭面都是交面。实际上，[79] 中的引理 8 证明，两个巴拿赫空间的单位球面之间的每个满射等距映射 Δ 都会将交面映射为交面。我们在下面的引理中汇总这些结论。

引理 1.2. ([79, 引理 8], [38, 命题 2.4 和推论 2.5]) 设 $\Delta : S_E \to S_Y$ 是一个满射等距映射，其中 E 是一个 JB*-三重系统，而 Y 是一个实巴拿赫空间。那么， Δ 将 $\mathcal{B}_E$ 的真范数闭面映射为 S_Y中的交面。此外，若 F 是 $\mathcal{B}_E$ 的真范数闭面，则 $\Delta(-F) = -\Delta(F)$。

[38] 中的命题 2.4 实际上证明了：任意两个满足附加几何性质的巴拿赫空间的单位球面之间的满射等距映射，都保持球面中的范数半暴露面。

2. Convex combinations of faces of the closed unit ball of a JB*-triple with their antipodals

本节旨在理解几何—代数联系，这些联系使我们能够刻画 JB*-三元组的闭单位球中的一个真范数闭面与其对跖面的凸组合。下文中，所有面均假设为闭面。设 F 是 JB*-三元组E的闭单位球的一个真面。给定 $\lambda \in [-1, 1]$ ，我们令

$$F_\lambda := \Big\{ x \in S_E : \operatorname{dist}(x, F) \leq 1 - \lambda \ \& \ \operatorname{dist}(x, -F) \leq 1 + \lambda \Big\}.$$

这一“几何”工具在[79] 中得到了成功应用（在 [29, 60,62, 25, 61]中也有应用），其中注意到，由于 $\operatorname{dist}(F, -F) = 2$，前述定义中的不等式 $\leq$可以替换为等式。在非常特殊的情形下，若 p 是 C*-代数 A的二次对偶中的一个紧投影，并且 $F = F_p = A \cap \left(p + \mathcal{B}_{(\mathbf{1}-p)A^{**}(\mathbf{1}-p)}\right)$是与 p相关联的 $\mathcal{B}_A$的真面，Mori 和 Ozawa 在 [79, 引理 17] 中证明了

$$(F_p)_\lambda = F(p, \lambda) := S_A \cap \left(\lambda p + \mathcal{B}_{(1-p)A^{**}(1-p)}\right)$$

对所有 $\lambda \in [-1, 1]$。对于 A^{**} 中的所有紧偏等距，或者更一般地，对于一般 JB*-三重态 E 的二次对偶中的所有紧三重幂等元，是否都满足这一代数几何恒等式，目前仍是一个开放问题。这是本节的主要任务。

定理 2.1. 设 e是 JB*-三重态 E 的双对偶中的一个紧三重幂等元，并设 $F_e = E \cap (e + \mathcal{B}_{E_0^{**}(e)})$ 表示与 e 相关联的 $\mathcal{B}_E$ 的真面。那么，对于每个 $\lambda \in [-1, 1]$ ，我们有

$$(F_e)_\lambda = F(e, \lambda) = S_E \cap \left(\lambda e + \mathcal{B}_{E_0^{**}(e)}\right).$$

经过一系列引理即可得到证明。我们先给出一些受 [79, 引理 17] 启发的论证。

引理 2.2. 设 a 是一个含幺 C*-代数 A 中的元素，使得

$$\|a-\mathbf{1}\|+\|a+\mathbf{1}\|=2.$$

于是存在一个实数 λ，使得 $[-1,1]$ 中有 $a=\lambda\mathbf{1}$。

证明。根据 Gelfand–Naimark 定理，我们可以假设 $A\subset B(H)$，其中 H 是某个复 Hilbert 空间。任取 ξ 属于 H 的单位球面，则有

$$2=2\|\xi\|\leq\|(\mathbf{1}-a)(\xi)\|+\|(a+\mathbf{1})(\xi)\|\leq\|a-\mathbf{1}\|+\|a+\mathbf{1}\|=2.$$

由此可知，存在一个实数 $\lambda_\xi\in[-1,1]$，它依赖于 ξ，使得 $a(\xi)=\lambda_\xi\xi$。若 H 是一维的，则无需证明；否则，任取另一个元素 η，使其属于 H 的单位球面。

首先假设 $\eta\not\perp\xi$。于是我们可以找到 α、$\beta\in\mathbb{C}$，使得 $\alpha\neq0$，并且 η' 属于与 ξ 正交的 H 的单位球面，从而 $\eta=\alpha\xi+\beta\eta'$ 且 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$。由第一部分已证内容可知，存在满足前面提到的恒等式的 λ_ξ、λ_η、$\lambda_{\eta'}\in[-1,1]$，因此

$$\lambda_\eta\alpha\xi+\lambda_\eta\beta\eta'=\lambda_\eta\eta=a(\eta)=\alpha a(\xi)+\beta a(\eta')=\alpha\lambda_\xi\xi+\beta\lambda_{\eta'}\eta'.$$

由于 $\alpha\neq0$，这表明 $\lambda_\eta=\lambda_\xi$。

最后，若 $\eta\perp\xi$，我们可以记 $\zeta:=\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}$。由于 $\eta\not\perp\zeta\not\perp\xi$，根据前一部分可得 $\lambda_\eta=\lambda_\zeta=\lambda_\xi$。因此，$\lambda_\xi$ 不依赖于 ξ。□

设 a 是一个含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$。我们回顾著名的 Shirshov-Cohn 定理 [57, 定理 2.4。14] 断言，* 由 $\mathfrak{A}$ 和 a 生成的 $\mathbf{1}$ JB 子代数在等距意义下 JB*- 同构于某个含幺 C*-代数的 JB 子代数，而且甚至可以进一步假设*-代数 A，并且我们甚至可以进一步假设 $\mathbf{1}$ 是A的单位元。因此，下一个推论由前面的结论和这些说明即可得出。

推论 2.3. 设 a 是含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的一个元素，使得

$$\|a-\mathbf{1}\|+\|a+\mathbf{1}\|=2.$$

那么，存在一个实数 λ 属于 $[-1,1]$，使得 $a=\lambda\mathbf{1}$。

回顾 JB*-三重系统 E中与三重幂等元 e相关的 Peirce 子空间的一些性质。正如我们已经提到的，Peirce-2 子空间 $E_2(e)$ 是一个以 e 为单位元的含幺 JB*-代数，其 Jordan 乘积为 $a\circ_e b=\{a,e,b\}$，对合为$a^{*_e}=\{e,a,e\}$。由 Peirce 算术可得

$$P_2(e)\{x,x,e\}=\{P_2(e)(x),P_2(e)(x),e\}+\{P_1(e)(x),P_1(e)(x),e\},$$

对所有 $x\in E$ 均成立。进一步已知，$\{P_2(e)(x)\ P_2(e)(x)\ e\}$ 以及 $\{P_1(e)(x),P_1(e)(x)\ e\}$ 是 $E_2(e)$中的正元，并且对于某个$j=1$，当且仅当 $P_j(e)(x)=0$ ([47, 引理 1.5] 和 [83])时，$\{P_j(e)(x)\ P_j(e)(x)\ e\}=0$ 为正元。令 $\mathcal{S}(E_2(e))$ 表示 $E_2(e)$上的所有态的集合（即$E_2(e)^*$中的所有正的范数为一的泛函的集合）。由于含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中每个正元的范数都在其关于 $\mathfrak{A}$上某个态的取值处达到，因此赋值

$$x\mapsto\|x\|_e:=\sup\left\{\phi\{x,x,e\}^{\frac12}=(\phi P_2(e)\{x,x,e\})^{\frac12}:\phi\in\mathcal{S}(E_2(e))\right\}$$

在 $E_2(e)\oplus E_1(e)$ 上定义了一个希尔伯特型范数，该范数与原范数等价（参见 [19, 命题 2.4、推论 2.5 以及后者之前的评论]）。若 E 是一个 JBW*-三重系，我们可以将 $E_2(e)$ 上所有态组成的集合 $\mathcal{S}(E_2(e))$ 替换为集合

$\mathcal{S}_n(E_2(e))$，即 JBW*-代数 $E_2(e)$ 上所有正规态组成的集合，且一切保持不变。更明确地说，刚才提及的文献中的结果表明，对于 $x = x_2 + x_1 \in E_2(e) \oplus E_1(e)$，我们有

$$\|x\|_e \leq \|x\| \leq \|x_2\| + \|x_1\| \leq \|x_2\|_e + 2\|x_1\|_e. \tag{10}$$

投影 $P_j(e)$ $(j = 0,1,2)$ 关于原范数是压缩的（参见 [47, 推论 1.2]）。实际上可以看出，对于 $j = 1$，2，限制映射$P_j(e)|_{E_2(e)\oplus E_1(e)}$：$E_2(e) \oplus E_1(e) \to E_j(e)$ 关于范数 $\|\cdot\|_e$ 对所有$j = 1$，2 都是压缩的。事实上，根据上面的说明，我们有

$$\begin{aligned}
\|P_j(e)(P_2(e)(x) + P_1(e)(x))\|_e^2 &= \sup_{\phi\in\mathcal{S}(E_2(e))} \phi\{P_j(e)(x), P_j(e)(x), e\} \\
&\leq \sup_{\phi\in\mathcal{S}(E_2(e))} \phi\{P_2(e)(x), P_2(e)(x), e\} + \phi\{P_1(e)(x), P_1(e)(x), e\} \\
&= \sup_{\phi\in\mathcal{S}(E_2(e))} \phi\{P_2(e)(x) + P_1(e)(x), P_2(e)(x) + P_1(e)(x), e\} \\
&= \|P_2(e)(x) + P_1(e)(x)\|_e^2,
\end{aligned}$$

对所有 $j = 1$，2，$x \in E$。结合前面的结论与（10），我们得到

$$\|x\|_e \leq \|x\| \leq 3\|x\|_e, \text{ for all } x \in E_2(e) \oplus E_1(e). \tag{11}$$

设泛函 φ 属于 JB*-三重系统 E 的对偶，且三重幂等元 $e \in E$ 满足$\|\varphi\| = \varphi(e)$，则我们知道 $\varphi = \varphi P_2(e)$ [47, 命题 1]。

希尔伯特型范数 $\|\cdot\|_e$ 也与 JB*-三元组的 Grothendieck 不等式中的预希尔伯特半范数有关（参见 [11, 56]）。给定 JBW*-三元组 W的预对偶中的正规泛函φ，以及任意满足 $\|\varphi\| = \varphi(z)$ 的 $z \in S_W$，映射 $x \mapsto \|x\|_\varphi := \varphi\{x, x, z\}^{\frac{1}{2}} (x \in W)$ 是 W 上的预希尔伯特半范数，且与所选的 $z \in S_W$ 无关。若 ϕ 是 JBW*- 代数 $\mathfrak{A}$ 上的任意正规态，则对所有 $x \in \mathfrak{A}$，有 $\|x\|_\phi^2 = \phi\{x, x, \mathbf{1}\} = \phi(x \circ x^*)$。根据这一记号，对于 JB*-三元组 E 中的每个三重幂等元 e，我们有

$$\|x\|_e = \sup\{\|x\|_\phi : \phi \in \mathcal{S}(E_2(e))\},$$

其中，我们将 $E_2(e)$ 上的态与 $E_2^{**}(e)$ 上的正规态视为相同。众所周知（参见 [10, §3] 或 [11, 命题 1.2]），给定 JB*-三元组 E的对偶中的一个范数为 1 的泛函 φ，我们有

$$|\varphi(x)| \leq \|x\|_\varphi, \text{ for all } x \in E. \tag{12}$$

现在我们可以理解引理 2.2 和推论2.3 在一般 JB*-三重系统中的三重幂等元情形下的真正含义。

引理 2.4. 设 a 是 JB*-三重系统 E 中的一个元素，且 e 是 E 中满足 $\|a - e\| + \|a + e\| = 2$ 的一个三重幂等元。那么存在一个实数 $\lambda \in [-1, 1]$，使得 $a = \lambda e + P_0(e)(a)$。

证明。我们先从不等式开始

$$\begin{aligned}
2 = \|2e\| \leq \|e - P_2(e)(a)\| + \|P_2(e)(a) + e\| &= \|P_2(e)(e - a)\| + \|P_2(e)(a + e)\| \\
&\leq \|e - a\| + \|a + e\| = 2,
\end{aligned}$$

这证明了 $2 = \|e - P_2(e)(a)\| + \|P_2(e)(a) + e\|$，因此将推论 2.3应用于单位 JB $P_2(e)(a$-代数* $E_2(e$中的元素，便可得出存在一个实数 $\lambda \in [-1, 1]$ 使得 $P_2(e)(a) = \lambda e$。

另一方面，映射 $L(e,e)$ 是压缩的，并且由于 $L(e,e) = P_2(e) + \frac{1}{2}P_1(e)$ 满足 $P_2(e) = P_2(e)L(e,e)$。因此

$$\begin{aligned} 2 = \|2e\| \leq \|e - P_2(e)(a)\| + \|P_2(e)(a) + e\| &\leq \|L(e,e)(e-a)\| + \|L(e,e)(a+e)\| \\ &\leq \|e-a\| + \|a+e\| = 2, \end{aligned}$$

这保证了

$$\|e - P_2(e)(a)\| = \|L(e,e)(e-a)\| = \|L(e,e)(a) - e\|$$

and

$$\|e + P_2(e)(a)\| = \|L(e,e)(e+a)\| = \|L(e,e)(a) + e\|.$$

通过应用 $P_2(e)(a) = \lambda e$ （其中某个 $\lambda \in [-1,1]$），我们可推出

$$|1-\lambda| = \|e - \lambda e\| = \left\| (1-\lambda)e - \frac{1}{2}P_1(e)(a) \right\|$$

and

$$|1+\lambda| = \|e + \lambda e\| = \left\| (1+\lambda)e + \frac{1}{2}P_1(e)(a) \right\|.$$

若 $\lambda = \pm 1$，上述恒等式给出 $P_1(e)(a) = 0$。因此，我们可以假设$-1 < \lambda < 1$，从而有 $1 = \left\| e - \frac{1}{2}(1-\lambda)P_1(e)(a) \right\|$。现在固定任意一个态$\phi \in \mathcal{S}(E_2(e))$，并检验以下不等式

$$\begin{aligned} 1 = \phi\left(e - \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a)\right)^2 &\leq \left\| e - \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a) \right\|_\phi^2 \\ &= \|e\|_\phi^2 + \left\| \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a) \right\|_\phi^2 = 1 + \left\| \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a) \right\|_\phi^2, \\ &= \left\| e - \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a) \right\|_\phi^2 \leq \left\| e - \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a) \right\|^2 = 1 \end{aligned}$$

这里我们应用了（12）和 Peirce 算术。前面的不等式表明

$$0 = \left\| \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a) \right\|_\phi^2 = \phi\left\{ \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a), \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a), e \right\},$$

对所有态 $\phi \in \mathcal{S}(E_2(e))$ 均成立；结合元素$\left\{ \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a)\ \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a)\ e \right\}$在 $E_2(e)$ 中的正性，~~可得~~

$$\left\{ \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a), \frac{1}{2(1-\lambda)}P_1(e)(a), e \right\} = 0,$$

因此 $P_1(e)(a) = 0$ 根据[47, 引理 1。5] 或 [83]。 □

要证明本节的主要结果，还缺少一个要素：取自 [41] 的广义 Urysohn 引理。

定理 *2.1* 的证明。首先取 $x \in (F_e)_\lambda$，则对每个 $\varepsilon > 0$ 存在$y = e + P_0(e)(y) \in F_e$ 以及 $z = -e + P_0(e)(z) \in -F_e$ 满足 $\|x - y\| < 1 - \lambda + \frac{\varepsilon}{2}$

并且 $\|x-z\| < 1+\lambda+\frac{\varepsilon}{2}$。考虑到 $L(e,e) = P_2(e) + \frac{1}{2}P_1(e)$ 是定义在 E^{**} 上的压缩映射，我们可得

$$\begin{aligned} 2 = \|2e\| &\leq \|e - L(e,e)(x)\| + \|e + L(e,e)(x)\| \\ &= \|L(e,e)(y-x)\| + \|L(e,e)(z-x)\| \\ &\leq \|y-x\| + \|z-x\| < 2+\varepsilon. \end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知，$2 = \|e-L(e,e)(x)\| + \|e+L(e,e)(x)\|$。将引理 2.4 应用于三重幂等元 e 和 $L(e,e)(x)$ 中的元素 E^{**}，可知存在实数 $\lambda \in [-1,1]$ 满足 $L(e,e)(x) = \lambda e$。这意味着 $x = \lambda e + P_0(e)(x) \in F(e,\lambda) = S_E \cap \left(\lambda e + \mathcal{B}_{E_0^{**}(e)}\right)$ ——Peirce 分解取自 E^{**}。

现在取 $x \in F(e,\lambda) = S_E \cap \left(\lambda e + \mathcal{B}_{E_0^{**}(e)}\right)\cdot$。若 $\lambda = 0$，则 $x = P_0(e)(x)$ 与 e 正交。固定 $\varepsilon > 0.$。考虑函数 $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$，其定义为

$$f(s) := \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq s \leq \varepsilon \\ \text{affine}, & \text{if } \varepsilon \leq s \leq 2\varepsilon \\ s, & \text{if } 2\varepsilon \leq s \leq 1. \end{cases}$$

由连续三重函数演算给出的元素 $f_t(x) \in E$，以及紧三重幂等元 $w = \chi_{[\varepsilon,1]}(x) \in E^{**}$。根据 [41, 推论 3.6 或命题 3.7], 中针对正交紧三重幂等元建立的非交换 Urysohn 引理，存在范数为一的元素 $a \in E$，使得 $a = e + P_0(e)(a)$ 且 $a \perp w$。显然，由于 $f_t(x) \in E_2^{**}(w)$，元素 $z = a + f_t(x)$ 属于 F_e，并且根据构造

$$\operatorname{dist}(x, F_e) \leq \|z-x\| \leq \|a\| + \|f_t(x) - x\| = 1+\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ 的任意性证明了 $\operatorname{dist}(x, F_e) \leq 1 = 1-\lambda$。类似地，$y = -a + f_t(x)$ 属于 F_{-e}，并且根据构造

$$\operatorname{dist}(x, F_{-e}) \leq \|y-x\| \leq \|-a\| + \|f_t(x) - x\| = 1+\varepsilon,$$

这证明了 $\operatorname{dist}(x, -F_e) \leq 1 = 1+\lambda$。

现在假设 $\lambda \neq 0$。我们可以假设 $0 < \lambda \leq 1$，否则将 e 替换为 $-e$。取另一个函数 $g\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$g(s) := \begin{cases} 0, & \text{if } s = 0 \\ \text{affine}, & \text{otherwise,} \\ 1, & \text{if } s \in [\lambda, 1]. \end{cases}$$

元素 $g_t(x) \in S_E$。由于 $x = \lambda e + P_0(e)(x)$，根据正交性，容易验证 $g_t(x) = g_t(\lambda e) + g_t(P_0(e)(x)) = e + g_t(P_0(e)(x)) \in F_e$（在 E^{**} 中计算），且 $\|x - g_t(x)\| = 1-\lambda$。这证明了 $\operatorname{dist}(x, F_e) \leq 1-\lambda$。类似地，我们可以得到 $\operatorname{dist}(x, -F_e) = \operatorname{dist}(x, F_{-e}) \leq 1+\lambda$。

或者，如果 $x = \lambda e + P_0(e)(x) \in F(e,\lambda)$，则元素 $y = e + P_0(e)(x)$ 和 $z = -e + P_0(e)(x)$ 分别属于 $F_e^{E^{**}} = e + \mathcal{B}_{E_0(e)}$ 和 $-F_e^{E^{**}} = F_{-e}^{E^{**}} = -e + \mathcal{B}_{E_0(e)}$。显然，$\|x-y\| = \|(1-\lambda)e\| = 1-\lambda$ 和 $\|x-z\| = 1+\lambda$，因此

$$\operatorname{dist}\left(x, F_e^{E^{**}}\right) \leq 1-\lambda \ \&\ \operatorname{dist}\left(x, -F_e^{E^{**}}\right) \leq 1+\lambda.$$

根据 [14, 定理 3.6], $F_e^{E^{**}}$（分别为 $-F_e^{E^{**}}$）与真面 $F_e = S_E \cap F_e^{E^{**}}$（分别为 $-F_e = S_E \cap -F_e^{E^{**}}$）的弱* 闭包一致，即 $F_e^{E^{**}} = \overline{F_e}^{\sigma(E^{**},E^*)}$（分别为 $F_{-e}^{E^{**}} = \overline{F_{-e}}^{\sigma(E^{**},E^*)}$）。我们声称，根据

Hahn–Banach 分离定理，$\operatorname{dist}(x, F_e) = \operatorname{dist}\left(x, F_e^{E^{**}}\right)$ 且 $\operatorname{dist}(x, -F_e) = \operatorname{dist}\left(x, -F_e^{E^{**}}\right)$。也就是说，若 $\operatorname{dist}(x, F_e) = 0$，则无需证明。否则，存在一个泛函 $\varphi \in S_{E^*}$，使得 $\sup \Re\mathrm{e}\varphi(a) + \operatorname{dist}(x, F_e) \leq_{a \in F_e}$

$\Re\mathrm{e}\varphi(x)$（参见 [77, 2.2.19 Mazur 分离定理或 2.2.26 Eidelheit 分离定理]）。由于 φ 属于 E^{**} 的预对偶，因此 我们有 $\sup_{a \in F_e} \Re\mathrm{e}\varphi(a) = \sup_{z \in \overline{F_e}^{\sigma(E^{**}, E^*)}} \Re\mathrm{e}\varphi(z)$，从而

$$\operatorname{dist}(x, F_e) \leq \|x - z\|, \quad \text{for all } z \in \overline{F_e}^{\sigma(E^{**}, E^*)},$$

这就证明了该断言。 □

在后续各节中，我们还需要下面这个借自 [79] 的技术性结果

引理 2.5. [79, 引理 9 和 11] 设 $\Delta : S_X \to S_Y$ 是两个巴拿赫空间的单位球面之间的满射等距映射。那么以下陈述成立：
(*a*) Δ 将 S_X 中的交面映射为 S_Y 中的交面。(*b*) 恒等式 $\Delta(F_\lambda) = \Delta(F)_\lambda$ 对每个交面 $F \subseteq S_X$ 及每个 $\lambda \in [-1, 1]$ 均成立。(*c*) 设 F 是 S_X. 中的一个交面。那么，对于任意 λ_1、λ_2（属于 $[-1, 1]$）和 $\alpha \in [0, 1]$，我们有

$$(\alpha\Delta(F_{\lambda_1}) + (1 - \alpha)\Delta(F_{\lambda_2})) \cap S_Y \subseteq \Delta\left(F_{\alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2}\right).$$

3. Russo–Dye theorem for faces

著名的 Russo–Dye 定理指出，含幺 C*-代数 A 的闭单位球与 A[90, 49]中酉元的范数闭凸包相同。实际上， A 开单位球中的每个元素都是 A [67]中有限个酉元的平均值。L. Harris 在 [58] 引入了全纯理论，以建立 Russo–Dye 定理的一个变体，适用于带对合的含幺复巴拿赫代数，记作 *，其中酉元的概念是自然的。已证明，这些代数中酉元的闭凸包包含所有满足以下条件的元素： x 的谱半径及 x^*x 的谱半径均小于或等于 1；若不等式为严格不等式，则该元素属于酉元的凸包。M. Mori 和 N. Ozawa 还证明了这一结果的另一个强化版本： A 闭单位球的每个极大真面 F 都与 F中所有酉元的闭凸包相同，即 $F = \overline{co}(F \cap \mathcal{U}(A))$ [79, 引理 18]。

Mori 和 Ozawa 提出的下述定理，使 Russo–Dye 定理的诸多用途之一变得更加具体。我们先回顾一下：赋范空间 X 中的凸子集，如果在 X中具有非空内点，就称为凸体。

定理 3.1. [79, 定理 2]. 设 X 为巴拿赫空间，且其闭单位球 X 的极点 $\partial_e(\mathcal{B}_X)$ 的闭凸包 $\mathcal{B}_X$在 X中具有非空内点。那么，每个凸体 $\mathcal{K} \subseteq X$ 都具有强 Mankiewicz 性质；也就是说，从 $\mathcal{K}$ 到赋范空间 Y 中任意凸子集 L的每个满射等距映射都是仿射的。

我们将在下文各段中回顾含幺 JB*-代数中酉元的概念。目前我们注意到，若干作者已证明 Russo–Dye 定理，该定理断言，含幺 JB*-代数中酉元的闭凸包与

闭单位球相同。M.A. Youngson 和 J.D.M. Wright 运用 Harris 在 [58] 中引入的工具所建立的全纯理论，以弥补缺少极分解的问题（参见 [99]）。Harris 提出的另一种全纯工具，也被用于 M. Mackey 和 P. Mellon 在 [75,定理 3 中证明的 JB*-三重系统 Russo–Dye 定理的最新版本 1]。A.A. Siddiqui 给出了 Wright–Youngson–Russo–Dye 定理的新证明，适用于含幺 JB*-代数；该证明不依赖全纯理论，而是利用以下事实：对于含幺 JB a -代数*中的每个可逆元 $\mathfrak{A}$ ，都存在一个酉元 $u \in \mathfrak{A}$ ，使得 a 在 u-同位体 $\mathfrak{A}(u)$ 中是正元且可逆（参见[93, 91, 92],，具体的 u-同位体定义见下文）。参考文献[93] 还给出了文献 [67] 中结果的一个版本，适用于含幺 JB*-代数。由刚才提到的结果可知，

(13) 含幺 JB K -代数中的每个凸体 K 都具有强 Mankiewicz 性质，也就是说，从 K 到赋范空间中任意凸子集的每个满射等距映射都是仿射的。

本节的目标是证明一个 Jordan 类比结果，即 Mori 和 Ozawa 关于含幺 JB*-代数闭单位球的极大真面的结果。

现在正是回顾 JB*-代数中酉元基本理论的合适时机。我们先回顾可逆元的概念。含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的元素 a 称为可逆元，如果可以找到 $b \in \mathfrak{A}$ 满足 $a \circ b = \mathbf{1}$ 和$a^2 \circ b = a.$。元素 b 是唯一的，记作 a^{-1} （参见 [57, 3.2.9] 或[23, 定义 4.1.2]）。若将含幺 C*-代数视为 JB*-代数，这一定义便与通常的可逆性概念一致。JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的元素 a 可逆，当且仅当 U_a 算子在$B(\mathfrak{A})$中可逆；此时$U_a^{-1} = U_{a^{-1}}$ （参见 [23, 定理 4.1.6]）。事实上，可逆元的概念适用于更广泛的含幺 Jordan Banach 代数，但本文只讨论含幺 JB*-代数。通过指数元构造可逆元的方法如下：由固定元素 $x \in \mathfrak{A}$ 和单位元生成的 $\mathfrak{A}$ 闭子代数总是结合的，因此表达式 $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}!$ 定义了 $\mathfrak{A}$ 中的一个元素，该元素可逆，其逆元为 $\exp(-x)$。 $\mathfrak{A}$ 中的所有可逆元构成一个开集，且以单位元为中心、半径为 1 的开单位球包含于可逆元集合中 [23, 定理 4.1.7]。

与含单位的 C*-代数的情形一样，含单位的 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的元素 u ，如果可逆且逆元为 u^*，则称其为酉元。按照标准记号，我们将用 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathfrak{A}$ 中所有酉元的集合。这一概念与 C*-代数的通常定义一致；也就是说，如果将一个含单位的 C*-代数视为 JB*-代数，则这两种酉元的概念相同。从更广义的角度看，含单位 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的酉元，与将 $\mathfrak{A}$ 视为 JB*-三重系统时其中的酉三幂等元完全一致（参见 [16, 命题 4.3] 或 [23,定理 4.2.24、定义 4.2.25 和事实 4.2.26]）。需要提醒读者的是，即使在 C* 情形下，含单位 JB*-代数中两个酉元的 Jordan 乘积也未必是酉元。集合 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 一般并不连通。

包含单位元的 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 的连通分支称为主分支，记作 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$。

接下来，我们汇集单单位 JB*- 代数 $\mathfrak{A}$ 中酉元集合的一些基本性质，这些性质摘自多个来源（也可见于 [30, 引理 2.1 和 2.2]以及 [28]）。

($\mathcal{PU}1$) 对每个 $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$，$\mathfrak{A}$ 的底层巴拿赫空间在乘积 $x \circ_u y := U_{x,y}(u^*) = \{x, u, y\}$ 以及对合 $*_u$ 定义为 $x^{*_u} := U_u(x^*) = \{u, x, u\}$的作用下成为一个以 u 为单位元的单单位 JB*-代数。（JB*-代数 $\mathfrak{A}(u) = (\mathfrak{A}, \circ_u, *_u)$ 称为 $\mathfrak{A}$的 u-同位体。）此外，$\mathcal{U}(\mathfrak{A}) = \mathcal{U}(\mathfrak{A}(u)) = \{$是 $\mathfrak{A}\}$ [23, 中的酉三幂等元（引理 4.241] 和命题 4.3]）。

($\mathcal{PU}2$) 存在一些含有酉元的含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$，其中不存在满射线性等距映射 $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 将 1 映到 w；也就是说，$\mathfrak{A}$ 上所有满射线性等距映射构成的群——等价地，三重自同构群——在 M 上不传递于 $\mathcal{U}(M)$ [16, 例 5.7]。甚至可以证明，含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}(w)$ 并非 Jordan *-同构 [23, 反定理 3.4.34]，且 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 中包含 w 的连通分支与主连通分支 [28, 不等距同构。注 3.7]。

($\mathcal{PU}3$) $\mathfrak{A}$ 的三重乘积满足

$$\begin{aligned}\{x, y, z\} &= (x \circ y^*) \circ z + (z \circ y^*) \circ x - (x \circ z) \circ y^* \\ &= (x \circ_u y^{*_u}) \circ_u z + (z \circ_u y^{*_u}) \circ_u x - (x \circ_u z) \circ_u y^{*_u},\end{aligned}$$

对所有 x、y、$z \in \mathfrak{A}$ 以及每个 $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 都成立。也就是说，尽管 $\mathfrak{A}$ 上存在许多彼此不等价的含幺 JB*-代数结构，但三重乘积只有一种（由 Kaup 的 Banach–Stone 定理 [70, 命题 5.5] 得出）。

($\mathcal{PU}4$) 对于每个 $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$，映射 $U_u : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 是一个满射等距映射，因而是一个三重同构。因此，$U_u(\mathcal{U}(\mathfrak{A})) = \mathcal{U}(\mathfrak{A})$。此外，算子 $U_u : \mathfrak{A}(u^*) \to \mathfrak{A}(u)$ 是一个 Jordan *-同构（参见 [23,定理 4.2。28], [70, 命题 5。5] 以及 [99]）。

($\mathcal{PU}5$) $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 的主连通分支与 $\mathfrak{A}$ 中可逆元集合的主连通分支同 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 的交集重合，并具有如下几何刻画：

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^0(\mathfrak{A}) &= \left\{U_{\exp(ih_n)} \cdots U_{\exp(ih_1)}(\mathbf{1}) \colon n \in \mathbb{N},\ h_j \in \mathfrak{A}_{sa},\ \forall\ 1 \le j \le n\right\} \\ &= \left\{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{A}) :\ \text{there exists } w \in \mathcal{U}^0(\mathfrak{A}) \text{ with } \|u - w\| < 2\right\},\end{aligned} \tag{14}$$

因此，它在解析意义下弧连通 [28, 定理 2。3]。

($\mathcal{PU}6$) 如果 $\mathfrak{A}$ 是一个 JBW*-代数，则 $\mathfrak{A}$ 中所有酉元的集合恰好是 $\mathfrak{A}$ 中所有反对称元素的指数映射所给出的集合，即

$$\mathcal{U}(\mathfrak{A}) = \left\{\exp(ih) : h \in \mathfrak{A}_{sa}\right\} \quad (\text{cf. [30, Remark 3.2]}).$$

在本节中，我们将考虑 $\mathbb{C}$ 到其单位球面的自然投影，其定义为 $\operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{|\alpha|}, & \text{若 } \alpha \neq 0 \\ 0 & \alpha = 0; \text{ 若。} \end{cases}$ 我们注意到，对于任意 JB*-三重系统E、任意元素 $x \in E$ 以及任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，恒等式

$$r(\alpha x) = \operatorname{sgn}(\alpha) r(x) \text{ holds} \tag{15}$$

其中，值域三幂等元是在 E 的二次对偶中计算的。事实上，若记 $x^{[\frac{1}{3}]}=y(n\in\mathbb{N})$，则 $\left(\operatorname{sgn}(\alpha)|\alpha|^{\frac{1}{3}}y\right)^{[3]}=\operatorname{sgn}(\alpha)|\alpha|y^{[3]}=\alpha x$，因此由立方根的唯一性 $(\alpha x)^{[\frac{1}{3}]}=\operatorname{sgn}(\alpha)|\alpha|^{\frac{1}{3}}x^{[\frac{1}{3}]}$，并通过归纳法可得 $(\alpha x)^{[\frac{1}{3^n}]}=\operatorname{sgn}(\alpha)|\alpha|^{\frac{1}{3^n}}x^{[\frac{1}{3^n}]}$。对于 $\alpha=0$，一切显然；对于 $\alpha\neq 0$，我们知道 $|\alpha|^{\frac{1}{3^n}}\to 1$，因此 $r(\alpha x)=w^*-\lim_n(\alpha x)^{[\frac{1}{3^n}]}=w^*-\lim_n\operatorname{sgn}(\alpha)|\alpha|^{\frac{1}{3^n}}x^{[\frac{1}{3^n}]}=\operatorname{sgn}(\alpha)r(x)$。

引理 3.2. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个带单位的 JB*-代数，且 $x\in S_{\mathfrak{A}}$ 和 $\delta>0$。则值域三幂等元 $r\left(\frac{(1+\delta)\mathbf{1}+x}{2+\delta}\right)$ 属于 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$。

证明. 记 $b:=\mathbf{1}+\frac{x}{1+\delta}$。由 (15) 可知，等式 $r\left(\frac{(1+\delta)\mathbf{1}+x}{2+\delta}\right)=r(b)$ 成立，原则上其中各项都是 $\mathfrak{A}^{**}$中的元素。由于 $\|b-\mathbf{1}\|=\left\|\frac{x}{1+\delta}\right\|=\frac{1}{1+\delta}<1$，元素 b 在 $\mathfrak{A}$中可逆。因此，根据 [64, 注 2.3]，值域三幂等元 $r(b)$ 是 $\mathfrak{A}$中的酉元。众所周知，由局部 Gelfand 理论或三重函数演算可得 $\|r(b)-b\|\leq 1$。（实际上有更强的结论：由于 b 可逆，它必然在 [64] 的意义下是冯·诺依曼正则的，并且 b 在 $\mathfrak{A}$ 中的三重谱不包含零。因此，对于某个 $m>0$，三重谱 Ω_b 是$[m,\|b\|]$ 的子集，从而 $\|r(b)-b\|=\max\{1-m,\|b\|-1\}<1$。）此外，$\|b-\mathbf{1}\|=\left\|\frac{x}{1+\delta}\right\|=\frac{1}{1+\delta}<1$，所以 $\|r(b)-\mathbf{1}\|<2$。因此，由 (14)（等价地，由 [28, 定理 2.3] 或 [30, 引理 2.2]）可推出 $r(b)\in\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$。 □

下一个技术性引理在我们的论证中起着关键作用。为避免 JB*-代数中元素缺少极分解所带来的困难，我们将采用同位体。

引理 3.3. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺 JB*-代数，且 $F_e\subset S_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的闭单位球的范数闭真面（与一个紧三重幂等元 $e\in\mathfrak{A}^{**}$相关联）。那么，对任意 $w\in\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})\cap F_e$、任意 $x\in F_e$和任意 $\varepsilon>0$，存在酉元$u,v\in F_e\cap\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$，使得

$$\|u+v-(x+w)\|<\varepsilon.$$

证明. 任取 $0<\delta<1$，并记 $a:=(1+\delta)_{2+\delta}^{w+x}$ 以及 $r:=r(a)$。引理 3.2 表明，r 属于 w-同位体 $\mathfrak{A}(w)$ 的主连通分支，记作 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A}(w))$。这意味着，$r$ 与 w 位于 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 的同一个连通分支中。因此，由于 $w\in\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$，可得 $r\in\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$。

我们知道，在 r-同位体 $\mathfrak{A}(r)$ 中有 $a\geq 0$，并且由于

$$\|a^2\|=\left\|\left(\frac{(1+\delta)w+x}{2+\delta}\right)^2\right\|\leq\left\|\frac{(1+\delta)w+x}{2+\delta}\right\|^2\leq\left(\frac{(1+\delta)+1}{2+\delta}\right)^2=1,$$

其中，所有平方均在 r-同位体 $\mathfrak{A}(r)$ 中计算，我们还有 $0\leq a^2=\{a,r,a\}\leq r$（即我们考虑同位体 $\mathfrak{A}(r)$ 中的平方 a^2 及其序）。我们定义 $u,v:=a\pm i\sqrt{r-a^2}$（同样，所有运算均在同位体 $\mathfrak{A}(r)$ 中进行）。那么，u,v 是同位体 $\mathcal{U}(\mathfrak{A}(r))(=\mathcal{U}(\mathfrak{A}))$ 的主连通分支中的酉元，也就是 $\mathcal{U}(\mathfrak{A}))$ 中包含 r 的连通分支，因为$\|r-u\|$, $\|r-v\|\leq\sqrt{2}$（见（14）或 [28, 定理 2.3]）。因此，u,v都属于主连通分支 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$。

现在，由恒等式 $\frac{u+v}{2}=\frac{1+\delta}{2+\delta}w+\frac{1}{2+\delta}x=a\in F_e$，结合 F_e 是闭单位球的一个真闭面这一事实，我们推出 $u,v\in F_e$。

最后，我们验证所需的距离

$$\|v+u-x-w\|=\|2a-x-w\|=\left\|2\frac{(1+\delta)w+x}{2+\delta}-w-x\right\|=\left\|\frac{\delta w-\delta x}{2+\delta}\right\|\leq\frac{2\delta}{2+\delta},$$

证明当 δ 足够小时（具体而言，当 $\delta<\frac{2\varepsilon}{2-\varepsilon}$ 时），我们得到 $\|v+u-x-w\|<\varepsilon$，如所要求。□

我们注意到，引理 $e\in\mathfrak{A}^{**}$ 的陈述中的紧三重幂等元 3.3在论证中并未真正发挥作用，因为这些论证更多地是几何性的。

我们将以 Mori 和 Ozawa 针对单位 C*-代数在 [79, 引理 18]中证明的结果的 Jordan 版本，结束本节。

定理 3.4. 设 $\mathfrak{A}$ 为一个单位 JB*-代数，且 $F_e\subset S_{\mathfrak{A}}$ 为与紧三重幂等元 $e\in\mathfrak{A}^{**}$相关联的范数闭真面。假设 u 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个酉元，并满足： e 是 JBW*-代数 $\mathfrak{A}^{**}(u)$ 中的一个投影，该代数由 u对 $\mathfrak{A}^{**}$的同位体给出。令 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A}(u))$ 表示 $\mathfrak{A}(u)$ 中酉元集合的主连通分支。则 $F_e=\mathrm{co}\left(F_e\cap\mathcal{U}^0(\mathfrak{A}(u))\right)$。显然，对于与 $\mathfrak{A}^{**}$ 中紧投影相关联的 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$ 的每一个范数闭真面，以及 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$，结论同样成立。

证明。首先注意到，由于 $u\in\mathfrak{A}$，根据 $\mathfrak{A}$ 在其双对偶中的弱* 稠密性， $\mathfrak{A}(u)$的双对偶$(\mathfrak{A}(u))^{**}$可识别为 JBW*-代数 $\mathfrak{A}^{**}(u)$。不难验证， F 是 $\mathfrak{A}(u)$的闭单位球的一个闭真面，它对应于$(\mathfrak{A}(u))^{**}$中的一个紧投影。因此，将原来的 Jordan 乘积和对合分别替换为 $\circ_u$ 和 ^{*_u}后，我们总可以假设 u 是$\mathfrak{A}$中的单位元， $e=p$ 是 $\mathfrak{A}^{**}$ 中的一个投影，并且 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A}(u))=\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$是 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$的主连通分支。

包含关系 $\supseteq$ 显然成立。

任取 $x\in F_p$ ，并固定一个正元 $0<\varepsilon<1$。我们将证明存在两个序列$(u_n)_n$和$(v_n)_n$ ，它们属于 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})\cap F_p$ ，使得

$$\|u_n+v_n-x-v_{n-1}\|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

令 $v_0:=\mathbf{1}$，显然它同时属于集合 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$ 和 F_p。应用引理 3.3，取 $w=v_0=\mathbf{1}\in\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})\cap F_p$， $x\in F_p$， 以及 $\frac{\varepsilon}{3}>0$，可得酉元 u_1， $v_1\in F_p\cap\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$，使得

$$\|u_1+v_1-(x+v_0)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

假设我们已经定义了 u_1，……， u_n 以及 v_1，……， v_n，并满足（16）。再次应用引理 3.3，取 $w=v_n\in\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})\cap F_p$， $x\in F_p$， 以及 $\frac{\varepsilon}{3}>0$，可得元素 u_{n+1} 和 v_{n+1}，它们属于 $F_p\cap\mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$ 且满足所需性质。

现在，通过一个简单的归纳论证，我们可由（16）推出

$$\|u_1+u_2+\cdots+u_n+v_n-\mathbf{1}-nx\|<n\frac{\varepsilon}{3}$$

对所有自然数 n 均成立。因此

$$\left\|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}+\frac{v_n-\mathbf{1}}{n}-x\right\|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(\forall n\in\mathbb{N}).$$

任取满足 $k \geq \frac{3}{\varepsilon}$ 的自然数 k。于是

$$\left\| \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}{k} - x \right\| \leq \left\| \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}{k} + \frac{v_k - \mathbf{1}}{k} - x \right\| + \frac{\|v_k - \mathbf{1}\|}{k}$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

由于 $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_k}{k} \in \mathrm{co}\left(F_p \cap \mathcal{U}^0(\mathfrak{A})\right)$，我们得出 $x \in \mathrm{co}\left(F_p \cap \mathcal{U}^0(\mathfrak{A})\right)$。 □

定理3.4 的一个强化版本将在第 $\mathcal{U}(\mathfrak{A}$节末尾给出，该版本适用于所有极大真面以及5的主连通分支（参见定理 5.5）。目前尚不清楚为何含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 的二次对偶中的每个极小三重幂等元都被 $\mathcal{U}(\mathfrak{A}$的主连通分支中的某个酉元所支配。

本文还需要扩大已知的具有强 Mankiewicz 性质的巴拿赫空间范围。在 [79, 引理 19] 中证明了，若 $\psi : A \to \mathbb{C}$ 是含幺 C*-代数上的非零乘法线性泛函，则实 C*-代数 $A_{\mathbb{R}}^{\psi} := \psi^{-1}(\mathbb{R}$的闭单位球与其中酉元的闭凸包重合， $A_{\mathbb{R}}^{\psi}$ 因此它具有强 Mankiewicz 性质。[79] 中的论证[74, （定理 7.2）4], 依赖于实冯·诺依曼代数的 Russo–Dye 定理；另见 [79, 推论的证明 3]。在下一个引理中，我们将探讨上述结果在 JB*-代数中的一个版本。主要障碍在于，缺少适用于含幺实 JBW*-代数的恰当 Russo–Dye 定理。这仍是一个深刻的未解决问题。为达到我们的目的，我们将采用另一种技巧。

我们首先回顾，实 JB*-代数是（复）JB*-代数中一个闭的、在 * 下不变的实子代数。K. Alvermann 在 [5] 中引入了含幺实 JB*-代数。除上述文献外， [82] 中也给出了含幺实 JB*-代数的公理化内在定义。实 JB*-代数这一类包括所有 JB-代数（它们恰好是对合为恒等映射的实 JB*-代数），以及配备自然 Jordan 乘积 [74, 50] 的所有实 C*- 代数（即 C*- 代数中闭的、在 * 下不变的实子代数）。

实 JB*-代数也可以视为实 JB*-三重系的例子 [63, p.321]。实 JB*-三重系按定义是 JB*-三重系的实闭子三元组（见[63]）。将任意 JB*-三重系视为实巴拿赫空间时，它就是一个实 JB*-三重系。与实 C*-代数的情形一样，实 JB*-三重系可以作为 JB*-三重系的实形式得到。更具体地说，给定一个实 JB*-三重系 E，其代数复化 $X = E \oplus iE$ 上存在唯一的（复）JB*-三重系结构，并存在一个 X 上的共轭（即周期为 2 的共轭线性等距映射） τ，使得

$$E = X^{\tau} = \{z \in X : \tau(z) = z\},$$

（见 [63]）。因此，每个实 C*-代数相对于（2）中给出的乘积都是一个实 JB*-三重系统，而两个实、复或四元数希尔伯特空间之间的所有有界实线性算子构成的巴拿赫空间 B（H_1， H_2）也具有相同的三重乘积，是一个实 JB*-三重系统。

实 C*-代数 $C([0,1], \mathbb{R})$ 上所有实值连续函数构成的代数 $[0,1]$也是实 JB*-代数，其酉元的凸包仅包含常值函数。因此，对于实 JB*-代数，期待 Russo–Dye 定理是不现实的；最接近的结论见 [74, 定理 7.2。4]。正如我们之前所述，在附加假设下该结论成立。一个实 von

冯·诺依曼代数是实 C*-代数，同时也是对偶巴拿赫空间。类似地，实 JBW*-三重系统（分别地，实 JBW*-代数）是实 JB*-代数，且为对偶巴拿赫空间。每个实 JBW*-三重系统都具有唯一的等距预对偶，其三重乘积分别弱* 连续 [76]。每个实 JB*-三重系统的双对偶都是实 JBW*-三重系统 [63, 引理 4。2]。

命题 3.5. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺 JB*-代数，并假设 $\psi:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 是一个非零 Jordan *-同态。考虑含幺实 JB*-代数 $\mathfrak{A}^{\psi}_{\mathbb{R}}:=\psi^{-1}(\mathbb{R})$。那么 $\frac{1}{2}\mathcal{B}_{\mathfrak{A}^{\psi}_{\mathbb{R}}}$ 包含于 $\mathfrak{A}^{\psi}_{\mathbb{R}}$ 中酉元的闭凸包内，因此每个凸体 $K\subseteq\mathfrak{A}^{\psi}_{\mathbb{R}}$ 都满足强 Mankiewicz 性质。

证明. 回顾一下 [74, 引理 7.2.5] 中的一种方法，它对所有含幺实 JB*-代数仍然成立。设 x 是含幺实 JB*-代数 $\mathcal{A}$ 的闭单位球中的一个元素。记 $x=h+k$，其中 $h=h^*$ 且 $k=-k^*$。由 $\{h,\mathbf{1}\}$ 和 $\{k,\mathbf{1}\}$ 分别生成的 $\mathcal{A}$ 的含幺实 JB*-子代数 $\mathcal{A}_{h,\mathbf{1}}$ 和 $\mathcal{A}_{k,\mathbf{1}}$，与含幺交换实 C*-代数等距 JB*-代数同构，因此我们可以应用 [74, 引理 7.2.5] 及其证明，得到 $b=b^*\in\mathcal{A}_{h,\mathbf{1}}$ 和 $a\in\mathcal{A}_{k,\mathbf{1}}$，使得 $h=\cos(b)$ 且 $k=\exp(a)\ -\exp(-a)$ 2。因此$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cos(b)+\frac{1}{4}\exp(a)+\frac{1}{4}(-\exp(-a))$。也就是说，$\frac{1}{2}\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ 中的每个元素都是三个形如 $\cos(b)$、$\exp(a)$ 和 $\exp(-a)$ 的元素的凸组合，其中 $b=b^*$ 和 $a=-a^*$ 属于 $\mathcal{A}$。

如果我们进一步假设 $\mathcal{A}$ 是实 JBW*-代数，并且由 b 和 1 生成的实 JBW*-子代数作为实 JBW-代数与某个 $C(K,\mathbb{R})$ 等距同构，其中 K 是适当的超 Stonean 空间（参见 [57, 引理 4.1.11] 或 [74, §6.3]）。众所周知，$C(K,\mathbb{R})$ 中酉元的凸包在 $\mathcal{B}_{C(K,\mathbb{R})}$ 中稠密，当且仅当 K 全不连通（见 [6]）。因此，$\cos(b)$ 包含于由 b 生成的实冯·诺依曼代数中酉元的闭凸包内，而这些酉元显然也是 $\mathcal{A}$ 中的酉元。由此我们得到以下结论：

(17) 对于每个实 JBW*-代数 $\mathcal{A}$，集合 $\frac{1}{2}\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ 都包含于 $\mathcal{A}$ 中酉元的闭凸包内。

现在回到本命题的原始设定。显然，我们可以将 ψ 视为从 $\mathfrak{A}^{**}$ 到 $\mathbb{C}$ 的弱* 连续 Jordan *-同态。显然，空间 $(\mathfrak{A}^{**})^{\psi}_{\mathbb{R}}:=\{a\in\mathfrak{A}^{**}:\psi(a)\in\mathbb{R}\}$ 是一个 $\mathfrak{A}^{**}$ 的实 JBW*-代数。取实 JB*-代数 $\mathfrak{A}^{\psi}_{\mathbb{R}}\subseteq(\mathfrak{A}^{**})^{\psi}_{\mathbb{R}}$ 中的一个元素 a，满足 $\|a\|\leq\frac{1}{2}$、非零 $\phi\in\mathfrak{A}^*$，且 $\varepsilon>0$。根据 (17)，存在酉元 u_1、……、$u_m\in(\mathfrak{A}^{**})^{\psi}_{\mathbb{R}}$ 以及 t_1、……、$t_m\in(0,1)$，满足 $\sum_j t_j=1$ 和 $\left\|a-\sum_j t_j u_j\right\|<\frac{\varepsilon}{3\|\phi\|}$。将酉元 u_1、……、u_m 视为 $\mathfrak{A}^{**}$ 中的元素时，我们可以在 $\mathfrak{A}^{**}$ 中找到自伴元 h_1、……、h_m，使得对于所有 $j=1$、……、m，均有 $u_j=\exp(ih_j)$。由于 $u_j\in(\mathfrak{A}^{**})^{\psi}_{\mathbb{R}}$，我们推得 $\psi(u_j)\in\mathbb{R}$，因此对于所有 $j=1$、……、m，均有 $\psi(h_j)\in\pi\mathbb{Z}$。

强*拓扑 $\mathfrak{A}^{**}$ 按照 [10, §3], 的意义下，当将其视为 JBW*- 三重系统时，该拓扑强于弱*拓扑，使 $\mathfrak{A}^{**}$ 上的 Jordan 乘积和三重乘积* 在有界集上联合强连续，[89, 87], 并且该拓扑满足适当的Kaplansky 稠密性定理。[10, 推论 3。3]。也就是说，$\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$ 在*中强稠密。$\mathcal{B}_{\mathfrak{A}^{**}}$此外，根据上述性质，

$\mathcal{B}_{\mathfrak{A}_{sa}}$ 在 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}_{sa}^{**}}$中强稠密。因此，对于每个 $j=1,\ldots,m$，我们都可以在 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中找到一个有界网 $(h_{\lambda_j}^j)_{\lambda_j}$，使其关于强*拓扑收敛到 h_j。因此，我们可以找到 $h_0^j \in \mathfrak{A}_{sa}$，使得

$$\left|\phi\left(\exp(ih_0^j)-\exp(ih_j)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{ and } \left|1-\exp\left(-i\psi\left(h_0^j-h_j\right)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3\|\phi\|},$$

对所有 $j=1,\ldots,m.$，定义 $\hat{h}_0^j = h_0^j - \left(\psi\left(h_0^j\right)-\psi(h_j)\right)\mathbf{1} \in \mathfrak{A}_{sa}$。根据定义，我们知道 $\psi\left(\hat{h}_0^j\right)=\psi(h_j) \in \pi\mathbb{Z}$；根据 ψ, $\psi\left(\right.$ 的性质，$\exp(i\hat{h}_0^j)\left.\right)$ =$\exp\left(i\psi\left(\hat{h}_0^j\right)\right) \in \mathbb{R}$. 因此，元素 $\exp(i\hat{h}_0^j)$ 是 $\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}^{\psi}$ 中的一个酉元，对所有$j=1,\ldots,m$ 均成立。由构造可知

$$\begin{aligned}
\left|\phi\left(a-\sum_j t_j\exp(i\hat{h}_0^j)\right)\right| &\leq \left|\phi\left(a-\sum_j t_j\exp(ih_j)\right)\right| \\
&\quad+\left|\phi\left(\sum_j t_j\left(\exp(ih_j)-\exp(ih_0^j)\right)\right)\right| \\
&\quad+\left|\phi\left(\sum_j t_j\left(\exp(ih_0^j)-\exp(i\hat{h}_0^j)\right)\right)\right| \\
&\leq \|\phi\|\left\|a-\sum_j t_j u_j\right\|+\sum_j t_j\left|\phi\left(\exp(ih_j)-\exp(ih_0^j)\right)\right| \\
&\quad+\|\phi\|\sum_j t_j\left\|\exp(ih_0^j)-\exp(i\hat{h}_0^j)\right\| \\
&<2\|\phi\|\frac{\varepsilon}{3\|\phi\|}+\|\phi\|\sum_j t_j\left\|\exp(ih_0^j)\circ\left(\mathbf{1}-\exp\left(-i\left(\psi\left(h_0^j\right)-\psi\left(h_j\right)\right)\mathbf{1}\right)\right)\right\| \\
&\leq 2\frac{\varepsilon}{3}+\|\phi\|\sum_j t_j\left\|\exp(ih_0^j)\right\|\left|1-\exp\left(-i\left(\psi\left(h_0^j\right)-\psi\left(h_j\right)\right)\right)\right|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此我们已经证明，每个 $a\in\frac{1}{2}\mathcal{B}_{\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}^{\psi}}$ 都属于 $\mathcal{U}\left(\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}^{\psi}\right)$的凸包的弱闭包；根据哈恩–巴拿赫定理，这恰好是 $\mathcal{U}\left(\mathfrak{A}_{\mathbb{R}}^{\psi}\right)$的范数闭凸包。[79] 中的定理 2 给出了最终结论。

□

4. Affine behaviour of the isometry on the maximal proper faces of the closed unit ball

本节旨在证明我们论证所需的第三个主要工具。主要目标是证明：从单位元 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 的单位球面 [79, 到任意其他巴拿赫空间单位球面的每个满射等距映射，在 $\mathfrak{A}^{***}$ 中由极小投影确定的每个极大真面上都是仿射的；Mori 和 Ozawa 已在单位元 C*-代数的情形下证明了这一结果20]命题。为了使论证更为简便，我们将先建立一系列技术引理。本节的结论将仅限于二次对偶中与极小投影相关的极大真面；对于一般的

二次对偶中的极小三重幂等元，则需要借助下一节中提出的另一种几何工具。

引理 4.1. 设 L 是单位元不一定存在的 JB*-子代数，且它是含单位元的 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 的子代数。那么存在一个有向集 Λ 以及网 $(d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$、$(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$、$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\subset L$，使得对任意 $\lambda\in\Lambda$，元素 d_λ、e_λ 和 f_λ 都属于 L 的一个交换且结合的 JB*-子代数，并且满足以下陈述：

$$0\leq e_\lambda\leq d_\lambda\leq f_\lambda\leq \mathbf{1},\quad e_\lambda\circ f_\lambda=e_\lambda,\quad d_\lambda=d_\lambda\circ f_\lambda,\ and\ e_\lambda=d_\lambda^2.$$

此外，对于每个 $x\in L$，网 $(d_\lambda\circ x)_{\lambda\in\Lambda}$、$(e_\lambda\circ x)_{\lambda\in\Lambda}$ 和 $(U_{d_\lambda}(x))_{\lambda\in\Lambda}$ 均按范数收敛到 x。

证明. 已知每个 JB*-代数都有一个近似单位（参见 [33,引理 4 及前面的说明] 或 [23, 命题 3.5.23]），因此我们可以找到一个有向集 Γ 和一个由范数不超过 1 的正元组成的网 $(i_\kappa)_{\kappa\in\Gamma}\subset L$，它是 L 中的近似单位，并满足 $(i_\kappa^2)_{\kappa\in\Gamma}$ 也是 L 中的近似单位。现在固定一个 i_κ，考虑由 i_κ 生成的 L 的 JC*-子代数 B_{i_κ}。由于 i_κ 是自伴的，$\mathcal{B}_{i_\kappa}$ 是结合的，因此它与一个交换的 C*- 代数等距同构。由于 $\|i_\kappa\|=1$ 和 $0\leq i_\kappa\leq\mathbf{1}$，$\mathcal{B}_{i_\kappa}$ 与某个紧豪斯多夫空间 $K\subseteq[0,1]$ 上的 $C_0(K)$ 等距同构，其中 $1\in K$；在此对应下，i_κ 对应于 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入。

对于任意的 $n\in\mathbb{N}, n>1$，令 $d_{\kappa,n}$（分别地，$f_{\kappa,n}$）为与 $C_0(K)$ 中由下式定义的连续函数相对应的 B_{i_κ} 的元素

$$t\mapsto \chi_{[\frac{1}{n},1]}(t)\frac{nt-1}{n-1},$$

（分别地，$t\mapsto n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)\,t+\chi_{(\frac{1}{n},1]}(t)$）。最后，令 $e_{\kappa,n}:=d_{\kappa,n}^2$，并设 $\Lambda:=\Gamma\times\mathbb{N}.$。由于 $d_{\kappa,n}$、$f_{\kappa,n}$ 都与在 0 处取值为 0 的函数相对应，因此它们属于 $\mathcal{B}_{i_\kappa}\subset L$，从而 $e_{\kappa,n}\in L$ 也成立。

根据构造，我们已经有 $e_\lambda=d_\lambda^2$。此外，$0\leq e_\lambda\leq d_\lambda\leq f_\lambda\leq\mathbf{1}$ 可由以下事实推出：对应的 $C([0,1])$ 中的函数显然也满足相同的恒等式。基于相同的理由，恒等式 $e_\lambda\circ f_\lambda=e_\lambda$ 和 $d_\lambda=d_\lambda\circ f_\lambda$ 也成立。

由于对于固定的 $\kappa\in\Gamma$，序列 $d_{\kappa,\,n}$（分别地，$e_{\kappa,\,n}$）对应于一个递增的连续函数序列，该函数序列逐点收敛于与 i_κ（分别地，与 i_κ^2）对应的函数，而该函数也是连续的，因此根据 Dini 定理，这种收敛是一致收敛的，所以 $d_{\kappa,\,n}$（分别地，$e_{\kappa,\,n}$）在范数下收敛于 i_κ（分别地，i_κ^2）。注意，由于对应函数在整个区间 $[0,1]$ 上一致收敛，这些收敛关于 κ 是一致的。

固定非零的 $x\in L$ 和 $\varepsilon>0$。对于任意 $\lambda=(\kappa_0,\ n_0)\in\Gamma\times\mathbb{N}$，我们可以找到 $\kappa_1>\kappa_0$，使得 $\|i_\kappa\circ x-x\|<\frac{\varepsilon}{2}$ 且对所有 $\kappa\geq\kappa_1$ 都有 $\|i_\kappa^2\circ x-x\|<\frac{\varepsilon}{2}$。我们还可以找到 $n_1\geq n_0$，使得对所有 $\kappa\in\Gamma$ 和 $n\geq n_1$ 都有 $\|d_{\kappa,\,n}-i_\kappa\|<\frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ 且 $\|e_{\kappa,\,n}-i_\kappa^2\|<\frac{\varepsilon}{2\|x\|}$。于是

$$\|d_{\kappa,n}\circ x-x\|\leq\|d_{\kappa,n}\circ x-i_\kappa\circ x\|+\|i_\kappa\circ x-x\|<\|d_{\kappa,n}-i_\kappa\|\|x\|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

and

$$\|e_{\kappa,n}\circ x-x\|\leq\|e_{\kappa,n}\circ x-i_\kappa^2\circ x\|+\|i_\kappa^2\circ x-x\|<\|e_{\kappa,n}-i_\kappa^2\|\|x\|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

对所有 $n\geq n_1, \kappa\geq\kappa_1$。

只需证明 $U_{d_\lambda}(x) \to x$ 在范数意义下成立。由于 $U_{d_\lambda}(x) = 2d_\lambda \circ (d_\lambda \circ x) - e_\lambda \circ x$，我们只需证明 $d_\lambda \circ (d_\lambda \circ x) \to x$ 在范数意义下成立。为此，固定 $\lambda_0 \in \Lambda$ 和 $\varepsilon > 0$。然后取 $\lambda > \lambda_0$ 使得 $\|d_\lambda \circ x - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$。由$\|d_\lambda\| \leq 1$ 可得

$$\|d_\lambda \circ (d_\lambda \circ x) - x\| \leq \|d_\lambda \circ (d_\lambda \circ x - x)\| + \|d_\lambda \circ x - x\| < \frac{\varepsilon}{2}\|d_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

□

引理 4.2. 设 A 是一个 C*-代数，设 p、q 是 A 中的投影，且满足 $0 \leq q \leq p$。假设 h 是 A_{sa} 中的一个元素，且 $\varepsilon > 0$。若 $\|p \circ h\| \leq \varepsilon$，则 $\|q \circ h\| \leq 3\varepsilon$。

证明. 设 $h_i := P_i(p)(h)$。则 $h_2 = php$, $h_1 = ph(1-p) + (1-p)hp$，且 $p \circ h = h_2 + \frac{1}{2}h_1$。由于 Peirce 投影是压缩的，我们得到 $\|h_2\| \leq \varepsilon$, $\|h_1\| \leq 2\varepsilon$。由于 $hp = php + (1-p)hp = h_2 + h_1 p$, 我们得出 $\|hp\| \leq \|h_2\| + \|h_1\|\|p\| \leq 3\varepsilon$。

注意到映射 U_h 是正元（h 是自伴的），假设$0 \leq q \leq p$，可得 $0 \leq hqh \leq hph$。因此，根据 Gelfand–Naimark 公理，我们推得

$$\|qh\|^2 = \|hq\|^2 = \|hqh\| \leq \|hph\| = \|hp\|^2 \leq (3\varepsilon)^2,$$

由此得到 $\|q \circ h\| \leq \frac{\|qh\| + \|hq\|}{2} \leq 3\varepsilon$。 □

引理 4.3. 设 p, q 是 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的投影，且满足 $0 \leq q \leq p$。假设 x是 $\mathfrak{A}$ 中的一个元素，满足 $\|p \circ x\| \leq \varepsilon$，其中某个 $\varepsilon > 0$。则 $\|q \circ x\| \leq 6\varepsilon$。

证明. 设 $x = h + ik$，其中 $h, k \in \mathfrak{A}_{sa}$。注意到 $p \circ x = p \circ h + ip \circ k$对应于 $p \circ x$ 在 $\mathfrak{A}_{sa} \oplus i\mathfrak{A}_{sa}$中的分解。因此 $\|p \circ h\|, \|p \circ k\| \leq \|p \circ x\| \leq \varepsilon$。

元素 $a = (p-q) - q$是自伴的，因此，由 h 和 a 生成的 $\mathfrak{A}$的 JB*-子代数 $\mathfrak{B}$ 根据 Shirshov-Cohn 定理 [57, 定理 2.4.14]是一个 JC*-代数。元素 $a^2 = (p-q) + q$ 属于 $\mathfrak{B}$，因此 $p-q$、q和 h 属于 $\mathfrak{B}$。引理 4.2证明了 $\|q \circ h\| \leq 3\varepsilon$。类似地，我们得到 $\|q \circ k\| \leq 3\varepsilon$，从而得到 $\|q \circ x\| \leq \|q \circ h\| + \|q \circ k\| \leq 6\varepsilon$. □

本节的主要结果将表明，从幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 的单位球面到任意巴拿赫空间的单位球面的每个满射等距映射，限制在与 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$ 中的极小投影相关联的任意极大真面上时，都是仿射的。 $\mathfrak{A}^{**}$这里的论证受到 Mori 和 Ozawa 在 C*-代数情形下证明的类似结果的启发（参见 [79, 命题 20]）。毋庸赘言，JB*-代数的情形需要结合适当的约当技巧进行非平凡的改造。

命题 4.4. 设 $\mathfrak{A}$ 是含幺 JB*-代数， Y是巴拿赫空间， $\Delta\colon S_{\mathfrak{A}} \to S_Y$是满射等距映射，且 $F_p \subset S_{\mathfrak{A}}$ 是与极小投影 $p \in \mathfrak{A}^{**}$相关联的极大范数闭真面。那么存在一个有向集 Λ 和一个仿射压缩映射网 $(\Theta_\lambda)_\lambda : F_p \to K_\lambda$，其中每个 K_λ 都是 F_p的闭凸子集，使得 $\Theta_\lambda \to \mathrm{id}_{F_p}$ 在逐点范数拓扑（即强算子拓扑）下成立，每个 $\Delta(K_\lambda)$ 都是凸集，并且每个 K_λ 都与某个实 JB*-代数 $\mathcal{R}_\lambda$ 的闭球仿射等距同构，且 $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_\lambda}$ 具有强 Mankiewicz 性质（因此 $\Delta\restriction_{F_p}$ 是仿射的）。

证明。设 $\phi \in \mathfrak{A}^*$ 是与 p相关联的纯态。考虑标准半范数 $\|a\|_\phi^2 := \phi(a \circ a^*)$，并令 $L := \{a \in \mathfrak{A} : \|a\|_\phi = 0\}$。

由于 $\|a\|_\phi = \|a^*\|_\phi$ 对所有 $a \in \mathfrak{A}$， L 显然是自伴的。此外， p 是极小的，这意味着它是紧的 [18, 定理 3。4], 因此 $\mathbf{1} - p$ 是开的，因此

$$L = \mathfrak{A}_0^{**}(p) \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2^{**}(\mathbf{1} - p) \cap \mathfrak{A}$$

（例如，关于第一个等式，可参见参考文献中的任意一篇： [47, 引理 1. 5], [83], [11, 命题 1.2], [35, 引理 4.1] 或 [55, 引理 6.11(e)]。）恒等式$L = \mathfrak{A}_2^{**}(\mathbf{1} - p) \cap \mathfrak{A}$ 意味着 L 是 $\mathfrak{A}$的闭内内理想。因此，对于任意 a、 $b \in L$ ， 我们有

$$a \circ b = \{a, \mathbf{1}, b\} = \{a, \mathbf{1} - p, b\} \in \mathfrak{A}_0^{**}(p).$$

因此， L 是 $\mathfrak{A}$的 Jordan *-子代数。

根据引理 4.1 我们可以找到一个有向集 Λ 以及网 $(d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$、$(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$、$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset L = \mathfrak{A}_0^{**}(p) \cap \mathfrak{A}$ ，满足上述引理中的结论。

现在任取 $x \in F_p$。事实 $x \in F_p$ 意味着存在 $x_0 \in \mathfrak{A}_0^{**}(p)$使得 $x = p + x_0$。因此 $\mathbf{1} - x = \mathbf{1} - p - x_0$。由于 $\mathbf{1} - p$ 和 x_0 都属于$\mathfrak{A}_0^{**}(p)$，我们得到 $\mathbf{1} - x \in \mathfrak{A}_0^{**}(p) \cap \mathfrak{A} = L$。

对于 $\lambda \in \Lambda$ ，定义 $\Theta_\lambda(x) := \mathbf{1} - e_\lambda + U_{d_\lambda}(x)$ $(x \in F_p)$。注意到 $e_\lambda = U_{d_\lambda}(\mathbf{1})$，因此 $\Theta_\lambda(x) = \mathbf{1} - U_{d_\lambda}(\mathbf{1} - x)$。由于 $\mathbf{1} - x \in L$，我们得到 $U_{d_\lambda}(\mathbf{1} - x) \to \mathbf{1} - x$ 在范数下（参见引理 4.1），因此 $\Theta_\lambda(x) \to x$ 在范数下。

为检验 Θ_λ 的其他性质，我们注意到，对于 $x, y \in F_p$ ， 有$\|\Theta_\lambda(x) - \Theta_\lambda(y)\| = \|U_{d_\lambda}(x) - U_{d_\lambda}(y)\| = \|U_{d_\lambda}(x - y)\| \le \|d_\lambda\|^2\|x - y\| \le \|x - y\|$，因此 Θ_λ 是压缩的。由于 $d_\lambda \ge 0$ 和 $\|d_\lambda\|, \|-x\| \le 1$，由恒等式$\Theta_\lambda(x) = \mathbf{1} - U_{d_\lambda}(\mathbf{1} - x)$ ($x \in F_p$) 以及引理 3.4] ， 我们得到 $\|\Theta_\lambda(x)\| \le 1$，因此 Θ_λ将 F_p 映入 $\mathfrak{A}$ 的闭单位球。

固定 $x \in F_p$。由于 $d_\lambda, \mathbf{1} - x \in L \subset \mathfrak{A}_0^{**}(p)$，通过 Peirce 算术可推出，$U_{d_\lambda}(\mathbf{1} - x) \in \mathfrak{A}_0^{**}(p) \cap \mathfrak{A} = L$。因此

$$\Theta_\lambda(x) = \mathbf{1} - U_{d_\lambda}(\mathbf{1} - x) = p + (\mathbf{1} - p) - U_{d_\lambda}(\mathbf{1} - x) \in p + \mathfrak{A}_0^{**}(p).$$

结合后一个结论与 $\|\Theta_\lambda(x)\| \le 1$ 以及 $\Theta_\lambda(x) \in \mathfrak{A}$ ， 我们得到

$$\Theta_\lambda(x) \in \mathfrak{A} \cap \mathcal{B}_{\mathfrak{A}^{**}} \cap (p + \mathfrak{A}_0^{**}(p)) = \mathfrak{A} \cap (p + \mathcal{B}_{\mathfrak{A}_0^{**}(p)}) = F_p$$

对所有 $x \in F_p$ 均成立。

为简化记号，并找出命题陈述中的凸集 K_λ ， 我们固定一个 $\lambda \in \Lambda$ ， 并记 $e := e_\lambda$, $f := f_\lambda$, $\Theta := \Theta_\lambda$。

令 $s := \mathbf{1} - f$。由于 $0 \le f \le \mathbf{1}$, $0 \le s \le \mathbf{1}$。由于 $f \in \mathfrak{A}_0^{**}(p)$， $s = \mathbf{1} - f = p + (\mathbf{1} - p) - f \in p + \mathfrak{A}_0^{**}(p)$。因此 $s \in F_p$。令 $r := r(s)$ 为 s 的值域投影。定义 $F := \{x \in S_{\mathfrak{A}} : r \circ x = r\}$, 显然它非空。

为了使下面的部分更便于读者理解，我们将以下陈述提取为一个断言：

断言： F 是 $S_{\mathfrak{A}}$的一个范数闭面，

$$F = (r + \mathcal{B}_{\mathfrak{A}_0^{**}(r)}) \cap \mathfrak{A} = \{x \in S_{\mathfrak{A}} : P_2(r)(x) = r\} = \{x \in S_{\mathfrak{A}} : x \circ s = s\},$$

且 $\Theta(F_p) \subset F \subset F_p$。

该断言的证明。也就是说，由于 r 是一个投影， $r \circ x = \{r, r, x\}$，因此 $r \circ x = r$当且仅当 $P_2(r)(x) = r$ 且 $P_1(r)(x) = 0$。由此立即可得， $F = (r + \mathcal{B}_{\mathfrak{A}_0^{**}(r)}) \cap \mathfrak{A}$。我们还注意到，根据 [47, 引理 1，6] 若 $x \in S_{\mathfrak{A}^{**}}$ 且

$P_2(r)(x) = r$，则 $P_1(r)(x) = 0$。因此，$x \in F$ 当且仅当 $x \in S_{\mathfrak{A}}$ 且 $P_2(r)(x) = r$。

显然，F是闭且凸的。现在设 x、$y \in S_{\mathfrak{A}}$ 和 $t \in (0,1)$，使得 $tx+(1-t)y \in F$。令 $x_2 := P_2(r)(x)$，且 $y_2 := P_2(r)(y)$。应用 $P_2(r)$可得 $tx_2 + (1-t)y_2 = r$。由于 Peirce 投影是压缩的，$x_2, y_2 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{A}_2^{**}(r)}$。注意到 r 是 $\mathfrak{A}_2^{**}(r)$中的单位元，因而是该空间闭单位球的极端点，我们可推出 $x_2 = r = y_2$。因此$x, y \in F$，由此证明了 F 是一个面。

我们来证明 F的最后一个等价定义。为此，我们注意到，若 $x \in F$，则 $x = r + x_0$，其中 $x_0 = P_0(r)(x) \in \mathfrak{A}_0^{**}(r)$。结合 $s \in \mathfrak{A}_2^{**}(r)$这一事实与 Peirce 算术，可得

$$s \circ x = \{s, \mathbf{1}, x\} = \{s, r + (\mathbf{1} - r), r + x_0\} = \{s, r, r\} = s.$$

因此，$F \subset \{x \in S_{\mathfrak{A}} : x \circ s = s\}$。对于反向包含，取 $x \in \mathfrak{A}$使得 $x \circ s = s$。由于 s 是自伴的，我们也有 $x^* \circ s = s$。令 $h := \frac{x+x^*}{2}, k := \frac{x-x^*}{2}$。那么 h 是自伴的，k 是斜对称的，$x = h + k$, $s \circ h = s$ 和$s \circ k = 0$。鉴于 s 是正元，我们可以应用 [20,引理 4.1]，推得 $s \perp k$，从而得到 $r = r(s) \perp k$（参见 (7)）。另一方面，由于 $(h - \mathbf{1}) \circ s = 0$，我们可以再次应用 [20, 引理 4.1]，得出$h - \mathbf{1} \perp s$和 $h - \mathbf{1} \perp r$。因此 $x = h + k = r + (\mathbf{1} - r) + (h - \mathbf{1}) + k \in r + \mathfrak{A}_0^{**}(r)$。因此 $F = \{x \in S_{\mathfrak{A}} : x \circ s = s\}$。

注意到，由于 $f \circ d = d$, $f \circ e = e$ 和 $s = \mathbf{1} - f$，我们得到 $s \circ d = s \circ e = 0$。因此 $\{d, d, s\} = 0$，或者等价地，$d \perp s$ 或 $d \perp r$。因此，根据 Peirce 算术，$U_d(x) \perp r$ 对所有 $x \in \mathfrak{A}$都成立。由于 $e \circ s = 0$，我们有 $\mathbf{1} - e \in F$，所以对于任意$x \in F_d$，我们得到 $\Theta(x) = \mathbf{1} - e + U_d(x) \in r + \mathfrak{A}_0^{**}(r)$；结合事实$\|\Theta(x)\| \leq 1$，可得 $\Theta(F_d) \subset F$。

根据构造，$s \in F_p$，因此存在满足 $s = p + s_0$ 的 $s_0 \in \mathfrak{A}_0^{**}(p)$。不难看出，$p \perp s_0$ 蕴含 $r = r(s) = r(p) + r(s_0) = p + r(s_0)$。现在任取 $x \in F$，并写作 $x = r + x_0$，其中 $x_0 = P_0(r)(x) \perp r$。这也意味着$x_0 \perp p$（回忆一下，$r \geq p$），因而 $x = r + x_0 = p + r(s_0) + x_0 \in F_p$。■

若 $r \in \mathfrak{A}$，我们可以设定 $K_\lambda = K := F = r + \mathcal{B}_{\mathfrak{A}_0}(r) = r_\lambda + \mathcal{B}_{\mathfrak{A}_0}(r_\lambda)$。在这种情况下，$r$ 作为 $\mathfrak{A}$ 中的一个投影意味着 $\mathcal{R}_\lambda := \mathfrak{A}_0(r) = \mathfrak{A}_2(1 - r)$ 是一个含幺 JB*-代数，而 K 是 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$的一个真范数闭面。因此，$\mathcal{B}_{\mathfrak{A}_0}(r)$（从而 K）具有强 Mankiewicz 性质（参见 (13)）。由于 $\Delta(K)$ 是一个交面，因而是凸的（参见引理 1.2），限制映射 $\Delta|_K \colon K \to \Delta(K)$ 是仿射的。

最有可能的情况是 $r \notin \mathfrak{A}$，我们从现在起假设这一事实成立。定义

$$C := \{a \in \mathfrak{A} : a \circ r = \gamma r \text{ for some } \gamma \in \mathbb{C}\} = (\mathbb{C}r \oplus \mathfrak{A}_0^{**}(r)) \cap \mathfrak{A}$$

（回忆一下，$r \circ a = \{r, r, a\} = P_2(r)(a) + \frac{1}{2}P_1(r)(a)$）。

我们的下一个目标是证明

$$\|r \circ x\| \leq \|(\mathbf{1} - r) \circ x\|, \text{ for any } x \in C. \tag{18}$$

设 $x = \gamma r + x_0$，其中 $x_0 \in A_0^{**}(r)$。若 $\gamma = 0$，则该不等式显然成立。否则，我们可以假设 $\gamma = 1$。我们要证明 $1 \leq \|x_0\|$。反证法，假设 $\|x_0\| < 1$。由于 $x = r + x_0$、$r \perp x_0$，且 r 是一个投影，因此对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $x^n = r + x_0^n$。但这样一来，$\|r - x^n\| = \|x_0^n\| \leq \|x_0\|^n$。由

$\|x_0\| < 1$ 可得 $\|x_0\|^n \to 0$，因此 $x^n \to r$ 在范数意义下成立。但 $x^n \in \mathfrak{A}$，且 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}^{**}$ 中关于范数是闭的，这与 $r \notin \mathfrak{A}$ 矛盾。

注意，对于任意 $x_0 \in \mathfrak{A}_0^{**}(r)$，至多存在一个 $\gamma \in \mathbb{C}$ 使得 $\gamma r + x_0 \in \mathfrak{A}$，否则就会得到 $r \in \mathfrak{A}$。因此，存在一个定义良好的映射 $\psi : (\mathbf{1} - r) \circ C \to \mathbb{C}$，由 $\psi((\mathbf{1} - r) \circ x) r = r \circ x$ 给出，适用于任意 $x \in C$。映射 ψ 显然是线性的，并且根据不等式 $\|r \circ x\| \leq \|(\mathbf{1} - r) \circ x\|$，我们有 $\|\psi\| \leq 1$。（实际上 $\|\psi\| = 1$，因为 $\mathbf{1} \in C$。）此外，若 $x, y \in C$ 满足 $x = \gamma_x r + x_0, y = \gamma_y r + y_0$，其中 $x_0 = P_0(r)(x)$ $y_0 = P_0(r)(y) \perp r$，则 $x \circ y = \gamma_1 \gamma_2 r + x_0 \circ y_0$。这证明了 $\psi(x_0 \circ y_0) = \gamma_1 \gamma_2 = \psi(x_0)\psi(y_0)$（即，$\psi$ 是 Jordan 乘法的）。此外，若 $x = \gamma r + x_0$ 满足 $x_0 \perp r$，则 $x^* = \overline{\gamma} r + x_0^*$，因此 $\psi(x_0^*) = \overline{\psi(x_0)}$（也就是说，$\psi$ 是 Jordan *-同态）。实际上，映射 $C \to (\mathbf{1} - r) \circ C, x \mapsto (\mathbf{1} - r) \circ x = P_0(r)(x)$ 是一个 Jordan *-同态。综上可知，$\mathcal{R}_\lambda := C_{\mathbb{R}}^{\psi} := \psi^{-1}(\mathbb{R})$ 是一个含幺实 JB*-代数，并且根据命题 3.5，其闭单位球 $\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}}^{\psi}}$ 满足强 Mankiewicz 性质。

接下来的目标是证明，分别由$\mathbf{1} - r$ 和 $\mathbf{1} - s$ 定义的 Jordan 乘法算子限制在 C上时，是保范映射。具体而言，取$x \in C$，使得 $x = \gamma r + x_0$，其中 $x_0 = (\mathbf{1} - r) \circ x = P_0(r)(x) \perp r$。由于 $r = r(s^{\frac{1}{2}}) \geq s$，$x_0 \perp s^{\frac{1}{2}}$，因此 $s \circ x_0 = \{s^{\frac{1}{2}}, s^{\frac{1}{2}}, x_0\} = 0$，我们得到 $x \circ (\mathbf{1} - s) = \gamma(r - s) + x_0$。由于 $\|r - s\| \leq \|r\| = 1$，$|\gamma| \leq \|x_0\|$（参见（18）），我们推出

$$\|x\| = \max\{\|\gamma r\|, \|x_0\|\} = \|x_0\| = \max\{\|\gamma(r - s)\|, \|x_0\|\} = \|x \circ (\mathbf{1} - s)\|, \tag{19}$$

因此，$\Phi_0(s) : x \mapsto x \circ (\mathbf{1} - s)$ 是从 C 到$(\mathbf{1} - s) \circ C$的等距映射。

集合

$$K_\lambda = K := s + (\mathbf{1} - s) \circ \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}}^{\psi}} = s_\lambda + (\mathbf{1} - s_\lambda) \circ \mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}}^{\psi}},$$

这显然是一个闭凸集。利用 $\Phi_0(s)$ 以及元素 s 的平移都是等距映射这一事实，我们推知 K_λ 确实通过一个满射仿射等距映射，与实单位 JB*-代数$\mathcal{R}_\lambda = C_{\mathbb{R}}^{\psi}$ 的闭球等距同构，而后者具有强 Mankiewicz 性质（参见命题 3.5）。因此，要完成证明，只需证明 $\Theta(F_p) \subset K \subset F_p$ 以及 $\Delta(K)$ 是仿射的。

我们将通过几个辅助断言来展开论证。

断言 1

$$K = S_{\mathfrak{A}} \cap \{\gamma r + (1 - \gamma)s + x_0 : \gamma \in [-1, 1], x_0 \in \mathfrak{A}_0^{**}(r)\}. \tag{20}$$

断言的证明。若 $x = \gamma r + (1 - \gamma)s + x_0$，其中 $x \in S_{\mathfrak{A}}$、$\gamma \in [-1, 1]$ 和 $x_0 \in \mathfrak{A}_0^{**}(r)$，则 $x = s + (\mathbf{1} - s) \circ (\gamma r + x_0)$。由于 $\gamma r + x_0 = x - (1 - \gamma)s \in \mathfrak{A}$，容易看出 $\gamma r + x_0 \in C_{\mathbb{R}}^{\psi}$。考虑到 $x_0 \perp \gamma r + (1 - \gamma)s$，我们有$\|x_0\| \leq \|x\| = 1$。于是 $\|\gamma r + x_0\| = \max\{|\gamma|, \|x_0\|\} \leq 1$。由此可得 $x \in K$。

现在取 $x \in K$。那么存在 $y = \gamma r + x_0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$，使得 $\gamma \in \mathbb{R}$ 且 $x_0 \perp r$，从而$x = s + (\mathbf{1} - s) \circ y$。这立即推出 $x \in \mathfrak{A}$ 且 $x = \gamma r + (1 - \gamma) \circ s + x_0$。由于 $|\gamma| \leq \|y\| \leq 1$，我们得到 $\gamma \in [-1, 1]$。由 $0 \leq s \leq \mathbf{1}$ 和 $r = r(s)$ 可得 $0 \leq s \leq r$，因此 $-r \leq 2s - r \leq r$，这意味着 $\|2s - r\| \leq \|r\| = 1$，故对所有 $\gamma \in [-1, 1]$，$\gamma r + (1 - \gamma)s = \frac{\gamma+1}{2} r + \left(1 - \frac{\gamma+1}{2}\right)(2s - r)$ 的范数至多为一。另一方面，正如我们之前所证明的，$s = p + s_0$ 且对于某个 $s_0 \perp p$，$r = r(s) = p + r(s_0)$。这意味着 $\gamma r + (1 - \gamma)s = p + \gamma r(s_0) + (1 - \gamma)s_0 \in p + \mathfrak{A}_0^{**}(p)$。因此$\|\gamma r + (1 - \gamma)s\| \geq \|p\| = 1$，从而对所有 $\gamma \in [-1, 1]$，$\|\gamma r + (1 - \gamma)s\| = 1$。最后，$\|x\| = \max\{\|\gamma r + (1 - \gamma)s\|, \|x_0\|\} = 1$，因为 $\|x_0\| \leq \|y\| = 1$。■

现在，若在恒等式 (20) 中取 $\gamma = 1$，我们便得到 $F \subset K$。由于 $\Theta(F_p) \subset F$，因此有 $\Theta(F_p) \subset K$。我们知道，给定 F_p 中的 $s = p + s_0, r = p + r_0$，其中 $s_0 = P_0(p)(s)$ $r_0 = P_0(p)(r) \in \mathfrak{A}_0^{**}(p)$（具体而言，$r_0 = r(s_0)$），那么对于任意 $x_0 \in \mathfrak{A}_0^{**}(r)$，也有 $x_0 \in \mathfrak{A}_0^{**}(p)$，因此 $\gamma r + (1-\gamma)s + x_0 = p + \gamma r_0 + (1-\gamma)s_0 + x_0$。由此可得 $K \subset F_p$。

剩下要证明的就是 $\Delta(K)$ 是凸集。对于 $\gamma \in [-1, 1]$，定义 $h_\gamma(t) := t + \gamma(1-t)$。注意，对于任意 $\alpha \in [0,1]$ 和任意 $\gamma_1, \gamma_2 \in [-1,1]$，都有$\alpha h_{\gamma_1} + (1-\alpha)$ $h_{\gamma_2} = h_{\alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2}$。对于任意集合 $S \subset \mathfrak{A}$，记 $\mathcal{N}_\delta(S)$ 为 S 在 $\mathfrak{A}$ 中的 δ-邻域。记 $r_{k,m}^i := \chi_{[\frac{2k-2+i}{2m}, \frac{2k-1+i}{2m}]}(s)$，其中 $m \in \mathbb{N}, i = 1, 2, k = 1, \ldots, m$，并令

$$G_m^i(\gamma) := F_p \bigcap \left(\bigcap_k F\left(r_{k,m}^i, h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right)\right)$$

and

$$H_m^i(\gamma) := F_p \cap \mathcal{N}_{\frac{1}{m}}\left(G_m^i(\gamma)\right),$$

其中交集取遍满足条件的 $k = 1, 2, \ldots\ldots, m$ 使得$r_{k,\,m}^i \neq 0$。显然$r_{k,\,m}^i \leq r$ 对所有 i, m, k 如上所述。定理2.1结合恒等式 $\alpha h_{\gamma_1} + (1-\alpha) h_{\gamma_2} = h_{\alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2}$ 以及[79, 引理 10] 可得

$$\alpha G_m^i(\gamma_1) + (1-\alpha) G_m^i(\gamma_2) \subset G_m^i(\gamma_3)$$

从而

$$\alpha H_m^i(\gamma_1) + (1-\alpha) H_m^i(\gamma_2) \subset H_m^i(\gamma_3)$$

对于任意的 γ_1、$\gamma_2 \in [-1,1]$、$\alpha \in [0,1]$ 和 $\gamma_3 := \alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2$。

为了使证明更加易读，下面先给出以下断言：

断言 2 记 $K(\gamma) := \{x \in F_p : x \circ r = h_\gamma(s)\}$，则有

$$K(\gamma) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left(H_m^1(\gamma) \cap H_m^2(\gamma)\right). \tag{21}$$

断言的证明。（$\subset$）任取 $x \in K(\gamma)$。注意到 $x \circ r = \{r, r, x\} = P_2(r)(x) + \frac{1}{2} P_1(r)(x)$, 因此 $r \circ x = h_\gamma(s) \in \mathfrak{A}_2^{**}(r)$ 蕴含 $x = h_\gamma(s) + P_0(r)(x)$。定义 g_m 为如下连续函数

$$g_m(t) := \begin{cases} \gamma, & \text{if } t = 0, \\ h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right), & \text{if } t \in \left[\frac{2k-1}{2m}, \frac{2k}{2m}\right], \\ \text{affine}, & \text{if } t \in \left[\frac{2k-2}{2m}, \frac{2k-1}{2m}\right]. \end{cases}$$

于是，由于 $h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right) - h_\gamma\left(\frac{2k-1}{2m}\right) = \frac{1-\gamma}{2m}$，我们有 $\|g_m - h_\gamma\|_\infty \leq \frac{1}{m}$。根据定义，我们还有 $(g_m - h_\gamma)(0) = 0$，因此 $(g_m - h_\gamma)(s) \in \mathfrak{A}$ 且 $\|(g_m - h_\gamma)(s)\| \leq \frac{1}{m}$。记 $y := x + (g_m - h_\gamma)(s)$。要证明 $x \in H_m^1(\gamma)$，只需证明$y \in G_m^1(\gamma)$。

我们知道 $y \in \mathfrak{A}$。通过观察 $y = (1-r) \circ x + g_m(s) = P_0(r)(x) + g_m(s)$，我们推得 $\|y\| = \max\{\|P_0(r)(x)\|, \|g_m(s)\|\} = 1$。再次，$s = p + s_0$，其中某个 $s_0 \perp p$。由于 p 是一个投影，这意味着对于任何常数项为零的多项式 P，都有 $P(s) = P(1)p + P(s_0)$；根据斯通–魏尔斯特拉斯定理，对于任何满足 $f(0) = 0$ 的 $f \in C([0,1])$，都有 $f(s) = f(1)p + f(s_0)$。由于 $(g_m - h_\gamma)(1) = 0$，我们得到 $(g_m - h_\gamma)(s) = (g_m - h_\gamma)(s_0) \in \mathfrak{A}_0^{**}(p)$。由于 $x \in F_p$，我们也得到 $y \in F_p$。

现在，等式 $x \circ r = h_\gamma(s)$ 意味着 $y \circ r = g_m(s)$。此外，恒等式

$$g_m \cdot \chi_{\left[\frac{2k-1}{2m}, \frac{2k}{2m}\right]} = h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right) \cdot \chi_{\left[\frac{2k-1}{2m}, \frac{2k}{2m}\right]},$$

且 $y \circ r = g_m(s)$ 给出 $y \circ r^1_{k,\ m} = h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right) r^1_{k,\ m}$，或者等价地，$y \in F\left(r^1_{k,m},\ h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right)$ 对所有 k 均成立。因此，$y \in G^1_m(\gamma)$ 且 $x \in H^1_m(\gamma)$。综上，$K(\gamma) \subset H^1_m(\gamma)$。类似地，$K(\gamma) \subset H^2_m(\gamma)$。

($\supset$) 取 $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(H^1_m(\gamma) \cap H^2_m(\gamma)\right)$。那么，对于任意 i，m 存在 $y^i_m \in G^i_m(\gamma)$，使得 $\|x - y^i_m\| \leq \frac{1}{m}$。由于

$$y^i_m \in F\left(r^i_{k,m}, h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right) = h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right) r^i_{k,m} + \mathcal{B}_{\mathfrak{A}^{**}_0(r^i_{k,m})},$$

$y^i_m \circ r^i_{k,\ m} = h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right) r^i_{k,\ m}$。记 $r^i_m := \sum_{k=1}^m r^i_{k,\ m}$。那么

$$y^i_m \circ r^i_m = \sum_{k=1}^m y^i_m \circ r^i_{k,m} = \sum_{k=1}^m h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right) r^i_{k,m} = \left(\sum_{k=1}^m h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right) \chi_{\left[\frac{2k-2+i}{2m}, \frac{2k-1+i}{2m}\right]}\right)(s).$$

与之前一样，

$$\left\| \sum_{k=1}^m h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right) \chi_{\left[\frac{2k-2+i}{2m}, \frac{2k-1+i}{2m}\right]} - \sum_{k=1}^m h_\gamma \cdot \chi_{\left[\frac{2k-2+i}{2m}, \frac{2k-1+i}{2m}\right]} \right\|_\infty \leq \frac{1}{m},$$

这意味着

$$\|h_\gamma(s) \circ r^i_m - y^i_m \circ r^i_m\| \leq \frac{1}{m}.$$

因此，由 $\|x - y^i_m\| \leq \frac{1}{m}$ 可推得，对于 $i = 1, 2$，$\left\|(h_\gamma(s) - x) \circ r^i_m\right\| \leq \frac{2}{m}$。

令 $r_m := r^1_m \vee r^2_m$。由于 $r^i_m = \sum_{k=1}^m \chi_{\left[\frac{2k-2+i}{2m}, \frac{2k-1+i}{2m}\right]}(s)$，我们很容易看出 $r_m = \chi_{\left[\frac{1}{m}, 1\right]}(s)$ 和 $r_m = r^1_m + r^2_m - r^1_m \circ r^2_m = r^2_m + r^1_m \circ (\mathbf{1} - r^2_m)$。注意，$r^1_m \circ (\mathbf{1} - r^2_m) = \chi_{\left[\frac{1}{2m}, \frac{2}{2m}\right]} + \sum_{k=2}^m \chi_{\left(\frac{2k-2+i}{2m},\ \frac{2k-1+i}{2m}\right)}$ 是一个投影，并且 $0 \leq r^1_m \circ (\mathbf{1} - r^2_m) \leq r^1_m$（所有这些投影都属于 $\mathfrak{A}^{**}$ 的一个 JBW* 子代数，该子代数与一个交换冯·诺伊曼代数等距同构）。

由于 r^1_m 和 $r^1_m \circ (\mathbf{1} - r^2_m)$ 是投影，且 $0 \leq r^1_m \circ (\mathbf{1} - r^2_m) \leq r^1_m$ 和 $\left\|(h_\gamma(s) - x) \circ r^1_m\right\| \leq \frac{2}{m}$，引理4.3推出 $\left\|(h_\gamma(s) - x) \circ \left(r^1_m \circ (\mathbf{1} - r^2_m)\right)\right\| \leq \frac{12}{m}$。因此

$$\|(h_\gamma(s) - x) \circ r_m\| \leq \left\|(h_\gamma(s) - x) \circ \left(r^1_m \circ (\mathbf{1} - r^2_m)\right)\right\| + \left\|(h_\gamma(s) - x) \circ r^2_m\right\| \leq \frac{14}{m}.$$

由于 $s \geq 0$，$r = r(s) = \chi_{(0,1]}(s)$，且 $r_m \nearrow r$ 在 $\mathfrak{A}^{**}$ 的强* 拓扑中。因此 $x \circ r_m \to x \circ r$ 在 $\mathfrak{A}^{**}$ 的强 * 拓扑中。

另一方面，已知对于每个 $z \in \mathfrak{A}^{**}$ 都有 $\|z\| = \text{上确界}_{\phi \in S_{\mathfrak{A}^*}} \|z\|_\phi$（见[11, 命题 1。2] 或 [24, 命题 5.10。60]）。此外，由于强*拓扑 $\mathfrak{A}^{**}$ 是由所有预希尔伯特半范数 $\|\cdot\|_\phi$生成的，其中 $\phi \in S_{\mathfrak{A}^*}$（参见 [10, 定义 3。1]），

$$\|(h_\gamma(s) - x) \circ r_m\|_\phi \leq \|(h_\gamma(s) - x) \circ r_m\| \leq \frac{14}{m}$$

对于任意 $\phi \in S_{\mathfrak{A}^*}$（见 [11, 命题 1.2]），以及在强* 拓扑中的 $(h_\gamma(s) - x) \circ r_m \to (h_\gamma(s) - x) \circ r$，因此对于任意$\phi \in S_{\mathfrak{A}^*}$，$\|(h_\gamma(s) - x) \circ r_m\|_\phi \to \|(h_\gamma(s) - x) \circ r\|_\phi$，我们推得对所有 $\phi \in S_{\mathfrak{A}^*}$，$\|(h_\gamma(s) - x) \circ r\|_\phi = 0$，从而

$$\|(h_\gamma(s) - x) \circ r\| = \sup_{\phi \in S_{\mathfrak{A}^*}} \|(h_\gamma(s) - x) \circ r\|_\phi = 0,$$

等价地，$x \circ r = h_\gamma(s) \circ r = h_\gamma(s)$。这意味着 $x \in K(\gamma)$，这正是我们想要的。■

现在我们来完成命题的证明。由于 $h_\gamma(s) = s + \gamma(r - s) = \gamma r + (1 - \gamma)s$，元素 $x \in S_{\mathfrak{A}}$ 满足 $x = \gamma r + (1 - \gamma)s + x_0$，其中 $x_0 \perp r$，当且仅当 $x \circ r = h_\gamma(s)$。结合这一观察与断言 1（20），可得

$$K = \bigcup_{\gamma \in [-1,1]} K(\gamma). \tag{22}$$

我们来考察集合 $G_m^i(\gamma)$ 和 $H_m^i(\gamma)$。我们知道 F_p 是 $S_{\mathfrak{A}}$ 的范数闭真面，而 $\Delta(F_p)$ 是 S_Y 中的交面（参见引理 1.2）。根据定理 2.1

$$F\left(r_{k,m}^i, h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right) = \left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)},$$

结合引理 2.5(b) 可知

$$\Delta\left(F\left(r_{k,m}^i, h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right)\right) = \Delta\left(\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)}\right) = \Delta\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)}.$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta\left(G_m^i(\gamma)\right) &= \Delta\left(F_p\right) \bigcap \left(\bigcap_k \Delta\left(\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)}\right)\right) \\ &= \Delta\left(F_p\right) \bigcap \left(\bigcap_k \Delta\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_\gamma\left(\frac{k}{m}\right)}\right),\end{aligned}$$

and

$$\Delta\left(H_m^i(\gamma)\right) = \Delta\left(F_p\right) \cap \mathcal{N}_{\frac{1}{m}}\left(\Delta\left(G_m^i(\gamma)\right)\right).$$

由 $\alpha \in [0,1]$，引理 2.5(c)（另见 [79, 引理 11]）可知

$$\begin{aligned}&\alpha\Delta\left(G_m^i(\gamma_1)\right) + (1-\alpha)\Delta\left(G_m^i(\gamma_2)\right) \\ &\subseteq \Delta\left(F_p\right) \bigcap \left(\bigcap_k \alpha\Delta\left(\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_{\gamma_1}\left(\frac{k}{m}\right)}\right) + (1-\alpha)\Delta\left(\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_{\gamma_2}\left(\frac{k}{m}\right)}\right)\right) \\ &\subseteq \Delta\left(F_p\right) \bigcap \left(\bigcap_k \Delta\left(\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{\alpha h_{\gamma_1}\left(\frac{k}{m}\right) + (1-\alpha)h_{\gamma_2}\left(\frac{k}{m}\right)}\right)\right) \\ &= \Delta\left(F_p\right) \bigcap \left(\bigcap_k \Delta\left(\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_{\alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2}\left(\frac{k}{m}\right)}\right)\right) \\ &= \Delta\left(F_p\right) \bigcap \left(\bigcap_k \Delta\left(\left(F_{r_{k,m}^i}\right)_{h_{\gamma_3}\left(\frac{k}{m}\right)}\right)\right) = \Delta\left(G_m^i(\gamma_3)\right)\end{aligned}$$

与 $\gamma_3 = \alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2$。

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
&\alpha\Delta(H_m^i(\gamma_1)) + (1-\alpha)\Delta(H_m^i(\gamma_2)) \\
&\subseteq \Delta\left(F_p\right) \bigcap \left(\alpha \mathcal{N}_{\frac{1}{m}} \left(\Delta\left(G_m^i(\gamma_1) \right) \right) + (1-\alpha) \mathcal{N}_{\frac{1}{m}} \left(\Delta\left(G_m^i(\gamma_2) \right) \right) \right) \\
&\subseteq \Delta\left(F_p\right) \bigcap \mathcal{N}_{\frac{1}{m}} \left(\alpha \Delta\left(G_m^i(\gamma_1) \right) + (1-\alpha) \Delta\left(G_m^i(\gamma_2) \right) \right) \\
&\subseteq \Delta\left(F_p\right) \bigcap \mathcal{N}_{\frac{1}{m}} \left(\Delta\left(G_m^i(\gamma_3) \right) \right) = \Delta(H_m^i(\gamma_3))
\end{aligned} \tag{23}
$$

满足 $\gamma_3 = \alpha\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2$。

根据断言 2（21），

$$K(\gamma) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(H_m^1(\gamma) \cap H_m^2(\gamma) \right).$$

因此，给定 γ_1， $\gamma_2 \in [-1,1]$ 和 $\alpha \in [0,1]$ 我们由（23）推得

$$
\begin{aligned}
&\alpha\Delta(K(\gamma_1)) + (1-\alpha)\Delta(K(\gamma_2)) \\
&\subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(\alpha\Delta\Big(H_m^1(\gamma_1) \cap H_m^2(\gamma_1) \Big) + (1-\alpha)\Delta\Big(H_m^1(\gamma_2) \cap H_m^2(\gamma_2) \Big) \right) \\
&\subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Delta\Big(H_m^1(\gamma_3) \cap H_m^2(\gamma_3) \Big) = K(\gamma_3).
\end{aligned}
$$

因此，由（22）可得 Δ（K）是凸的，证明完毕。 □

上一节命题的一个加强版本将在下一节中得到。

5. Minimal tripotents in the second dual of a unital JB*-algebra are always dominated by unitaries in the principal component

每个 JB*-三重系的双对偶 E^{**} 都具有如下形式的原子分解： $E^{**} = \mathcal{A} \oplus^{\infty} \mathcal{N}$，其中 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 E^{**} 中两个正交的弱*-闭理想，分别称为 E^{**} 的原子部分和非原子部分； $\mathcal{A}$ 与 E^{**} 中所有极小三重幂等元的弱*-闭线性张成空间重合，其预对偶则与 E^* 闭单位球所有极端点的线性张成空间的范数闭包重合； $\mathcal{N}$ 预对偶的闭单位球没有极端点，而 $\mathcal{N}$ 不含极小三重幂等元 [47, 定理 1 和 2]。此外，已知 $\mathcal{A}$ 作为 JB*-三重系与一族 Cartan 因子的 ℓ_∞-和等距同构，这为将 E 嵌入为 Cartan 因子的 ℓ_∞-和的 JB*-子三重系铺平了道路 [48, 命题 2 和定理 1]。

设 E 是一个 JB*-三重系统。按照 JB*-三重系统理论中的术语 [17], ，我们用 $K_0(E)$ 表示由 E 的极小三重幂等元生成的 E 的巴拿赫子空间。空间 $K_0(E)$ 可描述为 E 的最大内理想，同时它也是 E^{**} [17, 的内理想（推论 3.5]）。 E 中所有极小三重幂等元的代数线性包称为 E 的底层（简记为 soc(E)）。 E 的底层不一定是闭子空间。 $B(H)$ 的底层就是这种情况，它与由所有有限秩算子组成的子空间 $\mathcal{F}(H)$ 重合；当 H 是无限维时，该子空间不是闭的。然而，如果 JB*- 三重系统 E 具有有限秩（等价地，如果 E 是自反 JB*-三重系统），则有 soc(E) $= E$（参见 [17, 命题 4.5 和注 4.6] 或 [13]）。

对于 JB*-三重系统 E，内理想 $K_0(E^{**})$ 以及 E^{**} 的底层，通过初等 JB*-三重系统可以更好地理解。给定一个类型为 $j \in \{1,\dots,6\}$ 的嘉当因子，类型为 j 的初等 JB*-三重系统 K_j 定义如下：$K_1 = K(H_1,H_2)$；当 C 属于类型 $i = 2$、3 时，$K_i = C \cap K(H)$，其中 $K(H_1,H_1)$ 表示从 H_1 到 H_2 的所有紧线性算子所构成的空间，且 $K(H) = K(H,H)$；若后者属于类型 4、5 或 6，则令 $K_i = C$。显然，若 K 是一个类型为 j 的初等 JB*-三重系统，则其双对偶恰为一个 j 的嘉当因子。我们用 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(H_1,H_2)$ 表示 $B(H_1,H_2)$ 中由从 H_1 到 H_2 的所有有限秩线性算子构成的、未必闭的理想；对于类型为 $j = 2$、3 的嘉当因子，$\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}(H,H)$，$\mathcal{F}_j = C \cap \mathcal{F}(H)$；其余情况下，$\mathcal{F}_j = C$。借助这一记号可知，若 JB*-三重系统 E 的原子部分与一族嘉当因子的 ℓ_∞-和 $\{C_j : j \in \Lambda\}$ 重合，则 $K_0(E^{**})$ 恰为相应初等 JB*-三重系统 $\{K_j : j \in \Lambda\}$ 的 c_0-和，而 E^{**} 的底层是由 $\{\mathcal{F}_j : j \in \Lambda\}$ 生成的未必闭的内理想。

引理 2.3 和命题 5 在 [47] 中给出了由 JB u,v -三重系中的两个极小三重幂等元生成的 JB*-子三重系的完备描述。结果表明，该子三重系的维数至多为 4，由 u,v, $P_1(u)(v)$ 和 $P_1(v)(u)$ 线性生成，并且与 $\mathbb{C}$, $M_{1,\,2}(\mathbb{C})$、$\mathbb{C}\oplus^\infty\mathbb{C}$, $M_2(\mathbb{C})$ 或 $S_2(\mathbb{C})$ 等距同构，其中最后一个表示所有复对称矩阵构成的空间。在我们的第一个结果中，我们将关注 JB*-代数中由一个极小三重幂等元生成的 JB*-子代数。

简要说明一下，每个 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 上的对合都是 $\mathfrak{A}$ 上的共轭线性三重自同构。因此，若 $\mathfrak{A}$ 中的 e 是一个（极小）三重幂等元，则其伴随 e^* 也是 $\mathfrak{A}$ 中的一个（极小）三重幂等元。在下一个结果中，我们将描述任意 JB*-代数中由一个极小三重幂等元生成的 JB*-子代数。

命题 5.1. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个 JB*-代数，且 e 是 $\mathfrak{A}$中的一个极小三重幂等元。令 $\mathfrak{B}$ 表示由 e生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子代数。那么，$\mathfrak{B}$ 是一个单位元 JW*-代数，其维数至多为 3，秩至多为 2，且由 e、e^*和 $e\circ e^*$线性张成。此外，一般而言，$\mathfrak{B}$ 严格大于由极小三重幂等元 e 和 e^*生成的$\mathfrak{A}$ 的 JB*-子三重系。

证明. 为简化记号，令 $\mathfrak{F}$ 为由极小三重幂等元 e 和 e^*生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子三重系。由于 e、$e^* \in \mathfrak{B}$ 以及后者也是 $\mathfrak{A}$的 JB*-子三重系，因此可得 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$。

我们首先证明 e^2 必为 e的一个数乘。也就是说，由于 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}^{**}$ 中的弱*-稠密性，且 $\mathfrak{A}^{**}$ 的三重乘积分别弱*-连续，三重幂等元 e 在 $\mathfrak{A}^{**}$中也为极小元，因此我们可以假设 $\mathfrak{A}$是一个单位元 JB*-代数。根据 Peirce 算术

$$e^2 = \{e,\mathbf{1},e\} \in \mathfrak{A}_2(e) = \mathbb{C}e.$$

因此，存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $e^2 = \lambda e$。由此可得，$(e^*)^2 = \overline{\lambda}e^*$。

Now

$$e = \{e,e,e\} = 2e\circ(e\circ e^*) - e^2\circ e^* = 2e\circ(e\circ e^*) - \lambda e\circ e^*,$$

证明了

$$e\circ(e\circ e^*) = \frac{e}{2} + \frac{\lambda}{2}e\circ e^*, \text{ and } e^*\circ(e\circ e^*) = \frac{e^*}{2} + \frac{\overline{\lambda}}{2}e\circ e^*. \tag{24}$$

接下来，应用 $\lambda e = e^2 = \{e, \mathbf{1}, e\}$，根据 Jordan 恒等式，我们有

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda} e &= \{e, \{e, \mathbf{1}, e\}, e\} = -\{\mathbf{1}, e, \{e, e, e\}\} + 2\{e, e, \{\mathbf{1}, e, e\}\} \\
&= -\{\mathbf{1}, e, e\} + 2\{e, e, e \circ e^*\} = -e \circ e^* + 2(e \circ e^*) \circ (e \circ e^*) \\
&+ 2((e \circ e^*) \circ e^*) \circ e - 2((e \circ e^*) \circ e) \circ e^* \\
&= 2(e \circ e^*)^2 - e \circ e^* + 2\left(\frac{e^*}{2} + \frac{\overline{\lambda}}{2} e \circ e^*\right) \circ e - 2\left(\frac{e}{2} + \frac{\lambda}{2} e \circ e^*\right) \circ e^* \\
&= 2(e \circ e^*)^2 - e \circ e^* + \overline{\lambda}\,(e \circ e^*) \circ e - \lambda\,(e \circ e^*) \circ e^* \\
&= 2(e \circ e^*)^2 - e \circ e^* + \overline{\lambda}\left(\frac{e}{2} + \frac{\lambda}{2} e \circ e^*\right) - \lambda\left(\frac{e^*}{2} + \frac{\overline{\lambda}}{2} e \circ e^*\right) \\
&= 2(e \circ e^*)^2 - e \circ e^* + \frac{\overline{\lambda}}{2} e - \frac{\lambda}{2} e^*,
\end{aligned}$$

由此我们推得

$$(e \circ e^*)^2 = \frac{1}{2} e \circ e^* + \frac{\overline{\lambda}}{4} e + \frac{\lambda}{4} e^*.$$

这表明集合 $\operatorname{span}\{e, e^*, e \circ e^*\}$ 在 Jordan 乘积下封闭；又由于其维数至多为 3，因此它在 $\mathfrak{A}$ 中是封闭的。因此，JB*-子代数 $\mathfrak{B}$ 包含于由 e、e^* 和 $e \circ e^*$ 张成的线性空间中，故其维数至多为三。由此可知，$\mathfrak{B}$ 是一个有限维含幺 JBW*-代数。

我们已经观察到 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$。为了证明 $\mathfrak{B}$ 通常严格大于 $\mathfrak{F}$，只需考虑 $\mathfrak{A} = M_2(\mathbb{C})$ 中的极小三重幂等元 $e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$。容易验证，$P_1(e)(e^*) = (\mathbf{1} - ee^*)e^*(e^*e) + (ee^*)e^*(\mathbf{1} - e^*e) = 0 = P_1(e^*)(e)$，因此由 e 和 e^* 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子三重系是二维的（参见本命题之前的说明或 [47, 引理 2.3]）。然而$e \circ e^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，且元素 e、e^* 和 $e \circ e^*$ 线性无关，这意味着 $\mathfrak{B}$ 的维数为三。

关于 $\mathfrak{B}$ 的秩的论述，我们注意到，由于 $\mathfrak{B}$ 是有限维的，该秩必定有限。此外，如果 $\mathfrak{B}$ 的秩为 $r \geq 3$，我们可以在 $\mathfrak{B}$ 中找到两两正交的极小三重幂等元 v_1、v_2、……、v_r。关于 $\mathfrak{B}$ 维数的结论表明，$r = 3$、$\mathfrak{B}$ 必须由 v_1、v_2 和 v_3 线性生成；又由 e 的极小性，我们可以假设 $e = \gamma v_1$，其中 $|\gamma| = 1$。因此，e、$e^* = \overline{\gamma} v_1^*$ 和 $e \circ e^*$ 只能生成一个二维空间，这与 $\mathfrak{B}$ 包含三个两两正交的极小三重幂等元相矛盾。

最后，由于 $\mathfrak{B}$ 是由一个元素生成的 JB*-子代数，Shirshov–Cohn 定理表明 $\mathfrak{B}$ 是一个 JW*-代数。□

注5.2。 我们前面的命题带来了若干有趣且令人惊讶的推论。正如之前所述，由两个极小三重幂等元生成的 JB*-三重系 *-三重系 E 可能是一维、二维、三维或四维的（参见 [47,命题 5]）。然而，作为上述命题 5.1的推论，由一个极小三重幂等元 *及其转置元生成的 JB $\mathfrak{F}$ -代数* $\mathfrak{A}$ 的 JB e -子三重系e^* 至多为三维。探究何时 $\mathfrak{F}$ 与由 *生成的 JB $\mathfrak{B}$ -子代数 e相同也很有意义。我们将看到，以下陈述等价：

(*a*) $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$; (*b*) $e^2 \neq 0$ （等价地，
$(e^*)^2 \neq 0$）。

由命题 5.1 的证明及 [47, 引理 2.3] 中的论证可知， $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$ 当且仅当 $e \circ e^*$ 是 e、e^*、 $P_1(e^*)(e)$ 和$P_1(e)(e^*)$的线性组合。与命题 5.1 的证明中一样， $e^2 = \lambda e$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$成立。由于 e 是极小的，因此存在一个标量 $\mu_{e^*} \in \mathbb{C}$ ，使得 $\mu_{e^*} e = P_2(e)(e^*)$。由 Jordan 恒等式可推得

$$\begin{aligned} \mu_{e^*} e + \frac{1}{2} P_1(e)(e^*) = P_2(e)(e^*) + \frac{1}{2} P_1(e)(e^*) = L(e,e)(e^*) \\ = (e \circ e^*) \circ e^* + (e^* \circ e^*) \circ e - (e \circ e^*) \circ e^* \\ = (e^* \circ e^*) \circ e = \overline{\lambda}\, e^* \circ e. \end{aligned} \tag{25}$$

因此，若 $\lambda \neq 0$，元素 $e^* \circ e$ 属于 e 和 $P_1(e)(e^*)$的线性张成空间（并且，通过取伴随，也属于 e^* 和 $P_1(e^*)(e)$的线性张成空间）。

如果 $\lambda = 0$ （等价地， $e^2 = 0$），由 (25) 可容易看出 P_2（e） （e^*） $= P_1$ （e） （e^*） $= 0$。取伴随后得到 P_2（e^*） （e） $= P_1$（e^*） （e） $= 0$。特别地，$e^* = P_0$（e） （e^*）与 e 正交。在这种情况下， $\mathfrak{F}$ 至多为二维，因为它由 e 和 e^* 生成。这表明 $e \circ e^* \in \mathfrak{F}$ 当且仅当我们可以将其写成 $e \circ e^* = \alpha e + \beta e^*$，其中 α、 $\beta \in \mathbb{C}$。结合 (24)，我们推得

$$\beta\alpha e + \beta^2 e^* = \beta e \circ e^* = e \circ (e \circ e^*) = \frac{1}{2} e,$$

类似地，

$$\alpha^2 e + \alpha\beta e^* = \alpha e \circ e^* = e^* \circ (e \circ e^*) = \frac{1}{2} e^*.$$

应用 $e \perp e^*$ 可得 $\alpha^2 = \beta^2 = 0$，等价地， $e \circ e^* = 0$。然而，这意味着 $e = 0$，这是不可能的。

在下面的推论中，我们将前面的结论与[52]中的一些近期结果结合起来。回顾一下，在 JB W e -三重系*中，若三重幂等元 M 满足：任何在 中完备的三重幂等元 $u \in M_2(e)$ $M_2(e$都已是 $M_2(e)$ 中的酉元，则称其为有限。如果 M 中的每个三重幂等元都是有限的，就称 本身是有限的。

推论 5.3. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个 JB*-代数， e 是 $\mathfrak{A}^{**}$ 中的极小三重幂等元，并设 $\mathfrak{B}$ 是由 e 在 $\mathfrak{A}^{**}$ 中生成的 JB*- 子代数。那么
(*a*) 存在一个 $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{B})$，使得 $e \leq u$; (*b*) $\mathfrak{B}$ 包含于 $\mathfrak{A}^{**}$ 的底层中。特别地， $\mathfrak{B}$ 的单位是 $\mathfrak{A}^{**}$ 中的一个有限秩三重幂等元。

证明。(*a*) 由于根据命题5.1， $\mathfrak{B}$ 是一个有限维 JW*-代数，由 [52, 命题 3.4] 可知，它是一个有限 JBW*-三重系。因此， e 是 JBW*-代数 $\mathfrak{B}$中的一个有限三元幂等元 [52, 。因此根据命题 7.5] ，存在一个酉元 $u \in \mathfrak{B}$ ，使得 $e \leq u$。

(*b*) 由于 e， $e^* \in \operatorname{soc}(\mathfrak{A}^{**})$，且后者是 $\mathfrak{A}^{**}$的代数内理想，因此我们推得 $e \circ e^* = \{e, \mathbf{1}, e^*\} \in \operatorname{soc}(\mathfrak{A}^{**})$，从而 $\mathfrak{B} \subset \operatorname{soc}(\mathfrak{A}^{**})$（参见命题 5.1）。其余部分显然。□

前述推论与 JB*三重系统版的 Kadison 传递性定理[19, 51] 给出了以下几何结论。该结论本身颇有意义，也可能有许多不同的应用。

定理 5.4. 设 $\mathfrak{A}$ 为一个 JB*-代数，且 e 是 $\mathfrak{A}^{**}$中的一个极小三重幂等元。那么存在一个自伴元 h 属于 $\mathfrak{A}$，满足 $e \leq \exp(ih)$，也就是说，e 被 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$的主连通分支中的某个酉元所界定。

证明。令 $\mathfrak{B}$ 表示由 e 生成的 $\mathfrak{A}^{**}$ 的 JB*-子代数。由推论 5.3，存在一个酉元 $u \in \mathfrak{B} \subset \in \mathrm{soc}(\mathfrak{A}^{**})$，使得 $e \leq u$。由于 $\mathfrak{B}$ 是有限维的，且包含于 $\mathfrak{A}^{**}$ 的底层中，因此可将 u 的谱分解写为 $u = \exp(i\theta_1)p_1 + \ldots + \exp(i\theta_k)p_k$，其中 p_1、……、p_k 是 $\mathfrak{B}$ 中彼此正交且在 $\mathfrak{A}^{**}$ 中极小的投影，而 θ_1、……、θ_k 是实数。

根据 JB*-三重系统的 Kadison 传递性定理 [19, 定理 3.3]，或其在 JB*-代数中的版本 [51, 命题 2.3],，存在 $\mathfrak{A}$ 中彼此正交的范数为 1 的正元 a_1、……、a_k，使得对于所有 $j = 1$、……、k，都有 $a_j = P_2(p_j)(a_j) + P_0(p_j)(a_j)$。由正交性可容易验证，$h = \sum_{j=1}^{k} \theta_j a_j$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的厄米元，且对于所有 $j = 1$、……、k，都有 $h = P_2(p_j)(h) + P_0(p_j)(h)$。令 $p_s := \sum_{j=1}^{k} p_j \in \mathfrak{A}^{**}$. 。根据正交性以及 a_j 的性质，我们有

$$h = \sum_{j=1}^{k} \theta_j p_j + P_0(p_s)(h), \text{ and } \exp(ih) = \sum_{j=1}^{k} \exp(i\theta_j)p_j + P_0(p_s)(\exp(ih)),$$

其中这些和式中的各项彼此正交。显然，$e \leq u \leq \exp(ih)$ 是按构造得到的。显然，酉元 $\exp(ih)$ 属于 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ 的主连通分支（参见（14））。□

现在我们可以得到定理3.4的一个加强版本。

定理 5.5. 设 F 是酉 JB*-代数 $\mathfrak{A}$的闭单位球的一个极大真面。那么 $F = \mathrm{co}\left(F \cap \mathcal{U}^0(\mathfrak{A})\right)$。

证明。由于 F 是 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$的一个极大真面，存在一个极小三重幂等元$e \in \mathfrak{A}^{***}$ 满足 $F = F_e$（参见定理 1.1 或 [18, 推论 3.5 及前面的评论]）。根据定理 5.4，存在一个酉元 u，它属于 $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$的主连通分支，且满足 $e \leq u$。注意到 $\mathcal{U}^0(\mathfrak{A}(u)) = \mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$，并且 e 是 u-同位体 $\mathfrak{A}(u)$的双对偶中的一个极小投影，所需结论便直接由定理 3.4 得出。□

本节的最后一个结果是命题 4.4 的一个加强版本。

定理 5.6. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺 JB*-代数，Y 是一个巴拿赫空间，Δ: $S_{\mathfrak{A}} \to S_Y$是一个满射等距映射，$F_e \subset S_{\mathfrak{A}}$ 是与极小三重幂等元 $e \in \mathfrak{A}^{**}$ 相关联的一个极大范数闭真面。那么存在一个有向集 Λ和一个仿射压缩映射网 $(\Theta_\lambda)_\lambda$: $F_e \to K_\lambda$，其中每个 K_λ 都是 F_e的一个闭凸子集，使得 $\Theta_\lambda \to \mathrm{id}_{F_e}$ 在逐点范数拓扑（即强算子拓扑）下成立；每个 $\Delta(K_\lambda)$都是凸集，并且每个 K_λ 都仿射等距同构于某个实 JB*-代数 $\mathcal{R}_\lambda$ 的闭球，且该代数满足强 Mankiewicz 性质（因此 $\Delta\restriction_{F_e}$ 是仿射的）。特别地，Δ 在 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$的每个范数闭真面上都是仿射的。

证明。令 F_e 为与极小三重幂等元$e \in \mathfrak{A}^{**}$相关联的 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$ 极大真面$e \in \mathfrak{A}^{**}$。再次应用定理 5.4 可得存在酉元 u 属于 $\mathfrak{A}$，使得 $e \leq u$。这意味着 e 是 u-同位体$\mathfrak{A}(u$的双对偶中的极小投影。因此，所需结论由命题 4.4得出。□

6. Applications to Tingley's problem and the Mazur–Ulam property

前几节发展的代数几何结果本身就是有趣的工具，并具有许多潜在应用。本文将运用这些结果，在其中一个空间为单位元 JB*-代数的情形下，为 Tingley 问题提供一个完备的正解。正如我们稍后将看到的，我们可以将讨论限制在无限秩单位元 JB*-代数的情形，因此技术性辅助结果均在这一背景下展开。

我们回顾一下，根据 [14, 定义 4.8], ，若 JB*-三重系统 E 满足性质 $(\mathcal{P})$，则对每个极小三重幂等元 e （属于 E^{**} ）以及每个完全三重幂等元 u （属于 E；等价地，$u \in \partial_e(\mathcal{B}_E)$），都存在另一个极小三重幂等元 w （属于 E^{**} ），使其满足 $w \perp e$ 和 $u = w + P_0(w)(u)$。在 [14, 定理 4.14] 的证明中，已证明每个秩大于或等于三的 JBW*-三重系统都满足性质 $(\mathcal{P})$。[14] 中的命题 4.13 表明，每个秩大于或等于三的 Cartan 因子都具有这一性质；不过，该证明同样可直接用于得到下述引理，因此省略其证明。

引理 6.1。（[14, 命题 4.13]）设 C 是秩大于或等于三的 Cartan 因子。那么，对于 C 中的每个极小三重幂等元 v 以及 C 中的每个完全三重幂等元 u ，都存在 C 中的另一个极小三重幂等元 e ，满足 $v \perp e$ 和$u = e + P_0(v)(u)$。

现在，我们可以仿照 [14, 定理 4.14]证明中的论证，推出一个更强的结论。

引理 6.2。设 E 是一个无限秩 JB*-三重系统， u 是 E中的完全三重幂等元， $v \in E^{**}$ 是一个极小三重幂等元。那么，存在 E^{**} 中的一个极小三重幂等元 e ，使得 $e \perp v$ 和 $u \in F_e$。

证明。显然， E^{**} 的原子部分 $\mathcal{A}$是一个无限秩 JBW*-三重系统，因为正如我们在上一节开头所述， E 等距嵌入于该原子部分中。

我们可以将 E^{**} 的原子部分写成 $\mathcal{A} = \bigoplus_{j\in\Lambda}^{\ell_\infty} C_j$ 的形式，其中每个 C_j 都是 Cartan 因子 [48, 命题 2]。若 $\iota\colon E \hookrightarrow E^{**}$ 和 $\pi_{\mathcal{A}}\colon E^{**} \to \mathcal{A}$ 分别表示 E 到其双对偶的典范嵌入，以及后者到其原子部分的投影，则映射 $\pi_{\mathcal{A}} \circ \iota\colon E \to \mathcal{A}$ 是一个等距的三重系统嵌入。元素 u 也是 E^{**} 中的完全三重幂等元，正如 $\pi_{\mathcal{A}}(u)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完全三重幂等元一样。假设 $\sharp\Lambda \geq 2$，由极小性可知，存在 $j_1 \neq j_2$ 属于 Λ ，使得 $v \in C_{j_1}$ ，并且 $\pi_{\mathcal{A}}(u)$ 的 j_2 分量是 C_{j_2} 中的非零完全三重幂等元。由于 C_{j_2} 中每个非零三重幂等元都是一族两两正交的极小三重幂等元的 ℓ_∞ 和，我们可以在 C_{j_2}（也在 E^{**}）中找到一个极小三重幂等元 e ，满足 $e \leq \pi_{\mathcal{A}}(u) \leq u$ 且 $e \perp v$。显然， $u \in F_e$。

若 $\sharp\Lambda = 1$，则 E^{**} 的原子部分归约为一个无限秩 Cartan 因子。引理 6.1 应用于 $\pi_{\mathcal{A}}(u)$ 即可证明所需结论。□

在下一个结果中，我们结合了 Urysohn 定理的非交换版本 [41] 与范数闭真面的一项近期性质。我们首先回顾，JB b -三重*中元素 E 的正交补定义为 $\{b\}_E^\perp := \{x \in E\colon\ x \perp b\}$。已知$\{b\}_E^\perp$ 是 E 的内理想，且与 $E_0^{**}(r(b)) \cap E$相同（例如，参见 [21, 引理 3。11]和（7））。

引理 6.3. 设 E 为一个 JB*-三重，且设 e 为 E^{**}中的一个极小三重幂等元。设 b为 $\mathfrak{A}$ 中的一个元素，满足 $b \perp e$ 和 $F_e \cap \{b\}_E^{\perp} \neq \emptyset$. 。则 $e \in \overline{F_e \cap \{b\}_E^{\perp}}^{w*}$。
证明。 如果 $b = 0$ 集合 $F_e \cap \{b\}_E^{\perp}$ 与 $F_e = \left(e + \mathcal{B}_{E_0^{**}(e)}\right) \cap E$重合，并且根据 [14, 定理 3。6] 我们知道

$$\overline{F_e}^{w^*} = F_e^{E^{**}} = e + \mathcal{B}_{E_0^{**}(e)},$$

其中显然包含 e。

接下来假设 $b \neq 0$。根据假设，我们可以取 $a \in F_e \cap \{b\}_E^{\perp}$。已知由 a生成的 E 的内理想 $E(a)$，与 $Q(a)(E)$ 的范数闭包相重合，即其在 E^{**} 中的弱*-闭包；这显然可识别为 $E(a)^{**}$，恰好是 $E_2^{**}(r(a))$，并且 $E(a)$ 是 $(E_2^{**}(r(a))^{\circ_{r(a)},*_{r(a)}})$ 的 JB*-子代数（参见[15, 命题 2.1 及其之前的评论]）。根据 Peirce 算术，或由（7），$E(a) \subseteq \{b\}_E^{\perp}$.

由于 $a \in F_e$，我们很容易推出 $r(a) \geq e$ 属于 E^{**}，因此 $e \in E_2^{**}(r(a)) = E(a)^{**}$。[41, 定理 4.2] 中证明的乌雷松引理的非交换版本的一个推论指出，e 是 $E(a)^{**}$ 中的紧三重幂等元。为简化记号，记 $I = E(a)$。按照这一记号，令 F_e^I 和 $F_e^{I^{**}}$ 分别表示与紧三重幂等元 e相关联的 $\mathcal{B}_I$ 的范数闭真面和 $\mathcal{B}_{I^{**}}$ 的弱* 闭真面。显然，$F_e^I = F_e \cap I$，由 [14, 定理 3.6] 可得

$$\overline{F_e \cap I}^{w^*} = \overline{F_e^I}^{w^*} = F_e^{I^{**}} = e + \mathcal{B}_{I_0^{**}(e)} \ni e,$$

这就证明了所需结论，因为 $F_e \cap I \subseteq F_e \cap \{b\}_E^{\perp}$。 □

我们回顾一些有用的结果。对于每个巴拿赫空间 X， S_X 的极大凸子集恰好是 $\mathcal{B}_X$ 的极大真范数闭面（参见 [95,引理 3.3] 或 [96, 引理 3.2]）。此外，对于 $\mathcal{B}_X$ 的每个极大真范数闭面 F，都存在 $\mathcal{B}_X$ 闭单位球 $\mathcal{B}_{X^*}$ 的一个极端点 φ，使得 $F = \varphi^{-1}\{1\} \cap S_X$ （参见 [95, 引理 3.3]）。对于满足 $\varphi^{-1}\{1\} \cap S_X$ 是 S_X 的极大凸子集的 $\mathcal{B}_{X^*}$ 极端点 φ，其全体组成的集合记为 $\mathcal{Q}_X$. 。由佐恩引理可知，每个 $x \in S_X$ 都包含于 S_X 的某个极大凸子集中，因此集合 $\mathcal{Q}_X$ 在 X 上是范数化的；实际上，X 中每个元素的范数都在 $\mathcal{Q}_X$ 的某个元素处取得。

命题 6.4. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个无限秩的含幺 JB*-代数， Y 是一个实巴拿赫空间， $\Delta : S_{\mathfrak{A}} \to S_Y$ 是一个满射等距映射，且 $\phi \in \mathcal{Q}_Y$。那么存在 $\varphi \in \partial_e(\mathcal{B}_{\mathfrak{A}^*})$，使得

$$\phi \circ \Delta = \Re\varphi|_{S_{\mathfrak{A}}} .$$

证明。 设 $\mathbf{F} := \phi^{-1}(\{1\})$。根据假设，$\mathbf{F}$ 是 $\mathcal{B}_Y$ 的极大真范数闭面（等价地，是 S_Y 的极大凸集）。由 [26, 引理 5。1] （或 [94,引理 3。5]）， $\Delta^{-1}(\mathbf{F})$ 是 $S_{\mathfrak{A}}$的极大凸子集，或者等价地，是 $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$的极大真范数闭面。因此，存在一个极小三重幂等元$v \in \mathfrak{A}^{**}$ 使得 $F_v = \Delta^{-1}(\mathbf{F})$（参见定理 1.1）。

因此，存在唯一的纯原子 $\varphi_v \in \partial_e(\mathcal{B}_{\mathfrak{A}^*})$，使得 $F_v = \varphi_v^{-1}(\{1\})$，从而 $\varphi_v|_{F_v} \equiv 1$。我们断言

$$\phi \circ \Delta = \Re\mathrm{e}\varphi_v \text{ on the whole } S_{\mathfrak{A}}.$$

考虑到定理5.5 和5.6，只需证明 $\phi \circ \Delta(u) = \varphi_p(u)$ 对所有 $u \in \mathcal{U}^0(\mathfrak{A})$ 都成立。任取一个酉元 u 属于 $\mathfrak{A}$。

由引理 6.2 可知，存在一个极小三重幂等元 $e \in \mathfrak{A}^{**}$ 使得 $e \perp v$ 且 $u \in F_e$。由于根据定理 5.6， Δ 在 F_e上是仿射的，因此存在 $\gamma_e \in \mathbb{R}$ 和 $\widetilde{\varphi}_e \in \mathcal{B}_{\mathfrak{A}^*}$ 使得$\phi \circ \Delta(y) = \gamma_e + \Re\mathrm{e}\widetilde{\varphi}_e(y)$ 对任意 $y \in F_e$均成立。

利用 JB*-三元组的 Kadison 传递性定理 [18, 定理 3，3] 我们可以找到 $a \in F_v$ 和 $b \in F_e$ 使得 $a \perp b$。因此，元素 a 属于集合 $F_v \cap \{b\}^{\perp}_{\mathfrak{A}}$，故该集合非空。任取另一个 $x \in F_v \cap \{b\}^{\perp}_{\mathfrak{A}}$。于是有 $b \pm x \in F_e \cap (\pm F_v)$，因此根据上述性质可得

$$\pm 1 = \phi \circ \Delta(b \pm x) = \gamma_e + \Re\mathrm{e}\widetilde{\varphi}_e(b \pm x).$$

这意味着 $\gamma_e + \Re\mathrm{e}\,\widetilde{\varphi}_e(b) = 0$ 且 $\Re\mathrm{e}\widetilde{\varphi}_e(x) = 1$。因此，我们推得对每个 $x \in F_v \cap \{b\}^{\perp}_{\mathfrak{A}}$，都有$\Re\mathrm{e}\widetilde{\varphi}_e(x) = 1$。

现在，引理 6.3 断言 $v \in \overline{F_v \cap \{b\}^{\perp}_{\mathfrak{A}}}^{w*}$，所以必有 $\Re\mathrm{e}\widetilde{\varphi}_e(v) = 1$，而 $\|\Re\mathrm{e}\widetilde{\varphi}_e\| \leq 1$ 意味着 $\Re\mathrm{e}\,\widetilde{\varphi}_e = \Re\mathrm{e}\varphi_v$(参见第 6 页的讨论)。最后，由于 $b \in F_e$ 且 $b \perp v$，我们也有 $0 = \gamma_e + \Re\mathrm{e}\varphi_v(b) = \gamma_e$。因此， $\phi \circ \Delta = \Re\mathrm{e}\varphi_v$在 F_e上，特别是 $\phi \circ \Delta(u) = \Re\mathrm{e}\varphi_v(u)$。□

现在我们可以证明，每个含幺 JB*-代数都满足 Mazur–Ulam 性质。

定理 6.5。每个含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 都满足 Mazur–Ulam 性质；也就是说，对于每个巴拿赫空间 Y，每个满射等距映射 $\Delta : S_{\mathfrak{A}} \to S_Y$ 都可扩张为从 $\mathfrak{A}$ 到 Y的满射实线性等距映射。

证明。若 $\mathfrak{A}$ 秩有限，则它必定是自反的（例如参见 [17, 命题 4。5] 和 [27, 定理 6]）。特别地， $\mathfrak{A}$ 是一个 JBW*-三重系统，因此所需结论可由[69, 推论 1。2] 在更一般的情形下推出。因此，我们可以假设 $\mathfrak{A}$ （从而 $\mathfrak{A}^{**}$）具有无限秩。

鉴于 [37, 引理 2.1]，，只需证明$\|\Delta(a) - \lambda\Delta(b)\| \leq \|a - \lambda b\|$ 对所有 a、$b \in S_{\mathfrak{A}}$ 和 $\lambda > 0$ 都成立，即可得到所需结论。在这些条件下，固定 a、b和 λ。由于 Y 中的每个元素都在 $\mathcal{Q}_Y$中的某个元素处达到其范数，故存在 $\phi \in \mathcal{Q}_Y$ 使得 $\phi(\Delta(a) - \lambda\Delta(b)) = \|\Delta(a) - \lambda\Delta(b)\|$。由命题 6.4 可知，存在一个纯原子 $\varphi \in \partial_e(\mathcal{B}_{\mathfrak{A}^*})$，使得 $\phi \circ \Delta = \Re\mathrm{e}\varphi|_{S_{\mathfrak{A}}}$。于是

$$\begin{aligned}\|\Delta(a) - \lambda\Delta(b)\| &= \phi(\Delta(a) - \lambda\Delta(b)) = \phi(\Delta(a)) - \lambda\phi(\Delta(b)) \\ &= \Re\mathrm{e}\varphi(a) - \lambda\Re\mathrm{e}\phi(b) = \Re\mathrm{e}\varphi(a - \lambda b) \leq \|a - \lambda b\|,\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

致谢 A.M. Peralta 部分获得了由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的项目 PID2021 - 122126NB–C31，以及“ERDF 建设欧洲之路”、安达卢西亚自治区资助项目 FQM375 和 PY20 00255，以及 IMAG–María de Maeztu 资助项目 CEX2020-001105-M/AEI/10.13039/ˇ 501100011033 的支持。R. Svarc 获得查理大学项目 GAUK 编号 268521 的资助。本研究的部分工作是在第二作者访问格拉纳达大学数学分析系和数学研究所期间完成的；他谨向对方的热情接待表示感谢。

References

[1] C.A. Akemann, 一般 Stone-Weierstrass 问题, J. Funct. Anal. 4 (1969), 277-294. [2] C.A. Akemann, G.K. Pedersen, C^*-代数理论中半连续性的复杂性, Duke Math. J. 40 (1973), 785-795. [3] C.A. Akemann, G.K. Pedersen, 算子代数理论中的面结构. Proc. London Math. Soc. 64 (1992), 418-448. [4] E. M. Alfsen and F.W. Shultz, *Geometry of state spaces of operator algebras*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., 波士顿, MA, 2003. [5] A. Alvermann, 带对合的实赋范 Jordan 代数, *Arch. Math.* **47**(1986), 135–150. [6] W.G. Bade, 泛函分析研讨班讲义, 加利福尼亚大学伯克利分校, 1957 (未发表). [7] T. Banakh, 绝对光滑二维巴拿赫空间的任意球面间等距映射都是线性的, *J. Math. Anal. Appl.* **500** (2021), no. 1, Paper No. 125104. [8] T. Banakh, 每个 2 *Linear Algebra* 维巴拿赫 *Appl.* **632** 2022 268 280 空间都具有 Mazur–Ulam 性质, ( ), – . [9] T Banakh, J Cabello-S´anchez, 每个非光滑二维巴拿赫空间都具有 Mazur–Ulam 性质 , *Linear Algebra Appl.* **625** (2021), 1-19. [10] T. Barton and Y. Friedman, JB^* *Quart. J. Math. Oxford* -三重系 *Ser.(2)* **41** 1990 163, 255 268 统的有界导子, ( ), no. – . [11] T. Barton, Y. Friedman, JB^* *J. Lon-* -三重系 *don Math. Soc.* 2 **36** 1987 523 统的 Grothendieck 不等式及其应用, ( ) ( ), 3, 513– . [12] J.T. Barton, R.M. Timoney, Jordan 三重乘积的弱*-连续性及其应用, *Math. Scand.* **59** (1986), 177–191. [13] J. Becerra Guerrero, G. L´opez P´erez, A. M. Peralta, A. Rodr´ıguez-Palacios, A. 闭球中的相对弱开集, 以及有限秩实 JB*-三重系统, *Math.Ann.* **330** (2004), no. 1, 45–58. [14] J. Becerra Guerrero, M. Cueto-Avellaneda, F.J. Fern´andez-Polo, A.M. Peralta, 关于 JBW*-三重系统与巴拿赫空间单位球面之间等距映射的延拓, *J. Inst.Math. Jussieu* **20** (2021), no. 1, 277–303. [15] L. J. Bunce, C.-H. Chu and B. Zalar, JB*-三重系统中的结构空间与分解, *Math. Scand.* **86** (2000), no. 1, 17–35. [16] R.B. Braun, W. Kaup, H. Upmeier, Jordan-C*-代数的全纯刻画, *Math. Z.* **161** (1978), 277–290. [17] L.J. Bunce, C.-H. Chu, 紧算子、乘子以及 JB^*- 三重系统中的 Radon–Nikodym 性质, *Pacific J. Math.* **153** (1992), 249–265. [18] L.J. Bunce, F.J. Fern´andez-Polo, J. Mart´ınez Moreno, A.M. Peralta, JB*-三重系统的 Saitˆo-Tomita-Lusin 定理及其应用, *Quart. J. Math. Oxford*, 57 (2006), 37–48. [19] M. Burgos, F.J. Fern´andez-Polo, J. Garc´es, J. Mart´ınez, A.M. Peralta, C*- 代数、JB*-代数和 JB*-三重系统中的正交性保持映射, *J. Math. Anal. Appl.* **348** (2008), 220– 233.[20] M. Burgos, F.J. Fern´andez-Polo, J. Garc´es, A.M. Peralta, 正交性保持映射再探, *Asian-European Journal of Mathematics* **2** (2009), no. 03, 387–405. [21] M. Burgos, J. Garc´es, A.M. Peralta, 弱紧 JB * * 2011 2, -三重系 97 121 统与原子 JBW -三重系统之间双正交性保持映射的自动连续性, *Studia Math.* **204** ( ), no. – .[22] J. Cabello-S ´ *J. Math. Anal. Appl.* **476** 2 2019 319 336

ánchez, 对 Tingley 问题的反思及若干应用, ( ) ( ), – .[23] M. Cabrera Garc ´ *Non-Associative Normed Algebras: Volume* ía, ´ *1 The Vidav–Palmer and Gelfand–Naimark Theorems* 2014 Ángel Rodriguez Palacios, , , Cambridge University Press, .[24] M. Cabrera Garc ´ *Non-Associative Normed Algebras: Volume* ía, ´ *2 Representation theory and the Zel'manov Approach* 2018 Ángel Rodriguez Palacios, , , Cambridge University Press, .[25] D. Cabezas, M. Cueto-Avellaneda, D. Hirota, T. Miura, A.M. Peralta, 每个交换 JB*-三重系统均满足复 Mazur–Ulam 性质, *Ann. Funct. Anal.* **13** (2022), No. 4, Paper No. 60, 8 p.. [26] L. Cheng, Y. Dong, 关于广义 Mazur–Ulam 问题：巴拿赫空间单位球面之间等距映射的延拓, *J. Math. Anal. Appl.* **377** (2011), 464–470.

[27] C.-H. Chu、B. Iochum，冯·诺依曼代数中JBW

* *Proc.* -三重系

Amer. Math. Soc. **108** 19 24 1990
统的补空间， ， ，– （）。[28] M. Cueto-Avellaneda、Y. Enami、D. Hirota、T. Miura、A.M. Peralta，单位JB*-代数的酉元集之间的满射等距映射， *Linear Algebra Appl.* **643** （2022年），39-79。[29] M. Cueto-Avellaneda、A.M. Peralta，关于希尔伯特空间值连续函数空间的Mazur–Ulam 性质， *J. Math. Anal. Appl.* **479** （2019年），第1期，875–902。[30] M. Cueto-Avellaneda、A.M. Peralta，能否通过由其酉元集确定的度量空间识别两个单位JB*-代数? ，酉元? ， *Linear Multilinear Algebra*，DOI：10.1080/03081087.2021.2003745。arXiv：2005.04794。[31] G.G. Ding，关于两个单位球面之间的等距延拓问题， *Sci. China Ser. A* **52**，2069 2083 2009–（）。[32] C. M. Edwards，关于Jordan W*-代数， *Bull. Sci. Math. (2)*，104（1980），第4期，393–403。[33] C. M. Edwards，JB-代数的乘子， *Math. Ann.*，249（1980），第3期，265–272。[34] C.M. Edwards、F.J. Fern´andez-Polo、C.S. Hoskin、A.M. Peralta，关于JB*-三重系统单位球的面结构， *J. Reine Angew. Math.* **641** （2010年），123–144。[35] C.M. Edwards、G.T. R¨uttimann，关于JBW*-三重系统及其预对偶的单位球面的面结构， *J. Lond. Math. Soc.* **38** （1988），317–332。[36] C.M. Edwards、G.T. R

¨ * *Math. Proc.*

Camb. Phil. Soc. **120** 1996 155 173

uttimann，双对偶JB-三重系统中的紧三重幂等元， （），–。[37] X.N. Fang、J.H. Wang，赋范空间 E 与 $C(\Omega)$单位球面之间的等距映射延拓， *Acta Math. Sinica*（英文版），22（2006），1819–1824。[38] F.J. Fern´andez-Polo、J.J. Garc´es、A.M. Peralta、I. Villanueva，迹类算子空间的廷格利问题， *Linear Algebra Appl.* **529** （2017年），294–323。[39] F.J. Fern´andez-Polo、E. Jord´a、A.M. Peralta，p-Schatten冯·诺伊曼类的廷格利问题， *J. Spectr. Theory* **10** （2020年），3，809-841。[40] F.J. Fern´andez-Polo、A.M. Peralta，JB*-三重系统中的闭三重幂等元与对偶空间中的弱紧性， *J. London Math. Soc.* **74** （2006年），75–92。[41] F.J. Fern´andez-Polo、A.M. Peralta，Urysohn 引理和遗传内理想的非交换推广， *J. Funct. Anal.* **259** （2010年），343–358。[42] F.J. Fern´andez-Polo、A.M. Peralta，通过原子JBW*-三重系统的面结构研究廷格利问题， *J. Math. Anal. Appl.* **455** （2017年），750–760。[43] F.J. Fern´andez-Polo、A.M. Peralta，关于C*-代数与 $B(H)$单位球面之间等距映射的延拓， *Trans. Amer. Math. Soc.* **5** （2018年），63–80。[44] F.J. Fern´andez-Polo、A.M. Peralta，关于冯·诺伊曼代数单位球面之间等距映射的延拓， *J. Math. Anal. Appl.* **466** （2018年），127-143。[45] F.J. Fern ´ *Adv. Math.* **338** 1 40 2018
andez-Polo、A.M. Peralta，低秩紧算子与廷格利问题，，–（）。[46] Y. Friedman， *Physical applications of homogeneous balls*。Tzvi Scarr协助。Progress in Mathematical Physics，第40卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2005年。[47] Y. Friedman、B. Russo。JBW*-三重系统预对偶的结构。 *J. Reine Angew. Math.*，356 1985 67 89（），–。[48] Y. Friedman、B. Russo，JB*-三重系统的Gelfand–Naimark 定理， *Duke Math. J.*，53（1986），139–148。[49] L.T. Gardner，“短篇笔记：Russo–Dye 定理的一个初等证明，

Proc. Amer. （），。

Math. Soc. **90** 1984 181
[50] K.R. Goodearl， *Notes on Real and Complex C*-algebras*。Shiva Publishing Limited（英格兰），1982年。[51] J. Hamhalter，JB-代数纯态的支撑序列， *Studia Math.* **136** （1999年），37–47。[52] J. Hamhalter、O. F. K. Kalenda和A. M. Peralta，有限三元幂等元与有限JBW?-三重系统， *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **490** （2020年），第1期，124–217。[53] J. Hamhalter、O.F.K. Kalenda、A.M. Peralta，Jordan 矩阵代数中的行列式，即将在

Linear and Multilinear Algebra 2022 10 1080 03081087 2022 2049187 发表（），

[54]
DOI：。/。。J. Hamhalter、O.F.K. Kalenda、A.M. Peralta，JB*-三重系统中三重幂等元集上的序型关系，预印本2021年。arXiv：2112.03155[55] J. Hamhalter、O. F. K. Kalenda、A. M. Peralta和H. Pfitzner，冯·诺伊曼代数和JBW*-三重系统预对偶中的弱非紧性度量， *J. Funct. Anal.* **278**（2020年），第1期，108300。

[56] J. Hamhalter、O. F. K. Kalenda、A. M. Peralta和H. Pfitzner，JB*-三重系统的Grothendieck 不等式：Barton-Friedman猜想的证明， *Trans. Amer. Math. Soc.* **374**（2022年），第2期，1327–1350。[57] H. Hanche-Olsen、E. Størmer， *Jordan Operator Algebras*，Pitman，伦敦，1984年。[58] L.A. Harris，带对合的巴拿赫代数与M¨obius变换， *J. Funct. Anal* 第11卷，第1期，（1972），1–16。[59] L.A. Harris，无限维空间中的有界对称齐次域。载于：
Proceedings on infinite dimensional Holomorphy (Kentucky 1973)；第13–40页。数学讲义第364卷。柏林-海德堡-纽约：Springer，1974年。
[60] 2022 227 239 O.
[61]
Hatori，一致代数的Mazur-Ulam性质， *Studia Math.* **265** （），- O. Hatori，满足分离条件的巴拿赫空间的Mazur-Ulam性质。预印本2022年。即将在 *RIMS Kôokyûroku Bessatsu*发表。[62] O. Hatori、S. Oi、R.S. Togashi，一致代数的廷格利问题，
J. Math. Anal. Appl. （） （），**503** 2 2021 125346
论文编号。。[63] J.M. Isidro、W. Kaup、A. Rodr´ıguez，关于JB*-三重系统的实形式，
Manuscripta Math. **86**，311 335 1995-（）。[64] F.B. Jamjoom、A.A. Siddiqui、H.M. Tahlawi、A.M. Peralta，JBW*-三重系统中由极端元和 λ-函数进行的逼近与凸分解， *Q. J. Math.*（牛津）66（2015），583–603。[65] A. Jim´enez-Vargas、A. Morales-Campoy、A.M. Peralta、M.I. Ram´ırez，复零序列空间的Mazur–Ulam 性质，
Linear and Multilinear Algebra **67** 2019 4, （），第–799 816
期。[66] P. Jordan、J. von Neumann、E. Wigner，量子力学形式体系的代数推广， *Ann. of Math.*（2）35，第1期（1934），29–64。[67] R.V. Kadison、G.K. Pedersen，酉算子的均值与凸组合，
Math. （），-。*Scand.* **57** 1985 249 266
[68] R. V. Kadison和J. R. Ringrose，
Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I. Elementary theory. 1983 15，
印。Graduate Studies in Mathematics，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1997年。[69] O.F.K. Kalenda、A.M. Peralta，秩二嘉当因子单位球面的等距映射延拓， *Anal. Math. Phys.* **11**，
15 2021 10 1007 13324 020 00448 2 （）。
[70]
https://doi.org/ 。/s - - - W. Kaup，复巴拿赫空间中有界对称域的黎曼映射定理， *Math. Z.* **183**（1983），503–529。[71] W. Kaup，JB*-三重系统中的谱与奇异值， *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **96**（1996年），第1期，95–103。[72] W. Kaup，关于实嘉当因子， *Manuscripta Math.* **92**（1997），191–222。[73] W. Kaup、H. Upmeier，巴拿赫空间中的Jordan 代数与对称西格尔域，*Math. Z.* **157**，179–200（1977）。[74] B.R. Li， *Real operator algebras*。世界科学出版社有限公司，新泽西州埃奇河，2003年。[75] M. Mackey、P. Mellon，有界对称域的Bergmann-Shilov边界，*Math. Proc. Roy. Irish Acad.*，第121A卷，第2期（2022年），33-49。[76] J. Mart´ınez、A.M. Peralta，实对偶JB*-三重系统中三重乘积的分别弱*-连续性， *Math. Z.*，234（2000），635–646。[77] R.E. Megginson，
An Introduction to Banach Space Theory，Springer-Verlag，纽约，1998年。[78] M. Mori，通过算子代数的面结构研究廷格利问题，
J. Math. Anal. （），第–*Appl.* **466** 2018 2, 1281 1298
期。[79] M. Mori、N. Ozawa，Mankiewicz定理与C*-代数的Mazur-Ulam性质，*Studia Math.* **250**（2020年），第3期，265–281。[80] G.J. Murphy， *C*-algebras and Operator Theory*，Academic Press，沃尔瑟姆，1990年。[81] G.K. Pedersen， *C*-algebras and their automorphism groups*，《伦敦数学会专著》第14卷，Academic Press，伦敦，1979年。[82] A.M. Peralta，关于实JB*-三重系统的公理化定义，*Math. Nach.* **256**（2003），100-106。[83] A.M. Peralta，与三重幂等元相关的正定厄米映射，
Expo. （），-。*Math.* **33** 2015 252 258
[84] A.M. Peralta，算子代数廷格利问题综述，
Acta Sci. Math. (Szeged) （），–。**84** 2018 81 123

[85] A.M. Peralta，扩展定义在

ℓ_∞ Γ *Rev. Mat.* ( )、*Complut.* **32** 2019 1, 99 114
( )、第 – 期上的单位球面上的满射等距映射。[86] A.M. Peralta，关于定义域为紧算子空间单位球面的满射等距映射的扩展， *Filomat* **36**:9 (2022年), 3075-3090。[87] A.M. Peralta，A. Rodr´ıguez Palacios，实与复 JBW*-三重系统的 Grothendieck 不等式， *Proc. London Math. Soc.* (3) 83，第 3 期 (2001), 605–625。[88] A.M. Peralta，R. Tanaka，紧 C*-代数与 JB*-三重系统单位球面之间等距映射的 Tingley 问题的解答， *Sci. China Math.* **62** (2019)，第 3 期，553–568。[89] A. Rodr ´ * * *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 2 165 1991 99 103
ıguez-Palacios，关于 JBW 三重系统的强 -拓扑，( ) 42，第 ( ) 期，–。[90] B. Russo，H.A. Dye，关于 C*- 代数中酉算子的注记， *Duke Math. J.* **33** (1966), 413-416。[91] A.A. Siddiqui，JB*- 代数酉拟同位中的自伴性， *Arch. Math. (Basel)* **87** (2006)，第 4 期，350–358。[92] A.A. Siddiqui，拓扑稳定秩为 的 JB
* 1 *International Journal of Mathemat-* -代 *ics and Mathematical Sciences* **2007**, 37186, 24 2007
数， ，第 卷，文章 ID 页数，。[93] A.A. Siddiqui，JB*-代数中 Russo–Dye 定理的证明， *New York J. Math.* **16** (2010), 53-60。[94] R. Tanaka，球面等距映射的另一性质， *Bull. Aust. Math. Soc.* **90** (2014), 304–310。[95] R. Tanaka，复$n \times n$ 矩阵算子范数单位球面上的 Tingley 问题， *Linear Algebra Appl.* **494** (2016), 274-285。[96] R. Tanaka，有限冯 · 诺伊曼代数上的 Tingley 问题， *J. Math. Anal. Appl.*, 451 (2017), 319–326。[97] D. Tingley，单位球面的等距映射， *Geom. Dedicata* **22** (1987), 371–378。[98] J.D.M. Wright，Jordan C*-代数， *Michigan Math. J.* **24** 291–302 (1977)。[99] J.D.M. Wright，M.A. Youngson，关于 Jordan 代数的等距映射， *J. London Math. Soc.* **17**, 339 44 1978– ( )。[100] X. Yang，X. Zhao，关于等距映射与非扩张映射的扩展问题。载于：*Mathematics without boundaries*。Themistocles M. Rassias 和 Panos M. Pardalos 编。725-748，Springer，纽约，2014年。

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada (IMAG). Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain.*Email address*: aperalta@ugr.es

Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Physics, CharlesUniversity, Sokolovská 83, 186 00 Prague, Czech Republic*Email address*: Rada.svarc@seznam.cz