arXiv:2301.00902v2 [math.NT] 6 Jan 2025

具有有理性条件的凸平面多边形计数函数的模性

KATHRIN BRINGMANN、JONAS KASZIAN 和 JIE ZHOU

Abstract. 我们研究源自椭圆曲线同调镜像对称的平面多边形计数函数。我们首先分析与平面多边形有向面积相对应的二次型的符号差和有理性。随后，我们证明满足二次型某些有理性条件的凸平面多边形计数函数的收敛性、亚纯性和拟模性。

1. Introduction and statement of results

自 [12, 14] 的研究以来，人们对源自亏格零开Gromov–Witten不变量生成函数以及椭圆曲线和相关流形的同调镜像对称的不定 theta 函数日益关注。由于椭圆曲线结构简单，这些生成函数是具体的对象：它们就是平面多边形的计数函数。具有 N 条边和固定角度的平面多边形计数函数具有如下形式

$$\Theta_{Q,\chi}(\boldsymbol{z};\tau)=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{N-2}}\chi\left(\boldsymbol{n}+\frac{\boldsymbol{y}}{v}\right)q^{Q(\boldsymbol{n})}e^{2\pi iB(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})},\ \tau=u+iv\in\mathbb{H},\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^{N-2},\ q:=e^{2\pi i\tau}.$$

从几何上看，$\boldsymbol{n}+\frac{\boldsymbol{y}}{v}$对应于所枚举多边形的边长，$Q(\boldsymbol{n})$源自其有向面积，而 $B(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{z})$则源自其加权周长。项 $\chi(\boldsymbol{n}+\frac{\boldsymbol{y}}{v})$ 由椭圆曲线中亏格零全纯圆盘模空间的欧拉示性数确定。其支撑集仅包含 $\mathbb{Z}^{N-2}$ 中能够产生非负面积多边形的点，而非整个格。同调镜像对称 [7] 预期这些生成函数具有模性质。在一系列研究中 [2, 3, 4, 8, 10, 11, 12, 13, 14]，人们证明了对于 $N\leq 6$的某些类型的平面 N边形，其枚举确实具有这一性质。本文将以往对个别情形的研究系统地推广到一大类计数函数，即凸平面多边形的计数函数。值得注意的是，以往的研究利用了二次型及定义法向量所满足的有理性。由于对于更一般的几何对象而言，这种有理性难以处理，因此在我们的研究中会出现一些复杂情况。

对于正定有理二次型 Q，这类生成函数（带有 $\chi=1$）是（正定）θ 函数，因此是权为 $\frac{N}{2}-1$ 的模形式（若包含椭圆变量 $\boldsymbol{z}$，则为 Jacobi 形式）。由于 $\overline{q}^{Q(\boldsymbol{n})}$ 对不定二次型会产生发散项，可以将求和限制在适当的锥内以获得收敛级数，但这通常会破坏模性。通过 Zwegers的论文 [17] 以及后来对任意符号差 [1, 5, 9], 的推广，可以通过添加一个实解析函数来恢复模性，该函数给出一个“补全”，使其成为权为 $\frac{N}{2}-1$ 的模形式，且其非全纯微分性质取决于二次型的符号差。更明确地说，我们将锥的示性函数写成如下形式的表达式的线性组合：$\prod_{j=1}^{N}\operatorname{sgn}(B(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{a}))$，其中 $C=(\boldsymbol{c_1},\ \ldots,\ \boldsymbol{c_N})$ 是界定该锥的超平面的法向量。为得到补全，我们

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11F03, 11F11,11F27, 11F37,11F50, 14N35,53D37.

Key words and phrases. 椭圆曲线、生成函数、同调镜像对称、Jacobi 形式、Mock theta函数、模形式。

将每个符号乘积替换为平滑后的表达式 $E_{Q,\ C}$，称为广义误差函数（见（4.1））。注意，当 $||\boldsymbol{a}|| \to \infty$ 时，$E_{Q,\ C}(\boldsymbol{a})$ 以适当的指数精度逼近符号乘积，其中 $||\cdot||$ 是欧几里得范数，以确保所得 θ 函数即使在 $Q(\boldsymbol{a}) < 0$ 的区域内也能收敛，尽管 $q^{Q(\boldsymbol{a})}$ 会增长。此外，广义误差函数满足 ´eras 在 [15] 定理 4.1 中给出的微分方程，从而产生模性。由于补全中使用的广义误差函数含有因子 $\sqrt{v}$，补全通常不是全纯的。然而，应用非全纯导数可以简化其微分性质，由此引出深度的概念。按照 Zagier–Zwegers 的做法，递归地定义权为 k、深度为 d 的拟模形式空间 $\mathfrak{M}_k^d$，以及它们的模完备化空间 $\widehat{\mathfrak{M}}_k^d$；其中，深度为零的拟模形式是通常的模形式（$\widehat{\mathfrak{M}}_k^0 = \mathfrak{M}_k^0 = \mathfrak{M}_k$），定义如下：

定义1.1. 一个拟模形式 $h\colon\ \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 权为 k、深度为 $d \geq 1$，是一个实解析函数 h的“全纯$\widehat{\ }$部分”（见定理 5.2）；该函数称为补全，其变换方式如同权为 k 的模形式，并且满足

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\tau}} \widehat{h} \in \bigoplus_j v^{r_j} \widehat{\mathfrak{M}}_{k+r_j}^{d-1} \otimes \overline{\mathfrak{M}_{2+r_j}}.$$

计数函数所求和的锥中存在各向同性向量，这些向量在几何上对应于多边形退化为线段的情形，因此会导致更有趣的现象。为确定计数函数的收敛性和亚纯性，我们因此详细分析二次型在这些点附近的增长行为。此外，我们引入了研究负半定二次空间模性的新技术，即广义误差函数。结合这些结果与极限技术，我们得到如下模性结果。

定理 1.2. 假设正性条件(2.7) 和有理性条件(2.15)成立。正则化计数函数$\Theta_{Q,\ \chi_C^{\mathrm{reg}}}$（其中 χ_C^{reg} 由(5.19)给出）是权至多为 $\frac{N}{2} - 1$、深度至多为 $N-3$的拟模形式的线性组合。

下面的例子展示了生成函数及其相应模补全的形式。

例 1.3. 等腰梯形的计数由 [3, 13] 给出

$$f(\boldsymbol{z}) := \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^2} \chi\left(\boldsymbol{n} + \frac{\boldsymbol{y}}{v}\right) q^{\frac{1}{2}\left(n_1^2 - n_2^2\right)} e^{2\pi i (n_1 z_1 - n_2 z_2)},$$

其中 $\chi(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(w_1 - w_2) + \operatorname{sgn}(w_2))$，且 $\operatorname{sgn}(x) := \frac{x}{|x|}$ 当 $x \neq 0$ 时，$\operatorname{sgn}(0) := 0$。在这种情况下，我们有

$$Q(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\left(n_1^2 - n_2^2\right), \quad B(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{z}) = n_1 z_1 - n_2 z_2, \quad \textit{for } \boldsymbol{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2,\ \boldsymbol{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

假设 z_1, z_2 满足 $0 < y_1 - y_2 < v,\ 0 < y_2 < v$。记 $\boldsymbol{c_1} = (1, 1)^T$，$\boldsymbol{c_2} = (0, 1)^T$。那么上述生成函数可以改写为

$$f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^2} \left(\operatorname{sgn}(B(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{n})) - \operatorname{sgn}(B(\boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{n}))\right) q^{\frac{1}{2}\left(n_1^2 - n_2^2\right)} e^{2\pi i (n_1 z_1 - n_2 z_2)}$$

并且与所谓的阿佩尔–勒奇函数有关。于是，根据(5.19)，有$\chi_C^{\mathrm{reg}} = \chi$。利用 [17]，中关于 $f(\boldsymbol{z})$ 的模完备化结果，可得

$$\widehat{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^2} \left(\operatorname{sgn}(B(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{n})) - E\left(\frac{B(\boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{n})}{\sqrt{-Q(\boldsymbol{c_2})}} v^{\frac{1}{2}}\right)\right) q^{\frac{1}{2}\left(n_1^2 - n_2^2\right)} e^{2\pi i (n_1 z_1 - n_2 z_2)},$$

其中 $E(x) := 2\int_0^x e^{-\pi t^2}\,dt$ 是误差函数。

本文结构如下。第2节研究平面多边形有向面积的性质，并分析相应二次型的符号差、正定性和有理性。第3节证明满足第2节所给正定性和有理性条件的凸平面多边形计数函数的收敛性。这需要考察计数函数求和范围内各向同性向量的结构。我们还探讨退化多边形的计数函数与锥的面上 θ 函数限制之间的对应关系。第4节为研究负半定二次空间上不定 theta 函数的模性，发展一些工具，例如广义误差函数。第5节证明第3节所研究的凸平面多边形计数函数具有模性。附录 A 讨论具有固定角度的多边形的变形。

Acknowledgments

我们感谢审稿人提出的宝贵意见。本研究得到德国科学基金会资助，资助项目为几何、代数与动力系统中的辛结构协同研究中心/跨区域研究中心（CRC/TRR 191）。本成果是一个项目的一部分，该项目获得了欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：101001179）下欧洲研究委员会（ERC）的资助。J. Zhou 的部分工作是在科隆大学数学研究所做博士后期间完成的，并获得德国科学基金会 CRC/TRR 191 项目资助。J. Zhou 还获得了中国国家重点研发计划（编号：2022YFA1007100）、清华大学启动经费以及中国青年海外高层次人才引进计划的资助。

2. Signed area of planar polygons

2.1. 平面多边形有向面积的基本性质。 对于 $N \geq 3$，考虑具有非零角 θ_j和非零边长 λ_j($1 \leq j \leq N$) 的N边形。顶点及其对应的边按顺时针方向循环标记（模 N）。第 k 条边向量的长度为 λ_k，标记为 k 的顶点处，从第 $k-1$ 条边向量到第 k 条边向量的角为 $\theta_k \in (-\pi,\ 0) \cup (0,\ \pi)$；见下方图1。这些角满足 $\sum_{k=1}^{N} \theta_k = 2\pi$，并且由于$N$边形是封闭的，我们有

$$\begin{aligned} &\varphi_k := \textstyle\sum_{a=1}^{k} \theta_a, \\ &\sum_{k=1}^{N} \lambda_k e^{-i\varphi_k} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

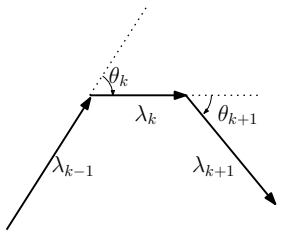

Figure 1. 多边形上标记为 k 的顶点处的外角为 θ_k，其中$1 \leq k \leq N$。

定义2.1. 如果一个 N 边形不存在非相邻边相交，则称其为简单多边形。否则，它是复杂多边形。3

如果一个简单的 N 边形还满足 $\theta_k \in (0, \pi)$（对 $1 \le k \le N$），那么它就是凸多边形。如果对某个 k，$\theta_k \in (-\pi, 0)$，那么该 N 边形在标记为 k 的顶点处是凹的。注意，对某个 k，满足$\lambda_k = 0$ 的 N 边形实际上是一个 $(N-1)$ 边形。我们研究使用叉积定义的简单多边形的有向面积；关于复多边形的讨论见附录 A。

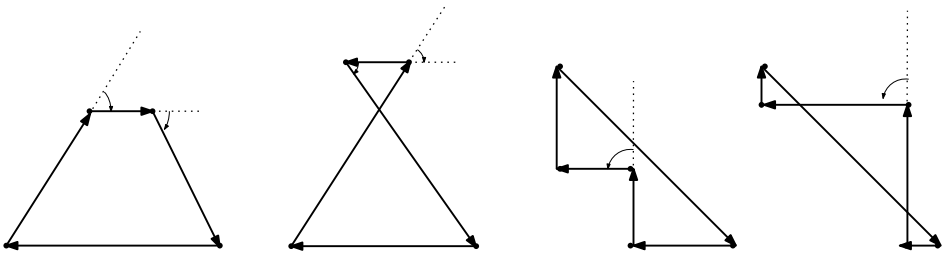

FIGURE 2. 从 从左到右：这些多边形依次是简单且凸的、复杂的、简单的、复杂的 .

引理 2.2。 简单的 N 边形的有向面积为 $(\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{N-2})^T)$

$$Q(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{2} \sum_{1 \le j \le N-2} \frac{\sin(\varphi_N - \varphi_j)\sin(\varphi_{N-1} - \varphi_j)}{\sin(\theta_N)} \lambda_j^2 - \sum_{1 \le j < k \le N-2} \frac{\sin(\varphi_N - \varphi_j)\sin(\varphi_{N-1} - \varphi_k)}{\sin(\theta_N)} \lambda_j \lambda_k.$$

证明。 将标记为 1 的顶点与其余顶点相连，把该 N 边形分割成$N-2$ 个三角形。利用叉积计算每个三角形的有向面积并求和，得到

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-2} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{-i\varphi_j} \right) \left(\lambda_{k+1} e^{-i\varphi_{k+1}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le j < k \le N-1} (\sin(\varphi_k)\cos(\varphi_j) - \sin(\varphi_j)\cos(\varphi_k)) \lambda_j \lambda_k. \quad (2.2)$$

化简后，可得有向面积的另一种表达形式

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \le j < k \le N-1} \sin(\varphi_k - \varphi_j) \lambda_j \lambda_k. \quad (2.3)$$

此外，还可以 通过考虑（2.1）中的实部和虚部，可以很容易地求出 λ_{N-1}, λ_N)

$$\lambda_{N-1} = -\sum_{j=1}^{N-2} \frac{\sin(\varphi_N - \varphi_j)}{\sin(\theta_N)} \lambda_j \,, \quad \lambda_N = \sum_{j=1}^{N-2} \frac{\sin(\varphi_{N-1} - \varphi_j)}{\sin(\theta_N)} \lambda_j. \quad (2.4)$$

我们将（2.2）中含有 $k = N-1$ 的项单独提取出来，并代入 λ_{N-1} 和 $\varphi_{N-1} = 2\pi - \theta_N$，得到

$$Q(\boldsymbol{\lambda}) = -\sum_{1 \le j < k \le N-2} \sin(\varphi_j)\cos(\varphi_k)\lambda_j\lambda_k - \sum_{1 \le j < k \le N-2} \sin(\varphi_k)\sin(\varphi_j)\frac{\cos(\theta_N)}{\sin(\theta_N)}\lambda_j\lambda_k$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{1 \le j \le N-2} \frac{\sin(\varphi_j)}{\sin(\theta_N)} \sin(\varphi_j + \theta_N)\lambda_j^2.$$

将前两个求和式合并，并利用三角恒等式，即得所述结论 . □

接下来，我们将引理 2.2 中的有向面积公式推广到 $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le N-2)$，并将所得二次型记为 Q。为简便起见，我们采用以下定义：

$$\boldsymbol{v} := \left(-\frac{\sin(\varphi_N - \varphi_j)}{\sin(\theta_N)} \right)_{1 \le j \le N-2}, \quad \boldsymbol{w} := \left(\frac{\sin(\varphi_{N-1} - \varphi_j)}{\sin(\theta_N)} \right)_{1 \le j \le N-2},$$
$$\lambda_{N-1} := \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}, \qquad \lambda_N := \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.5)$$

我们还使用标准基向量 $\boldsymbol{e_j} := (\delta_{j,\ 1},\ \delta_{j,\ 2},\ \ldots\ldots,\ \delta_{j,\ N-2})^T$ 对于 $1 \le j \le N-2$。与 Q 相对应的对称矩阵 $A = (A_{jk})_{1\le j,\ k\le N-2}$ 为

$$A_{jk} := \sin(\theta_N) v_{\min(j,k)} w_{\max(j,k)}. \tag{2.6}$$

以下结果可由几何直觉（即有向面积与参考顶点的选择无关）直接推出，也可利用引理 2.2 和方程 (2.1) 直接证明。

引理 2.3。
(1) 从 $\lambda_k\,(1 \le k \le N)$ 中循环地枚举任意连续的 $N-2$ 个参数，即可得到一组用于表示有向面积的独立参数。(2) 有向面积公式在标记 $\{1, 2, \ldots, N\}$ 上的循环置换下保持不变，也就是说，对于边长为 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ 的多边形，若进行循环置换 $\sigma \in S_N$，则有

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\lambda}) = &-\frac{1}{2} \sum_{1\le j\le N-2} \frac{\sin\left(\varphi_{\sigma(N)} - \varphi_{\sigma(j)}\right) \sin\left(\varphi_{\sigma(N-1)} - \varphi_{\sigma(j)}\right)}{\sin(\varphi_{\sigma(N)} - \varphi_{\sigma(N-1)})} \lambda_{\sigma(j)}^2 \\ &- \sum_{1\le j<k\le N-2} \frac{\sin\left(\varphi_{\sigma(N)} - \varphi_{\sigma(j)}\right) \sin\left(\varphi_{\sigma(N-1)} - \varphi_{\sigma(k)}\right)}{\sin\left(\varphi_{\sigma(N)} - \varphi_{\sigma(N-1)}\right)} \lambda_{\sigma(j)} \lambda_{\sigma(k)}. \end{aligned}$$

注释 2.4。 虽然任意连续的 $N-2$ 条边长都可以选作有向面积的独立参数，但对于非连续的边长，这一点未必成立。考察 λ_{N-1}, λ_N 关于 $\lambda_j\,(1 \le j \le N-2)$ 的系数即可看出。直接计算表明，当且仅当存在 $1 \le j, k \le N$ 使得 $\sin(\varphi_k - \varphi_j) = 0$ 时，这些参数之间才会存在依赖关系。几何上，这意味着多边形的第 j 条边与第 k 条边平行。

2.2. **有向面积函数的非负性**。 接下来，我们确定确保面积为正，或等价地，二次型 Q取正值的条件。简单多边形的面积为正，但根据角和边长来检验其是否简单并不方便。本文只考虑满足以下正性条件的多边形

$$\theta_k \in (0, \pi) \quad \text{for} \quad 1 \le k \le N. \tag{2.7}$$

运用引理 2.2 的方法和归纳法，我们得到以下结果。

推论 2.5。 假设 (2.7) 成立，并且对所有 $1 \le k \le N$， $\lambda_k > 0$ 或 $\lambda_k < 0$ 成立。那么 $Q(\boldsymbol{\lambda}) > 0$.

注 2.6。
(1)我们采用 (2.7) 而非更常见的凸性，因为我们考虑的是角度固定但边长取值任意的变形多边形 λ_k。变形多边形不一定是凸的。例如，图 *2* 中的第二个多边形是第一个多边形的一个变形，它满足(2.7)，但有一条边长为负，因此不是凸的；进一步讨论见附录 *A*。(2) 若不满足(2.7)，仅边长 λ_k 为正并不能推出有向面积为正；图 *2* 中的第四个多边形就是一个例子。

由推论 2.5 和连续性可知， $Q(\boldsymbol{\lambda}) \ge 0$ if $\lambda_k \ge 0$ or $\lambda_k \le 0$ for all $1 \le k \le N$.

2.3. **有符号面积函数的整性**。 接下来，我们考虑对多边形施加的一些整性条件，以确保由此得到的计数函数具有收敛性和椭圆性。为此，我们根据 (2.5) 将 v_k, w_k 的定义扩展到 $k \in \{N-1, N\}$，并定义

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{N-2} & -1 & 0 \\ w_1 & \cdots & w_{N-2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么，(2.1) 等价于

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}^T = 0. \tag{2.8}$$

根据引理 2.3 任意两个相邻的列 $\mathcal{M}$ 都线性无关。事实上，利用

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\gamma)+\sin(\alpha)\sin(\beta)=\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)\,, \tag{2.9}$$

我们有

$$\det\begin{pmatrix} v_k & v_{k+1}\\ w_k & w_{k+1}\end{pmatrix}=\frac{\sin(\theta_{k+1})}{\sin(\theta_N)}.$$

Let

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\qquad \mathcal{S}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0\\ & \cdots & & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_N\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R}).$$

假设（θ_1，θ_2 ... ，θ_N）满足以下条件：$\boldsymbol{e_k}$（$1\le k\le N$）是 $\mathbb{R}$中的标准基向量 ^{N}，

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{S}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_k} & \boldsymbol{e_{k+1}}\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\ \text{for all}\, 1\le k\le N. \tag{2.10}$$

此处再 次，我们在下标中使用循环次序，例如，$\boldsymbol{e_{N+1}}:=\boldsymbol{e}$ $_1$.

引理 2.7。以下条件等价:

(1) 存在 $\varepsilon_k\neq 0 (1\le k\le N)$，使得对于 *(2.8)* 的任意解，若 $\lambda_k=n_k\varepsilon_k$，$n_k\in\mathbb{Z}(k\in\{\sigma(1)\ \sigma(2)\ldots,\ \sigma(N-2)\})$，则 $n_k\in\mathbb{Z}$ 对于 $k\in\{\sigma(N-1)\ \sigma(N)\}$。*(2)* 存在 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$，使得 *(2.10)* 成立。*(3)* 对于 $1\le k\le \frac{N}{2}$，设 $b_{2k}:=\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)\sin(\theta_4)\cdots\sin(\theta_{2k-1})\sin(\theta_{2k})$。存在 $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，使得

$$t=b_{N-1}\quad \textit{if } N\equiv 1\pmod 2\,,\qquad b_N=1\quad \textit{if } N\equiv 0\pmod 2\,, \tag{2.11}$$

and

$$\frac{1}{b_{2k}}\frac{\sin(\varphi_N-\varphi_{2k+1})}{\sin(\theta_{2k+1})}\in\mathbb{Z}\,,\quad \frac{b_{2k}}{t}\frac{\sin(\varphi_N-\varphi_{2k})}{\sin(\theta_N)}\in\mathbb{Z}\,,$$
$$-\frac{1}{b_{2k}}\frac{t\sin(\varphi_{N-1}-\varphi_{2k+1})}{\sin(\theta_{2k+1})}\in\mathbb{Z}\,,\quad -b_{2k}\frac{\sin(\varphi_{N-1}-\varphi_{2k})}{\sin(\theta_N)}\in\mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

证明。比较 (2.8) 与 (2.10)，显然 (1) 和 (2) 等价。注意，若例如 $\lambda_{\sigma(N-1)}$ 的像不是 $\mathbb{Z}$ 的仿射变换，则它在 $\mathbb{R}$ 中稠密。

为证明 (2) 蕴含 (3)，注意到 $a_1=\pm\varepsilon_{N-1}$ 和 $a_2=\mp\varepsilon_N$。为简化记号，我们选取 $a_1=-\varepsilon_{N-1}$ 和 $a_2=\varepsilon_N$。令

$$x_k:=-\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{N-1}}\quad (1\le k\le N-2)\,,\qquad t:=-\frac{\varepsilon_{N-1}}{\varepsilon_N}. \tag{2.13}$$

(2.10) 中的整性等价于 $x_kv_k\,, tx_kw_k\in\mathbb{Z}$ 对于 $1\le k\le N.$。(2.10) 中的幺模性给出 $x_kx_{k+1}t\sin(\theta_{k+1})\sin(\theta_N)=1$，我~~递归~~求解得到

$$x_{2k+1}=\frac{x_1}{b_{2k}}\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_{2k+1})}\,,\quad x_{2k}=\frac{b_{2k}}{tx_1}\frac{\sin(\theta_N)}{\sin(\theta_1)},\quad x_1v_1=tx_{N-2}w_{N-2}=-1.$$

代入 $x_1=-\frac{1}{v_1}$，得到

$$x_{2k+1}u_{2k+1}=-\frac{1}{b_{2k}}\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_{2k+1})v_1}u_{2k+1}\,,\quad x_{2k}u_{2k}=-\frac{v_1b_{2k}}{t}\frac{\sin(\theta_N)}{\sin(\theta_1)}u_{2k}\,,\quad \boldsymbol{u}\in\{\boldsymbol{v},t\boldsymbol{w}\}.$$

应用 $tw_{N-2}x_{N-2}=-1$ 得到 (2.11)。将上述 x_{2k+1}，x_{2k} 的表达式代入后，矩阵 $\mathcal{U}=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{S}$ 的各项可化简为

$$\mathcal{U}_{1,2k+1}=\frac{1}{b_{2k}}\frac{\sin(\varphi_N-\varphi_{2k+1})}{\sin(\theta_{2k+1})}\,,\quad \mathcal{U}_{1,2k}=\frac{b_{2k}}{t}\frac{\sin(\varphi_N-\varphi_{2k})}{\sin(\theta_N)}\,,$$
$$\mathcal{U}_{2,2k+1}=-\frac{1}{b_{2k}}\frac{t\sin(\varphi_{N-1}-\varphi_{2k+1})}{\sin(\theta_{2k+1})}\,,\quad \mathcal{U}_{2,2k}=-b_{2k}\frac{\sin(\varphi_{N-1}-\varphi_{2k})}{\sin(\theta_N)}.$$

(2.10) 中的整性条件于是给出 (2.12)。上述关于 (2) 推出 (3) 的论证可以反向进行，从而得到 (3) 推出 (2)。□

例 2.8. </style}对于，(2.11) 和 (2.12) 显然成立。对于 $N=4$，直接可验，只要一致性约束 $b_4 = \sin(\theta_1)\sin(\theta_3)\sin(\theta_2)\sin(\theta_4) = 1$ 成立，这些条件就满足。根据(2.9)，这化为 $\sin(\theta_2+\theta_3)\sin(\theta_3+\theta_4) = 0$。当且仅当该4边形具有平行边时，这一条件成立。对于 $N=5$，这些条件变为

$$\frac{\sin(\theta_k+\theta_{k+1})\sin(\theta_{k+1}+\theta_{k+2})}{\sin(\theta_k)\sin(\theta_{k+2})} \in \mathbb{Z} \qquad for\ 1 \le k \le 5.$$

例如，当 $\theta_1+\theta_2 = \pi = \theta_2+\theta_3$ 时，这一条件成立。

有时需要使用固定的独立参数集 $\lambda_k\,(1 \le k \le N-2)$。这自然引出比 (2.10) 更宽松的条件，即

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{S} \in \mathrm{Mat}_{2\times N}(\mathbb{Z}).$$

上述方程可解，在几何上意味着，任何满足 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N-2})$ 且 $\lambda_k \in \mathbb{Z}\varepsilon_k,\ 1 \le k \le N-2$ 的多边形，都满足 $\lambda_k \in \mathbb{Z}\varepsilon_k, k \in \{N-1, N\}$。事实上，回顾 (2.8) 可知

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_{N-1}}{\varepsilon_{N-1}} \\ \frac{\lambda_{N-2}}{\varepsilon_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\varepsilon_{N-1}} & \cdots & \frac{v_{N-2}}{\varepsilon_{N-1}} \\ \frac{w_1}{\varepsilon_N} & \cdots & \frac{w_{N-2}}{\varepsilon_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1\varepsilon_1}{\varepsilon_{N-1}} & \cdots & \frac{v_{N-2}\varepsilon_{N-2}}{\varepsilon_{N-1}} \\ \frac{w_1\varepsilon_1}{\varepsilon_N} & \cdots & \frac{w_{N-2}\varepsilon_{N-2}}{\varepsilon_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{N-2} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

宽松条件意味着最后一个表达式中的 $2\times(N-2)$ 矩阵具有整数条目。在继续之前，我们需要以下内容。

定义 2.9. 一个具有整数条目的矩阵称为本原的，若其行和列均为本原向量。

引理 2.10. 设

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{N-2} \\ w_1 & \cdots & w_{N-2} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{N-2} \end{pmatrix}.$$

那么以下条件等价:

(1) 我们有

$$\frac{\sin(\varphi_N-\varphi_k)}{\sin(\varphi_N-\varphi_j)}\frac{\sin(\varphi_{N-1}-\varphi_j)}{\sin(\varphi_{N-1}-\varphi_k)} \in \mathbb{Q}\cup\{\infty\} \quad for\ all \quad 1 \le j,k \le N-2. \tag{2.15}$$

(2) 存在 $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ 使得

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{S} \in \mathrm{Mat}_{2\times N}(\mathbb{Z}). \tag{2.16}$$

(3) 存在 $\mathcal{P}$、S 使得

$$U = \mathcal{P}^{-1}MS \in \mathrm{Mat}_{2\times(N-2)}(\mathbb{Z})\ \ is\ primitive, \quad S^TAS \in \mathrm{Mat}_{(N-2)\times(N-2)}(\mathbb{Z}). \tag{2.17}$$

这里的矩阵 A 对应于 (2.6) 中给出的二次型 Q。

证明。注意到，对于所有 $1 \le j,k \le N-2$，(2.15) 等价于 $\frac{w_k}{v_k}(\frac{w_j}{v_j})^{-1} \in \mathbb{Q}\cup\{\infty\}$。显然，(1) 和 (2) 等价。根据 $M, S, \mathcal{M}, \mathcal{S}$ 的定义以及 (2.14)，(3) 蕴含 (2)。为证明 (2) 蕴含 (3)，注意到 (2.16) 是关于 (2.13) 中变量和 ε_{N-1} 的方程。对于一个

(2.16) 的解，可以适当地将 (2.13) 中的变量组乘以整数，使其满足 (2.17)，从而将它们确定到相差一个符号。特别地，对于这样的解，检查 $\mathcal{U}$ 的各项

$$\frac{v_j\varepsilon_j}{\varepsilon_{N-1}}\frac{w_k\varepsilon_k}{\varepsilon_N} = v_jx_j\cdot tw_kx_k \in \mathbb{Z}\,, \quad 1\le j,k\le N-2.$$

回顾式 (2.6) 中给出的 A 的定义。于是我们有

$$\left(S^TAS\right)_{jk} = \varepsilon_jA_{jk}\varepsilon_k = \begin{cases}\sin(\theta_N)v_j\varepsilon_jw_k\varepsilon_k = \sin(\theta_N)\frac{\varepsilon_{N-1}^2}{t}v_jx_j\cdot tw_kx_k & \text{if } 1\le j\le k\le N-2,\\ \sin(\theta_N)w_j\varepsilon_jv_k\varepsilon_k = \sin(\theta_N)\frac{\varepsilon_{N-1}^2}{t}v_kx_k\cdot tw_jx_j & \text{if } 1\le k\le j\le N-2.\end{cases}$$

我们取一个解 使其满足 $t>0$，并令 $\varepsilon_{N-1} = ({}^t\sin(\theta_N))_{12}$，从而证明该断言 m. □

注 2.11。 如果将这些参数替换为另一组连续参数 $N-2$，并将其作为独立参数，且对应相同的一组数 $\{\varepsilon_k\}_{1\le k\le N}$，那么根据 (2.8)，这些 $N-2$ 数的整性仅能推出其余两个数为有理数。等价地，由 $\boldsymbol{\lambda}\in S\mathbb{Z}^{N-2}$ 确定的同一组多边形，可以用另一组连续参数 $N-2$ 来描述，此时对应的是 $\mathbb{Z}^{N-2}$ 的一个缩放子格（而非整个格）。因此，只要考虑有理性结构，指标 $1\le k\le N$ 之间仍然存在循环对称性（例如引理 *2.3* 中所示的循环对称性）。上文通过式 (2.16) 从线性变换的角度论证了循环对称性与有理性相容，但也可以利用 (2.15) 和 (2.9) 验证这一点。

此后，我们假设 (2.15) 成立。为明确起见，我们固定一个满足 (2.17) 的解 $\{\varepsilon_k\}_{1\le k\le N}$。如果上下文清楚，我们也省略 ε_k 的记号。

3. Convergence of counting functions of convex planar polygons

3.1. **凸多边形计数函数**。根据 [3, 12, 14],我们定义

$$\Theta_{Q,\chi}(\boldsymbol{z};\tau) := q^{-Q(\boldsymbol{\alpha})}e^{-2\pi iB(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}}\psi(\boldsymbol{n})(\operatorname{sgn}(n_{N-2}))^{N-3}q^{Q(\boldsymbol{n})}e^{2\pi iB(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n})}. \tag{3.1}$$

这里 $\boldsymbol{z} =: \boldsymbol{\alpha}\tau+\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{N-2}$，$B(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) := Q(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-Q(\boldsymbol{a})-Q(\boldsymbol{b})$ 是与 Q 相关联的双线性形式，$\operatorname{sgn}(\overline{x}) := \frac{x}{|x|}$ 对于 $x\neq 0$，$\operatorname{sgn}(0) := 0$，且 ψ 是.....的特征函数

$$\left\{\boldsymbol{\lambda}\in(0,\infty)^{N-2} : \lambda_{N-1},\lambda_N>0\right\}\cup\left\{\boldsymbol{\lambda}\in(-\infty,0)^{N-2} : \lambda_{N-1},\lambda_N<0\right\}\subseteq\mathbb{R}^{N-2}$$

其中 $\lambda_{N-1} := \boldsymbol{v}^T\cdot\boldsymbol{\lambda}$，$\lambda_N := \boldsymbol{w}^T\cdot\boldsymbol{\lambda}$。为供下文使用，我们还定义 $z_{N-1} := \boldsymbol{v}^T\cdot\boldsymbol{z}$，$z_N := \boldsymbol{w}^T\cdot\boldsymbol{z}$。几何上，(3.1) 表示求和遍及那些具有固定角度θ_k $(1\le k\le N)$ 的多边形，其边长与参考边长 $\boldsymbol{\alpha}$ 的关系是相差某些固定向量的整数倍；详细讨论参见 [3], 以及附录 A。定义

$$\chi(\boldsymbol{n}) := \psi(\boldsymbol{n})\operatorname{sgn}(n_{N-2})^{N-1}.$$

用 $\lambda_k = n_k$、$1\le k\le N$ 表示，有

$$\chi(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{k=1}^{N}H(\lambda_k) - (-1)^N\prod_{k=1}^{N}H(-\lambda_k)\,, \tag{3.2}$$

其中 H 为赫维赛德函数，即

$$H(t) := \begin{cases}1 & \text{if } t>0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们改写 (3.1)

$$\Theta_{Q,\chi}(\boldsymbol{z};\tau) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{N-2}}\chi\left(\boldsymbol{n}+\frac{\boldsymbol{y}}{v}\right)q^{Q(\boldsymbol{n})}e^{2\pi iB(\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{z})}.$$

如果求和范围包含满足 $Q(\boldsymbol{n}) < 0$ 的 $\boldsymbol{n}$，则 (3.1) 中的级数发散。若施加角的正性条件 $\theta_k \in (0,\ \pi)$ ($1 \le k \le N$)，则不会出现这种情况。事实上，根据 (3.2)，在求和范围内，对所有 $1 \le k \le N$，要么 $\lambda_k \ge 0$，要么 $\lambda_k \le 0$。然后应用引理 2.2 和推论 2.5。无论哪种情况，所计数的相应多边形实际上都是凸的。

注 3.1. 若不满足(2.7)，如注 *2.6* (2)所述，Q 可能为负。为避免由此导致 $\Theta_{Q,\ \chi}$发散，必须将(3.1) 中的求和范围限制为与范围 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N-2}:\ Q(\boldsymbol{x}) \ge 0\}$的交集。我们将在未来研究中回到这一问题。

3.2. **各向同性向量的结构**。凸多边形的计数函数是与二次型 Q相关联的不定 theta 函数。定义 $\underline{\Delta}$: $= \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N-2}:\ \chi(\boldsymbol{\lambda}) \ne 0\}$。于是 Δ是一个多面体，它是一个紧多胞体上的锥。根据推论 2.5，对于$\boldsymbol{x} \in \Delta$，有 $Q(\boldsymbol{x}) > 0$。然而，这并不意味着 $\Theta_{Q,\ \chi}$收敛，因为 Δ 并非紧致，其闭包可能包含满足 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N-2}: Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$的向量。因此，讨论 $\Theta_{Q,\ \chi}$ 的收敛性需要研究闭包 Δ中包含的各向同性向量。

引理 3.2。*I* 对于 $1 \le k \le N$，若 $\boldsymbol{f}$ $\theta_k \in (0, \pi)$，则二次型 Q 的符号差为 $(1, N-3)$.

证明。我们用归纳法证明该结论。通过对相应二次型进行直接计算，可知 $N \in \{3, 4\}$ 的情形显然。假设该结论对 $1 \le n \le N-1$ （其中$N-1 \ge 4$）成立。我们证明它对 $n = N$ 也成立。首先，容易用反证法证明存在某个 k 使得 $\theta_k + \theta_{k+1} < \pi$。如有必要，可重新标记顶点；为明确起见，我们可以假设 $k = 2$。然后进行如下变量代换

$$\mu_1 = \lambda_1 + \frac{\sin(\theta_3)}{\sin(\theta_2+\theta_3)}\lambda_2, \qquad \mu_3 = \lambda_3 + \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_2+\theta_3)}\lambda_2, \qquad \mu_k = \lambda_k, \quad 4 \le k \le N-2. \tag{3.3}$$

记 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_3, \dots, \mu_{N-2})^T$。通过直接计算可验证

$$\boldsymbol{\lambda}^T A(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)}{2\sin(\theta_2+\theta_3)}\lambda_2^2 + \boldsymbol{\mu}^T A(\theta_1, \theta_2+\theta_3, \theta_4, \dots, \theta_N)\boldsymbol{\mu}. \tag{3.4}$$

事实上，回顾引理 2.2 的证明，由 (2.3) 可知

$$\boldsymbol{\lambda}^T A(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{1 \le j < k \le N-1} \sin(\varphi_k - \varphi_j)\lambda_j\lambda_k\,,$$

其中 λ_{N-1} 由 (2.4) 给出。相同的计算可得

$$\boldsymbol{\mu}^T A(\theta_1, \theta_2+\theta_3, \theta_4, \dots, \theta_N)\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{1 \le j < k \le N-1 \\ j,k \ne 2}} \sin(\varphi_k - \varphi_j)\mu_j\mu_k\,,$$

其中 μ_{N-1}同样由 (2.4) 给出 $\mu_{N-1} = \sum_{j \in \{1,\cdots,N-2\}\setminus\{2\}} \underline{\sin(\varphi_j)\sin(\theta_N)}\,\mu_j$。将 (3.3) 代入上述关于 μ_{N-1}的表达式，可得

$$\mu_{N-1} = \frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\theta_N)}\lambda_1 + \frac{\sin(\varphi_1)\sin(\theta_3) + \sin(\varphi_3)\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_N)\sin(\theta_2+\theta_3)}\lambda_2 + \frac{\sin(\varphi_3)}{\sin(\theta_N)}\lambda_3 + \sum_{4 \le j \le N-2}\frac{\sin(\varphi_j)}{\sin(\theta_N)}\lambda_j.$$

应用 (2.9)，可得

$$\mu_{N-1} = \frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\theta_N)}\lambda_1 + \frac{\sin(\varphi_2)}{\sin(\theta_N)}\lambda_2 + \frac{\sin(\varphi_3)}{\sin(\theta_N)}\lambda_3 + \sum_{4 \le j \le N-2}\frac{\sin(\varphi_j)}{\sin(\theta_N)}\lambda_j = \lambda_{N-1}.$$

按 λ_j，$1 \le j \le N-1$ 展开，得到

$\boldsymbol{\mu}^T A(\theta_1, \theta_2+\theta_3, \theta_4, \dots, \theta_N)\boldsymbol{\mu}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\le j<k\le N-1 \\ j,k\notin\{1,2,3\}}} \sin(\varphi_k-\varphi_j)\lambda_j\lambda_k + \frac{1}{2}\sin(\varphi_3-\varphi_1)\lambda_1\lambda_3 + \frac{1}{2}\sin(\theta_2)\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}\sin(\theta_3)\lambda_2\lambda_3$$
$$+ \frac{\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)}{2\sin(\theta_2+\theta_3)}\lambda_2^2 + \frac{1}{2}\sum_{4\le k\le N-1}\sin(\varphi_k-\varphi_1)\lambda_1\lambda_k + \frac{1}{2}\sum_{4\le k\le N-1}\sin(\varphi_k-\varphi_3)\lambda_3\lambda_k$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{4\le k\le N-1}\sin(\varphi_k-\varphi_2)\lambda_2\lambda_k.$$

由此可得

$$\boldsymbol{\mu}^T A(\theta_1,\theta_2+\theta_3,\theta_4,\dots,\theta_N)\boldsymbol{\mu} = \frac{\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)}{2\sin(\theta_2+\theta_3)}\lambda_2^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\le j<k\le N-1}\sin(\varphi_k-\varphi_j)\lambda_j\lambda_k$$
$$= \frac{\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)}{2\sin(\theta_2+\theta_3)}\lambda_2^2 + \boldsymbol{\lambda}^T A(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_N)\boldsymbol{\lambda}.$$

由此得到 (3.4)。根据归纳假设，(3.4) 右侧的第二项对应于一个符号差为 $(1, N-4)$ 的二次型。因此，(3.4) 左侧对应的二次型的符号差为 $(1, N-3)$。证明至此完成。□

注记 3.3。几何上，(3.3) 对应于从一个凸$(N-1)$边形中切下一个三角形，从而得到一个凸 N边形。对于非凸多边形，不一定总能找到 k 使得$\theta_k+\theta_{k+1}\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$；例如，见图 *2* 中的第三个多边形。此外，*(3.4)* 右侧第一项的符号差可能为 ±1。从3边形开始，除了使用切割过程外，还可以使用粘合过程来构造非凸 N边形；例如，见图 *2* 中的第三个和第四个多边形。这意味着，对于满足$N\ge4$的一般简单 N边形，相应二次型的符号差 Q 可能为$(N-2-s, s)$，其中 $0\le s\le N-3$。

接下来，我们讨论在正性条件 $\theta_k\in(0,\pi)$ 下，$1\le k\le N$, Q 在 Δ 中是否严格为正。令 $\boldsymbol{u}^\perp := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N-2}: B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0\}$，其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N-2}$，并且

$$\boldsymbol{c_j} := A^{-1}\boldsymbol{e_j}, \quad 1\le j\le N-2, \quad \boldsymbol{c_{N-1}} := A^{-1}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{c_N} := A^{-1}\boldsymbol{w}. \tag{3.5}$$

于是，对于 $1\le k\le N$，我们有 $\lambda_k = B(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{\lambda})$。下面给出一个预备引理。

引理 3.4。假设对于 $1\le k\le N$，有 $\theta_k\in(0,\pi)$。那么，对于 $1\le k\le N$，N 个超平面 $\boldsymbol{c_k}^\perp$ 两两不同，除非 $N=3$ 或 $N=4$，其中某个 $1\le k\le4$ 满足 $\theta_k+\theta_{k+1}=\pi$。

注 3.5。引理 *3.4* 中的例外情形 $N=3$ 对应于这样的三角形：其计数给出雅可比 *theta* 函数 [14]。例外情形 $N=4$ 对应于平行四边形和梯形。平行四边形的计数给出 *Zagier* 级数 [6, 13, 16]，，而梯形及其他凸4边形的计数则给出 *Kronecker* 研究的 *Appell–Lerch* 和；如 [10, 11, 12, 13] 所示，它们描述椭圆曲线上秩二向量丛的截面。

下文中我们仅关注情形 $N\ge5$。接下来，我们研究 $\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{N-2}: Q(\boldsymbol{\lambda})=0\}$ 与 Δ的交集。对于 $I\subseteq\{1,2,\dots,\overline{N}\}$，令

$$D_0 := \left\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{N-2}: Q(\boldsymbol{\lambda})=0\right\}, \quad D_+ := \left\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{N-2}: Q(\boldsymbol{\lambda})>0\right\}, \tag{3.6}$$
$$V_I := \bigcap_{j\in I}\left\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{N-2}: \lambda_j=0\right\} = \left\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{N-2}: \lambda_j=0 \text{ for } j\in I\right\}, \quad F_I = V_I\cap\overline{\Delta}.$$

关于闭包 Δ 中各向同性向量的结构，我们有以下结果。

命题 3.6。假设 (2.7) 并且 $N \geq 5$。那么

$$D_0 \cap \overline{\Delta} = \bigcup_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \\ |I|=N-2}} D_0 \cap F_I. \tag{3.7}$$

此外，右侧有 $D_0 \cap F_I \neq \{\mathbf{0}\}$ 当且仅当 $I = \{1,2,\ldots,N\} \setminus \{a,b\}$，其中 $b \neq a \pm 1$ 满足 $\sin(\varphi_b - \varphi_a) = 0$。特别地，假设对任意 $1 \leq j$、$k \leq N$，都有 $\sin(\varphi_k - \varphi_j) \neq 0$。那么 Q 在 $\Delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上为正。

证明。根据引理 3.2，通过对矩阵 A 对角化（这不会改变 $Q = 0$，并将超平面映射为超平面），D_0 与多胞体上的锥的交集是一组经过原点的直线。于是，Δ 与各向同性向量集合 D_0 的交集为

$$D_0 \cap \overline{\Delta} = \bigcup_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \\ \dim(F_I)=1}} D_0 \cap F_I.$$

因此，为了证明 (3.7)，我们只需考虑满足 $|I| = N-3$ 的 $D_0 \cap F_I$。利用引理 2.3 和引理 3.4，我们可以假设 $|I \cap \{1,2,\ldots,N-2\}| = N-4$ 且 $|I \cap \{N-1,N\}| = 1$。

Let $1 \leq a < b \leq N-2$ 使得 $\{a,b\} \cup I = \{1,2,\ldots,N-2\}$。那么，对于 $\boldsymbol{\lambda} \in F_I$,

$$Q|_{F_I}(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{\sin(\varphi_a)\sin(\theta_N+\varphi_a)}{2\sin(\theta_N)}\lambda_a^2 - \frac{\sin(\varphi_b)\sin(\theta_N+\varphi_b)}{2\sin(\theta_N)}\lambda_b^2 - \frac{\sin(\varphi_a)\sin(\theta_N+\varphi_b)}{\sin(\theta_N)}\lambda_a\lambda_b.$$

利用 (2.5) 和 $|I \cap \{N-1,N\}| = 1$，可得

$$Q|_{F_I}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\sin(\theta_N)\lambda_{N-1}\lambda_N + \frac{1}{2}\sin(\varphi_b-\varphi_a)\lambda_a\lambda_b = \frac{1}{2}\sin(\varphi_b-\varphi_a)\lambda_a\lambda_b.$$

因此，对于 $\boldsymbol{\lambda} \in D_0 \cap F_I$，有 $\boldsymbol{\lambda} \in D_0 \cap (F_{I\cup\{a\}} \cup F_{I\cup\{b\}})$ 或 $\sin(\varphi_b - \varphi_a) = 0$。对于第二种情况，回顾由 (2.7) 可得 $0 < \varphi_a < \varphi_b < 2\pi$，因此 $\sin(\varphi_b - \varphi_a) = 0$ 意味着 $\varphi_b = \varphi_a + \pi$。利用 (2.5) 中 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的表达式，进一步可知 λ_{N-1}, λ_N 其中一个为零意味着另一个也为零（且 $\lambda_a = \lambda_b$）。因此有 $\boldsymbol{\lambda} \in D_0 \cap F_{I\cup\{N-1,N\}}$，一般而言

$$D_0 \cap F_I \subseteq \bigcup_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \\ |I|=N-2}} F_I \cap D_0.$$

任取一个 I，满足 $I = N-2$，例如 $I = \{1,2,\ldots,N\} \setminus \{a,b\}$，满足 $a < b$。若 $b = a \pm 1$，按循环地枚举，则由引理 2.3，可取 λ_j，$j \in I$ 作为有向面积的独立参数。由 (2.4)，对所有 k 都有 $\lambda_k = 0$，因此 $F_I = \{\mathbf{0}\}$。否则，可取 λ_a，λ_{a+1}，$\ldots$，λ_{a+N-3} 作为独立参数，同样按循环地枚举。由 (2.3) 可得

$$Q|_{F_I}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\sin(\varphi_b-\varphi_a)\lambda_a\lambda_b.$$

对于 $\lambda_a = 0$ 或 $\lambda_b = 0$，我们有 $\boldsymbol{\lambda} \in F_{I\cup\{a\}} \cup F_{I\cup\{b\}} = \{\mathbf{0}\}$。因此只需考虑 $\lambda_a\lambda_b \neq 0$，这意味着当且仅当 $\sin(\varphi_b - \varphi_a) = 0$ 时，$D_0 \cap F_I \neq \{\mathbf{0}\}$。证明完毕。□

注 3.7. 图 *3* 展示了Δ中所含各向同性向量的结构。在命题 *3.6* 的证明中，我们证明 $\overline{D}_0 \cap F_I \neq \{\mathbf{0}\}$，$|I| = N-3$ 要求 $D_0 \cap F_I = D_0 \cap F_J$ 满足某个$|J| = N-2$。几何上，命题 *3.6* 中关于非零各向同性向量存在性的条件意味着凸多边形具有平行边，而 Q 恰好在这些平行边重合时为零。

定义 3.8。如果一个面 $D_0 \cap F_I$ 是一维的，我们就称它为各向同性射线。根据命题 3.6，当 $I = \{1,2,\ldots,N\} \setminus \{a,b\}$ 满足 $b \neq a \pm 1$ 且 $\sin(\varphi_b - \varphi_a) = 0$ 时，这一条件成立。各向同性射线至多有 $\binom{N}{N-2} - N - 4$ 条。

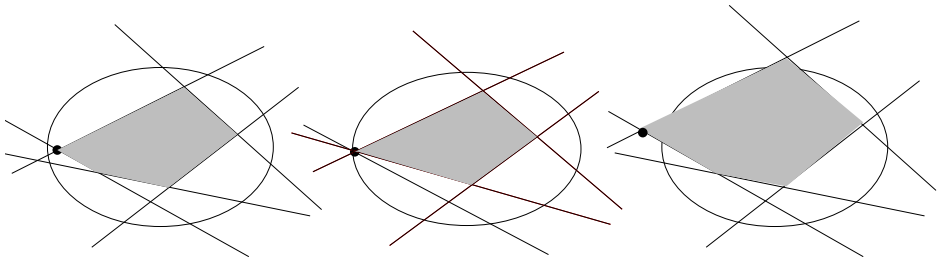

FIGURE 3. 阴影区域是 Δ的截面，二次曲面是 D_0的截面。第一种情况源于对不含各向同性向量的凸多面体的计数函数的考察，第二种情况源于对含有限个各向同性向量的凸多面体的考察，最后一种情况则源于对可能含有无限多个各向同性向量的凹多面体的考察。

必要时通过改变标记，我们可以假设这样的各向同性射线由 $D_0 \cap F_I$， $I = \{1, 2, \cdots, N\} \setminus \{\ell, N-1\}$ 给出，其中 $1 \le \ell \le N-3$。我们还记

$$\mathcal{E}_\ell := \{\boldsymbol{c_j}\colon\ j \in \{1, 2, \ldots, N-2\} \setminus \{\ell\}\}, \qquad E_\ell := \text{张成空间}_{\mathbb{R}}\{\boldsymbol{c_j}\colon\ j \in \{1, 2, \ldots, N-2\} \setminus \{\ell\}\} = \text{张成空间}(\mathcal{E}_\ell).$$

根据 由 (2.5)、(2.6) 和 (3.5) 可知，若某个 $1 \le \ell \le N-$ 满足 3,

$$B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{c_\ell}) = B(\boldsymbol{c_N}, \boldsymbol{e_\ell}) = w_\ell = 0\,;$$

注意，由正性条件 (2.7)， $w_{N-2} \neq 0$。对于 $J \subseteq \{1, \ldots, N\}$，可能有 $\dim(F_J) := \dim(\langle F_J \rangle) < \dim(V_J)$，例如，当 $J = \{j\}$ 时， $V_{\{j\}}$ 不是 Δ的支撑超平面；参见图 3 中间的图。接下来我们将讨论这一微妙之处，并由此得到各向同性射线的另一种刻画，这一刻画有助于研究计数函数的模性。

引理 3.9. 对于任意满足 $|J| \le N-2$ 的 $J \subseteq \{1, \ldots, N\}$，令 J_* 为满足 $J \subseteq K$ 和 $F_J = F_K$ 的那些 $K \subseteq \{1, \ldots, N\}$ 中按包含关系极大的子集。那么我们有

$$F_J \text{ is an isotropic ray} \quad \Leftrightarrow \quad \text{there exists } J_0 \subsetneq J_*, \text{ such that } F_{J_0} = F_{J_*}$$
$$\Leftrightarrow \quad \{\lambda_j\}_{j \in J_*} \text{ are linearly dependent} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(V_{J_*}) = N - 1 - |J_*|.$$

注3.10. 根据多面体 Δ 的几何性质，存在满足 $F_J = \overline{F_{J_0}}$ 的 $J_0 \subsetneq J$ 意味着： $j \in J \setminus J_0$ 时有 $k \in J_0\rangle$。根据引理 *3.9*， V_J，因此 F_J 必定是各向同性射线。然而，反过来并不成立。例如，可能存在 $|J| = 1$，其中 F_J 是各向同性射线，因此所需的 J_0 不存在；参见图 *3* 中间的图示。

3.3. **计数函数的收敛性**。 命题 3.6 中展示的各向同性射线结构，使我们能够利用 [17] 中的思路证明$\Theta_{Q,\,\chi}$ 的收敛性。关键是找到一个切片求和范围 $\text{supp}(\chi) \cap (\mathbb{Z}^{N-2} + \boldsymbol{\alpha}) \subseteq \Delta \cap (\mathbb{Z}^{N-2} + \boldsymbol{\alpha})$，以确保收敛性。只需考虑 $D_0 \cap \Delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ 的两个连通分支之一，例如满足 $\lambda_k \ge 0$ 的那个。下面关于 (3.5) 中引入的法向量的引理，有助于找到 $\mathbb{R}^{N-2}$ 的一个切片。

引理 3.11。 假设正性条件 (2.7) 成立，且 $N \ge 5$。设 $D_0 \cap F_I$ 是一维的，并且对某个 $1 \le \ell \le N-3$ 有 $I = \{1, 2, \ldots, N\} \setminus \{\ell, N-1\}$。取该各向同性射线的一个生成元 $\boldsymbol{f} = f_\ell \boldsymbol{e_\ell}$，使得 [1] $f_\ell > 0$。

(1) 对于每个 $\boldsymbol{c_k}$、$1 \le k \le N$，都有 $Q(\boldsymbol{c_k}) \le 0$.
(2) 有 $\boldsymbol{f}^\perp = E_\ell$，且有 $\boldsymbol{f} \in E_\ell$。

[1]为明确起见，我们可以取 $f_\ell > 0$ 为 1。

(3) 任取 $\mathcal{E}_\ell$ 的一个含有 $N-4$ 个元素的子集 $\mathcal{E}_\ell^-$，使得 $\mathcal{E}_\ell^- \cup \{\boldsymbol{f}\}$ 中的向量线性无关。定义 $E_\ell^- := \langle \mathcal{E}_\ell^- \rangle$。于是有正交分解 $E_\ell = \mathbb{R}\boldsymbol{f} \oplus E_\ell^-$，其中 $Q|_{E_\ell^-} < 0$。特别地，对于任意 $\boldsymbol{c_j} \in \mathcal{E}_\ell^-$，都有 $Q(\boldsymbol{c_j}) < 0$。

证明。(1) 将 (3.7) 与 $F_{\{k\}} \setminus \bigcup_{j\neq k} F_{\{j\}}$ 相交，可得 $\Delta \cap F_{\{k\}} \setminus \bigcup_{j\neq k} F_{\{j\}} \subseteq D_+$。因此，对于任意 $1 \le k \le N$，存在 $\boldsymbol{\lambda} \in D_+$ 使得 $B(\boldsymbol{c_k}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$。假设 $\boldsymbol{c_k}$ 满足 $Q(\boldsymbol{c_k}) > 0$，并选取如上的向量 $\boldsymbol{\lambda}$。由引理 3.2 可知，若 $\boldsymbol{c_k}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 位于 $\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{N-2}$ 的同一个连通分支中，则 $B(\boldsymbol{c_k}, \boldsymbol{\lambda}) > 0$；否则，$Q(\boldsymbol{a}) \ge 0\}$ 且 $B(\boldsymbol{c_k}, \boldsymbol{\lambda}) < 0$。这两种情况都与条件 $B(\boldsymbol{c_k}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$ 矛盾。

(2) 由命题 3.6，$B(\boldsymbol{c_j}, \boldsymbol{f}) = 0$，其中 $\boldsymbol{c_j} \in \mathcal{E}_\ell$。由维数关系可知 $\boldsymbol{f}^\perp = E_\ell$。由于 $Q(\boldsymbol{f}) = 0$，因此有 $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{f}^\perp = E_\ell$。

(3) 由于由 (3.5) 可得 $A\boldsymbol{c_j} = \boldsymbol{e_j}$ for $1 \le j \le N-2$，$\dim(E_\ell) = N-3$。根据 (2)，这样的 $\mathcal{E}_\ell^-$ 选择是可能的。任意各向同性向量 $\boldsymbol{u} \in E_\ell^- \subseteq \boldsymbol{f}^\perp$ 都给出一个各向同性向量空间 $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle$。由于 Q 的符号差为 $(1, N-3)$，该空间至多为一维，因此 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$。于是，根据 (1)，$Q|_{E_\ell^-}$ 为负定。特别地，这表明对于 $\boldsymbol{c_j} \in \mathcal{E}_\ell^-$，$Q(\boldsymbol{c_j}) < 0$。□

根据 Q 的特定表达式，我们有以下基本估计。

引理 3.12。在引理 *3.11* 的假设和记号下，有以下结论：

(1) 我们有 $v_j > 0\ (1 \le j \le \ell)$、$w_j < 0\ (1 \le j < \ell)$、$w_\ell = 0$ 和 $w_j > 0\ (\ell < j \le N-2)$。(2) 对于任意 $\gamma \in \mathbb{R}$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意满足 λ_k、$\rho_k \ge 0$（其中 $1 \le k \le N$）的 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta \cap (\mathbb{Z}^{N-2} + \boldsymbol{\alpha}) \setminus (\mathbb{Z} + \alpha_\ell)\boldsymbol{e_\ell}$ 以及任意 $\boldsymbol{\rho} \in (\mathbb{Z}+\gamma)\boldsymbol{e_\ell} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，都有 $B(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}) \ge \delta$。

证明。(1) 根据命题 3.6，我们有 $\sin(\varphi_{N-1} - \varphi_\ell) = 0$，因此由 (2.7) 得 $\varphi_{N-1} - \varphi_\ell = \pi$、$0 < \varphi_\ell < \pi < \varphi_{N-1} < \varphi_N = 2\pi$。利用 (2.5) 进行显式计算，可得所需结论。(2) 在包含 $\boldsymbol{f} = f_\ell \boldsymbol{e_\ell}$ 的区域 $\Delta \setminus \{\boldsymbol{0}\} \subseteq \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N-2}$ 的连通分支中，即对于 $1 \le k \le N$ 满足 $\lambda_k \ge 0$ 的分支，我们有

$$B(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}) = \sin(\theta_N) \left(\rho_\ell w_\ell \sum_{j \le \ell} v_j \lambda_j + \rho_\ell v_\ell \sum_{\ell < j \le N-2} w_j \lambda_j \right) = \sin(\theta_N) \cdot \rho_\ell \cdot v_\ell \cdot \sum_{\ell < j \le N-2} w_j \lambda_j.$$

由于 $\rho_\ell > 0$，我们得到 $B(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}) \ge 0$，且仅当对于 $\ell < j \le N-2$ 有 $\lambda_j = 0$ 时取等号。在对于 $\ell < j \le N-2$ 有 $\lambda_j = 0$ 的情形下，回顾 $1 \le k \le N$ 有 $\lambda_k \ge 0$，特别地有

$$\lambda_N = \sum_{1 \le j < \ell} w_j \lambda_j + w_\ell \lambda_\ell + \sum_{\ell+1 \le j \le N-2} w_j \lambda_j = \sum_{1 \le j < \ell} w_j \lambda_j \ge 0.$$

结合 (1)，得到 $\lambda_j = 0\ (1 \le j \le \ell - 1)$，从而得到 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\boldsymbol{f}$。因此，我们可以假设至少有一个 λ_j（$\ell < j \le N-2$）非零。令 $\kappa := \min \bigcup_j (\mathbb{Z} + \alpha_j) \setminus \{0\}$，则有 $\min\{\lambda_j \neq 0 : \ell < j \le N-2\} \ge \kappa$。由于 $0 < \rho_\ell \in \mathbb{Z} + \gamma$ 蕴含 $\min(\rho_\ell) > 0$，我们得到

$$B(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}) \ge \sin(\theta_N) \cdot \min(\rho_\ell) \cdot v_\ell \cdot \min_{j > \ell} w_j \cdot \kappa =: \delta > 0. \qquad \square$$

利用引理 3.11 和 3.12，我们现在给出 $\Delta \cap (\mathbb{Z}^{N-2} + \overline{\boldsymbol{\alpha}})$ 的一个切片。令 $B_\varepsilon(\boldsymbol{f}) := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{N-2} : \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}\| < \varepsilon\}$，并设 $\mathbb{R}X := \{t\boldsymbol{a} : t \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in X\}$。

引理 3.13。假设满足引理 *3.11* 中的条件并采用其中的记号。此外，假设 (2.15)。那么，存在充分小的 ε、$\delta > 0$ 以及一个向量 $\boldsymbol{\eta}$，满足 $Q(\boldsymbol{\eta}) \neq 0$，使得任何位于与 $\boldsymbol{f}$ 相同连通分支中的 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}(B_\varepsilon(\boldsymbol{f}) \cap \Delta) \cap (\mathbb{Z}^{N-2} + \overline{\boldsymbol{\alpha}})$ 都具有唯一分解

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{L}_1 \oplus \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{R}\boldsymbol{f} \oplus \boldsymbol{\eta}^\perp. \tag{3.8}$$

此处 $\mathbb{L}_1$,$\mathbb{L}_2$ 分别是 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}^{N-3}$ 的某些仿射变换的集合。此外 r

$$B(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\mu}) \geq \delta\,, \quad Q(\boldsymbol{\mu}) > 0 \quad \textit{for } \boldsymbol{\lambda} \notin (\mathbb{Z}+\alpha_\ell)\boldsymbol{e_\ell} \cup \{\mathbf{0}\}. \tag{3.9}$$

证明。令 $\boldsymbol{\eta} := a\boldsymbol{c_\ell} - \boldsymbol{f}$，其中 $a>0$ 充分小，使得

$$Q(\boldsymbol{\eta}) = a^2 Q(\boldsymbol{c_\ell}) - aB(\boldsymbol{f},\boldsymbol{c_\ell}) \neq 0$$

并且（回顾一下，如引理 3.12 所示，当 $\ell < j \leq N-2$ 时，$v_\ell > 0, w_j > 0$）

$$av_j + f_\ell \sin(\theta_N) v_\ell^2 w_j > 0 \qquad \text{for } \ell < j \leq N-2. \tag{3.10}$$

由 (3.5) 还可得

$$B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\eta}) = aB(\boldsymbol{f},\boldsymbol{c_\ell}) = af_\ell > 0. \tag{3.11}$$

取引理 3.11 (3) 中给出的任意 E_ℓ^-。由于 $\boldsymbol{c_1},\dots,\boldsymbol{c_{N-2}}$ 线性无关，因此有 $\boldsymbol{c_\ell} \notin E_\ell = \mathbb{R}\boldsymbol{f} \oplus E_\ell^-$，从而

$$V = \mathbb{R}\boldsymbol{f} \oplus E_\ell^- \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{c_\ell} = \mathbb{R}\boldsymbol{f} \oplus E_\ell^- \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{\eta}.$$

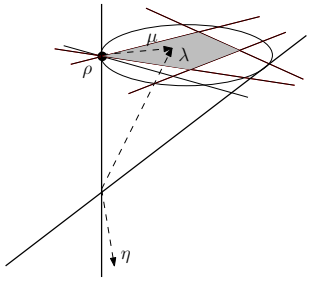

FIGURE 4. 使用 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\eta}^\perp$进行切片 $\mathbb{R}^{N-2}$。

根据条件 $Q(\boldsymbol{\eta}) \neq 0$，映射 $\boldsymbol{x} \mapsto B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})$ 是非退化的，因此 $\boldsymbol{\eta}^\perp$ 的维数为 $N-3$。由于 $B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\eta}) \neq 0$，我们有 $\mathbb{R}\boldsymbol{f} \cap \boldsymbol{\eta}^\perp = \{\mathbf{0}\}$，因此得到一个向量空间分解

$$V = \mathbb{R}\boldsymbol{f} \oplus \boldsymbol{\eta}^\perp. \tag{3.12}$$

特别地，任意 $\boldsymbol{\lambda} \in V$ 都存在唯一分解 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu}$，其中 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\eta}^\perp$，正如 (3.8) 所要求的。具体而言，连通分支 $\boldsymbol{\mu}$ 由下式给出（示意见图 4）

$$\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\lambda} - \frac{B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})}{B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\eta})}\boldsymbol{f}. \tag{3.13}$$

接下来证明存在充分小的 $\varepsilon > 0$，使得对于任意与 $\boldsymbol{f}$属于同一连通分支的 $\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$ $\overline{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}(B_\varepsilon(\boldsymbol{f}) \cap \Delta)$，所得分解 (3.8) 满足 (3.9)。首先，由 (3.13) 可知，由 $\boldsymbol{\lambda} \in \underline{\Delta} \cap (\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$产生的连通分支集合 $\boldsymbol{\rho}$和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别是格 $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^{N-3}$的仿射变换 $\mathbb{L}_1$，$\mathbb{L}_2$。更确切地说，我们有

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \left(\lambda_\ell - a^{-1}\sin(\theta_N) f_\ell v_\ell \sum_{\ell+1 \leq j \leq N-2} w_j \lambda_j \right) \boldsymbol{e_\ell} : \boldsymbol{\lambda} \in \overline{\Delta} \cap \left(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}\right) \right\}, \tag{3.14}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\ell}}^{N-2} \lambda_j \boldsymbol{e_j} + \left(a^{-1}\sin(\theta_N) f_\ell v_\ell \sum_{\ell+1 \leq j \leq N-2} w_j \lambda_j \right) \boldsymbol{e_\ell} : \boldsymbol{\lambda} \in \overline{\Delta} \cap \left(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}\right) \right\}.$$

在假设 (2.15) 下，由于我们的选择，该假设蕴含 (2.16)，因此可以适当选取 a，使得 $\mathbb{L}_1$和 $\mathbb{L}_2$ 确实是格 $\mathbb{Z}$和 $\mathbb{Z}^{N-3}$的某些仿射变换。此外，由 (3.11) 中的 $B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\eta}) > 0$ 以及 B的连续性，存在充分小的 $\varepsilon > 0$，使得对于任意 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$，$B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) > 0$。由 $B(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) = B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) > 0$可知，$\boldsymbol{\rho}$与 $\boldsymbol{f}$ 属于同一连通分支。对 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{L}_1$应用引理 3.12 (2) 的推理，可得存在 $\delta > 0$，使得对于满足额外条件 $\boldsymbol{\lambda} \notin (\mathbb{Z} + \alpha_\ell)\boldsymbol{e_\ell}$的非零 $\boldsymbol{\lambda}$，$B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\rho}) \geq \delta$。因此我们有

$$B(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\mu}) = B(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\rho}) = B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\rho}) \geq \delta\,,$$

对于满足 $\boldsymbol{\lambda} \notin (\mathbb{Z} + \overline{\alpha}_\ell)\boldsymbol{e_\ell} \cup \{\boldsymbol{0}\}$ 的 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}(B_\varepsilon(\boldsymbol{f}) \cap \Delta) \cap (\mathbb{Z}^{N-2} + \boldsymbol{\alpha})$。

最后，我们证明所得连通分支 $\boldsymbol{\mu}$ 满足 $Q(\boldsymbol{\mu}) > 0$。由于 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta$，我们有 $\overline{B}(\boldsymbol{c_k}, \boldsymbol{\lambda}) \geq 0$ 对于 $1 \leq k \leq N$。回顾 $B(\boldsymbol{c_j}, \boldsymbol{f}) = 0$ 对于 $\boldsymbol{c_j} \in \mathcal{E}_\ell$，因此我们有

$$B(\boldsymbol{c_j},\boldsymbol{\mu}) = B(\boldsymbol{c_j},\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\mu}) = B(\boldsymbol{c_j},\boldsymbol{\lambda}) \geq 0 \quad \text{for } \boldsymbol{c_j} \in \mathcal{E}_\ell. \tag{3.15}$$

代入 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$的定义，我们得到，我们对 $\boldsymbol{\eta}$ 的选择确保了（注意，根据构造，$B(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta}) = 0$）

$$B(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{c_\ell}) = a^{-1}B(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{f}) = a^{-1}B(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{f}) = a^{-1}B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{f}) \geq 0 \tag{3.16}$$

对于 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}(B_\varepsilon(\boldsymbol{f}) \cap \Delta) \cap (\mathbb{Z}^{N-2} + \boldsymbol{\alpha})$，并且根据引理 3.12 (2)，当 $\boldsymbol{\lambda} \notin \mathbb{R}\boldsymbol{f} = \mathbb{R}\boldsymbol{e_\ell}$ 时，不等式是严格的。此外，利用 (3.5)、(2.6)、(3.10) 和引理 3.12，我们得到

$$aB(\boldsymbol{f},\boldsymbol{c_\ell})B(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{c_{N-1}}) = a\sum_{1\leq j\leq \ell-1} v_j\lambda_j + \sum_{\ell+1\leq j\leq N-2} \left(av_j + f_\ell \sin(\theta_N) v_\ell^2 w_j\right)\lambda_j \geq 0\,,$$

其中，如果 $\boldsymbol{\lambda} \notin \mathbb{R}\boldsymbol{f} = \mathbb{R}\boldsymbol{e_\ell}$，则不等式仍为严格不等式。注意，由 (3.11) 可得 $B(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{c_\ell}) > 0$。结合 (3.15) 和 (3.16)，可知 $\boldsymbol{\mu} \in \Delta \subseteq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N-2} : \overline{Q}(\boldsymbol{x}) \geq 0\}$，因此 $Q(\boldsymbol{\mu}) \geq 0$。如果 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\boldsymbol{f}$，那么根据 (3.12) 中的直和结构，$\boldsymbol{\mu} = 0$。如果 $\boldsymbol{\lambda} \notin \mathbb{R}\boldsymbol{f}$，那么 $Q(\boldsymbol{\mu}) > 0$，否则就有 $Q(\boldsymbol{\mu}) = 0$；由命题 3.6 可得 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}\boldsymbol{f}$，因而由 (3.12) 得到 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\boldsymbol{f}$，这与$\boldsymbol{\lambda} \notin \mathbb{R}\boldsymbol{f}$矛盾。因此，如果 $\boldsymbol{\lambda} \notin (\mathbb{Z} + \alpha_\ell)\boldsymbol{e_\ell} \cup \{\boldsymbol{0}\}$，则 $Q(\boldsymbol{\mu}) > 0$，这正是所需结论，证明完毕。□

根据注 2.11 中关于有理性的讨论可知，采用不同的独立参数选择时，引理 3.11 和 3.12 中的结论以及式 (3.14) 中的格结构仍然成立；引理 3.12 (2) 中 $\boldsymbol{\lambda}$ 的区域则变为其中所述子格的一个仿射变换。为每条各向同性射线选取一个 a，便可得到引理 3.13 中的分解对每条各向同性射线都存在。下文将用到这一事实，但不再明确说明。接下来我们证明 Θ_Q 的收敛性，χ。

定理 3.14. 假设 (2.7)、$N \geq 5$ 和 (2.15) 成立。则 Θ_Q 在紧集上一致收敛，χ，即在紧集上一致收敛。

证明. 我们只需考虑求和范围的两个连通分支之一，例如包含 $\lambda_k \geq 0$ 的那个。由推论 2.5，$Q(\boldsymbol{\lambda}) \geq 0$，其中 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta$ 包含式 (3.1) 中的求和范围。先考虑 $D_0 \cap \Delta = \{\boldsymbol{0}\}$ 的情形。令 $S := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N-2} : ||\boldsymbol{\lambda}|| = 1\}$ 为单位球面。则 $Q(\boldsymbol{\lambda}) \geq 0$ 对于 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta \cap S$ 成立，因此取到其最小值 $m > 0$。由于对任意 $\boldsymbol{\lambda} \in \Delta \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，都有以下关系，故紧集上一致收敛。

$$Q(\boldsymbol{\lambda}) = ||\boldsymbol{\lambda}||^2 Q\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{||\boldsymbol{\lambda}||}\right) \geq ||\boldsymbol{\lambda}||^2 m > 0\,, \qquad \left|q^{Q(\boldsymbol{\lambda})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta})}\right| \leq e^{-2\pi||\boldsymbol{\lambda}||^2 my}.$$

接下来假设 $D_0 \cap (\Delta \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \neq \emptyset$。由命题 3.6，只有有限条射线包含在$D_0 \cap (\Delta \setminus \{\boldsymbol{0}\})$中，它们由 $D_0 \cap (F_I \setminus \{\boldsymbol{0}\})$ $|I| = N-2$ 给出。如有必要，对顶点重新编号后，

任意这样的射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$都可以描述为 $\lambda_k = 0,\quad k \in \{1,2,\dots,N\}\setminus\{\ell, N-1\}$，其中 $1 \le \ell \le N-3$。和之前一样，我们取 $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_{N-2}$作为 Δ 的独立参数。应用引理 3.13 可得

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}(B_\varepsilon(\boldsymbol{f})\cap\Delta)\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})} \left| q^{Q(\boldsymbol{\lambda})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\lambda})} \right| \le \sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{L}_2} \left| q^{Q(\boldsymbol{\mu})} \right| \sum_{\boldsymbol{\rho}\in\mathbb{L}_1} \left| e^{2\pi i B(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\rho})\tau} \right|.$$

我们只需考虑 $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$。由引理 3.13，$\rho_\ell > 0$，因为 $\lambda_k \ge 0$ 且 $B(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\rho}) \ge \delta > 0$ $\boldsymbol{\lambda} \notin \mathbb{R}\boldsymbol{f}$（注意 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap\Delta = \{\boldsymbol{0}\}$）。将 (3.14) 中的 $\mathbb{L}_1$ 写成 $(a_2\mathbb{N}+a_1)\boldsymbol{e_\ell}$，其中某个 $a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}^+$，则内层求和由几何级数 $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi a_2 \delta k v}$ 控制，因此紧致收敛。外层求和绝对收敛，因为 $Q(\boldsymbol{\mu}) > 0$。我们使用直和分解

$$\Delta = \bigcup_{\boldsymbol{f}} (\mathbb{R}(B_\varepsilon(\boldsymbol{f})\cap\Delta)) \cup \left(\Delta \Big\backslash \bigcup_{\boldsymbol{f}} (\mathbb{R}(B_\varepsilon(\boldsymbol{f})\cap\Delta)) \right)$$

并将其与 $\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}$ 相交。对于前者的求和，我们对每条各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$ 应用上述推理；对于后者的求和，我们应用 $D_0 \cap \Delta = \{\boldsymbol{0}\}$ 情形下的紧性论证。由此定理得证。□

我们还考虑以下密切相关的级数

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}\left(B_\varepsilon(\boldsymbol{f})\cap\overline{\Delta}\right)\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})} q^{Q(\boldsymbol{\lambda})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta})} = q^{Q(\boldsymbol{\alpha})} q^{2\pi i B(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}\left(B_\varepsilon(\boldsymbol{f})\cap\overline{\Delta}\right)\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})} q^{Q(\boldsymbol{n})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})}. \quad (3.17)$$

在继续之前，我们更仔细地研究 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$。为了考察整性，我们不能再直接应用循环对称性，因为在循环置换下，范围 $\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}$会因一组新的连续 $N-2$ 参数而改变；见注 2.11。我们始终使用一组固定的独立参数 $\{\lambda_k\}_{1\le k\le N}$。我们需要以下结果。

引理 3.15. 设记号和假设与定理 *3.14* 中相同。那么 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}) \neq \emptyset$当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}\boldsymbol{f}$。在此情形下，$\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$ 是 $\mathbb{Z}^{N-2}$ 的平移的秩一子格。

证明。根据命题 3.6，各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$ 由 $\lambda_k = 0, k \in \{1,\dots,N\}\setminus\{a,b\}$ 给出，其中$a<b$ 满足 $b \neq a+1$。为了使[2] $\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}) \neq \emptyset$，对 $\alpha_k\,(1\le k\le N)$ 的第一个条件是

$$\alpha_k \in \mathbb{Z}, \qquad k \in \{1,\dots,N\}\setminus\{a,b\}. \quad (3.18)$$

这里我们回顾一下：正如第 2.3 小节所述，在计数函数的定义中，方程 (2.17) 的一个解 $\{\varepsilon_k\}_{1\le k\le N}$ 从一开始就已固定。若 $b \in \{N-1, N\}$，则我们得到

$$\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap\left(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}\right) = \mathbb{R}\boldsymbol{e_a}\cap\left(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}\right) = (\mathbb{Z}+\alpha_a)\varepsilon_a\boldsymbol{e_a}\,,$$

且 (3.18) 变为

$$\alpha_k \in \mathbb{Z}, \qquad k \in \{1,\dots,N-2\}\setminus\{a\}, \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{N-2} \frac{v_j\varepsilon_j}{\varepsilon_{N-1}}\alpha_j \in \mathbb{Z} & \text{if } b = N, \\ \sum_{j=1}^{N-2} \frac{w_j\varepsilon_j}{\varepsilon_N}\alpha_j \in \mathbb{Z} & \text{if } b = N-1. \end{cases}$$

若 $1 \le a < b \le N-2$，那么集合 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$ 由满足 $\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组成 g

$$\boldsymbol{v} = \lambda_a\boldsymbol{e_a} + \lambda_b\boldsymbol{e_b}\,, \quad \begin{pmatrix} v_a & v_b \\ w_a & v_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \end{pmatrix} = 0.$$

[2]回顾一下，这里的 $\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}$ 表示 $S(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$，其中 S 如引理 2.10 所给出。

条件 (2.17) 意味着 $v_a=0$、 $v_b=0$、 $v_a\varepsilon_a=v_b\varepsilon_b$ 或 $v_a\varepsilon_a=-v_b\varepsilon_b$。根据线性代数的基本知识，当且仅当 $\alpha_b\in\mathbb{Z}$、 $\alpha_a\in\mathbb{Z}$、 $\alpha_a+\alpha_b\in\mathbb{Z}$、 $\alpha_a-\alpha_b\in\mathbb{Z}$ 时， $\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$ 非空。于是条件 (3.18) 变为

$$\alpha_k\in\mathbb{Z}\,,\ k\in\{1,\dots,N-2\}\setminus\{a,b\}\,,\quad \sum_{j=1}^{N-2}\frac{v_j\varepsilon_j}{\varepsilon_{N-1}}\alpha_j\in\mathbb{Z}\,,\ \sum_{j=1}^{N-2}\frac{w_j\varepsilon_j}{\varepsilon_N}\alpha_j\in\mathbb{Z}.$$

在上述任一情形下，集合 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$ 由 $\mathbb{Z}^{N-2}$ 中包含 $\boldsymbol{\alpha}$ 本身的一个秩一子格经仿射变换所得。□

我们有如下关于亚纯性的结果。

推论 3.16. 在定理 *3.14* 的记号和假设下，该级数

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}\left(B_\varepsilon(\boldsymbol{f})\cap\overline{\Delta}\right)\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})} q^{Q(\boldsymbol{n})}e^{2\pi iB(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})}$$

处处全纯，除了沿着 $P_{\boldsymbol{f}}=\{\boldsymbol{z}:\ \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}\boldsymbol{f},B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\beta})=0\}$ 的部分，在这些位置它是亚纯的，并有一个简单极点。

证明. (3.17) 中的级数等于

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}(B_\varepsilon(\boldsymbol{f})\cap\Delta)\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})} q^{Q(\boldsymbol{\lambda})}e^{2\pi iB(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\lambda})}+\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap\overline{\Delta}\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})} q^{Q(\boldsymbol{\lambda})}e^{2\pi iB(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\lambda})}.$$

由定理 3.14，第一个加项在紧集上一致收敛。如果 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}\cap\Delta\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$ 非空，那么根据引理 3.15，它是一个平移的秩一格，且 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}\boldsymbol{f}$。与前面一样，我们将各向同性射线 $\mathbb{R}_0^+\boldsymbol{f}\cap\Delta\cap(\mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha})$ 参数化为 $(a_2\mathbb{N}+a_1)\boldsymbol{f}$，其中 $a_1\in\mathbb{R},a_2\in\mathbb{R}^+$。那么第二个加项等于 $\sum_{n\geq0}e^{2\pi iB(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\beta})(na_2+a_1)}$。对于满足 $B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\beta})\neq0$ 的那些 $\boldsymbol{\beta}$，该级数条件收敛，结果为 $\frac{e^{2\pi ia_1B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\beta})}}{1-e^{2\pi ia_2B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\beta})}}$。对各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$ 的另一半也可进行相同分析。因此，若存在一条各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}\boldsymbol{f},\,B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\beta})=0.$，则原级数在 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\alpha}\tau+\boldsymbol{\beta}$ 处是亚纯的，并有一个简单极点。证明完毕。□

函数 $\Theta_{Q,\ \chi}$ 具有以下椭圆性质。

推论 3.17. 记号和假设与定理 *3.14* 中的相同。则

$$\Theta_{Q,\chi}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{a}\tau+\boldsymbol{b};\tau)=q^{-Q(\boldsymbol{a})}e^{-2\pi iB(\boldsymbol{a},\boldsymbol{z})}\Theta_{Q,\chi}(\boldsymbol{z};\tau)\,,\qquad\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^{N-2}.$$

3.4. **的面Δ 及多边形的退化**。由引理 3.9 可知，对任意 $k\in K_*$，在面 F_K 上有 $\lambda_k=0$，其中 K_* 是包含 K 且满足 $F_K=F_{K_*}$、$\dim(V_K)=\dim(F_{K_*})$ 的极大集合。于是每个面 F_K 都可唯一地表示为一个指标集 $K_*\subseteq\{1,\dots,N\}$。用 $\mathcal{F}(\Delta)$ 表示 Δ 的面集，用 $\mathcal{F}_0(\Delta)$ 表示由各向同性射线构成的面集。滥用记号，当 $F_{K_*}\in\mathcal{F}(\Delta)$ 时，我们也使用记号 $K_*\in\mathcal{F}(\Delta)$。

引理 3.18. 对于 $K_*\in\mathcal{F}(\Delta)\setminus\mathcal{F}_0(\Delta),$ $Q|_{V_{K_*}}$ 是符号差为 $(1,N-3-|K_*|)$ 的非退化对象。

证明。假设 $Q|_{V_{K_*}}$ 是退化的，即存在 $\boldsymbol{h}\in V_{K_*}$ 使得 $V_{K_*}\subseteq\boldsymbol{h}^\perp$，特别地， $\boldsymbol{h}\in D_0$。由于 (V,Q) 的符号差为 $(1,\ N-3)$，其最大的退化子空间是一维的（参见命题 3.6 的证明开头），因此 $V_{K_*}\cap D_0=\mathbb{R}\boldsymbol{h}$。若 $\dim(V_{K_*}\cap\Delta)\geq1$，则通过考察 Δ的截面， $V_{K_*}\cap D_0$ 不可能是一条直线。因此 $\dim(V_{K_*}\cap\Delta)\leq0$。若 $\dim(V_{K_*}\cap\Delta)=0$，则 V_{K_*}是包含于 Δ 中的一维面，因为根据 K_* 的极大性，V_{K_*} 是 Δ 的支撑子空间。特别地， $Q|_{V_{K_*}}$ 是正定的。这与 $Q|_{V_{K_*}}$的退化性矛盾。因此 $V_{K_*}\cap\Delta=\emptyset$且 $F_{K_*}=V_{K_*}\cap\Delta=V_{K_*}\cap D_0=\mathbb{R}\boldsymbol{h}$ 是各向同性射线。这与假设 $F_{K_*}\in\mathcal{F}(\Delta)\setminus\mathcal{F}_0(\Delta)$ 矛盾。因此 $Q|_{V_{K_*}}$

是非退化的。由于 Q 的符号差为 $(1,\ N-3)$ 且 $\emptyset \neq F_{K_*} \cap D_+ \subseteq V_{K_*} \cap D_+$，$Q|_{V_{K_*}}$ 的符号差为 $(1, \dim(V_{K_*})-1)$，其中 $\dim(V_{K_*}) = N-2-|K_*|$，由引理 3.9 得。□

限制到 $V_{\{k\}} := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N-2} :\ \lambda_k = 0\}$ 会保留区域的整格结构，以及引理 3.15 中各向同性射线的整格结构。将上述级数视为原级数的子级数，命题 3.6、定理 3.14、引理 3.15 和推论 3.16 便自动成立。也可以利用 $Q|_{F_{K_*}}$ 的几何解释得到这些结果，其扩展给出 $Q|_{V_{K_*}}$。通过迭代，只需考虑位于超平面 $V_{\{k\}}$上的 Δ 中的点。若 $\theta_k + \theta_{k+1} = \pi$，则 $V_{\{k\}} \cap \Delta$ 是一条各向同性射线，表示那些退化后成为直线的退化多边形。若 $\theta_k + \theta_{k+1} > \pi$，则利用 λ_j、$j \in \{1,\dots,N\} \setminus \{k, k+1\}$ 作为独立参数，并根据（2.5）计算 λ_k，可得 $V_{\{k\}} \cap \Delta = \{\mathbf{0}\}$。若 $\theta_k + \theta_{k+1} < \pi$，则这些点表示原凸 N 边形的退化情形，且仍保持凸性，如引理 3.2 中所述。所得有向面积的符号差可由引理 3.2 根据新的角得出。相应的条件（2.15）成立，而（2.16）或（2.17）的解会自动下降。

考虑计数函数在各面上的限制。用 $\delta_X(x)$ 表示集合 X 的特征函数。定义，对于 $\boldsymbol{z} \notin \bigcup_{\boldsymbol{f}} P_{\boldsymbol{f}}$

$$\Theta_{Q,\delta_{\overline{\Delta}}}(\boldsymbol{z};\tau) := q^{-Q(\boldsymbol{\alpha})} e^{-2\pi i B(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}} \delta_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{\lambda}) q^{Q(\boldsymbol{\lambda})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta})} = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{N-2}} \delta_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\alpha}) q^{Q(\boldsymbol{n})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})}.$$

令 $\boldsymbol{\lambda}|_{\underline{V_{K_*}}}$ 为 $\boldsymbol{\lambda}$ 在 V_{K_*}上的限制。将上述求和限制在面$F_{K_*} = \Delta \cap V_{K_*}$ 上，可得 $\Theta_{Q,\ \delta_{\Delta \cap V_{K_*}}}$ 等于

$$q^{-Q(\boldsymbol{\alpha})} e^{-2\pi i B(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}^{N-2}+\boldsymbol{\alpha}} \delta_{F_{K_*}}(\boldsymbol{\lambda}) q^{Q|_{V_{K_*}}\left(\boldsymbol{\lambda}|_{V_{K_*}}\right)} e^{2\pi i B|_{V_{K_*}}\left(\boldsymbol{\lambda}|_{V_{K_*}},\boldsymbol{\beta}|_{V_{K_*}}\right)} e^{2\pi i B\left(\boldsymbol{\lambda}|_{V_{K_*}},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}|_{V_{K_*}}\right)}.$$

例如，考虑 $K_* = \{k\}$，其中某个 $1 \le k \le N-2$ 满足 $\theta_k + \theta_{k+1} < \pi$。上述求和中$\delta_{F_{K_*}}(\boldsymbol{\lambda})$ 不为零，要求 $\alpha_k \in \mathbb{Z}$。进一步假设 $\boldsymbol{\beta}$满足 $B(\boldsymbol{\lambda}|_{V_{K_*}},\ \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}|_{V_{K_*}}) = 0$，例如，可以通过要求 $\beta_k = 0$ 来实现，而这又意味着 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}|_{V_{K_*}}$。那么，上述级数恰好是对应的退化多边形的生成函数，其角为 $\{\theta_1,\dots,\theta_{k-1},\theta_k+\theta_{k+1},\theta_{k+2},\dots,\theta_N\}$，有向面积由引理 3.2 中的 (3.4) 给出。

4. Tools for indefinite theta functions

4.1. 广义误差函数。我们沿用 [9], 中的设定，但将二次型 Q 的符号差反转（从 (r,s) 变为 (s,r)），且 Q 与 B之间的关系相差一个因子 2。设 B 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的符号差为 (r,s) 的对称不定双线性形式，且其对应的二次型 $Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{Z}^n$上取整数值。双线性形式表示为$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}$，其中矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$对称且不定。对于张成负定 s维子空间 $\langle C\rangle := \langle \boldsymbol{c_1},\dots,\boldsymbol{c_s}\rangle$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$的 $C = (\boldsymbol{c_1},\dots,\boldsymbol{c_s})$，我们定义广义误差函数

$$E_{Q,C}(\boldsymbol{x}) := \int_{\langle C\rangle} \operatorname{sgn}(B(C,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})) e^{2\pi Q(\boldsymbol{y})} \boldsymbol{dy} \tag{4.1}$$

（在 [1]中引入），其中 $B(C,\boldsymbol{y}) := C^T A \boldsymbol{y}$，$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{x}) := \prod_{j=1}^s \operatorname{sgn}(x_j)$，并且测度 $\boldsymbol{dy}$ 归一化为满足 $\int_{\langle C\rangle} e^{2\pi Q(\boldsymbol{y})}\boldsymbol{dy} = 1$。注意，$E_{Q,C}$ 仅取决于 $\boldsymbol{x}$ 在 $\langle C\rangle$ 上的投影。我们记 $E_{Q,\emptyset}(\boldsymbol{x}) := 1$，其中 $\emptyset$ 是 0×0矩阵。对于任意矩阵 $C = (\boldsymbol{c_1},\dots,\boldsymbol{c_s})$，令 $C_S := (\boldsymbol{c_{k_1}},\boldsymbol{c_{k_2}},\dots,\boldsymbol{c_{k_{|S|}}})$ 为由指标属于 $S = \{k_1,k_2,\dots,k_{|S|}\} \subseteq \{1,\dots,s\}$（其中 $k_1 < k_2 < \cdots < k_{|S|}$）的列组成的矩阵，并令 $C_\emptyset := \emptyset$ 为 0×0矩阵。对于 $S \subseteq \{1,\dots,s\}$，我们将 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{c_j} \in \mathbb{R}^n$ 关于 B 的正交分解定义为 $\langle C_S\rangle \oplus \langle C_S\rangle^\perp$ 中的

$\boldsymbol{x} =: \boldsymbol{x_S} + \boldsymbol{x_S^\perp}$ 和 $\boldsymbol{c_j} =: \boldsymbol{c_{j,\ S}} + \boldsymbol{c_{j\perp S}}$。此外，对于 $S = \{k_1, k_2, \ldots, k_{|S|}\}$ 和 $T \subseteq \{1, \ldots, s\}$（其中 $k_1 < k_2 < \cdots < k_{|S|}$），令 $C_{S\perp T} := (\boldsymbol{c_{k_1\perp T}},\ \boldsymbol{c_{k_2\perp T}},$ 等等，$\boldsymbol{c_{k_{|S|}\perp T}})$。对于以下定义，假设 $\langle C\rangle$ 是维数为 s 的负定矩阵，并令 $D = (\boldsymbol{d_1},$ 等等，$\boldsymbol{d_s}) \in \mathbb{R}^{n\times s}$，使其列构成二次空间 $(\langle C\rangle, Q|_{\langle C\rangle})$ 中 C 的对偶基。对于满足 $\prod_{j=1}^s B(D_j,\ \boldsymbol{x})$ 的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{r+s}$，定义 $\neq 0$ 的互补广义误差函数如下（$M_{Q,\ C}$ 在 [9, 命题 (3.14)(e)] 中的这个表达式，其行列式的幂次有误）

$$M_{Q,C}(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{i}{\pi}\right)^s \det\left(C^T A C\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\langle C\rangle - i\boldsymbol{x_C}} \frac{e^{2\pi Q(\boldsymbol{w}) + 2\pi i B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})}}{\prod_{j=1}^s B(D_j, \boldsymbol{w})} \boldsymbol{dw}.$$

取 C 中的向量作为 $\langle C\rangle$的基，任意 $\boldsymbol{y} \in \langle C\rangle$ 均可唯一地写成 $\boldsymbol{y} = \sum_{1\le j\le s} t_j \boldsymbol{c_j}$。因此，得到

$$M_{Q,C}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{i}{\pi}\right)^s \int_{\langle C\rangle - i\boldsymbol{x_C}} \frac{e^{2\pi Q(\boldsymbol{y}) + 2\pi i B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\prod_{j=1}^s t_j} \prod_{j=1}^s dt_j\,,$$

当 $\boldsymbol{x_C} = \sum_{j=1}^s b_j \boldsymbol{c_j}$ 满足 $b_j \neq 0$ 且 $1 \le j \le s$时，其有定义。

4.2. **维涅′拉斯微分方程**。在 [15],，维涅′拉斯证明，通过检验一个微分方程，可以得到不定 theta 函数的模性。[3]

定理 4.1 (维涅′拉斯**)**。假设 p： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

(i)对于一个阶数为2 的微分算子 D 和一个次数至多为2的多项式 R，$\boldsymbol{w} \mapsto p(\boldsymbol{w})e^{-\pi Q(\boldsymbol{w})}$ 和 $\boldsymbol{w} \mapsto R(\boldsymbol{w})p(\boldsymbol{w})e^{-\pi Q(\boldsymbol{w})}$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$。

(ii) 写出欧拉算子和拉普拉斯算子（$\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n)^T$，$\boldsymbol{\partial_x} := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n})^T$）$\mathcal{E} := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\partial_x}$和 $\Delta_{A^{-1}} := \boldsymbol{\partial_x}^T A^{-1} \boldsymbol{\partial_x}$。对于某个 $\lambda \in \mathbb{Z}$，*Vign′eras* 微分方程成立：

$$\left(\mathcal{E} - \frac{1}{2\pi}\Delta_{A^{-1}}\right) p = \lambda p.$$

此外，如果

$$\Theta_{Q,p}(\boldsymbol{z};\tau) := \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n} p\left(\boldsymbol{m} + \frac{\boldsymbol{y}}{v}\right) q^{Q(\boldsymbol{m})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{m},\boldsymbol{z})}$$

在局部绝对收敛，那么它按权为 $\lambda + \frac{n}{2}$、指标为 A的 *Jacobi* 形式变换：(1) 对于 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^n$，我们有

$$\Theta_{Q,p}\left(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{\ell};\tau\right) = q^{-Q(\boldsymbol{m})} e^{-2\pi i B(\boldsymbol{m},\boldsymbol{z})} \Theta_{Q,p}(\boldsymbol{z};\tau).$$

(2) 对于属于$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的某个适当有限指标子群的 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$，我们有

$$\Theta_{Q,p}\left(\frac{\boldsymbol{z}}{c\tau+d}; \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (-i(c\tau+d))^{\lambda+\frac{n}{2}} e^{\frac{2\pi i Q(\boldsymbol{z})}{c\tau+d}} \Theta_{Q,p}(\boldsymbol{z};\tau).$$

我们使用文献 [9]中给出的广义误差函数的以下性质。

引理 4.2。

(1) 如果所有出现的 $M_{Q,\ C_S}$ 都已定义，则有

$$E_{Q,C}(\boldsymbol{x}) = \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,s\}} M_{Q,C_S}(\boldsymbol{x}) \operatorname{sgn}\left(B\left(C_{\{1,\ldots,s\}\setminus S\perp S}, \boldsymbol{x}\right)\right), \qquad |M_{Q,C}(\boldsymbol{x})| < s! e^{2\pi Q(\boldsymbol{x_C})}.$$

[3]正是这个微分方程对模性至关重要。

(2) 我们有

$$\lim_{t\to\infty} E_{Q,C}(t\boldsymbol{x}) = \sum_{S\subseteq\{1,\dots,s\}} E_{Q,C_S}(\mathbf{0})\delta_{B(C_S,\boldsymbol{x})=\mathbf{0}} \operatorname{sgn}\left(B\left(C_{\{1,\dots,m\}\setminus S},\boldsymbol{x}\right)\right).$$

特别地，如果 $B(C,\boldsymbol{x})$ 的所有分量都非零，那么

$$\lim_{t\to\infty} E_{Q,C}(t\boldsymbol{x}) = \operatorname{sgn}(B(C,\boldsymbol{x})).$$

如果 $C=(C_1,C_2)$ 满足 $C_1^T A C_2 = 0$，那么我们可以因式分解

$$E_{Q,C}(\boldsymbol{x}) = E_{Q,C_1}(\boldsymbol{x}) E_{Q,C_2}(\boldsymbol{x}).$$

(3)广义误差函数 $E_{Q,\ C}$ 是一个 $\mathcal{C}^\infty$-函数，并且关于 Q 满足 *Vign´eras* 微分方程，其中 $\lambda = 0$。此外，$M_{Q,\ C}$ 在其定义域内是一个 $\mathcal{C}^\infty$-函数。

4.3. **变形二次型的广义误差函数**。对于一组向量 $C=(\boldsymbol{c_1},\ \dots\dots,\ \boldsymbol{c_k})$，我们将由它们的法超平面确定的锥定义为

$$R(C) := \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{r+s} : B(\boldsymbol{c_j},\boldsymbol{x})\geq 0 \text{ for } 1\leq j\leq k \text{ or } B(\boldsymbol{c_j},\boldsymbol{x})\leq 0 \text{ for } 1\leq j\leq k\right\}.$$

此后我们假设 C 中的法向量都是有理的。我们列出一些通过对角化容易得到的二次空间的基本性质，以推广引理 3.11。

引理 *4.3*。设 (V,Q) 是一个符号差为 (r_+,r_-,r_0) 的二次空间。那么以下结论成立：*(1)* 假设 $r_0=0$。任一子空间的符号差 (s_+,s_-,s_0) 满足 $s_+ + s_0 \leq r_+, s_- + s_0 \leq r_-$。特别地，任一迷向子空间的维数至多为 $\min\{r_+,r_-\}$。*(2)* 假设 $r_+ = 0$。V 中的各向同性向量构成一个维数为 r_0 的向量空间，且由 $V\cap V^\perp$ 给出。*(3)* 假设 (V,Q) 的符号差为 $(1,s,0)$。对于任意非零向量 $\boldsymbol{c}\in V$，令 $\boldsymbol{c}^\perp$ 为 $\mathbb{R}\boldsymbol{c}$ 的正交补。如果 $Q(\boldsymbol{c})>0$，那么 $\boldsymbol{c}^\perp\cap(D_+\cup D_0) = \{\mathbf{0}\}$。如果 $Q(\boldsymbol{c})=0$，那么 $\boldsymbol{c}^\perp\cap(D_+\cup D_0) = \boldsymbol{c}^\perp\cap D_0 = \mathbb{R}\boldsymbol{c}$。如果 $Q(\boldsymbol{c})<0$，那么 $\boldsymbol{c}^\perp\cap D_+\neq\{\mathbf{0}\}$。

关于不定 theta 函数模性的结果，先针对以下特殊的单纯形锥建立，然后推广到更一般的多面体锥。

假设 4.4. 设 (V,Q) 的符号差为 $(1,s)$，且满足 $s\geq 1$。设 C 为一组非零向量。假设满足以下条件：

(1) 锥 $R(C)\subseteq D_+\cup D_0$ 的维数为 $s+1$。(2) 锥 $R(C)$ 是单纯形的，即其截面是维数为 s的单纯形。(3) 锥 $R(C)\cap D_0$ 至多包含一条各向同性射线。

关于 $T\subseteq C$ 的 $\langle C_T\rangle$ 符号差，我们有如下结果。

引理 4.5. 假设假设 *4.4*(1) 成立。对于 $T\subseteq C$，以下情形恰有一种成立：
(1) 有 $\langle C_T\rangle = V$。(2) 空间 $\langle C_T\rangle$ 是负定的。(3) 空间 $\langle C_T\rangle$ 的符号差为 $(0,\dim(\langle C_T\rangle)-1,1)$。这等价于对于 $\langle C_T\rangle\neq V$，$\langle C_T\rangle\cap D_0\neq\{\mathbf{0}\}$。

进一步假设 $C=(\boldsymbol{c_1},\cdots,\boldsymbol{c_s},\boldsymbol{c_0})$。那么在(3)中，在附加假设 *4.4* (2)下，有维数 $(\langle C_T\rangle)\geq 2$。在附加假设 *4.4* (2)、(3)下，存在唯一一个具有上述符号差的指标集 T，且维数 $(\langle C_T\rangle) = s$。

证明。考虑 $R(C)$ 的面 $\langle C_T\rangle^\perp\cap R(C)$。由假设 4.4 (1) 可知，此面包含于 $D_+\cup D_0$ 中。假设 $\langle C_T\rangle^\perp\cap R(C)\cap D_+\neq\emptyset$。任取非零的 $\boldsymbol{u}\in\langle C_T\rangle^\perp\cap D_+$。则 $\boldsymbol{u}^\perp$ 的符号差为 $(0,s,0)$。因此 $\langle C_T\rangle\subseteq(\langle C_T\rangle^\perp)^\perp\subseteq\boldsymbol{u}^\perp$ 是负定的。假设

$\langle C_T\rangle^{\perp}\cap R(C)\subseteq D_0$。若 $\langle C_T\rangle^{\perp}\cap R(C)=\{\mathbf{0}\}$，则 $\langle C_T\rangle=V$。否则，如命题 3.6 的证明所示，$\langle C_T\rangle^{\perp}\cap D_0$是有限条各向同性射线的并。由于 $\langle C_T\rangle^{\perp}\cap R(C)$ 是 $R(C)$ 的一个面且包含于此并中，因此面 $\langle C_T\rangle^{\perp}\cap R(C)$ 是一条单独的各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f_T}$，也就是说，

$$\langle C_T\rangle^{\perp}\cap R(C)=\mathbb{R}\boldsymbol{f_T}. \tag{4.2}$$

由引理 4.3 (1) 可得，$\langle C_T\rangle$ 是负半定的；否则，任意正向量$\boldsymbol{u}\in\langle C_T\rangle$ 都会生成一个秩为二的二次空间 $\langle \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{u}\rangle$，其符号差为 (1，0，1)。因此，由引理 4.3 (2) 可知，$\langle C_T\rangle\cap D_0$ 是一个满足以下条件的向量空间

$$\langle C_T\rangle\cap D_0=\langle C_T\rangle\cap\langle C_T\rangle^{\perp}. \tag{4.3}$$

结合 (4.2) 和 (4.3)，得到

$$\langle C_T\rangle\cap D_0=\langle C_T\rangle\cap\langle C_T\rangle^{\perp}\cap D_0=\langle C_T\rangle\cap\mathbb{R}\boldsymbol{f_T}. \tag{4.4}$$

若 $\langle C_T\rangle\cap D_0=\{\mathbf{0}\}$，则负半定空间 $\langle C_T\rangle$ 实际上是负定的。否则，$\langle C_T\rangle\cap D_0=\mathbb{R}\boldsymbol{f_T}$。结合 (4.2)、(4.3) 和 (4.4)，得到

$$\mathbb{R}\boldsymbol{f_T}=\langle C_T\rangle^{\perp}\cap R(C)=\langle C_T\rangle\cap D_0=\langle C_T\rangle\cap\langle C_T\rangle^{\perp}.$$

由事实 $\boldsymbol{f_T}\in\langle C_T\rangle^{\perp}$，根据引理 4.3 (1)，可得 $\langle C_T\rangle$ 的符号差为 (0，$\dim(\langle C_T\rangle)-1$，1)。

反之，若 $\langle C_T\rangle\neq V$且 $\langle C_T\rangle\cap D_0\neq\{\mathbf{0}\}$，则 $\langle C_T\rangle$不可能是负定的，并且根据上述讨论，它具有所需的符号差。

考虑 $\langle C_T\rangle$ 的符号差为 (0，$\dim(\langle C_T\rangle)-1$，1) 的情形。首先，假设 4.4 (2) 中的单纯形条件给出

$$\dim\left(\langle C_T\rangle^{\perp}\right)=\dim\left(\langle C_T\rangle^{\perp}\cap R(C)\right). \tag{4.5}$$

根据 (4.2)、(4.5) 以及维数方面的理由，我们有

$$\langle C_T\rangle^{\perp}=\langle C_T\rangle^{\perp}\cap R(C)=\mathbb{R}\boldsymbol{f_T}.$$

特别地，$\dim(\langle C_T\rangle^{\perp})=1$，$\dim(\langle C_T\rangle)=s$。进一步施加假设 4.4 (2)，$C$ 中的向量线性无关，并满足 $\boldsymbol{c_j^{\perp}}\cap D_+\neq\{\mathbf{0}\}$, $0\leq j\leq s$。由引理 4.3 (3)，我们得到 $Q(\boldsymbol{c_j})<0$。这给出 $\dim(\langle C_T\rangle)\geq 2$。进一步施加假设 4.4 (2)、(3)，存在 $\{1,\dots,s\}\cup\{0\}$ 的唯一子集 T满足上述维数条件和 (4.2)。□

在假设 4.4 (1)、(2)、(3) 以及 $C=(\boldsymbol{c_1},\ \cdots,\ \boldsymbol{c_s},\ \boldsymbol{c_0})$ 下，通过重新标记指标，我们可以将引理 4.5 (3) 中唯一的子集选为 $S=\{1,\dots,s\}$。

如果 $\langle C_T\rangle$ 不是负定的，那么我们需要用其他对象替代 $E_{Q,\ C_T}$和 $M_{Q,\ C_T}$。对于 $S=\{1,\dots,s\}$，令 $U_S:=\langle C_S\rangle\cap D_0=\langle C_S\rangle\cap\mathbb{R}\boldsymbol{f_S}$。由于 $\boldsymbol{f_S}\in\langle C_S\rangle^{\perp}$, Q 在商向量空间 $\langle C_S\rangle/U_S$上诱导出一个负定二次型。沿商映射 $\pi_S:\langle C_S\rangle\to\langle C_S\rangle/U_S$取其提升 $W_S\subseteq\langle C_S\rangle$，便得到一个正交直和分解

$$\langle C_S\rangle=U_S\oplus W_S. \tag{4.6}$$

引理 3.11 中对 E_- 的一种选择给出了此类直和分解的一个例子。我们还取一个

$$V=\langle C_S\rangle\oplus\mathbb{R}\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{\xi}\in V\setminus\langle C_S\rangle. \tag{4.7}$$

结合上述结果，我们得到一个向量空间分解

$$V=\langle C_S\rangle\oplus\mathbb{R}\boldsymbol{\xi}=U_S\oplus W_S\oplus\mathbb{R}\boldsymbol{\xi}. \tag{4.8}$$

Co考虑 V 上的一个新的二次型 Q_t，其中 $||\boldsymbol{f_S}||=1$ 和 $t>0$ 足够小 ll

$$Q_t(\boldsymbol{\lambda})=Q(\boldsymbol{\lambda})-\frac{t}{2}||\boldsymbol{\lambda_{U_S}}||^2. \tag{4.9}$$

连通分支 $\boldsymbol{\lambda_{U_S}}$ 由 (4.8) 中给出的分解定义。根据Q_t的构造，$U_S\oplus W_S$ 是 $\langle C_S\rangle$ 的正交分解，且 ($\langle C_S\rangle$，$Q_t|_{\langle C_S\rangle}$) 是负定的。

引理 4.6. 设假设 *4.4* 对 $C=(\boldsymbol{c_1},\cdots,\boldsymbol{c_s},\boldsymbol{c_0})$成立。对于 $T\subsetneq\{0,\ldots,s\}$， $Q_t|_{\langle C_T\rangle}$是负定的。

证明。 我们分两种情况讨论。若 $(\langle C_T\rangle, Q|_{\langle C_T\rangle})$ 是负定的，则 $Q(\boldsymbol{\lambda})<0$对 $\boldsymbol{\lambda}\in\langle C_T\rangle\setminus\{\mathbf{0}\}$成立。因此，由 (4.9) 可知， $Q_t|_{\langle C_T\rangle}$ 是负定的。若 $(\langle C_T\rangle, Q|_{\langle C_T\rangle})$ 的符号差为 $(0,|T|-1,1)$，则由引理 4.5，$\langle C_T\rangle\subseteq\langle C_S\rangle$。同样， $Q_t|_{\langle C_T\rangle}$ 是负定的，因为 $Q_t|_{\langle C_S\rangle}$ 是负定的。□

对负定情形使用相同的表达式，我们得到 E_{Q_t,C_T},M_{Q_t,C_T}，对任意$T\subsetneq\{0,\ldots,s\}$ 均成立。于是，引理 4.2 中的所有结论都成立。特别地，我们有

$$|M_{Q_t,C_T}(\boldsymbol{\lambda})|\leq K\,e^{2\pi Q_t\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}\right)}, \tag{4.10}$$

对于某个仅取决于 T、Q 和 t 的常数 K。下文中，上标 $[t]$ 表示相对于 Q_t 的构造。

为便于下文使用，我们还讨论相对于 Q 和 Q_t 的正交分解与投影映射。投影映射通过分裂来定义，特别是，不能直接利用二次型定义到各向同性直线的投影映射。可以在 (4.7) 中选择 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\boldsymbol{\xi}\in W_S^{\perp},\quad Q(\boldsymbol{\xi})=0,\quad B(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{f_S})=1. \tag{4.11}$$

这是可能的，因为 $W_S^{\perp}$ 的符号差为 (1，1)，且 $\boldsymbol{f_S}\in W_S^{\perp}$ 是各向同性的。于是，根据构造， Q 中和 Q_t 中的正交分解 $W_S\oplus W_S^{\perp}$ 相同，只有 $W_S^{\perp}=\langle\boldsymbol{f_S}、\boldsymbol{\xi}\rangle$ 内部的正交分解不同。为便于下文使用，我们研究到 $\langle C_T\rangle^{\perp}$ 的投影。

引理 4.7。S 假设 *4.4* 在 $C=(\boldsymbol{c_1},\cdots,\boldsymbol{c_s},\boldsymbol{c_0})$ 下成立。假设 $T\subsetneq\{0,\ldots,s\}$.
(1) 若 $\langle C_T\rangle$ 负定，则对任意 $\boldsymbol{\lambda}\in V$，有 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}}=\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}},\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}=\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}$.(2) 若 $\langle C_T\rangle$ 负半定，则对任意 $\boldsymbol{\lambda}\in V$，有 $Q(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}})=Q(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}})$.

证明. (1) 若 $Q|_{\langle C_T\rangle}$ 负定，则 $V=\langle C_T\rangle\oplus\langle C_T\rangle^{\perp}$, $U_T:=\langle C_T\rangle\cap D_0=\{\mathbf{0}\}$. 由 (4.9)

$$B_t\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)=B\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)=0\text{ for }\boldsymbol{u}\in\langle C_T\rangle.$$

由正交性，我们还有

$$B_t\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}},\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)=0=B_t\left(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}},\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right).$$

利用 $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}}+\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}=\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}+\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}$， 上述两个关系推出

$$B_t\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}-\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}},\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}-\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}}\right)=B\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}-\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}},\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)-B_t\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}-\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}},\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)=0.$$

由于 Q_t 在 $\langle C_T\rangle$ 上负定，这就证明了所需结论。 ( )
2 根据引理 4.5，可得 $T=S$ 和 $U_S\subseteq\langle C_T\rangle$。由 (4.6) 可得正交分解 s

$$\langle C_T\rangle=U_S\oplus\left(\langle C_T\rangle\cap W_S\right),\quad\langle C_T\rangle^{\perp}=U_S\oplus\left(\langle C_T\rangle\cap W_S\right)^{\perp}_{W_S},$$

其中，记号 $(\langle C_T\rangle\cap W_S)^{\perp}_{W_S}$表示 W_S 负定空间中 $\langle C_T\rangle\cap W_S$ 的正交补。到 $\langle C_T\rangle,\langle C_T\rangle^{\perp}$ 的正交投影由 (4.8) 所诱导的下列向量空间分解给出

$$V=U_S\oplus\left(\langle C_T\rangle\cap W_S\right)\oplus\left(\langle C_T\rangle\cap W_S\right)^{\perp}_{W_S}\oplus\mathbb{R}\boldsymbol{\xi}.$$

具体而言，写作

$$\boldsymbol{\lambda}=a\boldsymbol{f_S}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+b\boldsymbol{\xi}\in U_S\oplus\left(\langle C_T\rangle\cap W_S\right)\oplus\left(\langle C_T\rangle\cap W_S\right)^{\perp}_{W_S}\oplus\mathbb{R}\boldsymbol{\xi}. \tag{4.12}$$

于是我们得到

$$\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{C_T}}=a\boldsymbol{f_S}+\boldsymbol{v},\quad\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}=a\boldsymbol{f_S}+\boldsymbol{w},\quad\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}=\left(a-\frac{b}{t}\right)\boldsymbol{f_S}+\boldsymbol{v},\quad\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}=\boldsymbol{w}+b\left(\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{t}\boldsymbol{f_S}\right). \tag{4.13}$$

结论得证。 □

到 Q_t 上的 $\langle C_T\rangle^{\perp^{[t]}}$ 投影可以更具体地表示。利用引理 4.6，$Q_t(\boldsymbol{c_j}) \neq 0$ 对于 $0 \le j \le s$ 成立。令 $(\boldsymbol{d_j})_{0\le j\le s}$ 为相对于 Q_t 的 $(\boldsymbol{c_j})_{0\le j\le s}$ 的对偶基。

引理 4.8。假设假设 *4.4* 对 $C = (\boldsymbol{c_1}, \ldots, \boldsymbol{c_s}, \boldsymbol{c_0})$ 成立。对于任意 $T \subsetneq \{0,\ldots,s\}$，令 $T^c := \{0,\ldots,s\} \setminus T$。利用 Q_t 定义的投影 $\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp \boldsymbol{C_T}}$ 是满足下列条件的唯一向量 $\boldsymbol{u}$

$$B_t(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c_j}) = 0\,,\ j \in T\,, \quad B_t(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d_k}) = B_t(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d_k})\,,\ k \in T^c. \tag{4.14}$$

证明。首先，利用引理 4.6，可以定义 $\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp \boldsymbol{C_T}}$，且其满足 $\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp \boldsymbol{C_T}} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}$。记作 $\langle D_{T^c}\rangle = \langle \boldsymbol{d_k} : k \in T^c\rangle$，并假设 $\boldsymbol{\lambda} \in \langle C_T\rangle \cap \langle D_{T^c}\rangle$。于是 $\boldsymbol{\lambda} \in \langle C_T\rangle \cap \langle C_T\rangle^{\perp^{[t]}}$，特别是 $Q_t(\boldsymbol{\lambda}) = 0$。由引理 4.6 可知 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$。由维数关系，$C_T \cup D_{T^c}$ 构成 V 的一组基，且 $V = \langle C_T\rangle \oplus \langle D_{T^c}\rangle$。因此，由于 B_t 是非退化的，存在满足 (4.14) 的唯一向量 $\boldsymbol{u}$。由于 $\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp \boldsymbol{C_T}}$ 满足 (4.14)，所需结论得证。□

5. Modularity of counting functions of convex planar polygons

本节首先为符号差为 $(1,\ s)$ 的不定 theta 函数中出现的函数建立一些基本估计。然后证明，在单纯多面体锥和非单纯多面体锥的情形下，这些函数具有模性。

5.1. 符号差为 $(1,\ s)$ 的不定 theta 函数。我们定义二次型 Q（其符号差为 $(1,\ s)$）以及由 $C = (\boldsymbol{c_1}, \cdots, \boldsymbol{c_k})$ 给出的锥的 θ 函数如下：

$$\Theta_{Q,p_C}(\boldsymbol{z};\tau) := \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{s+1}} p_C\left(\boldsymbol{n} + \frac{\boldsymbol{y}}{v}\right) q^{Q(\boldsymbol{n})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})}\,,$$

其中

$$\begin{aligned} p_C(\boldsymbol{x}) :=& \prod_{j=1}^{k} \frac{1+\operatorname{sgn}(B(\boldsymbol{c_j},\boldsymbol{x}))}{2} - (-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1-\operatorname{sgn}(B(\boldsymbol{c_j},\boldsymbol{x}))}{2} \\ =& 2^{-k} \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,k\}} \left(1-(-1)^{k+|S|}\right) \operatorname{sgn}(B(C_S,\boldsymbol{x})). \end{aligned} \tag{5.1}$$

此外，令

$$\widehat{p}_C(\boldsymbol{x}) := 2^{-k} \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,k\}} \left(1-(-1)^{k+|S|}\right) E_{Q,C_S}(\boldsymbol{x}). \tag{5.2}$$

引理 5.1。设 $C := (\boldsymbol{c_1}, \ldots, \boldsymbol{c_{s+1}})$ 满足 $R(C) \subseteq D_+ \cup \{\boldsymbol{0}\}$ 是维数为 $s+1$ 的单纯形锥。对于 $T \subsetneq \{1,\ldots,s+1\}$，有：
(1) 子空间 $\langle C_T\rangle$ 是负定的，维数为 $|T|$。(2) 我们有

$$\widehat{p}_C(\boldsymbol{x}) = \sum_{T\subsetneq\{1,\ldots,s+1\}} 2^{-k} M_{Q,C_T}(\boldsymbol{x}) p_{C_{T^c}\perp C_T}(\boldsymbol{x})\,,$$

其中 $p_{C_{T^c}\perp C_T}(\boldsymbol{x})$ 除非 $\boldsymbol{x} \in R(C_{T^c}\perp C_T)$ 且 $|p_{C_{T^c}\perp C_T}(\boldsymbol{x})| \le 2^{s+1-|T|}$，否则为零。
(3) 对于某个 $\ell > 0$，我们有

$$\left|\widehat{p}_C(\boldsymbol{x}) e^{-\pi Q(\boldsymbol{x})}\right| \le s!\, e^{-\pi\ell \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}, \qquad \left|p_C(\boldsymbol{x}) e^{-\pi Q(\boldsymbol{x})}\right| \le e^{-\pi\ell\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}.$$

(4) 函数 $\widehat{p}_C$ 是一个 $\mathcal{C}^\infty$-函数，并满足 *Vign´eras* 微分方程，其中 $\lambda = 0$。

证明。 (1) 该结论由引理 4.5 得出。
(2) 应用引理 4.2，并将 $T^c := \{1,\dots,s+1\}\setminus T$ 写成如下形式

$$\widehat{p}_C(\boldsymbol{x}) = \sum_{T\subsetneq\{1,\dots,s+1\}} \frac{1}{2^{|T|}} M_{Q,C_T}(\boldsymbol{x}) p_{C_{T^c}\perp C_T}(\boldsymbol{x}).$$

注意到 $B(\boldsymbol{a}_{\perp \boldsymbol{C_T}}, \boldsymbol{b}) = B(\boldsymbol{a}_{\perp \boldsymbol{C_T}}, \boldsymbol{b}_{\perp \boldsymbol{C_T}}) = B(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{\perp \boldsymbol{C_T}})$，可得 $p_{C_{T^c}\perp C_T}(\boldsymbol{x}) = p_{C_{T^c}}(\boldsymbol{x}_{\perp C_T}) = 0$，除非 $\boldsymbol{x} \in R(C_{T^c\perp C_T})$（等价地，$\boldsymbol{x}_{\perp \boldsymbol{C_T}} \in R(C_{T^c})$）。
(3) 对于满足 M_{Q,C_T} 的 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}()$ 定义良好；由引理 4.2 可得以下界

$$\left|M_{Q,C_T}(\boldsymbol{x}) e^{-\pi Q(\boldsymbol{x})}\right| < |T|! e^{2\pi Q\left(\boldsymbol{x}_{C_T}\right)} e^{-\pi Q(\boldsymbol{x})} = |T|! e^{-\pi Q_T^+(\boldsymbol{x})},$$

将二次型在 C_T 的张成空间上的符号取反后，得到

$$Q_T^+(\boldsymbol{x}) := Q\left(\boldsymbol{x}_{\perp \boldsymbol{C_T}}\right) - Q(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{C_T}}) = Q(\boldsymbol{x}) - 2Q(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{C_T}}).$$

令 $\boldsymbol{x} \in R(C_{T^c\perp T}) \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，其满足 $\boldsymbol{x}_{\perp \boldsymbol{C_T}} \in R(C_{T^c})$。由于对 $j \in T$ 有 $B(\boldsymbol{c_j}, \boldsymbol{x}_{\perp \boldsymbol{C_T}}) = 0$，我们进一步得到 $\boldsymbol{x}_{\perp \boldsymbol{C_T}} \in R(C) \subseteq D_+ \cup \{\boldsymbol{0}\}$。由 (1) 可知，$Q$ 在 C_T 的张成空间上负定，

$$Q_T^+(\boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{x}_{\perp \boldsymbol{C_T}}) - Q(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{C_T}}) > 0,$$

其中不等式是严格的，因为 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{C_T}} \neq 0$ 或 $\boldsymbol{x}_{\perp \boldsymbol{C_T}} \neq 0$。利用紧致性，我们令 $\ell_T := \min(\{Q_T^+(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in R(C_{T^c\perp T}) \text{ with } \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 1\}) > 0$。那么对于 $\boldsymbol{x} \in R(C_{T^c\perp T}) \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，我们有

$$Q_T^+(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} Q_T^+\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}}\right) \geq \ell_T \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}.$$

设 $\ell := \min(\ell_T : T \subsetneq \{1,\dots,s+1\}) > 0$，并利用第 (2) 部分，我们可以给出如下界

$$\left|\widehat{p}_C(\boldsymbol{x}) e^{-\pi Q(\boldsymbol{x})}\right| \leq \sum_{T\subsetneq\{1,\dots,s+1\}} \frac{|T|!}{2^{|T|}} \left|p_{C_{T^c}\perp C_T}(\boldsymbol{x})\right| e^{-\pi Q_T^+(\boldsymbol{x})} \leq \sum_{T\subsetneq\{1,\dots,s+1\}} \frac{|T|!}{2^{|T|}} e^{-\pi\ell\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} \leq s! e^{-\pi\ell\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$$

对于满足所有出现的 $M_{Q,C_T}(\boldsymbol{x})$ 都有定义的 $\boldsymbol{x}$。由于 $\widehat{p}_C$ 是连续的，且我们对一个稠密子集证明了该界，因此它对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{s+1}$都成立。通过在上述计算中仅考虑 $T = \emptyset$ 对应的项，即可得到 p_C 的界。

(4) 由于 $\widehat{p}_C$ i 是 E_{Q,C_S}的线性组合，因此这直接由引理 4.2 (3) 得出 . □

5.2. 符号差为 (1，s) 的不定 theta 函数的模性：单纯形情形。在本小节中，我们研究 $\Theta_{Q,\ \widehat{p}_C}$ 的模性，其中 $R(C)$ 是单纯多面体。

5.2.1. 单纯形锥的不定 *theta* 函数的模性。

定理 5.2. 设 $C = (\boldsymbol{c_1},\dots,\boldsymbol{c_{s+1}})$ 是一组法向量，使得 $R(C) \subseteq D_+ \cup \{\boldsymbol{0}\} \subseteq \mathbb{R}^{s+1}$ 是维数为 $s+1$ 的单纯形。则级数 $\Theta_{Q,\ p_C}$ 绝对收敛，并在 τ 上定义一个亚纯函数，其补全为

$$\Theta_{Q,\widehat{p}_C}(\boldsymbol{z};\tau) := \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{s+1}} \widehat{p}_C\left(\left(\boldsymbol{n} + \frac{\boldsymbol{y}}{v}\right)\sqrt{2v}\right) q^{Q(\boldsymbol{n})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})}.$$

这意味着 $\Theta_{Q,\ \widehat{p}_C}$ 按权为 $\frac{s+1}{2}$、指标为 A 的 *Jacobi* 形式变换，并且可以将“全纯部分” $\Theta_{Q,\ p_C}$ 还原为（注意，取 $w = \tau$ 而不是取极限，可得 $\Theta_{Q,\ \widehat{p}_C}$）

$$\Theta_{Q,p_C}(\boldsymbol{z};\tau) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{s+1}} \lim_{w\to -i\infty} \widehat{p}_C\left(\left(\boldsymbol{n} + \frac{2\boldsymbol{y}}{\tau - w}\right)\sqrt{\tau - w}\right) q^{Q(\boldsymbol{n})} e^{2\pi i B(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})}$$

若对所有 $1 \leq j \leq s+1$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{s+1}$, $B(\boldsymbol{c_j}, \boldsymbol{n} + \frac{\boldsymbol{y}}{v}) \neq 0$。

证明。 根据引理 5.1 (3)，Θ_{Q,p_C} 和 $\Theta_{Q,\widehat{p}_C}$ 均由某个正定二次型的 θ 函数控制，因此在 $\mathbb{C}^{s+1}\times\mathbb{H}$ 中紧致收敛。根据引理 5.1 (3)、(4)， $\widehat{p}_C$ 满足定理 4.1 的条件，因此 $\Theta_{Q,\widehat{p}_C}$ 按权为 $\frac{s+1}{2}$ 、指标为 A 的 Jacobi 形式变换。□

其余部分 of this 子子节余下部分将用于证明定理 5.2 的以下推广 .

定理 5.3. 假设假设 ***4.4*** 对 $C=(\boldsymbol{c_1},\cdots,\boldsymbol{c_s},\boldsymbol{c_0})$成立。那么级数 Θ_{Q,p_C} 紧致收敛，并在 τ 上定义一个亚纯函数，其具有模完备化

$$\Theta_{Q,\widehat{p}_{C,t}}(\boldsymbol{z};\tau):=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{s+1}}\widehat{p}_{C,t}\left(\left(\boldsymbol{n}+\frac{\boldsymbol{y}}{v}\right)\sqrt{2v}\right)q^{Q(\boldsymbol{n})}e^{2\pi iB(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})}.$$

这里，$\widehat{p}_{C,t}$ 的定义与 (5.2) 中相同，其中二次型 Q_t 由 (4.9)给出。这意味着 $\Theta_{Q,\widehat{p}_{C,t}}$按权为 $\frac{s+1}{2}$ 、指标为 A 的 ***Jacobi*** 形式变换，并且可以将 Θ_{Q,p_C} 表示为

$$\Theta_{Q,p_C}(\boldsymbol{z};\tau)=\lim_{t\to0^+}\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{s+1}}\lim_{w\to-i\infty}\widehat{p}_{C,t}\left(\left(\boldsymbol{n}+\frac{2\boldsymbol{y}}{\tau-w}\right)\sqrt{\tau-w}\right)q^{Q(\boldsymbol{n})}e^{2\pi iB(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})}.$$

我们首先考察 $\Theta_{Q,\widehat{p}_{C,t}}$的收敛性。按照引理 4.2 和 5.1 中的计算，我们需要证明以下表达式收敛:

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{Z}^{s+1}+\boldsymbol{\alpha}}e^{2\pi iB(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta})}e^{2\pi iuQ(\boldsymbol{\lambda})}e^{-\pi Q\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right)}M_{Q_t,C_T}\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right)p_{C_{T^c\perp^{[t]}C_T}}(\boldsymbol{\lambda}).\tag{5.3}$$

在上述内容中，有 $p_{C_{T^c\perp^{[t]}C_T}}(\boldsymbol{\lambda})=p_{C_{T^c}}(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}})$，其中，符号函数和函数$p_{C_{T^c\perp^{[t]}C_T}}$ 的正交投影中的双线性形式为 B_t。我们记

$$e^{-\pi Q(\boldsymbol{\lambda})}M_{Q_t,C_T}(\boldsymbol{\lambda})p_{C_{T^c\perp^{[t]}C_T}}(\boldsymbol{\lambda})=e^{-\pi Q(\boldsymbol{\lambda})}e^{2\pi Q_t\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}\right)}p_{C_{T^c\perp^{[t]}C_T}}(\boldsymbol{\lambda})e^{-2\pi Q_t\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}\right)}M_{Q_t,C_T}(\boldsymbol{\lambda}).\tag{5.4}$$

根据（4.10），量 $|e^{-2\pi Q_t\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}\right)}M_{Q_t,\,C_T}(\boldsymbol{\lambda})|$ 有一个常数上界。

接下来，我们估计函数 $e^{-\pi Q(\boldsymbol{\lambda})}e^{2\pi Q_t\left(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}\right)}$ 在 $p_{C_{T^c\perp^{[t]}C_T}}(\boldsymbol{\lambda})$ 的支集上，其闭包为多面体 $R_t(C_{T^c\perp C_T})$。对于任意 $\boldsymbol{\lambda}\in R_t(C_{T^c\perp C_T})$，有 $B_t(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}})=0,\ j\in T$，并且

$$B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)\geq0\text{ for }k\in T^c\quad\text{or}\quad B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)\leq0\text{ for }k\in T^c.\tag{5.5}$$

引理 5.4。 假设假设 ***4.4*** 对 $C=(\boldsymbol{c_1},\cdots,\boldsymbol{c_s},\boldsymbol{c_0})$ 成立。设 $Q_T^+(\boldsymbol{\lambda}):=Q(\boldsymbol{\lambda})-2Q_t(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}})$。当 t 充分小时， Q_T^+ 在 $R_t^\circ(C_{T^c\perp C_T})\setminus\mathbb{R}\boldsymbol{f_S}$ 上为正。

证明。 我们再次考察该区域的一个截面。具体而言，取满足 $Q_t(\boldsymbol{\eta})>0$ 的 $\boldsymbol{\eta}=t^{-1}\boldsymbol{f_S}+\boldsymbol{\xi}$。然后考察与超平面 $\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{s+1}:\ B_t(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})=1\}$ 的交集。具体来说，用 (4.12) 中给出的 $\boldsymbol{\lambda}=a\boldsymbol{f_S}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+b\boldsymbol{\xi}$ 坐标表示，可得

$$1=B_t(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})=t^{-1}b.\tag{5.6}$$

我们根据 $\langle C_T\rangle$ 是否负定分为两种情况。若 $\langle C_T\rangle$ 不是负定的，则由引理 4.5 可得 $T=S$。利用 (4.13) 直接计算可得

$$Q_T^+(\boldsymbol{\lambda})=ab+t\left(a-\frac{b}{t}\right)^2-Q(\boldsymbol{v})=\frac{b^2}{t}-ab+ta^2-Q(\boldsymbol{v}).\tag{5.7}$$

根据 (4.6) 中的构造， W_S 是负定的，因此 $Q(\boldsymbol{v})\leq0$。此外，由 (5.6) 可知，当 $t>0$ 充分小时，$t^{-1}b^2-ab+ta^2>0$。这表明 $Q_T^+(\boldsymbol{\lambda})>0$。

如果 $\langle C_T\rangle$ 是负定的，那么根据引理 4.5 和 4.7，我们有 $V=\langle C_T\rangle\oplus\langle C_T\rangle^{\perp}$, $\langle C_T\rangle\cap\mathbb{R}\boldsymbol{f_S}=\{\mathbf{0}\}$，$\mathbb{R}\boldsymbol{f_S}\subseteq\langle C_T\rangle^{\perp}$，以及 $\boldsymbol{\lambda_{C_T}}=\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}$。因此我们有

$$Q_T^{+}(\boldsymbol{\lambda})=Q(\boldsymbol{\lambda})-2Q_t(\boldsymbol{\lambda_{C_T}})=Q(\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}})-Q(\boldsymbol{\lambda_{C_T}}). \tag{5.8}$$

此外，引理 4.7 给出 $\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}=\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}$，因此

$$B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)=B_t(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}). \tag{5.9}$$

考虑多面体 $R_t(C_{T^c\perp C_T})$ 的内部 $R_t^{\circ}(C_{T^c\perp C_T})$，其中 (5.5) 中的不等式均为严格不等式。对于多面体正半部中的任意 $\boldsymbol{\lambda}\in R_t^{\circ}(C_{T^c\perp C_T})$，$B_t(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}})>0$ 对所有 $k\in T^c$ 均成立。由 (5.9) 及 $t\mapsto B_t$ 的连续性可知，$B(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}})\geq 0$ 对所有 $k\in T^c$ 均成立。对多面体的负半部，同样的推理也成立。因此，对于任意 $\boldsymbol{\lambda}\in R_t^{\circ}(C_{T^c\perp C_T})$，有 $\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\in R(C_{T^c})$。由此可得 $\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\in R(C)\subseteq D_+\cup D_0$，因此在 (5.8) 中有 $Q(\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}})\geq 0$。由于 $\langle C_T\rangle$ 为负半定，故有 $Q(\boldsymbol{\lambda_{C_T}})\leq 0$。因此，$Q(\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}})-Q(\boldsymbol{\lambda_{C_T}})\geq 0$，并且 $Q(\boldsymbol{\lambda}_{\perp\boldsymbol{C_T}})-Q(\boldsymbol{\lambda_{C_T}})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}\boldsymbol{f_S}$。证明完毕。□

由连续性可知，Q_T^{+} 在多面体 $R_t(C_{T^c\perp C_T})$ 的边界上非负。接下来我们考察多面体 $R_t(C_{T^c\perp C_T})$ 的面。

引理 5.5. 假设假设 *4.4* 对 $C=(\boldsymbol{c_1},\cdots,\boldsymbol{c_s},\boldsymbol{c_0})$成立。若 $t>0$ 足够小，则存在常数（依赖于 t）$\kappa,\delta>0$，使得在 $R_t(C_{T^c\perp C_T})\setminus\mathbb{R}B_{\varepsilon}(\boldsymbol{f})$ 的一个截面中，我们有

$$\left|e^{-\pi Q(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda})}M_{Q_t,C_T}\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right)p_{C_{T^c\perp^{[t]}C_T}}(\boldsymbol{\lambda})\right|\leq\kappa e^{-\pi\delta v}. \tag{5.10}$$

证明. 对于任意非零向量 $\boldsymbol{u}\in R_t(C_{T^c\perp C_T})\setminus\mathbb{R}B_{\varepsilon}(\boldsymbol{f})$，考虑 $L:=\{0\leq j\leq s:\ B_t(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}})=0\}$，它满足 $T\subseteq L$ 并且

$$B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)>0\text{ for }k\in L^c\quad\text{or}\quad B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)<0\text{ for }k\in L^c. \tag{5.11}$$

若 $L=\{0,\ldots,s\}$，则由 B_t 的非退化性可知 $\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}=\mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}}$。由 (5.7)，若 $\langle C_T\rangle$ 不是负定的，则 Q_T^{+} 严格有下界。接下来考虑$\langle C_T\rangle$ 为负定的情形。利用引理 4.7 和 (5.8)，我们得到

$$Q_T^{+}(\boldsymbol{u})=Q(\boldsymbol{u}_{\perp\boldsymbol{C_T}})-Q(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{C_T}})=-Q(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{C_T}}).$$

根据 $\langle C_T\rangle$ 的负定性，该函数在截面的某个紧区域上也有严格为正的下界。无论哪种情况，该不等式都可由 (5.4)、(4.10) 和 $e^{-\pi Q(\boldsymbol{\lambda})}e^{2\pi Q_t(\boldsymbol{\lambda}^{[t]}_{\boldsymbol{C_T}})}=e^{-\pi Q_T^{+}(\boldsymbol{\lambda})}$ 得出。在 $L\subsetneq\{0,\ldots,s\}$ 的情况下，我们声称，对于满足 (5.11) 的任意 $\boldsymbol{u}$，都有 $\boldsymbol{u}\in R_t^{\circ}(C_{L^c\perp C_L})\setminus\mathbb{R}B_{\varepsilon}(\boldsymbol{f})$。也就是说，

$$B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_L}}\right)>0\text{ for }k\in L^c\quad\text{or}\quad B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_L}}\right)<0\text{ for }k\in L^c. \tag{5.12}$$

事实上，根据引理 4.8 中的正交分解，$\langle C_T\rangle^{\perp^{[t]}}=\langle D_{T^c}\rangle,\langle C_L\rangle^{\perp^{[t]}}=\langle D_{L^c}\rangle$ 因而，对于某个 $\boldsymbol{v}\in\langle D_{T^c\setminus L^c}\rangle.$，有 $\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}=\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_L}}+\boldsymbol{v}$。利用 $D_{\{0,\ldots,s\}}$ 是 $C_{\{0,\ldots,s\}}$ 的对偶基这一事实，我们有 $B_t(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{v})=0,k\in L^c$。因此，

$$B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)=B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_T}}\right)+B_t(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{v})=B_t\left(\boldsymbol{c_k},\boldsymbol{u}^{[t]}_{\perp\boldsymbol{C_L}}\right)\text{ for }k\in L^c. \tag{5.13}$$

现在 (5.12) 由 (5.11) 得出。因此，$\boldsymbol{u}$ 位于 $R_t(C_{T^c\perp C_T})$ 的一个面 $R_t(C_{L^c\perp C_L})$ 的内部。考虑任意一个位于内部 $R_t^{\circ}(C_{L^c\perp C_L})\setminus\mathbb{R}B_{\varepsilon}(\boldsymbol{f})$ 的向量 $\boldsymbol{u}$。由引理 5.4

以及连续性，存在一个邻域 $N(\boldsymbol{u}) \subseteq R_t(C_{T^c \perp C_T}) \setminus \mathbb{R}B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$，并且 $\delta_{\boldsymbol{u}} > 0$ 使得 $Q_L^+(\boldsymbol{\lambda}) \geq \frac{\delta_{\boldsymbol{u}}}{2}$ 对于 $\boldsymbol{\lambda} \in N(\boldsymbol{u})$ 成立。特别地，利用 (4.10)，对于 $\boldsymbol{\lambda} \in N(\boldsymbol{u})$，我们有

$$\left| e^{-\pi Q\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right)} M_{Q_t, C_L}\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right) p_{C_{L^c \perp [t] C_L}}(\boldsymbol{\lambda}) \right| \leq K e^{-\pi Q_L^+\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right)} \leq K e^{-\pi v\, \delta_{\boldsymbol{u}}}. \tag{5.14}$$

对于任意这样的 $\boldsymbol{\lambda}$，根据 [9, 命题 3.4、等式 (51)] 和引理 4.2，有

$$\lim M_{Q_t, C_L}\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right) = (-1)^{|L|+|T|} \operatorname{sgn}\left(B_t\left(\left(C_{L\setminus T}\right)^{[t]}_{\perp C_T}, \boldsymbol{\lambda}\right)\right) M_{Q_t, C_T}\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right),$$

极限取在轨迹 $B_t((C_{L\setminus T})^{[t]}_{\perp C_T}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ 上。另一方面，由 (5.1) 和 (5.13) 可知，在同一轨迹上，对于满足 $0 \leq m \leq |L| - |T|$ 的 $m \in \mathbb{N}_0$，有

$$\lim \left| p_{C_{T^c \perp [t] C_T}}(\boldsymbol{\lambda}) \right| = \frac{1}{2^m} \left| p_{C_{L^c \perp [t] C_L}}(\boldsymbol{\lambda}) \right|.$$

这里 m 是消失的连 通分支的数量，它们在极限过程中于 $B_t((C_{L\setminus T})^{[t]}_{\perp C_T}, \boldsymbol{\lambda})$ 中消失。这给 s

$$\lim \left(\left| M_{Q_t, C_L}\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right) p_{C_{L^c \perp [t] C_L}}(\boldsymbol{\lambda}) \right| \right) = 2^m \lim \left(\left| M_{Q_t, C_T}\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right) p_{C_{T^c \perp [t] C_T}}(\boldsymbol{\lambda}) \right| \right).$$

如有必要，缩小邻域 $N(\boldsymbol{u})$ 后，根据 (5.14) 可得，在 $N(\boldsymbol{u})$ 内

$$\left| e^{-\pi Q\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right)} M_{Q_t, C_T}\left(\sqrt{2v}\boldsymbol{\lambda}\right) p_{C_{T^c \perp [t] C_T}}(\boldsymbol{\lambda}) \right| \leq 2^{-m} \cdot 2K e^{-\pi v\, \delta_{\boldsymbol{u}}}. \tag{5.15}$$

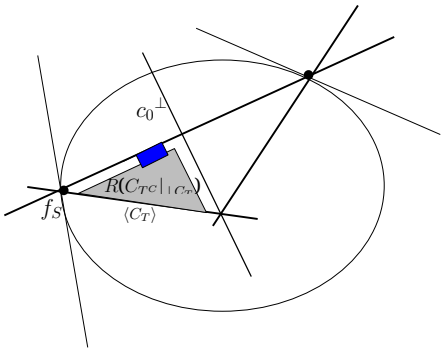

FIGURE 5. 多面体 $R_t(C_{T^c \perp C_T})$ 的一个截面。

对于截面 $R_t(C_{T^c \perp C_T}) \setminus \mathbb{R}B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$ 边界上的任意点 $\boldsymbol{u}$，都可以构造出这样的邻域 $N(\boldsymbol{u})$。所得的开集随后覆盖该截面的边界。根据后者的紧致性，我们可以找到一个有限覆盖，在其中满足由 (5.15) 给出的估计。之后，考虑开有限覆盖的补集（在 $R_t(C_{T^c \perp C_T}) \setminus \mathbb{R}B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$ 内），该补集是紧的，并覆盖 $R_t(C_{T^c \perp C_T}) \setminus \mathbb{R}B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$ 的其余部分截面。根据引理 5.4，对于这个紧补集，我们也有一个形式如 (5.15) 的估计；图 5 给出了示意图。于是，我们在多面体 $R_t(C_{T^c \perp C_T}) \setminus \mathbb{R}B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$ 的整个截面上处处得到 (5.10) 中所需的估计。□

现在我们可以证明定理 5.3 了。

定理 *5.3* 的证明。$\Theta_{Q,\ p_C}$ 的紧致收敛性可仿照定理 3.14 得出。根据引理 5.5，我们采用定理 5.2 证明中的紧性论证，从而得到（5.3）中的级数紧致收敛，进而得到$\Theta_{Q,\ \widehat{p}_{C,\ t}}$的紧致收敛，其中求和避开$B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$。对于 $B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$上的求和，我们使用（4.10）、引理 5.4 和定理 3.14。同样，根据引理 5.5、（4.10）和引理 5.4，$\widehat{p}_{C,\ t}$ 满足定理 4.1 (i)。由此得到紧致收敛性，并

得到$\Theta_{Q,\ \widehat{p}_{C,\ t}}$的亚纯性，以及$\Theta_{Q,\ \widehat{p}_{C,\ t}}$所需的模性。根据$\Theta_{Q,\ p_C}$和$\Theta_{Q,\ \widehat{p}_{C,\ t}}$的紧致收敛性，可得它们之间的关系。□

5.2.2. 单纯多面体的面上的不定 *theta* 函数。接下来我们考察 θ 函数在面上的限制。回顾 (3.6)，对于任意非空集合 $J \subseteq C$，我们记作 $V_J = \langle C_J\rangle^{\perp}$,$F_J = V_J \cap R(C)$。若 F_J是各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$，则根据单纯形条件和维数理由，V_J也如此。因此，由 V的符号差可知，$\langle C_J\rangle$既不能是 V，也不能是负定的。根据引理 4.5，$J = \{1,\dots,s\}$。我们取直和分解 (4.8)，其中 $\boldsymbol{\xi} \in D_0$满足 (4.11)。如定理 3.14 和推论 3.16 中的直接计算所示，相应的级数 $\Theta_{Q,\ \delta_{V_J}p_C}$和 $\Theta_{Q,\ \delta_{V_J}p_{CJ^c}}$均发散。若 F_J 不是各向同性射线，则有以下结果。

推论 5.6. 假设假设 ***4.4*** 对 $C = (\boldsymbol{c_1},\cdots,\boldsymbol{c_s},\boldsymbol{c_0})$ 成立。假设 F_J不是各向同性射线。级数 $\Theta_{Q,\ \delta_{V_J}p_{CJ^c}}$ 和 $\Theta_{Q,\delta_{V_J}p_C}$ 在 $(\boldsymbol{z_{V_J}},\tau)$上定义亚纯函数，其模完备化的权为 $\dim(F_J)+1$ $)$。
$\quad\quad\quad

(2) 存在满足 $\{\mathbf{0}\} \neq W_j \cap R(C_j) \subseteq D_+ \cup \{\mathbf{0}\}$的 $W_j \subset \mathbb{R}^{s+1}$ 和 χ_{W_j}，以及另外一些记作 $R(C_{\ell+1}) \ldots, R(C_h) \subseteq D_+ \cup \{\mathbf{0}\}$的单纯形锥，还有 $d_j \in \mathbb{R}$，使得

$$p_C(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\ell} p_{C_j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=\ell+1}^{h} \chi_{W_j}(\boldsymbol{x}) d_j p_{C_j}(\boldsymbol{x}).$$

证明。(1) 注意到 $\langle C\rangle = \mathbb{R}^{s+1}$和 $k \geq s$，因为对于任意 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{s+1} \setminus \langle C\rangle^{\perp}$，都有 $\boldsymbol{w} \oplus \langle C\rangle^{\perp} \subseteq R(C) \subseteq D_+ \cup D_0$由于 Q的符号差为 $(1, s)$，所以至多为一维。固定一个满足 $Q(\boldsymbol{d}) > 0$ 的向量 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{s+1}$。我们先将锥 $R(C)$ 与超平面相交

$$H_{\boldsymbol{d}} := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{s+1} : B(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}) = 1\right\}.$$

由于 $R(C) \setminus \{\mathbf{0}\}$ h e 作为两个连通分支，而 $H_{\boldsymbol{d}}$ 只与其中一个相交，因此我们可以写

$$R(C) \cap H_{\boldsymbol{d}} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{s+1} : B(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}) = 1, B(\boldsymbol{c_j}, \boldsymbol{x}) \geq 0 \text{ for } 0 \leq j \leq k\right\},$$

可能需要先改变 $\boldsymbol{d} \mapsto -\boldsymbol{d}$，它是一个 s 维凸多胞体。根据引理 5.7，我们可以将其分解为 s 维单形 S_1, ..., S_ℓ。于是存在 ℓ 个集合 $C_j (1 \leq j \leq \ell)$，每个集合都由 $s+1$ 个向量组成，并且 $R(C_j) := \mathbb{R}S_j$ 且

$$\bigcup_{j=1}^{\ell} R(C_j) = \mathbb{R} \bigcup_{j=1}^{\ell} S_j = \mathbb{R}(R(C) \cap H_{\boldsymbol{d}}) = R(C)$$

因为每个单纯形都可以由形如 $s+1$ 条件 $B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) > 0$ 的条件描述。因此， $R(C_j)$ 构成了对 $R(C)$ 的单纯形锥分解，这些单纯形锥仅在边界处相交。

（2）根据（1）的证明， $p_C(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{\ell} p_{C_j}(\boldsymbol{x})$ 支持在 $R(C_j)$ 的边界上。由容斥原理，它由形如（细节见（5.17））$\sum_{j=\ell+1}^{h} \chi_{W_j}(\boldsymbol{x}) p_{C_j}(\boldsymbol{x})$。的项的线性组合构成。这里， $W_j \subset \mathbb{R}^{s+1}$ 是满足 $\{\mathbf{0}\} \neq W_j \cap R(C_j) \subseteq D_+ \cup \{\mathbf{0}\}$ 的子空间（对于 $\ell + 1 \leq j \leq h$，存在某个 $1 \leq k \leq \ell$ 使得 $C_j = C_k$）。由于 W_j 包含一个正向量， W_j 的符号差为（1, $\dim(W_j) - 1$）。注意， $R(C_j) \cap W_j \subseteq (D_+ \cup \{\mathbf{0}\}) \cap W_j$ 在低维子空间 W_j 中满足引理的条件。由于当 $\dim(W_j) = 1$ 时（$\ell = h = 1$， $C_1 = C$），该命题成立，因此根据 $\dim(W_j)$ 上的归纳法，命题得证。□

在本节余下部分，令 (V, Q) 为由 (3.1) 中给出的、满足定理 3.14 假设[4] 的凸多边形计数函数 $\Theta_{Q,\chi}$ 所产生的二次空间。令 $C = (\boldsymbol{c_k} : 1 \leq k \leq N)$ $N = s+3$ 为其中法向量的集合。由命题 3.6 和引理 3.9，可得 $\boldsymbol{c_k}^{\perp} \cap (D_+ \cup D_0) \neq \{\mathbf{0}\}$。由引理 4.3 (3)，有 $Q(\boldsymbol{c_k}) \leq 0$。此外，任何与 $R(C)$ 的交集维数为 s （即支撑超平面）的超平面都满足

$$\boldsymbol{c_k}^{\perp} \cap D_+ \neq \{\mathbf{0}\} \tag{5.16}$$

因此，由引理 4.3 (3) 可得 $Q(\boldsymbol{c_k}) < 0$。接下来，我们使用引理 5.7 和 5.8 中的构造，将 $R(C) \subseteq D_+ \cup D_0$ 单纯分解为单纯多面体，并使每个单纯多面体都满足假设 4.4。我们采用以下步骤:

(1) 我们首先将多面体 $R(C)$分解为若干小多面体 $R_{\boldsymbol{f}}$，每个小多面体都包含某条各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$ 的一个小邻域；再加上这些小多面体并集的补集 $R^{[c]}$。小多面体 $R_{\boldsymbol{f}}$ 的截面是以某个多胞体 $P_{\boldsymbol{f}}$为底的锥，其顶点 $\boldsymbol{w_0}(\boldsymbol{f})$（如引理 5.7 的证明中所述）由 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$的截面给出。

(2) 我们将引理 5.7 中的三角剖分过程应用于以 $\boldsymbol{w_0}(\boldsymbol{f})$ 截面作为参考顶点的 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$，从而得到 $R_{\boldsymbol{f}}$ 的一个三角剖分 $X_{\boldsymbol{f}}$。 $P_{\boldsymbol{f}}$ 的任意三角剖分都能为 $R_{\boldsymbol{f}}$ 产生这样的三角剖分。

[4]事实上，下面的讨论也适用于 $N = 4$的情形 .

(3) 上述小多面体 $R_{\boldsymbol{f}}$ 的单纯三角剖分也为补多面体 $R^{[c]}$ 形成面。将引理 5.7 中的三角剖分过程应用于所得的补多面体 $R^{[c]}$，从而得到其三角剖分。

将所得的 $R(C)$的单纯分解记为 X。它是通过插入法向量为 $\boldsymbol{c_\ell}$ $(N+1 \le \ell \le N+M)$的超平面 $M \in \mathbb{N}_0$而得到的。如有必要，我们可以通过微扰来安排新插入的超平面，使所有法向量都为有理向量。与前文一样，记 $\lambda_j = B(\boldsymbol{c_j},\ \boldsymbol{\lambda})$和 $\lambda_{-j} = B(-\boldsymbol{c_j},\ \boldsymbol{\lambda})$为 $1 \le j \le N+M$。令 $J \subseteq \{N+1,\dots,N+M\},\ \ J^c = \{N+1,\dots,N+M\} \setminus J$。由此可得

$$
\begin{aligned}
p_C(\boldsymbol{\lambda}) &= p_C(\boldsymbol{\lambda}) \prod_{\ell=N+1}^{N+M} \left(\frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_\ell)}{2} + \frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_{-\ell})}{2} \right) \\
&= \sum_{J \subseteq \{N+1,\dots,N+M\}} \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_k)}{2} \prod_{\ell \in J} \frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_\ell)}{2} \prod_{\ell \in J^c} \frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_{-\ell})}{2} \right. \\
&\qquad \left. -(-1)^N \prod_{k=1}^{N} \frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_{-k})}{2} \prod_{\ell \in J} \frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_{-\ell})}{2} \prod_{\ell \in J^c} \frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_\ell)}{2} \right). \quad (5.17)
\end{aligned}
$$

令 $C(J) := (\boldsymbol{c_j} :\ 1 \le j \le N \cup J \cup (-J^c))$。对于由 J确定的每个加项$p_{C(J)}$，其支集包含于以下半空间的交集中

$$R(C(J)) = \{\boldsymbol{\lambda} \ :\ \lambda_j \ge 0\,, \boldsymbol{c_j} \in C(J) \ \text{ or } \lambda_j \le 0\,, \boldsymbol{c_j} \in C(J)\}.$$

由于 X 是一个单纯分解，$F_J := R(C(J)) \subseteq R(C)$是一个单纯多面体。任取一个包含 $R(C(J))$且维数为 $s+1$ 的单纯多面体 Δ_J。将 Δ_J的余维一面的法向量集合记为 $C(\Delta_J)$。若 $F_J \subsetneq \Delta_J$，则相应的加项$p_{C(J)}$是$\delta_{F_J} p_{C(\Delta_J)}$的有理倍数。否则，我们有 $F_J = \Delta_J$，且$p_{C(J)} - p_{C(\Delta_J)}$是如下形式函数的线性组合：$\delta_{G_K} p_{C(\Delta_J)}$，其中 G_K是Δ_J的真面，它们由相交超平面 $\langle \boldsymbol{c_j} \rangle^\perp,\ \ \boldsymbol{c_j} \in C(J) \setminus C(\Delta_J)$ 与 Δ_J得到。

接下来处理这样的情形：F_J 或 G_K 是各向同性射线，其上的 θ函数发散，如第 5.2.2 小节所述。根据单纯分解的构造，只需关注包含各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$的小多面体 R_f。我们排除满足下列条件的法向量 $\boldsymbol{c_k}$、$1 \le k \le N$：

$$\boldsymbol{c_k^\perp} \cap R(C) = \boldsymbol{c_k^\perp} \cap R(C) \cap D_0\,, \quad (5.18)$$

根据命题 3.6 和引理 3.9，在当前情形下，这等价于 $\dim\left(\boldsymbol{c_k^\perp} \cap R(C)\right) = 1$。相应的超平面是非支撑超平面，它们与 $R(C)$的交集仅为各向同性射线（见 (5.16)）；将它们从 C 中移除不会改变 $R(C)$。定义

$$C^{\mathrm{reg}} := \left\{ \boldsymbol{c_k} \in C \ :\ \boldsymbol{c_k^\perp} \cap R(C) \ne \boldsymbol{c_k^\perp} \cap R(C) \cap D_0 \right\}.$$

由引理 4.3 (3)，我们于是有 $C^{\mathrm{reg}} = C \setminus D_0$.

引理 5.9。在 (5.17) 中用 C^{reg} 替换 C 后，所得的面 F_J 和 G_K 都不是各向同性射线。

证明。对于任意各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$，用 $\boldsymbol{c_0}$ 表示 $R_{\boldsymbol{f}}$ 中不包含 $\boldsymbol{w_0(f)}$ 的面的法向量。由命题 3.6 和引理 3.9 可知，至多存在一个经过各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$ 的非支撑超平面，因此，来自 $C \cup \boldsymbol{c_0}$ 且其超平面与 $R_{\boldsymbol{f}}$ 有非平凡交集的法向量集合 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{f}}$ 包含 $s+2$ 个元素。

假设 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{f}} \cap D_0 \ne \emptyset$。也就是说，存在一个关于 $R_{\boldsymbol{f}}$ 的非支撑超平面，其法向量属于 $C \cap D_0$。将 $C \cap D_0$ 从 C 中排除后，小多面体 $R_{\boldsymbol{f}}$ 在 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$ 附近是单纯形的（即 $R_{\boldsymbol{f}}$ 的截面是一个单纯形）。因此，无需对小多面体进行分解

$R_{\boldsymbol{f}}$。在这种情况下，对于任意满足 $\Delta_J = R_{\boldsymbol{f}}$ 的 J，根据 $B(\boldsymbol{c_0},\ \boldsymbol{\lambda})$ 的符号，有 $R(C(J)) \cap \mathbb{R}\boldsymbol{f} = \{\mathbf{0}\}$ 或 $R(C(J)) = R_{\boldsymbol{f}}$。否则，集合 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{f}}$ 由来自 $C^{\mathrm{reg}} \cup \boldsymbol{c_0}$ 的向量构成。假设存在一个非支撑超平面，其法向量 $\boldsymbol{c_a} \in C^{\mathrm{reg}}$ 满足 $\dim(\boldsymbol{c_a^\perp} \cap R_{\boldsymbol{f}}) < s$。由于 $\dim(\boldsymbol{c_a^\perp} \cap R(C)) = \dim(\boldsymbol{c_a^\perp} \cap R_{\boldsymbol{f}})$，由引理 3.9 可知，该面是一条各向同性射线[5]。因此，由引理 4.3 (3)，$\boldsymbol{c_a} \in D_0$，这与 $C^{\mathrm{reg}} \cap D_0 = \emptyset$ 矛盾。由此可知，来自 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{f}}$ 的任意超平面都是支撑超平面。

接下来我们考虑 $R_{\boldsymbol{f}}$ 的截面。这是一个以多胞体 $P_{\boldsymbol{f}}$ 为底的锥，该多胞体是通过在 $\boldsymbol{c_0^\perp} \cong \mathbb{R}^{s-1}$ 中与 $s+1$ 个半空间相交得到的，锥尖 $\boldsymbol{w_0}$（$\boldsymbol{f}$）是各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$ 的截面。单纯三角剖分 $X_{\boldsymbol{f}}$ 中新插入的超平面 $R_{\boldsymbol{f}}$ 来自对 $P_{\boldsymbol{f}}$ 中新插入的超平面所作的锥构造（先以 $\boldsymbol{w_0}$（$\boldsymbol{f}$）为底，再以 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{s+1}$ 为底）；这些超平面形成了 $P_{\boldsymbol{f}}$ 的单纯三角剖分 $Y_{\boldsymbol{f}}$。$Y_{\boldsymbol{f}}$ 中的超平面分为两组：一组是在使用引理 5.7 的构造中新增的、各自包含参考顶点 $\boldsymbol{w_0}$ 的超平面，另一组是用于形成 $P_{\boldsymbol{f}} \subseteq \boldsymbol{c_0^\perp}$ 的旧$s+1$ 超平面。特别地，每个新超平面和旧半空间都包含 $\boldsymbol{w_0}$。根据基于 (5.17) 的构造，上述 G_K 的面 F_J 来自这样的锥：其底是在 $P_{\boldsymbol{f}}$ 内，取自前一组超平面与包含后一组的半空间之交。任何这样的交集都包含 $\boldsymbol{w_0}$，因此非空。由于每次锥构造都会使交集的维数增加一维[6],，所以这类交集所生成的锥（此时位于 $X_{\boldsymbol{f}}$ 内）不可能是各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$。□

总之，从 C 中排除满足 (5.18) 的法向量，即可消去作为各向同性射线的面 $F_J,\ G_K$。相应地，p_C 被 $p_{C^{\mathrm{reg}}}$ 取代，其中 $\operatorname{supp}(p_C - p_{C^{\mathrm{reg}}}) \subseteq R(C) \cap D_0$。

5.3.2. 多面体锥的不定 θ 函数的模性。结合引理 5.8 和 5.9、定理 5.3 以及推论 5.6，可得。

定理 5.10。假设 (2.7)、$N \geq 5$ 和 (2.15) 成立。令 $C = (\boldsymbol{c_k} \colon 1 \leq k \leq N)$ $N = s+3$ 为 $R(C) \subseteq D_+ \cup D_0$ 的法向量集合。则 $\Theta_{Q,\ p_{C^{\mathrm{reg}}}}$ 定义了一个亚纯函数，其补全是权（正权）至多为 $\binom{s+1}{2}$ 且深度至多为 s 的模形式之和。

注 5.11. 如果 $s+1 \leq 4$，那么运用初等几何，很容易看出，构造 $R_{\boldsymbol{f}}$ 的三角剖分至多需要一个超平面。一般而言，满足所需性质的 $R(C)$ 的单纯分解并非唯一。研究 $\Theta_{Q,p_{C^{\mathrm{reg}}}}$ 的模完备化对单纯分解的依赖性似乎很有趣。

最后讨论 Θ_{Q,χ_C} 的模性。回忆 (3.2)，$\chi(\boldsymbol{\lambda}) = \chi_C(\boldsymbol{\lambda})$，其中

$$\chi_C(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{k=1}^{N} \frac{1 + \operatorname{sgn}(\lambda_k) - \delta(\lambda_k)}{2} - (-1)^N \prod_{k=1}^{N} \frac{1 - \operatorname{sgn}(\lambda_k) - \delta(\lambda_k)}{2}.$$

直接计算可得

$$\chi_C(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{J \subseteq \{1,\dots,N\}} (-1)^{|J|} \prod_{k \in J} \delta(\lambda_k) p_C(\lambda) = \sum_{J \subseteq \{1,\dots,N\}} (-1)^{|J|} \delta_{\langle C_J \rangle^\perp} p_C(\boldsymbol{\lambda}).$$

考虑以下 $\chi_C(\boldsymbol{\lambda})$ 的正则化版本，其中排除了各向同性射线的贡献

$$\chi_C^{\mathrm{reg}}(\boldsymbol{\lambda}) := \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,N\} \\ \langle C_J \rangle^\perp \cap R(C) \neq \langle C_J \rangle^\perp \cap D_0}} \delta_{\langle C_J \rangle^\perp}(\boldsymbol{\lambda}) p_{C^{\mathrm{reg}}}(\boldsymbol{\lambda}). \tag{5.19}$$

[5]对于一般的多面体，其面可能是各向同性射线，也可能是包含该各向同性射线且维数大于一的面。[6]我们采用一种不常见的约定，将空集的维数定义为 -1。

注意，仅通过 p-函数从 C 中移除 $C \cap D_0$ 并不足够，因为各向同性向量可能来自 $R(C^{\mathrm{reg}})$ 的面。根据引理 3.9，上述对指标集 J 的求和等价于对 $R(C)$ 中非各向同性射线的面的求和。

我们终于得到了定理 1.2 中陈述的主要模性结果。

定理 *1.2* 的证明。 根据注 3.5，我们只需考虑 $N \geq 5$。利用χ_C^{reg} 的构造和引理 5.9，可由定理 5.10 的同一证明得到所需结果。□

注 5.12。 我们也可以用同样的方法，类似地证明其他版本的 χ_C 的模性。例如，考虑

$$\chi(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{k=1}^{N} \frac{1+\operatorname{sgn}(\lambda_k)+\delta(\lambda_k)}{2} - (-1)^N \prod_{k=1}^{N} \frac{1-\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\lambda}_k)-\delta(\lambda_k)}{2}.$$

直接计算可得

$$\chi(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,N\}} 2^{-|J|} \prod_{k\in J} \delta(\lambda_k) p_{C_{J^c}}(\lambda) = \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,N\}} 2^{-|J|} \delta_{\langle C_J\rangle^\perp} p_{C_{J^c}}(\boldsymbol{\lambda}).$$

再次应用推论 *5.6*，即可证明$\Theta_{Q,\ \chi_C^{\mathrm{reg}}}$ 的模性。

例 5.13。 考虑一个角度如下的五边形 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_4 = \theta_5 = \frac{2\pi}{3}$ 。

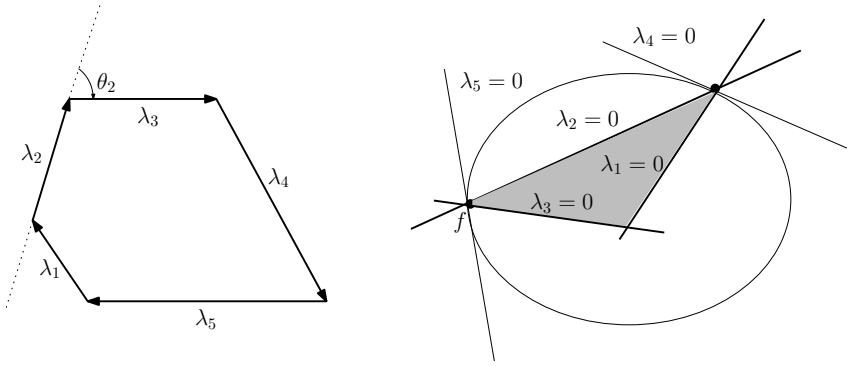

FIGURE 6. 左图显示了五边形，右图显示了命题 3.6 中区域 Δ的一个截面。

选取 $\lambda_j (1 \leq j \leq 3)$ 作为独立参数，式 (2.5) 中的向量 $\boldsymbol{v}$和 $\boldsymbol{w}$分别为 $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)^T$和 $\boldsymbol{w} = (0, 1, 1)^T$。式 (2.6) 中的矩阵为

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

相应地，引理 *2.2* 给出的二次型为

$$Q(\boldsymbol{\lambda}) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \frac{\lambda_2^2}{2}\right).$$

(2.7) 中的正性条件满足；根据例 *2.8* 中的计算，引理 *2.7* 和 (2.15) 中的条件也都满足。事实上，我们取 $P = (\sin(\frac{\pi}{3}))^{-\frac{1}{2}}$单位矩阵 和 $S = (\sin(\frac{\pi}{3}))^{-\frac{1}{2}}$单位矩阵，于是

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.5) 中的法向量为

$$\boldsymbol{c_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{e_3},\quad \boldsymbol{c_5}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{e_1}.$$

它们满足 $Q(\boldsymbol{c_1})=Q(\boldsymbol{c_2})=Q(\boldsymbol{c_3})=-\frac{1}{2}, Q(\boldsymbol{c_4})=Q(\boldsymbol{c_5})=0$。特别地，对于 $k\in\{4,5\}$，$\boldsymbol{c_k}^{\perp}\cap R(C)=\boldsymbol{c_k}^{\perp}\cap R(C)\cap D_0$。例如，考虑由 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 给出的各向同性射线 $\mathbb{R}\boldsymbol{f}$，也就是说，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e_1}$。对于这条射线，引理 *3.11* 中的子集 $\mathcal{E}_1$ 为 $\mathcal{E}_1=\{\boldsymbol{c_2},\boldsymbol{c_3}\}$，而其中的 $\mathcal{E}_1^-$ 可以取为 $\{\boldsymbol{c_2}\}$ 或 $\{\boldsymbol{c_3}\}$。根据定义，我们有 $C^{\mathrm{reg}}=\{\boldsymbol{c_1},\boldsymbol{c_2},\boldsymbol{c_3}\}$。

通过插入法向量为 $\boldsymbol{c_0}=\boldsymbol{c_1}-r\boldsymbol{c_3}$ 且满足 $r\in\mathbb{Q}^+$ 的超平面，可以得到一个满足假设 *4.4* 的单纯分解。相应地，我们有 $\lambda_0=\lambda_1-r\lambda_3$。由此得到的两个较小单纯多面体的法向量集合分别为 $C_{023}:=\{\boldsymbol{c_0},\boldsymbol{c_2},\boldsymbol{c_3}\}$ 和 $C_{021}:=\{\boldsymbol{c_0},\boldsymbol{c_2},\boldsymbol{c_1}\}$。我们有

$$p_C(\boldsymbol{\lambda})=\prod_{k=1}^{5}\tfrac{1+\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}-(-1)^5\prod_{k=1}^{5}\tfrac{1-\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2},\quad p_{C^{\mathrm{reg}}}(\boldsymbol{\lambda})=\prod_{k=1}^{3}\tfrac{1+\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}-(-1)^3\prod_{k=1}^{3}\tfrac{1-\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}p_{C^{\mathrm{reg}}}(\boldsymbol{\lambda})&=p_{C^{\mathrm{reg}}}(\boldsymbol{\lambda})\left(\frac{1+\mathrm{sgn}(\lambda_0)}{2}+\frac{1-\mathrm{sgn}(\lambda_0)}{2}\right)\\&=\left(\prod_{k=0}^{3}\frac{1+\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}-(-1)^3\prod_{k=0}^{3}\frac{1-\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}\right)\\&\qquad+\left(\prod_{k=1}^{3}\frac{1+\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}\frac{1-\mathrm{sgn}(\lambda_0)}{2}-(-1)^3\prod_{k=1}^{3}\frac{1-\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}\frac{1+\mathrm{sgn}(\lambda_0)}{2}\right).\end{aligned}$$

第一项为

$$\begin{aligned}&\prod_{k\in\{0,2,3\}}\frac{1+\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}\frac{1+\mathrm{sgn}(\lambda_1)}{2}-(-1)^3\prod_{k\in\{0,2,3\}}\frac{1-\mathrm{sgn}(\lambda_k)}{2}\frac{1-\mathrm{sgn}(\lambda_1)}{2}\\&=p_{C_{023}}\left(1-\frac{1}{2}\delta(\lambda_1)\right)=p_{C_{023}}-\frac{1}{2}p_{C_{023}}\delta(\lambda_3)\delta(\lambda_0).\end{aligned}$$

类似地，第二项为 $p_{C_{021}}-\frac{1}{2}p_{C_{021}}\delta(\lambda_1)\delta(\lambda_0)$。将两者合并，我们得 ve

$$p_{C^{\mathrm{reg}}}=p_{C_{023}}+p_{C_{021}}-\frac{1}{2}p_{C_{023}}\delta(\lambda_3)\delta(\lambda_0)-\frac{1}{2}p_{C_{021}}\delta(\lambda_1)\delta(\lambda_0)=p_{C_{023}}+p_{C_{021}}-p_{C^{\mathrm{reg}}}\delta(\lambda_3)\delta(\lambda_1).$$

$p_{C^{\mathrm{reg}}}\delta(\lambda_3)\delta(\lambda_1)$ 对 $\Theta_{Q,p_{C^{\mathrm{reg}}}}$ 的贡献给出雅可比 *theta* 函数，且与 $r\in\mathbb{Q}^+$ 的选择无关。

Appendix A. deformations of polygons with fixed angles

条件 $\theta_k\neq 0,\lambda_k\neq 0, 1\le k\le N$ 以及 (2.1) 为 $\theta_k,\lambda_k (1\le k\le N)$ 构成一个 N 边形提供了充要条件。该多边形可以是非凸的，甚至可以是复多边形（即非相邻边相交的多边形），其中外角的定义适当。根据初等几何，构成凸 N 边形的充要条件是

$$\sum_{m=0}^{\ell-1}\lambda_{k+m}e^{-i\sum_{a=0}^{m}\theta_{k+a}}\times e^{-0\cdot i}>0,\qquad (1\le k\le N, 1\le \ell\le N-2),$$

or

$$\sum_{m=0}^{\ell-1} \lambda_{k+m} e^{-i\sum_{a=0}^{m}\theta_{k+a}} \times e^{-0\cdot i} < 0, \qquad (1 \le k \le N, 1 \le \ell \le N-2)\,.$$

接下来讨论使 N 边形不是简单多边形的条件。对于 $N=3$，所有 N 边形都是简单的。因此我们假设 $N \ge 4$。同样，根据初等几何，很容易看出，当且仅当存在 $1 \le k \le N$ 和 $t \in (0,1]$，使得

$$\left(t\lambda_{k-1} + \lambda_k e^{-i\theta_k}\right) \times \left(\lambda_{k+1} e^{-i(\theta_k+\theta_{k+1})}\right) = 0.$$

这可以简化为如下形式:

$$\text{there exist } 1 \le k \le N,\ t \in (0,1]\,,\ \text{such that } t\lambda_{k-1}\sin(\theta_k+\theta_{k+1}) + \lambda_k \sin(\theta_{k+1}) = 0.$$

引理 2.2 中推导出的公式是 N 边形的有向面积。对于简单多边形，它始终非零；而对于复多边形，则可能为零。正如面积被定义为有向面积（通过叉积计算）一样，长度 λ_k 也可以相对于原始定向 $e^{-i\varphi_k}$ 定义为有向长度。

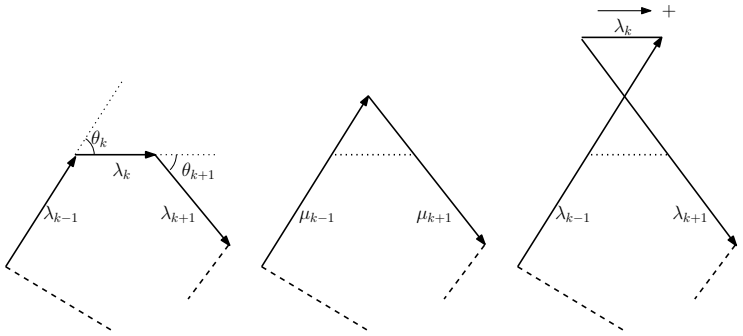

FIGURE 7. 凸 N 边形的变形。中间的是面积为 Q_0 的凸（$N-1$）边形，最右侧的是复 N 边形。

考虑固定角 $\theta_k, 1 \le k \le N$ 并改变有向边长 $\lambda_k\,(1 \le k \le N)$ 时凸多边形的变形。假设

$$\theta_k > 0\,, \quad \theta_{k+1} > 0\,, \quad \theta_k + \theta_{k+1} < \pi\,, \tag{A.1}$$

对于某个 k。当 $\lambda_k \to 0$ 时，凸 N 边形退化为一个角为 $\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}, \theta_k+\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \cdots, \theta_N$ 的（$N-1$）边形，如引理 3.2 所述。原凸 N 边形的有向面积（例如取正值）$Q(\lambda_1, \cdots, \lambda_N;\ \theta_1, \cdots, \theta_N)$ 变为正数

$$Q_0 := Q(\mu_1, \cdots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \cdots, \mu_N; \theta_1, \cdots, \theta_{k-1}, \theta_k+\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \cdots, \theta_N).$$

随着有向长度 λ_k 持续减小至负值，这个 $(N-1)$-多边形会变成一个非简单多边形，其角 θ_k, $1 \le k \le N$ 保持不变。有向面积变为

$$-\frac{\sin(\theta_k)\sin(\theta_{k+1})}{2\sin(\theta_k+\theta_{k+1})}\lambda_k^2 + Q_0\,;$$

示意图见图7。随后，可以将凸 N边形面积的表达式 $Q(\lambda_1, \cdots, \lambda_N;\ \theta_1, \cdots, \theta_N)$ 扩展为一个关于变量 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 和参数 $\theta_1, \cdots, \theta_N$ 的二次型。上述几何考量表明，当 k 满足 (A.1) 中的条件时，二次型的符号会在 λ_k 的这些取值处发生跳变，使得

$$-\frac{\sin(\theta_k)\sin(\theta_{k+1})}{2\sin(\theta_k+\theta_{k+1})}\lambda_k^2 + Q_0 = 0.$$

任何非相邻边交于非顶点处的复多边形，都可以通过反复逆转上述变形过程变形为凸多边形。此外，从一个凸 N边形出发，相应二次型在任意λ_k $(1 \le k \le N)$ 处的值，都可以表示为某个变形后多边形的有向面积，且该多边形的边数不超过N 。非凸情形也可类似处理。

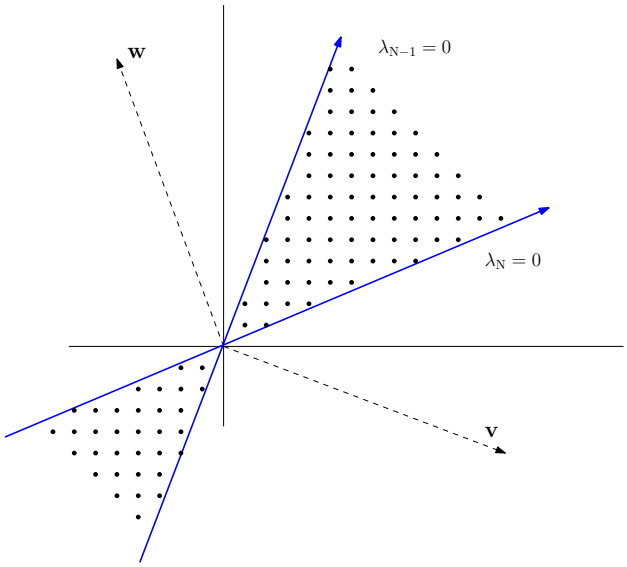

FIGURE 8. 固定角度下的 $\mathbb{R}^{N-2}$ 上的不同区域。锥的内部由简单的 N 边形以及可能存在的复多边形（取决于凸性）组成；锥的边界表示具有 $n \le N-1$ 的 n 边形，而锥的闭包的补集由复多边形和具有负向定向的多边形组成。

例 A.1. 考虑如例 *1.3* 中对等腰梯形的枚举。比较$\widehat{\ }$ $f(\boldsymbol{z})$ 和 $f(\boldsymbol{z})$的表达式，我们看到，模完备化可以看作是对梯形的加权计数，其权由符号函数和误差函数 E共同指定；其中，不仅简单梯形（即满足 $\chi(\boldsymbol{n} + \frac{\boldsymbol{y}}{v}) \neq 0$ 的梯形）作出贡献，所有可能的$\boldsymbol{n}$ 也都作出贡献。两者之差是以互补误差函数加权的计数

$$\widehat{f}(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n_1^2}{2}} e^{2\pi i n_1 z_1} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \left(\operatorname{sgn}(-n_2) - E\left(-n_2\sqrt{2v}\right) \right) q^{-\frac{n_2^2}{2}} e^{-2\pi i n_2 z_2}.$$

回忆一下，多边形的面积为 $\frac{1}{2}(n_1^2 - n_2^2)$；直观地说，上述差值是复多边形以及具有负向定向的多边形所作出的贡献；图 *7* 和图 *8* 展示了可视化结果。我们预期，更一般多边形的计数函数也存在类似现象。

REFERENCES

[1] S. Alexandrov、S. Banerjee、J. Manschot 和 B. Pioline, *Indefinite theta series and generalized error functions*, Selecta Mathematica New Series **24** (2018), 3927。[2] K. Bringmann、J. Kaszian 和 L. Rolen, *Indefinite theta functions arising in Gromov–Witten theory of elliptic orbifolds*, Cambridge J. Math. ( ), –。**6** 2018 25 57

[3] K. Bringmann、J. Kaszian 和 J. Zhou, *Generating functions of planar polygons from homological mirror symmetry of elliptic curves*, Research in Number Theory：( )。**6 28** 2020

[4] K. Bringmann、L. Rolen 和 S. Zwegers, *On the modularity of certain functions from Gromov-Witten theory of elliptic orbifolds*, Royal Soc. Open Sci. ( ), 。**2** 2015 150310

[5] J. Funke 和 S. Kudla, *Theta integrals and generalized error functions, II*, Compositio Math. 155 (2019), 1711–1746。[6] L. G¨ottsche 和 D. Zagier, *Jacobi forms and the structure of Donaldson invariants for 4-manifolds with $b_+ = 1$*, Selecta Math. 4 (1998), 69。[7] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, ICM会议论文集 2 (1994), 120–139, 巴塞尔, 1995。Birkhauser。[8] S. Lau 和 J. Zhou, *Modularity of open Gromov-Witten potentials of elliptic orbifolds*。Commun. Number Theory Phys. 9 (2015), 345–385。[9] C. Nazaroglu, *r-Tuple error functions and indefinite theta series of higher-depth*, Commun. Number Theory Phys. 12 (2018), 581–608。[10] A. Polishchuk, *Homological mirror symmetry with higher products*, AMS/IP Adv. Math. 23 (2001), 247–260。[11] A. Polishchuk, *MP Appell's function and vector bundles of rank 2 on elliptic curves*, Ramanujan J. 5 (2001), 111–128。[12] A. Polishchuk, *Indefinite theta series of signature (1, 1) from the point of view of homological mirror symmetry*。Adv. Math. 196 (2005), 1–51。[13] A. Polishchuk, *A_∞-structures on an elliptic curve*, arXiv:math/0001048。[14] A. Polishchuk 和 E. Zaslow, *Categorical Mirror Symmetry: The Elliptic Curve*, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998), 443–470。[15] M.-F. Vign´eras, *Séries thêta des formes quadratiques indéfinies*, Springer讲义 (1977), 627, 227–239。[16] D. Zagier, *Periods of modular forms and Jacobi theta functions*。Invent. math. 104, 449–465 (1991)。[17] S. Zwegers, *Mock theta functions*, 博士论文, 乌得勒支大学 (2002)。

University of Cologne, Department of Mathematics and Computer Science, Weyertal 86-90, 50931Cologne, Germany*Email address*: kbringma@math.uni-koeln.de*Email address*: jkaszian@math.uni-koeln.de

Jie Zhou, Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China
Email address: jzhou2018@mail.tsinghua.edu.cn