arXiv:2301.00919v1 [math.AP] 3 Jan 2023

Vlasov–Poisson–Landau 系统的无质量电子极限

PATRICK FLYNN 和 YAN GUO

Abstract. 由于离子-电子碰撞，无法将离子和电子的 Vlasov-Poisson-Landau 系统直接取流体力学极限，推导出等离子体的任何双流体模型。与此同时，电子的质量远小于离子。在本文中，我们推导了 Vlasov-Poisson-Landau 系统的无质量电子极限。具体做法是对电子速度进行重新缩放，从而得到多个速度尺度。重要的是，我们证明，由于 Landau 碰撞的特殊结构，离子-电子碰撞在此极限下消失。我们还表明，对于具有硬球相互作用的经典 Boltzmann 核，这一结论并不成立。这一机制是从双组分动理学方程推导离子双流体模型的第一步。

Contents

1. 引言 2 1.1. 缩放后的 Vlasov-Poisson-Landau 系统 3 1.2. 主要结果 5 1.3. 方法与概要 7 2. 形式分析 9 2.1. Vlasov-Poisson-Landau 系统的无量纲化 9 2.2. 离子方程的形式推导 11 2.3. Boltzmann 情形 13 3. 预备知识 16 3.1. 适定性 16 3.2. 扩散矩阵的上下界 16 4. 离子分布的估计 19 4.1. 离子分布的有界性 19 4.2. 离子分布的误差估计 25 4.3. 中间量 28 5. 电子分布的估计 33 5.1. 麦克斯韦分布的稳定性 33 5.2. 设定 34 5.3. 初步估计 36 5.4. 能量估计 39 5.5. 宏观估计 45 5.6. 命题 5.1 的证明 59 6. 定理 1.1 的证明 60 参考文献 66

1. Introduction

等离子体是由快速运动的带电粒子构成的集合。人们认为，宇宙中超过 95% 的物质都以等离子体的形式存在。此外，研究等离子体的一大动力是将核聚变作为能源生产手段。由于等离子体的性质复杂而丰富，用于描述不同物理状态区间中等离子体的模型主要分为三个不同类别（动理学、双流体和磁流体力学）。双流体模型（欧拉-泊松系统和欧拉-麦克斯韦系统）描述两种不同且彼此分离的可压缩离子流体和电子流体与其自洽电磁场相互作用的动力学。这类双流体模型在物理和数学上都十分重要，是许多著名色散偏微分方程的起源，例如 KdV方程 [4,32],非线性薛定谔方程 [31], Zakharov方程 [33], 等等。

从更基础的等离子体动力学模型推导并论证双流体理论，是一个重要问题。考虑一个描述离子和电子的经典动力学模型——Vlasov-Poisson-Landau 系统，该系统描述离子（+）和电子（−）的分布函数 $F_+(t,x,v)$ 和 $F_-(t,x,v)$:

$$\begin{aligned}\{\partial_t + v\cdot\nabla_x + \frac{Z\mathsf{e}}{m_+}E\cdot\nabla_v\}F_+ &= 2\pi\mathsf{e}^4\ln(\Lambda)\{Z^4Q_{++}(F_+,F_+)+Z^2Q_{-+}(F_-,F_+)\},\\ \{\partial_t + v\cdot\nabla_x - \frac{\mathsf{e}}{m_-}E\cdot\nabla_v\}F_- &= 2\pi\mathsf{e}^4\ln(\Lambda)\{Q_{--}(F_-,F_-)+Z^2Q_{+-}(F_+,F_-)\},\\ -\Delta_x\phi &= 4\pi\mathsf{e}(Zn_+ - n_-).\end{aligned} \tag{1.1}$$

在上式中，e 是电子电荷，[1] 而 Z 是离子种类的原子序数。离子和电子质量分别为 m_+ 和 m_- 。这些分布函数满足以下系统。我们还定义密度$n_\pm = \int_{\mathbf{R}_3} F_\pm dv$、电势 ϕ、电场E : $= -\nabla_x\phi$以及 Landau碰撞算子 Q_{++}、 Q_{-+}、 Q_{--} 和 Q_{+-} （见下文第2.1 节中的列表）。关于这些模型的物理依据，请参阅 [28], 以及 [2] 第 2 章。

众所周知，任何直接的流体极限都必然导出

$$Z^4Q_{++}(F_+,F_+)+Z^2Q_{-+}(F_-,F_+)=0, \tag{1.2}$$

$$Q_{+-}(F_+,F_+)+Z^2Q_{--}(F_-,F_+)=0. \tag{1.3}$$

然而，由于离子与电子之间存在相互作用 Q_{+-} 和 Q_{-+}，上述方程唯一可能的解具有以下形式[2]

$$F_+ = n_+(\frac{m_+}{2\pi T})^{3/2}\exp\left(-\frac{m_+|v-u|^2}{2T}\right), \tag{1.4}$$

$$F_- = n_-(\frac{m_-}{2\pi T})^{3/2}\exp\left(-\frac{m_-|v-u|^2}{2T}\right). \tag{1.5}$$

在这里，电子流体和离子流体具有相同的速度 $u(t,\ x)$和温度 $T(t,\ x)$，这排除了从(1.1)证明任何双流体模型合理性的可能性。不过，众所周知，在忽略离子-电子碰撞 Q_{+-} 和 Q_{-+} 的情况下，可以从双物种动力学方程推导出双流体模型。这一工作是在 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的背景下完成的[21–23], ，近期也针对单物种Landau型方程进行了研究

[1]请勿将其与数学常数 $e\approx 2.718$混淆。[2]参见 [28]中的方程 (40)。

方程 [11,30]。我们还特别提及 [3], 这项工作：它先推导出无质量电子极限，再推导出 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的流体极限。这为我们的研究提供了重要启发。不过，值得注意的是，这些工作都没有考虑物种间碰撞。

在所有物理情形中，电子质量 m_- 远小于离子质量 m_+。例如，对于氢等离子体，$\frac{m_-}{m_+} \approx 0.005$ 。从物理和数学角度来看，这一小参数已被应用于等离子体研究的不同领域。例如，在这一极限下，可以推导出离子的 Euler-Poisson 系统 [14]。令电子质量趋于零后，电子的密度（进而静电势）便完全由离子的密度决定。这样就无需分别对电子求解流体方程或动理学方程，从而得到一个更简单的模型。

当离子和电子接近热平衡（例如，温度为 1）时，典型离子速度与 $(\frac{1}{m_+})^{\frac{1}{2}}$, 相当，而典型电子速度与 $(\frac{1}{m_-})^{\frac{1}{2}}$ 相当。由于速度尺度差异悬殊，有必要引入参数$\varepsilon := (\frac{m_-}{m_+})^{\frac{1}{2}}$，以及重新标度后的电子速度

$$\xi = \varepsilon v. \tag{1.6}$$

对系统（1.1）应用这一重标度后，可得到下面的重标度系统（1.7）。此时，离子-电子碰撞呈现出两个速度尺度。我们的主要结果是，通过在双尺度系统中取极限$\varepsilon \to 0$ ，我们可以推导出下面的无质量电子系统（1.18）。这一推导所得方程的一个显著特点是不再包含离子-电子碰撞。我们希望这项工作能为今后推导离子的 Euler-Poisson 系统扫清道路。为此，首先取 $\varepsilon \to 0$，然后取流体力学极限 $\kappa \to 0$，其中 $\kappa > 0$ 是本系统中 Knudsen 数的对应量。

除了与流体极限相关之外，动理学理论中的无质量电子极限本身也具有独立的研究价值。已有不少研究处理了这一极限的某些形式。例如， [9,10] 对具有悬殊质量的粒子系统，给出了含 Boltzmann 碰撞和（非库仑）Landau 型碰撞的动理学方程的形式展开，其中包括交叉碰撞项。研究[6,27], 则推导了带线性 Fokker-Planck 碰撞的 Vlasov-Poisson 系统的无质量电子极限（后一种情形还包含磁场）。上述研究 [3] 推导出了 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统中与（1.18）对应的方程。我们注意到，该研究要求满足正则性假设，且不包含离子-电子碰撞。

关于含无质量电子的 Vlasov-Poisson 系统的研究也日益增多。相关内容请参阅 [5,7,13,15–18,24–26] 以及其中的参考文献。特别是，综述 [16] 对含 Landau 碰撞项的系统进行了形式推导。

1.1. 缩放后的 Vlasov-Poisson-Landau 系统。 在第 2.1 节中，我们对系统（1.1）进行了缩放过程。特别地，我们采用了前文所述的缩放后的电子速度 $\xi = \varepsilon v$。该系统依赖于三个正参数：$\kappa > 0$ （定义于第 2.1 节）、原子序数 Z，以及 $\varepsilon = \left(\frac{m_-}{m_+}\right)^{\frac{1}{2}}$。分布函数的缩放形式

$F_+^\varepsilon(t,x,v)$ 和 $F_-^\varepsilon(t,x,\xi)$ 随后满足该系统

$$\begin{aligned}\{\partial_t + v\cdot\nabla_x + ZE^\varepsilon\cdot\nabla_v\}F_+^\varepsilon &= \kappa^{-1}\{Z^3Q(F_+^\varepsilon,F_+^\varepsilon) + Z^2Q_{-+}^\varepsilon(F_-^\varepsilon,F_+^\varepsilon)\},\\ \{\varepsilon\partial_t + \xi\cdot\nabla_x - E^\varepsilon\cdot\nabla_\xi\}F_-^\varepsilon &= \kappa^{-1}\{Q(F_-^\varepsilon,F_-^\varepsilon) + ZQ_{+-}^\varepsilon(F_+^\varepsilon,F_-^\varepsilon)\},\\ -\Delta_x\phi^\varepsilon &= 4\pi(n_+^\varepsilon - n_-^\varepsilon)\end{aligned} \tag{1.7}$$

上文中，ϕ^ε 和 $E^\varepsilon = -\nabla_x\phi^\varepsilon$ 分别是电势和电场。函数$n_\pm(t,x)$是电荷密度，定义如下：

$$n_+^\varepsilon = \int_{\mathbf{R}^3} F_+^\varepsilon dv, \quad n_-^\varepsilon = \int_{\mathbf{R}^3} F_-^\varepsilon d\xi. \tag{1.8}$$

碰撞算子定义如下：

$$Q(G_1,G_2) = \nabla_v\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(v-v')\left\{G_1(v')\nabla_v G_2(v) - G_2(v)\nabla_{v'}G_1(v')\right\}dv', \tag{1.9}$$

$$Q_{-+}^\varepsilon(G_1,G_2) = \nabla_v\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(\varepsilon v-\xi')\left\{\varepsilon G_1(\xi')\nabla_v G_2(v) - G_2(v)\nabla_{\xi'}G_1(\xi')\right\}d\xi', \tag{1.10}$$

$$Q_{+-}^\varepsilon(G_1,G_2) = \nabla_\xi\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(\xi-\varepsilon v')\left\{G_1(v')\nabla_\xi G_2(\xi) - \varepsilon G_2(\xi)\nabla_{v'}G_1(v')\right\}dv'. \tag{1.11}$$

这里，Φ 给出朗道碰撞核：对于每个 $z\in\mathbf{R}^3$,

$$\Phi(z) := \frac{1}{|z|}\left(I - \frac{z\otimes z}{|z|^2}\right). \tag{1.12}$$

从本文这里开始，我们只考虑 $Z=\kappa=1$ 的情形，并固定区域 $(x,v)\in\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3,$，其中 $\mathbf{T}^3=(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^3$ 表示三维环面。

我们回顾一下，系统 (1.7)满足质量守恒、动量守恒和能量守恒：

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}F_+^\varepsilon dxdv = \frac{d}{dt}\int_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}F_-^\varepsilon dxd\xi = 0, \tag{1.13}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}vF_+^\varepsilon dxdv + \varepsilon\int_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\xi F_-^\varepsilon dxd\xi\right) = 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\frac{|v|^2}{2}F_+^\varepsilon dxdv + \int_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\frac{|\xi|^2}{2}F_-^\varepsilon dxd\xi + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3}|E^\varepsilon|^2dx\right) = 0. \tag{1.15}$$

由（1.7）可知，当 $\varepsilon\to 0$ 时，电子方程中涉及 ∂_t 的项会消失。这是一个奇异极限。在适当条件下，电子分布在每个时刻都形式上收敛到一个平衡解，并根据离子准静态地演化。这些平衡解对 ξ 的依赖关系为麦克斯韦分布（即高斯分布）。我们将麦克斯韦分布记为

$$\mu_q(\xi) := \left(\frac{q}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{q}{2}|\xi|^2}, \quad q>0. \tag{1.16}$$

另一方面，x 依赖关系由电场决定，具体而言，$\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(n_-^\varepsilon)$ 与 $\phi^0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\phi^\varepsilon$ 成正比（相差一个加性常数）。本文的主要结论是，对于某些 $\beta(t)>0$，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_-^\varepsilon(t,x,\xi) = \mu_{\beta(t)}(\xi)e^{\beta(t)\phi^0(t,x)} \tag{1.17}$$

这里， β^0 是逆温度。这被称为 Maxwell-Boltzmann近似。这里，我们将 ϕ^0 平移一个加性常数，以确保 $\int_{\mathbf{T}^3} e^{\beta(t)\phi^0(t,x)}dx = 1$。

上述说法并不精确，因为我们尚未明确说明所作的假设，也未说明该极限成立的意义。然而，在上述条件成立时，对（1.7）取形式极限，并结合能量守恒，可得以下方程，我们称之为离子Vlasov-Poisson-Landau系统：

$$\begin{aligned}
&\{\partial_t + v\cdot\nabla_x - E^0\cdot\nabla_v\}F_+^0 = Q(F_+^0, F_+^0)\\
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{3}{2\beta} + \iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\frac{|v|^2}{2}F_+^0 dxdv + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3}|E^0|^2dx\right\} = 0,\\
&-\Delta_x\phi^0 = 4\pi(n_+^0 - e^{\beta\phi^0}).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

该系统的形式推导见第 2.2 节。

1.2. 主要结果。 本文旨在证明，对于适当的初始数据，这一形式极限在一个较短的时间区间内成立。我们首先针对一般初始数据，给出系统（1.7）和（1.18）的局部适定性定理。为此，我们必须先定义能够体现碰撞核耗散率的函数空间。我们定义矩阵 $\sigma_{ij}(v) = \Phi_{ij} * \mu$，其中 $i, j \in \{1,2,3\}$。给定 $u \in \mathbf{R}^3,$，我们有

$$u^T\sigma(v)u \sim \frac{1}{\langle v\rangle^3}|P_v u|^2 + \frac{1}{\langle v\rangle}|P_{v^\perp}u|^2 \tag{1.19}$$

这里，$\langle\cdot\rangle = \sqrt{1+|\cdot|^2}$ 是日式括号。矩阵 P_v 和$P_{v^\perp}$ 分别表示到 span$\{v\}$ 和 $\{v\}^\perp$ 上的正交投影。利用该矩阵，我们定义以下空间，以刻画各种碰撞算子产生的耗散。令 $\mathcal{H}_\sigma$表示带有如下内积的希尔伯特空间（其中 $\psi = \psi(v)$ $\zeta = \zeta(v)$

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 = \langle\sigma_{ij}\partial_{v_i}\psi, \partial_{v_j}\psi\rangle_{L^2} + \langle \mathrm{tr}(\sigma)\psi, \psi\rangle_{L^2} \tag{1.20}$$

在本文中，我们始终使用重复指标记号，即 $u_k u_k' = \sum_{k=1}^3 u_k u_k'$，其中 u、$u' \in \in\mathbf{R}^3$为任意两个向量。上述内积刻画了在麦克斯韦分布[8, 19, 20]附近线性化时自碰撞所对应的耗散。我们还定义半范数

$$\|\psi\|_{\dot{\mathcal{H}}_\sigma}^2 = \langle\sigma_{ij}(v)\partial_{v_i}\psi, \partial_{v_j}\psi\rangle_{L_v^2} \tag{1.21}$$

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^+}^2 = \varepsilon\langle\sigma_{ij}(\varepsilon v)\partial_{v_i}\psi, \partial_{v_j}\psi\rangle_{L_v^2} \tag{1.22}$$

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^-}^2 = \frac{1}{\varepsilon}\langle\sigma_{ij}(\frac{v}{\varepsilon})\partial_{\xi_i}\psi, \partial_{\xi_j}\psi\rangle_{L_\xi^2}. \tag{1.23}$$

利用这些范数，我们现在通过用于控制 $F_\pm$ 的（半）范数来定义空间 $\mathfrak{E}$、 $\mathfrak{D}$ 和 $\mathfrak{D}_\varepsilon^\pm$。固定参数 $m_k = 5(k+1)$，其中 $k \in \{0,1,2\}$，以及 $s = 3$。[3] 给定$u = u(x, v)$ （或 $u = u(x, \xi)$），我们定义

$$\|u\|_{\mathfrak{E}}^2 := \|\langle v\rangle^{m_2}u\|_{L_{x,v}^2}^2 + \|\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s u\|_{L_{x,v}^2}^2, \tag{1.24}$$

$$\|u\|_{\mathfrak{D}}^2 := \|\langle v\rangle^{m_2}u\|_{L_x^2(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}^2 + \|\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s u\|_{L_x^2(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}^2, \tag{1.25}$$

$$\|u\|_{\mathfrak{D}_\varepsilon^\pm}^2 := \|\langle v\rangle^{m_2}u\|_{L_x^2(\dot{\mathcal{H}}_\sigma\cap\mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^\pm)_v}^2 + \|\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s u\|_{L_x^2(\dot{\mathcal{H}}_\sigma\cap\mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^\pm)_v}^2. \tag{1.26}$$

[3]尽管 这些参数可能取一系列不同的值，但将它们固定为确切的常数会更简单。

注意，作为空间， $\mathfrak{D}$ 和 $\mathfrak{D}^{\pm}_{\varepsilon}$ 相同。不过，这些范数仅在相差一个常数的意义下相似，而该常数在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于无穷大。

为陈述主定理，我们还将使用以下空间来度量离子分布中的误差：

$$\|u\|^2_{\mathfrak{E}'} := \|\langle v\rangle^{m_1} u\|^2_{L^2_{x,v}} + \|\langle v\rangle^{m_0}\langle \nabla_x\rangle^s u\|^2_{L^2_{x,v}}, \tag{1.27}$$

$$\|u\|^2_{\mathfrak{D}'} := \|\langle v\rangle^{m_1} u\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} + \|\langle v\rangle^{m_0}\langle \nabla_x\rangle^s u\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}. \tag{1.28}$$

最后，为了度量 F^{ε}_{-} 与其极限之间的距离，我们令 $\eta > 0$ 为稍后确定的一个常数，并对每个 $\alpha \in \{1,2,3\}$定义 $q_\alpha = e^{\alpha\eta}\beta_{in}$，其中 $\beta_{in} = \beta(0)$。于是，对 $\alpha \in \{1,2\}$，我们定义

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^{\varepsilon}_{-,\alpha} := {} & \|e^{q_\alpha|\xi|^2/4}\langle\nabla_x\rangle^s\{F^{\varepsilon}_{-} - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}\}\|^2_{L^2_{x,\xi}} \\ & + \|e^{q_{\alpha+1}|\xi|^2/4}\{F^{\varepsilon}_{-} - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}\}\|^2_{L^2_{x,\xi}}\end{aligned} \tag{1.29}$$

and

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^{\varepsilon}_{-,\alpha} := {} & \|e^{q_\alpha|\xi|^2/4}\langle\nabla_x\rangle^s\{F^{\varepsilon}_{-} - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}\}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \\ & + \|e^{q_{\alpha+1}|\xi|^2/4}\{F^{\varepsilon}_{-} - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}\}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}.\end{aligned} \tag{1.30}$$

此外，在本文余下部分，我们将使用下标“in”表示某个量的初始值，例如，$\phi^0_{in}(x) = \phi^0(0,x)$。

现在可以陈述主定理：

定理 1.1. 假设对于某些 $T_0 > 0$ 和 $M > 0$，方程 (1.7)存在一个弱解 (F^0_+, β, ϕ^0)，且满足 $0 \le F^0_+ \in C([0,T_0];\ \mathfrak{E}) \cap L^2([0,T_0];\ \mathfrak{D})$、$\beta \in C([0,T_0])$ 以及 $\phi^0 \in C([0,T];\ H^{s+2})$，其中

$$\sup_{t\in[0,T_0]}\{\|\frac{1}{n^0_+}\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{T}^3)} + \|F^0_+\|_{\mathfrak{E}}\} + \|\ln(\beta(t))\|_{L^\infty([0,T_0])} \le M. \tag{1.31}$$

ˆ (i) 存在正定常数 η 和 $\bar{\varepsilon}$，它们仅依赖于 M，以及依赖于 (F^0_+, β, ϕ^0) 的 $T \in [0,T_0]$，使得以下结论成立。对于每个 $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}]$，取 $(F^{\varepsilon}_{+,\ in}, F^{\varepsilon}_{-,\ in})$，其中$0 \le F^{\varepsilon}_{\pm,\ in} \in \mathfrak{E}$ 满足以下估计

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]}\|\frac{1}{n^{\varepsilon}_{+,in}}\|_{L^\infty_x} + \|F^{\varepsilon}_{+,in}\|_{\mathfrak{E}} \le M, \tag{1.32}$$

$$\|F^{\varepsilon}_{+,in} - F^0_{+,in}\|_{\mathfrak{E}'} + \mathscr{E}^{\varepsilon}_{-,2,in} \le M\varepsilon. \tag{1.33}$$

ˆ那么，对于每个 $\varepsilon \in (0,\ \bar{\varepsilon}]$，存在一个解 $(F^{\varepsilon}_+,\ F^{\varepsilon}_-)$ 满足 (1.7)，且 $0 \le F^{\varepsilon}_{\pm} \in C([0,T];\ \mathfrak{E}) \cap L^2([0,\ \hat{T}] \cap \mathfrak{D})$。该解满足

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}]}\|F^{\varepsilon}_+(t) - F^0_+(t)\|_{\mathfrak{E}'} \lesssim_M \varepsilon \tag{1.34}$$

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}]}\varepsilon\mathscr{E}^{\varepsilon}_{-,2}(t) + \int_0^{\hat{T}}\mathscr{D}^{\varepsilon}_{-,2}(t)dt \lesssim_M \varepsilon^2 \tag{1.35}$$

ˆ 此外，对所有 $t \in [0,T]$,

$$\mathscr{E}^{\varepsilon}_{-,1}(t) \lesssim_M \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{C_M}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} + \varepsilon^{\frac{5}{3}}t^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2. \tag{1.36}$$

ˆ (ii) 存在正定常数 η、 δ 和 $\bar{\varepsilon}$，它们依赖于 M；还存在 $T \in (0, T_0]$，它依赖于 (F_+^0, β, ϕ^0) 和 M，使得以下结论成立。对所有 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$，令 $F_{+,\,in}^{\varepsilon} = F_{+,\,in}^{0}$ 和 $F_{-,\,in}^{\varepsilon} = F_{-,\,in}$（其中 $F_{-,\,in}^{\varepsilon}$ 与 ε 无关）满足

$$\mathscr{E}_{-,2,in}^{\varepsilon} \leq \delta. \tag{1.37}$$

注意，左侧的表达式与 ε 无关。我们还对 F_- 的动能施加如下条件:

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} |\xi|^2 F_{-,in} dx d\xi - \frac{3}{2\beta_{in}} + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3} |\nabla_x \phi_{in}|^2 - |\nabla_x \phi_{in}^0|^2 dx = 0. \tag{1.38}$$

ˆ那么，对于每个 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$，存在一个解 $(F_+^{\varepsilon}, F_-^{\varepsilon})$ 满足 (1.7)，且 $0 \leq F_{\pm}^{\varepsilon} \in C([0,T];\ \mathfrak{E}) \cap L^2([0, \hat{T}] \cap \mathfrak{D})$。这满足

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}]} \|F_+^{\varepsilon}(t) - F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'} \lesssim_M \sqrt{\varepsilon}\delta + \varepsilon \tag{1.39}$$

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}]} \varepsilon \mathscr{E}_{-,2}^{\varepsilon}(t) + \int_0^{\hat{T}} \mathscr{D}_{-,2}^{\varepsilon}(t) dt \lesssim_M \varepsilon(\delta^2 + \varepsilon) \tag{1.40}$$

ˆ 此外，对于所有 $t \in [0, T]$,

$$\mathscr{E}_{-,1}^{\varepsilon}(t) \lesssim_M \delta e^{-\frac{1}{C_M}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} + \varepsilon^{\frac{5}{3}} t^{\frac{1}{3}} + \varepsilon\delta. \tag{1.41}$$

注 1.2。 该定理依赖于系统 (1.18)存在解。该系统的局部适定性理论将在一篇即将发表的论文中给出 *[12]*。

1.3. 方法与提纲。 由于双尺度系统（1.7）中的重标度速度 ξ 的性质，Landau核 Q_{+-}^{ε} 在 ξ 趋于 $\varepsilon \to 0$时呈现严重奇异性。这反映了该极限下 Q_{-+}^{ε} 的退化性。因此，很难传递 v 的导数以及 F_+^{ε} 和 ξ 的导数 F_-^{ε}。本文主要的技术成果是在加权Sobolev空间中获得 ε 的一致界，且无需任何 或 ξ 或 v 导数。换言之， v 和 ξ 的所有正则性均来自碰撞算子最高阶部分所提供的扩散控制。

我们重点介绍其中涉及的一些技巧。在引理 3.2 中，我们为 $\Phi * G$（其中 $G \geq 0$）得到了一个非微扰下界，从而可以利用碰撞获得扩散控制。我们遇到的一个难点是，仅凭 $\mathfrak{E}$范数无法对 F_+^{ε}闭合 bootstrap估计。命题 4.1 大致指出，若 F_+^{ε}在 $[0,T]$上大小为 M，那么我们只能断言 F_+^{ε} 在同一区间上的大小为 C_M。一般而言， C_M 可能会随 M指数增长。不过，若再假设 $\|F_+^{\varepsilon}\|_{\mathfrak{D}'}$在该区间上很小，我们就能闭合 bootstrap估计。通过令 T 足够小，使得 $\|F_+^0\|_{\mathfrak{D}'}$尽可能小，再控制差值 $\|F_+^{\varepsilon} - F_+^0\|_{\mathfrak{D}'}$，便可对 ε 一致地做到这一点。我们通过命题 4.2 中的误差估计来实现这一点。

接下来的挑战是控制差值 $F_-^{\varepsilon} - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}$。这大致就是命题 5.1 的内容，不过我们处理的是所谓的“中间量”（$\gamma^{\varepsilon}, \psi^{\varepsilon}$），而不是（$\beta, \phi^0$）。该命题借助 [19, 20] 中建立的框架，利用线性化碰撞算子的线性衰减估计。由于（ ∂_t 1.7）第二行中 F_-^{ε} 项前的参数很小，$\mu_{\gamma^{\varepsilon}} e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}$ 收敛到麦克斯韦分布$\mu_{\gamma^{\varepsilon}} e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}$ 的问题，在某种意义上等价于麦克斯韦分布的渐近稳定性问题。然而，在我们的情形中还存在若干复杂之处。首先，底层的麦克斯韦分布

具有变化的温度。为处理这一点，我们选取一个时间窗口，使得 $\gamma^\varepsilon \approx \beta_{in}$，并选择 $q_1 < q_2 < q_3$（时间常数）使其足够接近 β_{in}，然后改用这些常数进行处理。这会得到 [19,20] 中线性化碰撞算子的一个扰动版本。要证明该算子仍具有所需的强制性，需要谨慎处理。此外，还有离子-电子碰撞算子 Q^ε_{+-}，它在 $\xi = 0$ 处会出现奇异性，当 $\varepsilon \to 0$ 时。为控制这一点，我们利用引理 3.2 提取出一个耗散性但带有奇异性且退化的最高阶部分。随后，我们利用 Q 线性化所产生的耗散来控制奇异的低阶项。

线性化碰撞算子的一个关键特征是其核为五维，对应于质量、动量和能量密度等宏观量。除了必须处理该算子的一个扰动外，要将先前研究中的宏观估计方法加以调整，还面临其他一些挑战。其中一个问题是 Q^ε_{+-} 对宏观量的影响。令人惊讶的是，这一项对质量和能量密度具有扰动效应，甚至会对动量密度产生额外的阻尼效应（见引理5.6）。第二个挑战是如何控制扰动的平均能量。 $F^\varepsilon_- - \mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon \psi^\varepsilon}$ 的平均动能密度并不守恒，并且在 $F^\varepsilon_- - \mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon \psi^\varepsilon}$ 方程的线性化层面上对应于一个中性模态。相比之下，宏观量的所有其他分量要么守恒，要么通过次强制效应耗散。在定理 1.1的（i）部分中，由于平均能量初始时很小，我们可以对其加以控制。在（ii）部分中，我们必须施加条件（1.38），并使用一些非线性恒等式来控制平均能量密度，如命题 5.7的第一步所示。因此必须使用中间量（γ^ε，ψ^ε），而不是（β，ϕ^0），因为 $\frac{3}{2\gamma^\varepsilon}$ 比 F^ε_- 更能近似 $\frac{3}{2\beta}$ 的平均动能。

本文的结构如下。第 2 节包含本文所有的形式分析。在第 2.1 节，我们推导重标度系统（1.7）。在第 2.2节，我们从（1.7）对系统（1.18）进行形式推导。在第 2.2节，我们说明在 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的背景下，类似的推导为何行不通，并着重指出定义极限系统时所面临的困难 $\varepsilon \to 0$。

第 3 节包含本文将用到的两个预备结果。第一个是引理3.1。它陈述了与主定理相容的局部适定性。我们不证明这一结果，因为它可由对本文所示先验估计作直接修改而得。第二个结果是引理 3.2，它给出了$\Phi * G$的上下界。这对于通过范数提取扩散控制尤为重要 $\mathcal{H}_\sigma$，以及 $\mathcal{H}^\pm_{\sigma;\varepsilon^\circ}$。

在第 4 节中，我们证明了关于离子分布 F^ε_+ 的先验估计。首先，命题 4.1 给出了对 $F^\varepsilon_+ \in L^\infty(\mathfrak{E}) \cap L^2(\mathfrak{D})$ 的控制，且该控制关于 ε 一致。接着，命题 4.2 给出了对 $F^\varepsilon_+ - F^0_+ \in L^\infty(\mathfrak{E}') \cap L^\infty(\mathfrak{D}')$ 的一致控制。最后，借助引理 4.3，我们构造中间量 $(\gamma^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$，它们满足下文的系统 (4.139)。这些量的定义方式与 (β, ϕ^0) 相同，只是用 F^ε_+ 替代了 F^0_+。

在第 5 节中，我们证明了命题 5.1，在对解作出某些假设的条件下，该命题给出了电子的误差估计。证明分为两部分：对 $F^\varepsilon_- - \mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon \psi^\varepsilon}$ 的能量估计（见命题 5.4）以及宏观估计（见引理 5.6 和命题 5.7）。

最后，在第 6 节中，我们证明定理 1.1。对于 (i) 和 (ii) 两部分，我们提出五个自举假设，以满足本文各处不同命题所提出的假设。随后我们证明，这些假设可以在一个

与 $\varepsilon > 0$ 无关的时间区间内传播。误差估计由命题 4.2 和5.1 得出。

2. Formal analysis

2.1. Vlasov-Poisson-Landau 系统的无量纲化。 这里，我们展示如何将 Vlasov-Poisson-Landau 系统（1.1）重新缩放为无量纲形式（1.7）。式（1.1）中的碰撞算子为

$$Q_{++}(G_1,G_2)(v) = \frac{1}{m_+^2}\nabla_v \cdot \int_{\mathbf{R}^3} \Phi(v-v')\left\{G_1(v')\nabla_v G_2(v) - G_2(v)\nabla_v G_1(v')\right\} dv', \tag{2.1}$$

$$Q_{-+}(G_1,G_2)(v) = \frac{1}{m_+}\nabla_v \cdot \int_{\mathbf{R}^3} \Phi(v-v')\left\{\frac{1}{m_+}G_1(v')\nabla_v G_2(v) - \frac{1}{m_-}G_2(v)\nabla_v G_1(v')\right\} dv', \tag{2.2}$$

$$Q_{+-}(G_1,G_2)(v) = \frac{1}{m_-}\nabla_v \cdot \int_{\mathbf{R}^3} \Phi(v-v')\left\{\frac{1}{m_-}G_1(v')\nabla_v G_2(v) - \frac{1}{m_+}G_2(v)\nabla_v G_1(v')\right\} dv', \tag{2.3}$$

$$Q_{--}(G_1,G_2)(v) = \frac{1}{m_-^2}\nabla_v \cdot \int_{\mathbf{R}^3} \Phi(v-v')\left\{G_1(v')\nabla_v G_2(v) - G_2(v)\nabla_v G_1(v')\right\} dv', \tag{2.4}$$

为了定义库仑对数，我们假设 F_+ 和 F_- 具有近似相同的温度 $\theta > 0$ （玻尔兹曼常数取为 1）。为了实现电荷平衡，电子的平均单位体积粒子总数为 N，而离子的单位体积粒子总数为 N/Z。为简单起见，可以将 F_+ 和 F_- 视为此类平衡态的扰动，即

$$F_+ \approx \frac{N}{Z}(\frac{m_+}{\theta})^{3/2} e^{-\frac{m_+|v|^2}{2\theta}}, \tag{2.5}$$

$$F_- \approx N(\frac{m_-}{\theta})^{3/2} e^{-\frac{m_-|v|^2}{2\theta}}. \tag{2.6}$$

当 F_+ 和 F_- 均为麦克斯韦分布时，它们是方程（1.1）在 $\phi = 0$下的解。

接下来，在从 BBGKY层级 [2], 推导 Vlasov-Poisson-Landau 系统的过程中，会出现库仑对数 $\ln(\Lambda)$，它源自一个对数发散积分；随后，积分会在模型假设失效的长度尺度处截断。截断方式有多种选择，最常见的一对是大尺度下的德拜长度

$$\lambda_D = \left(\frac{\theta}{4\pi \mathsf{e}^2 N}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

和小尺度下的最近接近距离

$$b_0 = \frac{3\theta}{Z\mathsf{e}^2}. \tag{2.8}$$

由此得到表达式

$$\ln(\Lambda) = \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_0}\right) \tag{2.9}$$

重要的是，$\ln(\Lambda)$ 不依赖于 m_- 或 m_+。遗憾的是，在 $\lambda_D \le b_0$ 的情况下，这一选择并不适用，例如当 N 较大或 θ 较小时，因此需要采用 $\ln(\Lambda)$ 的另一种定义

。就我们的目的而言，我们简单地将 ln(Λ) 取为某个与各质量无关的正参数。

我们为问题定义相关的长度、速度和时间尺度。这使我们能够重新定义一个无量纲方程，该方程取决于三个参数：质量比的平方根、 Z和耗散率。每种物种对应的相关速度尺度为

$$V_{\pm} = (\frac{\theta}{m_{\pm}})^{1/2}. \tag{2.10}$$

这些就是 [1]中所述的热速度。接下来，我们定义长度尺度

$$X = \left(\frac{\theta}{N\mathsf{e}^2}\right)^{1/2}, \tag{2.11}$$

可以将其视为静电力对热粒子产生显著影响的最小长度尺度。由此可得每种物种对应的自然时间尺度

$$T^{\pm} = \frac{X}{V^{\pm}} = \left(\frac{m_{\pm}}{N\mathsf{e}^2}\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

虽然 F_+ 和 F_- 在 v 中将分别按照 V_+ 和 V_- 进行不同的重新缩放，但两种物种的时间都将按离子时间尺度重新缩放。因此，电子的演化时间尺度比离子更快。这些时间尺度之比等于质量比的平方根，

$$\varepsilon = \frac{T_-}{T_+} = \left(\frac{m_-}{m_+}\right)^{1/2} \tag{2.13}$$

最后一个无量纲参数是耗散率，它表示碰撞效应的大小：

$$\kappa^{-1} = 2\pi \ln(\Lambda)\frac{N^{1/2}\mathsf{e}^3}{\theta^{3/2}}. \tag{2.14}$$

现在进行无量纲化。定义重新缩放的坐标

$$\overline{t} = \frac{t}{T_+}, \tag{2.15}$$

$$\overline{x} = \frac{x}{X}, \tag{2.16}$$

$$\overline{v}_{\pm} = \frac{v}{V_{\pm}}, \tag{2.17}$$

并定义 (F_-, F_+) 的重新缩放版本：

$$\tilde{F}_+(\overline{t}, \overline{x}, \overline{v}_+) = \frac{ZV_+^3}{N}F_+(t, x, v), \tag{2.18}$$

$$\tilde{F}_-(\overline{t}, \overline{x}, \overline{v}_-) = \frac{V_-^3}{N}F_-(t, x, v). \tag{2.19}$$

此外，定义

$$\tilde{n}_{\pm}(\overline{t}, \overline{x}) = \int \tilde{F}_+(\overline{t}, \overline{x}, \overline{v}_{\pm})d\overline{v}_{\pm}, \tag{2.20}$$

$$-\Delta_{\overline{x}}\tilde{\phi} = 4\pi(\tilde{n}_+(\overline{t}, \overline{x}) - \tilde{n}_-(\overline{t}, \overline{x})), \tag{2.21}$$

$$\tilde{E}(\overline{t}, \overline{x}) = -\nabla_{\overline{x}}\tilde{\phi}(\overline{t}, \overline{x}). \tag{2.22}$$

特别是,

$$\tilde{E}(\overline{t},\overline{x}) = \frac{1}{NX\mathsf{e}}E(t,x) \tag{2.23}$$

方程中的“Vlasov-Poisson”部分1.1变换如下

$$\{\partial_t + v\cdot\nabla_x + \frac{Z\mathsf{e}}{m_+}E\cdot\nabla_v\}F_+ = \frac{N}{ZT_+V_+^3}\{\partial_{\overline{t}} + \overline{v}_+\cdot\nabla_{\overline{x}} + Z\tilde{E}\cdot\nabla_{\overline{v}_+}\}\tilde{F}_+ \tag{2.24}$$

$$\{\partial_t + v\cdot\nabla_x - \frac{\mathsf{e}}{m_-}E\cdot\nabla_v\}F_- = \frac{N}{T_-V_-^3}\{\varepsilon\partial_{\overline{t}} + \overline{v}_-\cdot\nabla_{\overline{x}} - \tilde{E}\cdot\nabla_{\overline{v}_-}\}\tilde{F}_- \tag{2.25}$$

现在我们来计算碰撞核的变换:

$$Q_{++}(F_+,F_+)(v) \tag{2.26}$$

$$= \frac{N^2}{Z^2m_+^2V_+^6}\nabla_{\overline{v}_+}\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(\overline{v}_+ - \overline{v}'_+)\left\{\tilde{F}_+(\overline{v}'_+)\nabla_{\overline{v}_+}\tilde{F}_+(v_+) - \tilde{F}_+(\overline{v}_+)\nabla_{\overline{v}_+}\tilde{F}_+(\overline{v}'_+)\right\}d\overline{v}'_+, \tag{2.27}$$

$$Q_{-+}(F_-,F_+)(v) \tag{2.28}$$

$$= \frac{N^2}{Zm_+^2V_+^6}\nabla_{\overline{v}_+}\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(\varepsilon\overline{v}_+ - \overline{v}'_-)\left\{\varepsilon\tilde{F}_-(\overline{v}'_-)\nabla_{\overline{v}_+}\tilde{F}_+(v_+) - \tilde{F}_+(\overline{v}_+)\nabla_{\overline{v}_-}\tilde{F}_-(\overline{v}'_-)\right\}d\overline{v}'_-, \tag{2.29}$$

$$Q_{--}(F_-,F_-)(v) \tag{2.30}$$

$$= \frac{N^2}{m_-^2V_-^6}\nabla_{\overline{v}_-}\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(\overline{v}_- - \overline{v}'_-)\left\{\tilde{F}_-(\overline{v}'_-)\nabla_{\overline{v}_-}\tilde{F}_-(v_-) - \tilde{F}_-(\overline{v}_-)\nabla_{\overline{v}_-}\tilde{F}_-(\overline{v}'_-)\right\}d\overline{v}'_-, \tag{2.31}$$

$$Q_{+-}(F_+,F_-)(v) \tag{2.32}$$

$$= \frac{N^2}{Zm_-^2V_-^6}\nabla_{\overline{v}_-}\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(\overline{v}_- - \varepsilon\overline{v}'_+)\left\{\tilde{F}_+(\overline{v}'_+)\nabla_{\overline{v}_-}\tilde{F}_-(\overline{v}_-) - \varepsilon\tilde{F}_-(\overline{v}_-)\nabla_{\overline{v}_+}\tilde{F}_+(\overline{v}'_+)\right\}d\overline{v}'_+ \tag{2.33}$$

忽略 Z 后，各物种在上述碰撞项表达式中出现的前置系数与输运项前置系数之比为

$$\frac{N^2}{m_\pm^2V_\pm^6}\left(\frac{N}{T_\pm V_\pm^3}\right)^{-1} = \frac{NX}{m_\pm^2V_\pm^4} = \frac{N^{1/2}}{\theta^{3/2}\mathsf{e}} \tag{2.34}$$

将上式乘以 $2\pi\mathsf{e}^4\ln(\Lambda)$，得到 κ^{-1}。

现在给出式（1.1）的无量纲化形式。为简便起见，我们用符号（t， x， v）表示离子的重新缩放的坐标；用（t， x， ξ）表示电子的重新缩放的坐标（即，我们将 $\overline{t}\to t$， $\overline{x}\to x$， $\overline{v}_+\to v$ 和 $\overline{v}_-\to\xi$ 替换为）。˜此外，我们记作 $F_\pm^\varepsilon = F_\pm$，势和电场也类似表示。于是，它们满足式（1.7）。

2.2. 离子方程的形式推导。 我们通过令 1.18) 由 (1.7) 形式推导出（ $\varepsilon = 0$。于是,

$$\{\partial_t + v\cdot\nabla_x + E^0\cdot\nabla_v\}F_+^0 = Q(F_+^0,F_+^0) + Q_{-+}^0(F_-^0,F_+^0), \tag{2.35}$$

$$\{\xi\cdot\nabla_x - E^0\cdot\nabla_\xi\}F_-^0 = Q(F_-^0,F_-^0) + Q_{+-}^0(F_+^0,F_-^0). \tag{2.36}$$

其中

$$Q^0_{-+}(F^0_-,F^0_+)(v)=-\nabla_v\cdot\left(\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(\xi')\nabla_\xi F^0_-(\xi')d\xi' F^0_+(v)\right), \tag{2.37}$$

$$Q^0_{+-}(F^0_+,F^0_-)(\xi)=\left(\int_{\mathbf{R}^3}F^0_+(v')dv'\right)\nabla_\xi\cdot(\Phi(\xi)\nabla_\xi F^0_-(\xi)). \tag{2.38}$$

我们假设 F_- 在每个 (t,x,ξ) 处均为正，在 (x,ξ) 上光滑，并且关于 ξ衰减得足够快。因此，我们可以利用熵恒等式推导可能的解。将 (2.36) 乘以 $\ln(F_-)$，得到

$$0=\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}(Q(F^0_-,F^0_-)+Q^0_{-+}(F^0_+,F^0_-))\ln(F_-)dxdv \tag{2.39}$$

$$=-\frac{1}{2}\iiint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3}F^0_-(t,x,\xi)F^0_-(t,x,\xi') \tag{2.40}$$

$$\mathrm{tr}(\Phi(\xi-\xi')\{\nabla_\xi\ln(F^0_-(t,x,\xi))-\nabla_{\xi'}\ln(F^0_-(t,x,\xi'))\}^{\otimes 2})dxd\xi d\xi' \tag{2.41}$$

$$-n^0_+(t,x)\int_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}F^0_-(t,x,\xi)\mathrm{tr}(\Phi(\xi)\{\nabla_\xi\ln(F^0_-(t,x,\xi))\}^{\otimes 2})dxd\xi. \tag{2.42}$$

注意到这两项均非正，因此必为零。 $\Phi(\xi)$ 的零空间是 $\mathrm{span}\{\xi\}$，因此我们推得，对于所有 (t,x,ξ)， $\nabla_\xi\ln(F^0_-(t,x)(t,x,\xi))\in\mathrm{span}\{\xi\}$。因此，对于每个 (t,x)， $F_-(t,x,\xi)$ 关于 ξ 是径向的。取 $F^0_-(t,x,\xi)=\tilde{F}^0_-(t,x,|\xi|)$，可得

$$0=\frac{1}{2}\iiint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3}\tilde{F}^0_-(t,x,|\xi|)\tilde{F}^0_-(t,x,|\xi'|) \tag{2.43}$$

$$\mathrm{tr}(\Phi(\xi-\xi')\{\frac{\xi}{|\xi|}\partial_r\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r))|_{r=|\xi|}-\frac{\xi'}{|\xi'|}\partial_r\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r))|_{r=|\xi'|}\}^{\otimes 2})dxd\xi d\xi' \tag{2.44}$$

于是，对于每个满足 $\xi\neq 0,\xi'\neq 0$ 且 $\xi-\xi'\neq 0$ 的 ξ,ξ'，我们有

$$\frac{\xi}{|\xi|}\partial_r\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r))|_{r=|\xi|}-\frac{\xi'}{|\xi'|}\partial_r\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r))|_{r=|\xi'|}\in\mathrm{span}\{\xi-\xi'\} \tag{2.45}$$

The 由上可知，在 ξ 和 ξ' 线性无关的集合上，我们有

$$\frac{\xi}{|\xi|}\partial_r\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r))|_{r=|\xi|}=\frac{\xi'}{|\xi'|}\partial_r\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r))|_{r=|\xi'|} \tag{2.46}$$

对于任意给定的 $|\xi|$、$|\xi'|>0$，我们都可以找到线性无关的 ξ、ξ'。因此，对于所有 r、$r'>0$，我们有

$$\frac{1}{r}\partial_r\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r))=\frac{1}{r'}\partial_{r'}\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r')) \tag{2.47}$$

特别地，$\partial_r(\frac{1}{r}\partial_r\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r)))=0$。因此，存在函数 $\beta(t,x)$ 和 $\psi(t,x)$，使得

$$\ln(\tilde{F}^0_-(t,x,r))=-\frac{\beta(t,x)}{2}r^2+\psi(t,x) \tag{2.48}$$

换言之，$F^0_-(t,x,\xi)$ 是一个以 $\xi=0$ 为中心的局部麦克斯韦分布，即

$$F^0_-(t,x,\xi)=e^{-\frac{\beta(t,x)|\xi|^2}{2}+\psi(t,x)} \tag{2.49}$$

注意到 $Q(F_-^0, F_-^0) = Q_{+-}^0(F_+^0, F_-^0) = 0$。因此，

$$\{\xi \cdot \nabla_x - E \cdot \nabla_\xi\} F_-^0 = 0. \tag{2.50}$$

因此，

$$0 = \{\xi \cdot \nabla_x - E \cdot \nabla_\xi\} \ln(F_-^0) = \xi \cdot \nabla_x \psi + \xi \cdot \nabla_x \beta \frac{|\xi|^2}{2} + \xi \cdot E^0 \beta. \tag{2.51}$$

取 $|\xi| \to \infty$，我们推得 $\nabla_x \beta = 0$，即 $\beta(t, x) = \beta(t)$。最后，我们得出 $\nabla_x \psi = -\beta E^0 = \nabla_x(\beta \phi^0)$。因此，$\psi - \beta\phi^0$ 与 x 无关，且 ξ。我们对 ξ 积分，利用质量守恒（1.13）确定该函数，并给 ϕ^0 加上适当的常数，得到

$$F_-^0(t, x, \xi) = \left(\frac{\beta(t)}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(t)(\frac{|\xi|^2}{2} - \phi^0(t,x))} \tag{2.52}$$

这意味着 $n_-^0(t, x) = \frac{e^{\beta(t)\phi^0(t,x)}}{\int_{\mathbf{T}^3} e^{\beta(t)\phi^0(t,x')} dx'}$，从而得到（1.18）的第三行。至于第一行，由于 $\nabla_\xi F_-^0 = -\beta w F_-^0$，我们有重要的消失性质

$$Q_{-+}^0(F_-^0, F_+^0) = \beta \nabla_\xi \cdot \{\int_{\mathbf{R}^3} \Phi(\xi) \xi F_-^0(t, x, \xi) d\xi F_+^0(v)\} = 0, \tag{2.53}$$

as $\Phi(\xi)\xi = (0, 0, 0)^T$。最后，对于第二行，我们调用（1.15）以及恒等式

$$\iint_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{|\xi|^2}{2} F_-^0 dx d\xi = \frac{3}{2\beta}. \tag{2.54}$$

2.3. Boltzmann 情形。现在，我们对带硬球的 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统应用与第 2.1 节中相同的重新缩放。不同于 Vlasov-Poisson-Landau 系统，离子-电子碰撞在极限下似乎不会消失 $\varepsilon \downarrow 0$。此外，我们证明了 ε 中的形式展开似乎会导出一个难以（甚至不可能）求解的方程组。这是因为展开中的 $O(1)$ 项以一种非平凡的方式依赖于$O(\varepsilon)$ 项，而后者又依赖于 $O(\varepsilon^2)$ 项，依此类推。

为简便起见，令 $Z = \mathsf{e} = 1$。根据 [34], , Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统写为

$$\begin{aligned} \{\partial_t + v \cdot \nabla_x + \frac{1}{m_-} E \cdot \nabla_v\} F_+ &= Q_{++}(F_+, F_+) + Q_{-+}(F_-, F_+)\}, \\ \{\partial_t + v \cdot \nabla_x - \frac{1}{m_+} E \cdot \nabla_v\} F_- &= Q_{--}(F_-, F_-) + Q_{+-}(F_+, F_-), \\ -\Delta_x \phi &= 4\pi(n_+ - n_-) \end{aligned} \tag{2.55}$$

再次地，$E = -\nabla_x \phi$。Boltzmann 碰撞算子如下所示：对于 α、$\beta \in \{-, +\}$，有

$$Q_{\alpha\beta}(G_\alpha, G_\beta) = \frac{(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)^2}{4} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2} |(u - v) \cdot \omega| \{G_\alpha(u') G_\beta(v') - G_\alpha(u) G_\beta(v)\} du d\omega, \tag{2.56}$$

其中 $\sigma_\pm$ 是粒子的直径，而

$$u' = u + \frac{2m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}((v - u) \cdot \omega)\omega, \tag{2.57}$$

$$v' = v - \frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}((v - u) \cdot \omega)\omega. \tag{2.58}$$

为简单起见，我们也令 $\sigma_\pm = 1$。现在令 $\xi = \varepsilon v$（且 $\zeta = \varepsilon u$），并令 $\tilde{F}_-(\xi) = \varepsilon^{-3} F_-(\xi/\varepsilon)$。现在我们重写（2.55）的前两行，

$$\{\partial_t + v\cdot\nabla_x + E\cdot\nabla_v\}F_+ = Q(F_+,F_+) + \tilde{Q}^{\varepsilon}_{-+}(\tilde{F}_-,F_+) \tag{2.59}$$

$$\{\varepsilon\partial_t + \xi\cdot\nabla_x - E\cdot\nabla_\xi\}\tilde{F}_- = Q(\tilde{F}_-,\tilde{F}_-) + \tilde{Q}^{\varepsilon}_{+-}(F_+,\tilde{F}_-). \tag{2.60}$$

这里，$Q = Q_{++} = Q_{--}$。在定义交叉碰撞项之前，先定义反射矩阵是值得的

$$R_\omega z = z - 2(z\cdot\omega)\omega, \tag{2.61}$$

其中 $\omega \in \mathbf{S}^2$。离子-电子碰撞对离子有以下（奇异！）影响：

$$\tilde{Q}^{\varepsilon}_{-+}(\tilde{F}_-,F_+) \tag{2.62}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2} |(\zeta-\varepsilon v)\cdot\omega|\{\tilde{F}_-(\zeta')F_+(v') - \tilde{F}_-(\zeta)\tilde{F}_+(v)\}d\zeta d\omega, \tag{2.63}$$

其中

$$\zeta' = \zeta + \frac{2}{1+\varepsilon^2}((\varepsilon v-\zeta)\cdot\omega)\omega = R_\omega\zeta + 2\varepsilon(v\cdot\omega)\omega + O(\varepsilon^2), \tag{2.64}$$

$$v' = v - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}((\varepsilon v-\zeta)\cdot\omega)\omega = v + 2\varepsilon(\zeta\cdot\omega)\omega + O(\varepsilon^2). \tag{2.65}$$

另一方面，离子-电子碰撞对电子的影响如下：

$$\tilde{Q}^{\varepsilon}_{+-}(F_+,\tilde{F}_-) = \iint_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2} |(\varepsilon u-\xi)\cdot\omega|\{F_+(u')\tilde{F}_-(\xi') - F_+(u)\tilde{F}_-(\xi)\}dud\omega, \tag{2.66}$$

其中，上式中，

$$u' = u + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}((\xi-\varepsilon u)\cdot\omega)\omega = u - 2\varepsilon(\xi\cdot\omega)\omega + O(\varepsilon^2), \tag{2.67}$$

$$\xi' = \xi - \frac{2}{1+\varepsilon^2}((\xi-\varepsilon u)\cdot\omega)\omega = R_\omega\xi + 2\varepsilon(u\cdot\omega)\omega + O(\varepsilon^2). \tag{2.68}$$

ε^{-1} 中的$\tilde{Q}^{\varepsilon}_{+-}$ 项是将形式分析描述为 $\varepsilon\downarrow 0$时困难的根源。˜特别是，我们没有理由认为 Q^{ε}_{-+} 的影响会在这一极限下消失。为了更好地理解这一极限，我们采用形式渐近展开。首先，我们将碰撞项展开如下：

$$\tilde{Q}^{\varepsilon}_{-+}(G_1,G_2) = \sum_{j=-1}^{\infty}\varepsilon^j q^j_{-+}(G_1,G_2), \tag{2.69}$$

$$\tilde{Q}^{\varepsilon}_{+-}(G_1,G_2) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j q^j_{+-}(G_1,G_2). \tag{2.70}$$

现在给出这些展开式中的前两项。（2.69）中的前两项为

$$q^{-1}_{-+}(G_1,G_2). = \left(\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2}|\zeta\cdot\omega|\{G_1(R_\omega\zeta) - G_1(\zeta)\}d\zeta d\omega\right)G_2(v) \tag{2.71}$$

and

$$q^0_{-+}(G_1,G_2) = -\left(\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2} \mathrm{sgn}(\zeta\cdot\omega)(v\cdot\omega)\{G_1(R_\omega\zeta)-G_1(\zeta)\}d\zeta d\omega\right) G_2(v) \tag{2.72}$$

$$+2\left(\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2} |\zeta\cdot\omega|(v\cdot\omega)\omega\cdot\nabla_\zeta G_1(R_\omega\zeta)d\zeta d\omega\right) G_2(v) \tag{2.73}$$

$$-2\left(\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2} |\zeta\cdot\omega|(\zeta\cdot\omega)G_1(R_\omega\zeta)\omega_i d\zeta d\omega\right) \partial_{v_i} G_2(v). \tag{2.74}$$

另一方面，（2.70）中的前两项为

$$q^0_{+-}(G_1,G_2) = \left(\int_{\mathbf{R}^3} G_1(u)du\right)\int_{\mathbf{S}^2} |\xi\cdot\omega|\{G_1(R_\omega\xi)-G_1(\xi)\}d\omega. \tag{2.75}$$

and

$$q^1_{+-}(G_1,G_2) = -\left(\int_{\mathbf{R}^3} u_i G_1(u)du\right)\int_{\mathbf{S}^2} \mathrm{sgn}(\xi\cdot\omega)\omega_i\{G_2(R_\omega\xi)-G_2(\xi)\}d\omega \tag{2.76}$$

$$+2\left(\int_{\mathbf{R}^3} u_i G_1(u)du\right)\int_{\mathbf{S}^2} \mathrm{sgn}(\xi\cdot\omega)\omega_i\omega\cdot\nabla_\xi G_2(R_\omega\xi)d\omega. \tag{2.77}$$

在上述推导中，还有一项 $O(\varepsilon)$，它来自展开 $G_1(u') = G_2(u) + 2\varepsilon(\xi\cdot\omega)\omega\cdot\nabla_u G_1(u) + O(\varepsilon^2)$，但该项积分后为零。

接下来，我们将 F_+ 和 $\tilde{F}_-$ 展开为关于 ε 的形式级数：

$$F_+ \sim \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j F_{+,j}, \quad \tilde{F}_- \sim \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j \tilde{F}_{-,j}, \tag{2.78}$$

其中，每个 $F_{\pm,j}$都与 ε 无关。类似地，我们展开 $\phi \sim \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\phi_j$和 $E \sim \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j E_j$。汇集（2.60）中的 $O(1)$ 项可知， $F^0_{-,j}$ 满足

$$\{\xi\cdot\nabla_x - E^0\cdot\nabla_\xi\}\tilde{F}_{-,0} = Q(\tilde{F}_{-,0},\tilde{F}_{-,0}) + q^0_{-+}(F_{+,0},\tilde{F}_{-,0}). \tag{2.79}$$

不难验证

$$\tilde{F}_{-,0} = \left(\frac{\beta(t)}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(t)(\frac{|v|^2}{2}-\phi^0)} \tag{2.80}$$

满足上述条件，其中 (β,ϕ^0) 满足与 (1.7) 中相同的方程。借助第 2.2 节中使用过的类似熵恒等式，我们预期这是唯一满足条件的解。采用这一假设形式，对于 $j=-1$ 和 $j=0$，以及任意 G，由于 $\tilde{F}_{-,0}$ 的径向对称性，我们有 $q^j_{-,+}(\tilde{F}_{-,0},G) = 0$。特别地，(2.59) 中的 $O(\frac{1}{\varepsilon})$ 项消失。汇总 (2.59) 中所有 $O(1)$ 项，可得

$$\partial_t F_{+,0} + \{v\cdot\nabla_x + E^0\cdot\nabla_v\}F_{+,0} = Q(F_{+,0},F_{+,0}) + q^{-1}_{-+}(\tilde{F}_{-,1},F_{+,0}). \tag{2.81}$$

因此，为了求出 $F_{+,0}$，我们也必须求出 $F_{-,1}$。接着，将所有 $O(\varepsilon)$ 项合并到 (2.60) 中，我们得到

$$\{\xi\cdot\nabla_x - E_0\cdot\nabla_\xi\}\tilde{F}_{-,1} - E_1\cdot\nabla_\xi F_{-,0} \tag{2.82}$$

$$-Q(\tilde{F}_{-,1},\tilde{F}_{-,0}) - Q(\tilde{F}_{-,0},\tilde{F}_{-,1}) - q^0_{+-}(F_{+,0},\tilde{F}_{-,1}) \tag{2.83}$$

$$= \partial_t\tilde{F}_{-,0} + q^1_{-+0)}{}^{\tilde{}(F_{+0},F_{-,}} \tag{2.84}$$

上文中，我们用到了这样一个事实： $q^0(F_{+,1}, \tilde{F}_{-,0}) = 0$。现在我们遇到了一个问题：为了˜求出 $F_{+,0}$，我们也必须求出 $F_{-,1}$。然而， $F_{-,1}$ 的方程取决于˷E_1，而后者又取决于 $F_{+,1}$，而它又取决于 $F_{-,2}$，依此类推。总之，要解出展开式 (2.78) 中的各项，从而得到定义良好的极限方程，似乎很困难。

3. Preliminaries

3.1. 适定性。 本节陈述一个前置的局部适定性结果，以保证在我们的背景下方程（1.7）存在解。证明可由本文的方法得到，故略去。

引理 3.1。固定 M、$T > 0$，并假设（F^0_+、β、ϕ^0）是（1.18）的一个解，且满足定理 *1.1* 的假设。固定 $\varepsilon > 0$。那么存在 $T_\varepsilon \in (0, T_0]$ (取决于（F^0_+、β、ϕ^0）、$\varepsilon > 0$和 M），以及 $\varrho = \varrho(M)$（仅取决于 M），使得以下结论成立。若取满足下列条件的（$F^\varepsilon_{+,in}, F^\varepsilon_{+,in}$）

$$\|\frac{1}{n^\varepsilon_{+,in}}\|_{L^\infty_x} + \|F^\varepsilon_{+,in}\|_{\mathfrak{E}} \le M, \tag{3.1}$$

$$\|F^\varepsilon_{+,in} - F^0_{+,in}\|_{\mathfrak{E}'} + \sqrt{\mathscr{E}^\varepsilon_{-,2,in}} \le \varrho. \tag{3.2}$$

那么存在唯一的弱解 $(F^\varepsilon_+, F^\varepsilon_-)$ 满足 $0 \le F^\varepsilon_\pm \in C([0,T_\varepsilon]; \mathfrak{E}) \cap L^2([0,T_\varepsilon]; \mathfrak{D})$，其满足初始数据，并且是方程 (1.7) 的解，且满足以下估计

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \left(\|\frac{1}{n^\varepsilon_+(t)}\|_{L^\infty_x} + \|F^\varepsilon_+(t)\|_{\mathfrak{E}} \right) \le 2M, \tag{3.3}$$

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \left(\|F^\varepsilon_+(t) - F^0_+(t)\|_{\mathfrak{E}'} + \sqrt{\mathscr{E}^\varepsilon_{-,2}(t)} \right) \lesssim_M \|F^\varepsilon_{+,in} - F^0_{+,in}\|_{\mathfrak{E}'} + \sqrt{\mathscr{E}^\varepsilon_{-,2,in}}. \tag{3.4}$$

3.2. 扩散矩阵的上下界。 为证明系统（1.7）和（1.18）的局部适定性，我们先证明以下引理，该引理给出了碰撞核中出现的扩散矩阵的上下界：

引理 3.2. 设 $G(v) = G: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$，$\nu \in \mathbf{S}^2$. 那么对所有 $v \in \mathbf{R}^3$，

$$|\Phi_{ij} * G(v)\nu_i\nu_j| \lesssim \|\langle v\rangle^5 G\|_{L^2}\sigma_{ij}(v)\nu_i\nu_j. \tag{3.5}$$

假设 $G \ge 0$，我们有下界

$$\frac{\|G\|_{L^1}}{\langle \|\langle v\rangle^2 G\|_{L^2}/\|G\|_{L^1}\rangle^{17}}\sigma_{ij}(v)\nu_i\nu_j \lesssim \Phi_{ij} * G(v)\nu_i\nu_j. \tag{3.6}$$

证明。 我们先证明（3.5）。注意到 $|\Phi_{ij} * G(v)\nu_i\nu_j| \le \Phi_{ij} * |G|(v)\nu_i\nu_j$。因此，只需考虑 $G \ge 0$ 的情形。首先，我们有一致有界性，

$$\|\Phi_{ij} * G(v)\nu_i\nu_j\|_{L^\infty} \lesssim \|(-\Delta_v)^{-1}G\|_{L^\infty} \lesssim \|\langle v\rangle^2 G\|_{L^2} \tag{3.7}$$

或者，

$$\Phi_{ij} * G(v)\nu_i\nu_j \le \int_{2|v'|<|v|} \frac{|v-v'|^2 - \langle v-v', \nu\rangle^2}{|v-v'|^3} G(v')dv' \tag{3.8}$$

$$+ \int_{2|v'|\ge|v|} \frac{|v-v'|^2 - \langle v-v', \nu\rangle^2}{|v-v'|^3} G(v')dv'. \tag{3.9}$$

Now,

$$\sqrt{|v-v'|^2-\langle v-v',\nu\rangle^2}=|P_{\nu^\perp}(v-v')|\le|P_{\nu^\perp}v|+|P_{\nu^\perp}v'|, \tag{3.10}$$

so

$$(3.8)\lesssim\int_{2|v'|<|v|}\frac{|P_{\nu^\perp}v|^2+|P_{\nu^\perp}v|^2}{|v-v'|^3}G(v')dv' \tag{3.11}$$

$$\lesssim\frac{|P_{\nu^\perp}v|^2}{|v|^3}\|G\|_{L^1}+\frac{1}{|v|^3}\||v'|^2G\|_{L^1} \tag{3.12}$$

$$\lesssim(\frac{|P_{v^\perp}\nu|^2}{|v|}+\frac{1}{|v|^3})\|\langle v'\rangle^5G(v')\|_{L^2_{v'}} \tag{3.13}$$

另一方面，我们有

$$(3.9)\le\int_{2|v'|\ge|v|}\frac{1}{|v-v'|}G(v')dv' \tag{3.14}$$

$$\le\frac{1}{|v|^3}\int_{2|v'|\ge|v|}\frac{1}{|v-v'|}|v'|^3G(v')dv' \tag{3.15}$$

$$\le\frac{1}{|v|^3}\|(-\Delta_{v'})^{-1}(\langle v'\rangle^3G(v'))\|_{L^\infty_{v'}} \tag{3.16}$$

$$\le\frac{1}{|v|^3}\|\langle v'\rangle^5G(v')\|_{L^2_{v'}}. \tag{3.17}$$

因此,

$$\Phi_{ij}*G(v)\nu_i\nu_j\lesssim\min\{1,\frac{|P_{v^\perp}\nu|^2}{|v|}+\frac{1}{|v|^3}\}\|\langle v'\rangle^5G(v')\|_{L^2_{v'}}, \tag{3.18}$$

这意味着（3.5）。

现在证明（3.6）。通过重新缩放 $G\mapsto G/\|G\|_{L^1}$，只需证明在$\|G\|_{L^1}=1$的情况下（3.6）。为方便起见，我们定义

$$k_G=\langle\|\langle v\rangle^2G\|_{L^2_v}\rangle. \tag{3.19}$$

设 $\nu\in\mathbb{S}^2$,

$$\Phi_{ij}*G(v)\nu_i\nu_j=\int_{\mathbf{R}^3}\frac{\sin^2\theta}{|v'|}G(v-v')dv' \tag{3.20}$$

其中， $\theta=\theta(v')$ 是 v' 与 ν 之间的夹角。取 $\theta_0>0$ 为一个稍后确定的常数，我们将上述量下界估计为

$$\Phi_{ij}*G(v)\nu_i\nu_j\ge\sin^2\theta_0\left(\int_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|v'|}G(v-v')dv'-\int_{\sin^2\theta<\sin^2\theta_0}\frac{1}{|v'|}G(v-v')dv'\right) \tag{3.21}$$

Now,

$$\int_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|v'|}G(v-v')dv' = \int_{|v|\geq 10|v'|}\frac{1}{|v-v'|}G(v')dv' \tag{3.22}$$

$$\geq \frac{9}{10|v|}\int_{|v|\geq 10|v'|}G(v')dv' \tag{3.23}$$

$$\geq \frac{9}{10|v|}(1-\int_{|v|\leq 10|v'|}G(v')dv') \tag{3.24}$$

$$\geq \frac{9}{10|v|}(1-\||v'|^{-2}1_{|v|\leq 10|v'|}\|_{L^2_{v'}}\||v'|^2G(v')\|_{L^2_{v'}}) \tag{3.25}$$

$$\geq \frac{9}{10|v|}(1-\frac{k_G}{|v|}) \tag{3.26}$$

另一方面，对于任意 $\lambda>0$,

$$\int_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|v'|}G(v-v')dv' \geq \frac{1}{\lambda}\left(1-\int_{|v'|>\lambda}G(v-v')dv'\right) \tag{3.27}$$

$$\geq \frac{1}{\lambda}\left(1-\||v'|^{-2}1_{|v'|>\lambda}\|_{L^2_{v'}}\||v-v'|^2G(v')\|_{L^2_{v'}}\right) \tag{3.28}$$

$$\geq \frac{1}{\lambda}(1-\frac{k_G\langle v\rangle^2}{\lambda^{\frac{1}{2}}}) \tag{3.29}$$

取 $\lambda=4k_G^2\langle v\rangle^4$，并结合式（3.26），

$$\int_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|v'|}G(v-v')dv' \gtrsim \min\{\frac{1}{|v|}(1-\frac{k_G}{|v|}),\frac{1}{k_G^2\langle v\rangle^4}\}\gtrsim\frac{1}{k_G^5\langle v\rangle} \tag{3.30}$$

现在考虑式（3.21）中的第二项。首先,

$$\int_{\sin^2\theta<\sin^2\theta_0}\frac{1}{|v'|}G(v-v')dv' \lesssim k_G\left(\int_{\sin^2\theta<\sin^2\theta_0}\frac{1}{|v'|^2\langle v-v'\rangle^4}dv'\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

$$\lesssim k_G\left(\int_{\sin^2\theta<\sin^2\theta_0}\frac{1}{|v'|^2(1+|v|^2+2\langle v,v'\rangle+|v'|^2)^2}dv'\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.32}$$

然后，我们使用球坐标计算上述积分，将 ν 张成的空间设为 z 轴，将 $P_{\nu^\perp}v$张成的空间设为 x轴。令 $v_\parallel=\langle v、\ \nu\rangle$和 $|P_{\nu^\perp}v|=v_\perp$，得到

$$\int_{\sin^2\theta<\sin^2\theta_0}\frac{1}{|v'|^2(1+|v|^2+2\langle v,v'\rangle+|v'|^2)^2}dv' \tag{3.33}$$

$$=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{[0,\theta_0]\cup[\pi-\theta_0,\pi]}\frac{\sin\theta}{(1+v_\parallel^2+v_\perp^2+2r(v_\parallel\cos\theta+v_\perp\cos\alpha\sin\theta)+r^2)^2}d\theta d\alpha dr \tag{3.34}$$

现在我们改写

$$v_\parallel^2+v_\perp^2+2r(v_\parallel\cos\theta+v_\perp\cos\alpha\sin\theta)+r^2 \tag{3.35}$$

$$=v_\parallel^2\sin^2\theta+v_\perp^2(\cos^2\theta+\sin^2\alpha\sin^2\theta)+(r+v_\parallel\cos\theta+v_\perp\cos\alpha\sin\theta)^2 \tag{3.36}$$

$$\geq v_\perp^2\cos^2\theta+(r+v_\parallel\cos\theta+v_\perp\cos\alpha\sin\theta)^2 \tag{3.37}$$

将积分区域扩展为 $r\in(-\infty,\infty)$，利用 r 中的平移不变性，再利用 $\sin\theta$ 的对称性，我们将积分估计为

$$(3.33)\lesssim\int_{\mathbf{R}}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin\theta}{(1+v_\perp^2\cos^2\theta+r^2)^2}d\theta dr \tag{3.38}$$

取 $\theta_0\le\frac{\pi}{4}$，我们有 $\cos^2\theta\ge\frac{1}{2}$。这确保了

$$(3.33)\lesssim\int_{\mathbf{R}}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin\theta}{(1+v_\perp+|r|)^4}d\theta dr \tag{3.39}$$

$$\lesssim\frac{1}{\langle v_\perp\rangle^3}\int_0^{\theta_0}\sin\theta d\theta \tag{3.40}$$

$$\lesssim\frac{\theta_0^2}{\langle v_\perp\rangle^3}. \tag{3.41}$$

结合（3.21），我们有

$$\Phi_{ij}*G(v)\nu_i\nu_j\gtrsim\theta_0^2\left(\frac{1}{k_G^4\langle v\rangle}-k_G\frac{\theta_0}{\langle v_\perp\rangle^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{3.42}$$

此时，我们取 $\theta_0=\lambda\frac{\langle v_\perp\rangle}{\langle v\rangle}$，其中 $\lambda\in(0,\frac{\pi}{4})$ 将在稍后选定（不一定与之前的 λ 相同）。特别地，$v_\parallel\theta_0\lesssim\lambda\langle v_\perp\rangle$，因此

$$\Phi_{ij}*G(v)\nu_i\nu_j\gtrsim\frac{\lambda^2\langle v_\perp\rangle^2}{\langle v\rangle^2}\left(\frac{1}{k_G^5\langle v\rangle}-k_G\frac{\lambda}{\langle v_\perp\rangle^{\frac{1}{2}}\langle v\rangle}\right). \tag{3.43}$$

取 $\lambda=\frac{1}{10k_G^6}$，我们推得

$$\Phi_{ij}*G(v)\nu_i\nu_j\gtrsim\frac{\langle v_\perp\rangle^2}{k_G^{17}\langle v\rangle^3}=\frac{1}{k_G^{17}}(\frac{|P_v\nu|^2}{\langle v\rangle^3}+\frac{|P_{v^\perp}\nu|^2}{\langle v\rangle}). \tag{3.44}$$

我们推得（3.6）。 □

4. Estimates on the ion distribution

4.1. 离子分布的有界性。现在我们证明离子分布的先验估计。

命题 **4.1.** 设 $M,T,\varepsilon>0$. 假设 $(F_-^\varepsilon,F_+^\varepsilon)$ 是 (1.7) 的弱解，且 $0\le F_\pm^\varepsilon\in C([0,T];\mathfrak{E})\cap L^2([0,T];\mathfrak{D})$. 假设以下自举假设成立：

$$\sup_{\pm\in\{-,+\},0\le t\le T}(\|F_\pm^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{E}}^2+\|\frac{1}{n_\pm^\varepsilon(t)}\|_{L_x^\infty})\le M \tag{4.1}$$

特别地，存在 $\mathscr{X}_+^\varepsilon(t)\sim_M\|F_+^\varepsilon\|_{\mathfrak{E}}^2$（依赖于 M），使得

$$\frac{d}{dt}\mathscr{X}_+^\varepsilon+\|F_+^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{D}_\varepsilon^+}^2\le C_M\langle\|F_-^\varepsilon\|_{\mathfrak{D}}\rangle^{\frac{3}{2}}. \tag{4.2}$$

或者，

$$\frac{d}{dt}\|F_+^\varepsilon\|_{\mathfrak{E}}^2+\frac{1}{C_M}\|F_+^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{D}_\varepsilon^+}^2\le C_M(\langle\|F_-^\varepsilon\|_{\mathfrak{D}}\rangle^{\frac{3}{2}}+\|\langle v\rangle^{m_1}F_+^\varepsilon(t)\|_{L_x^2(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^+)_v}^2). \tag{4.3}$$

证明。为方便起见，我们忽略对 M 的依赖：记作 $C = C_M$，并用“.”代替“$\lesssim_M$。”我们也省略对 ε 的依赖，例如 $F_+ = F_+^\varepsilon$。给定 $m', s' \in \mathbf{R}$，我们定义

$$F_+^{(m',s')} := \langle v\rangle^{m'}\langle\nabla_x\rangle^{s'}F_+, \tag{4.4}$$

$$F_-^{(m',s')} := \langle \xi\rangle^{m'}\langle\nabla_x\rangle^{s'}F_-. \tag{4.5}$$

将碰撞算子拆分为“扩散”（二阶）部分和“输运”（一阶）部分的散度形式也很方便：

$$Q(G_1,G_2) = Q_D(G_1,G_2) + Q_T(G_1,G_2), \tag{4.6}$$

$$\tag{4.7}$$

其中

$$Q_D(G_1,G_2) := \partial_{v_j}((\Phi_{ij} *_v G_1)\partial_{v_i}G_2), \tag{4.8}$$

$$Q_T(G_1,G_2) := \partial_{v_j}(\partial_{v_i}(\Phi_{ij} *_v G_1)G_2). \tag{4.9}$$

我们类似地拆分 $Q^\varepsilon_{\pm\mp} = Q^\varepsilon_{\pm\mp,D} + Q^\varepsilon_{\pm\mp,T}$。现在开始证明，证明分为几个步骤。

步骤 1：我们有以下估计：

$$\frac{d}{dt}\|F_+^{(m_2,0)}\|^2_{L^2_{x,v}} + \frac{1}{C}\|F_+^{(m_2,0)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma\cap\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} \le C(1+\|F_-\|^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{D}}), \tag{4.10}$$

并且对所有 $\kappa > 0$，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|F_+^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_{x,v}} + \frac{1}{C}\|F_+^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma\cap\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v}\\ &\quad\le C(1+\|F_+^{(m_1,0)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma\cap\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} + \|F_-\|^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{D}}).\end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.10的证明可以用与（4.11）类似的方法得出，因此我们只证明后者。为证明（4.11），注意到 $F^{(m_1,s}_{)+}$ 满足

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x + E\cdot\nabla_v)F_+^{(m_1,s)} + [\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s, E\cdot\nabla_v]F_+ \tag{4.12}$$

$$= \langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s\{Q(F_+,F_+) + Q^\varepsilon_{-+}(F_-,F_+)\}. \tag{4.13}$$

将上式乘以 $F^{(m_1,s}_{)+}$ 并积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|F^{(m_1,s)+}\|^2_{L^2_{x,v}} \tag{4.14}$$

$$= \langle[E\cdot\nabla_v, \langle v\rangle^m\langle\nabla_x\rangle^s]F_+, F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{4.15}$$

$$+ \langle\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s Q(F_+,F_+), F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.16}$$

$$+ \langle\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s Q^\varepsilon_{-+}(F_-,F_+), F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.17}$$

下面给出右侧各项的估计。

步骤 1.1（电场对易子）：现在我们对4.15）进行估计：

$$(4.15) \lesssim 1 + \|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_v}. \tag{4.18}$$

首先注意到

$$[E\cdot\nabla_v,\langle v\rangle^m\langle\nabla_x\rangle^s]F_+ = E\cdot\nabla_v(\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s F_+) - \langle v\rangle^{m_1}E\cdot\nabla_v\langle\nabla_x\rangle^s F_+ \tag{4.19}$$

$$\langle v\rangle^{m_1}E\cdot\nabla_v\langle\nabla_x\rangle^s F_+ - \langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s(E\cdot\nabla_v F_+) \tag{4.20}$$

$$= v\cdot EF_+^{(m_1-2,s)} + \langle v\rangle^{m_1}\nabla_v\cdot(E\langle\nabla_x\rangle^s F_+ - \langle\nabla_x\rangle^s(EF_+)) \tag{4.21}$$

因此,

$$(4.15) = \langle v\cdot EF^{(m-2,s)+}, F^{(m_1,s)+}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.22}$$

$$- \langle E\langle\nabla_x\rangle^s F_+ - \langle\nabla_x\rangle^s(EF_+), \nabla_v(\langle v\rangle^{m_1}F_+^{(m_1,s)})\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.23}$$

$$\lesssim \|E\|_{L^\infty_x}\|F^{(m_1,s)+}\|^2_{L^2_{x,v}} \tag{4.24}$$

$$+ (\|\nabla_x E\|_{L^\infty_x}\|F_+^{(m_1+\frac{3}{2},s-1)}\|_{L^2_{x,v}} + \|E\|_{H^s_x}\|F_+^{(m_1+\frac{3}{2},0)}\|_{L^2_{x,v}})\|F_+^{(m_1-\frac{3}{2},s)}\|_{L^2_xH^1_v} \tag{4.25}$$

$$\lesssim (\|F_+^{(m_1+\frac{3}{2},s-1)}\|_{L^2_{x,v}} + \|F_+^{(m_2,0)}\|_{L^2_{x,v}})(1+\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}) \tag{4.26}$$

接下来，注意到我们有如下插值不等式

$$\|F^{(m_1+\frac{3}{2},s-1)}\|_{L^2_{x,v}} \lesssim \|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{s-1}{s}}_{L^2_{x,v}}\|F^{(m_1+\frac{3s}{2},0)}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2_{x,v}} \lesssim \|F_+\|_{\mathfrak{E}} \lesssim 1, \tag{4.27}$$

因为 $m_1+\frac{3s}{2}\le m_2$。我们用（4.18）得出结论。

步骤 1.2（自碰撞）：接下来，我们对（4.16）有如下估计：

$$(4.16) \le -\frac{1}{C}\|F_+^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} + C(1+\|F_+^{(m_1,0)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}). \tag{4.28}$$

为此，我们将其分开

$$(4.16) = \langle Q_D(F_+,F_+^{(m_1,s)}), F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.29}$$

$$+ \langle\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s Q_D(F_+,F_+) - Q_D(F_+,F_+^{(m_1,s)}), F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.30}$$

$$+ \langle\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s Q_T(F_+,F_+), F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}}. \tag{4.31}$$

利用（3.6），我们得到如下估计

$$(4.29) = -\langle(\Phi_{ij}*_v F_+)\partial_{v_i}F_+^{(m_1,s)}, \partial_{v_j}F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.32}$$

$$\le -\frac{1}{C_{k_{F_+}}}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}. \tag{4.33}$$

其中

$$k_{F_+} = \max\{1, \|\langle v\rangle^5 F_+\|_{L^\infty_xL^2_v}, \|n_+^{-1}\|_{L^\infty_x}\}. \tag{4.34}$$

Now,

$$\|\langle v\rangle^5 F_+\|_{L^\infty_xL^2_v} \lesssim \|F_+^{(5,2)}\|_{L^2_{x,v}} \lesssim 1. \tag{4.35}$$

因此 $k_{F_+}\lesssim 1$。利用这些估计，我们得到

$$(4.29) \le -\frac{1}{C}\|F_+\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.36}$$

接下来，我们有交换子项（4.30）。我们先写出

$$\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s Q_D(F_+,F_+) - Q_D(F_+,F_+^{(m_1,s)}) \tag{4.37}$$
$$= \langle\nabla_x\rangle^s Q_D(F_+,F_+^{(m_1,0)}) - Q_D(F_+,F_+^{(m_1,s)}) \tag{4.38}$$
$$+ \langle\nabla_x\rangle^s\{\langle v\rangle^m Q_D(F_+,F_+) - Q_D(F_+,F_+^{(m_1,0)})\}. \tag{4.39}$$

现在，令

$$\mathcal{C}_j := \langle\nabla_x\rangle^s((\Phi_{ij} *_v F_+)\partial_{v_i}F_+^{(m_1,0)}) - (\Phi_{ij} *_v F_+)\partial_{v_i}F_+^{(m_1,s)} \tag{4.40}$$

Then

$$\langle(4.38)\ F^{(m_1,s)+}\ \rangle_{L^2_{x,v}} = \langle\mathcal{C}_i,\partial_{v_i}F_+\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.41}$$
$$\le \langle(\sigma^{-1})_{ij}\mathcal{C}_i,\mathcal{C}_j\rangle^{\frac12}_{L^2_{x,v}}\langle\sigma_{ij}\partial_{v_i}F_+^{(m_1,s)},\partial_{v_j}F_+^{(m_1,s)}\rangle^{\frac12}_{L^2_{x,v}} \tag{4.42}$$

现在，后一个因子由 $\|F_+\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_v}$ 控制。另一方面，写作

$$A_G = \sigma^{-\frac12}\Phi *_v G\sigma^{-\frac12}. \tag{4.43}$$

注意，由 (3.5)，$\|A_G\|_{L^\infty_v} \lesssim \|\langle v\rangle^5 G\|_{L^2_v}$ 给定函数 $G = G(v)$。因此，我们有

$$\|\sigma^{-\frac12}\mathcal{C}\|_{L^2_{x,v}} = \|\langle\nabla_x\rangle^s(A_{F_+}\sigma^{\frac12}\nabla_v F_+^{(m_1,0)}) - A_{F_+}\sigma^{\frac12}\nabla_v F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}} \tag{4.44}$$
$$\lesssim \|A_{F_+^{(0,s)}}\|_{L^2_xL^\infty_v}\|\sigma^{\frac12}\nabla_v F_+^{(m_1,s-1)}\|_{L^2_{x,v}} \tag{4.45}$$
$$\lesssim \|F_+^{(m_1,s-1)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.46}$$
$$\lesssim \|F_+^{(m_1,0)}\|^{\frac1s}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{s-1}{s}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}. \tag{4.47}$$

因此，

$$\langle(4.38),F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \lesssim \|F_+^{(m_1,0)}\|^{\frac1s}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{2s-1}{s}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}. \tag{4.48}$$

接下来，我们有

$$(4.39) = -m_1\langle\nabla_x\rangle^s\{v_j(\Phi_{ij} *_v F_+)\partial_{v_i}F_+^{(m_1-2,0)} + \partial_{v_j}(v_i(\Phi_{ij} *_v F_+)F_+^{(m_1-2,0)}) \tag{4.49}$$
$$- (m_1-2)v_iv_j(\Phi_{ij} *_v F_+)F_+^{(m_1-4,0)}\}. \tag{4.50}$$

因此，

$$\langle(4.39),F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} = -m_1\langle\langle\nabla_x\rangle^s\{v_j(\Phi_{ij} *_v F_+)\partial_{v_i}F_+^{(m_1-2,0)}\},F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.51}$$
$$+ m_1\langle\langle\nabla_x\rangle^s\{\langle v\rangle^{m_1-2}v_i(\Phi_{ij} *_v F_+)F_+^{(m_1-2,0)}\},\partial_{v_j}F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.52}$$
$$+ m_1(m_1-2)\langle\langle\nabla_x\rangle^s\{v_iv_j(\Phi_{ij} *_v F_+)F_+^{(m_1-4,0)}\},F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.53}$$
$$\lesssim \Big\||\sigma^{\frac12}v|\|A_{F_+^{(0,s)}}\|_{L^2_x}\|\sigma^{\frac12}\nabla_v F_+^{(m_1-2,s)}\|_{H^s_x}\Big\|_{L^2_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}} \tag{4.54}$$
$$+ \Big\||\sigma^{\frac12}v|\|A_{F_+^{(0,s)}}\|_{L^2_x}\|F_+^{(m_1-2,s)}\|_{H^s_x}\Big\|_{L^2_v}\|\sigma^{\frac12}\nabla_v F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}} \tag{4.55}$$
$$+ \Big\|(v\cdot(\sigma^{\frac12}v))\|A_{F_+^{(0,s)}}\|_{L^2_x}\|F_+^{(m_1-4,s)}\|_{H^s_x}\Big\|_{L^2_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}} \tag{4.56}$$
$$\lesssim \|F^{(m_1,s)+}\ \|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}. \tag{4.57}$$

因此，

$$(4.30) \lesssim \|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} + \|F_+^{(m_1,0)}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{2s-1}{s}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}. \tag{4.58}$$

接下来我们估计（4.31）。我们作如下界定：

$$\begin{aligned}
(4.31) &= \langle\langle\nabla_x\rangle^s\{\partial_{v_i}(\Phi_{ij} *_v F_+)F_+^{(m_1,0)}\}, \partial_{v_j}F^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} && (4.59)\\
&\quad + \langle\langle\nabla_x\rangle^s\{v_j\partial_{v_i}(\Phi_{ij} *_v F_+)F_+^{(m_1-2,0)}\}, F^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} && (4.60)\\
&\lesssim \|\langle\nabla_x\rangle^s\{\sigma^{-\frac{1}{2}}(\nabla_v\cdot\Phi *_v F_+)F_+\}\|_{L^2_{x,v}}\|\sigma^{\frac{1}{2}}\nabla_v F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}} && (4.61)\\
&\quad + \|\langle\nabla_x\rangle^s\{v_j\partial_{v_i}(\Phi_{ij} *_v F_+)F_+^{(m_1-2,0)}\}\|_{L^2_{x,v}}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}} && (4.62)\\
&\lesssim \|\sigma^{-\frac{1}{2}}\nabla_v(-\Delta_v)^{-1}F_+^{(0,s)}\|_{L^2_xL^\infty_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} && (4.63)\\
&\quad + \|\nabla_v(-\Delta_v)^{-1}F_+^{(0,s)}\|_{L^2_xL^\infty_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}} && (4.64)\\
&\lesssim \|\langle v\rangle^{\frac{3}{2}}\nabla_v(-\Delta_v)^{-1}F_+^{(0,s)}\|_{L^2_xL^\infty_v}(1+\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}). && (4.65)
\end{aligned}$$

现在，由

$$\begin{aligned}
\langle v\rangle^{\frac{3}{2}}|\nabla_v(-\Delta_v)^{-1}F_+^{(0,s)}| &\lesssim \langle v\rangle^{\frac{3}{2}}\int_{\langle v\rangle>2|v'|}\frac{|F_+^{(0,s)}(v')|}{|v-v'|^2}dv' + \langle v\rangle^{\frac{3}{2}}\int_{\langle v\rangle\le 2|v'|}\frac{|F_+^{(0,s)}(v')|}{|v-v'|^2}dv' && (4.66)\\
&\lesssim \langle v\rangle^{-\frac{1}{2}}\|F_+^{(0,s)}\|_{L^1_v} + \int_{\mathbf{R}^3}\frac{|F_+^{(\frac{3}{2},s)}(v')|}{|v-v'|^2}dv' && (4.67)
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\|\langle v\rangle^{\frac{3}{2}}\nabla_v(-\Delta_v)^{-1}F_+^{(0,s)}\|_{L^2_xL^\infty_v} &\lesssim \|F_+^{(0,s)}\|_{L^2_xL^1_v} + \||\nabla_v|^{-1}|F_+^{(\frac{3}{2},s)}|\|_{L^2_xL^\infty_v} && (4.68)\\
&\lesssim \|F_+^{(2,s)}\|_{L^2_{x,v}} + \|\langle\nabla_v\rangle^{\frac{3}{4}}|F_+^{(\frac{3}{2},s)}|\|_{L^2_{x,v}} && (4.69)\\
&\lesssim 1 + \||F_+^{(\frac{3}{2},s)}|\|^{\frac{3}{4}}_{L^2_xH^1_v}. && (4.70)\\
&\lesssim 1 + \|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{3}{4}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} && (4.71)
\end{aligned}$$

[1] [3]上述推导中，我们使用插值不等式$\|u\|_{H^{3/4}}\lesssim\|u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2}\|u\|^{\frac{1}{4}}_{H^1}$，再利用对任意函数$u\in H^1(\mathbf{R}^3)$，$\big|\nabla_v|u|\big| = |\nabla_v u|$ 几乎处处成立这一事实。因此，

$$(4.31)\lesssim 1 + \|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{7}{4}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}. \tag{4.72}$$

结合估计（4.29）、（4.30）和（4.31），我们得出

$$\begin{aligned}
(4.16) &\le -\frac{1}{C}\|F_+^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} && (4.73)\\
&\quad + C(1+\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{7}{4}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} + \|F_+^{(m_1,0)}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{2s-1}{s}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}). && (4.74)
\end{aligned}$$

然后我们使用 H¨older 不等式，得到（4.28）。

步骤 1.3（离子-电子碰撞的控制）：现在，我们转向（4.17），对此我们有如下界

$$\begin{aligned}(4.17) \le -\frac{1}{C}\{\|F_+^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} - \lambda\|F_+^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}\}\\ + C\|F_+^{(m_1,0)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v}\\ + C_\lambda(1+\|F_-^{(m_1,s)}\|^{\frac{3}{2}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_\xi}).\end{aligned} \tag{4.75}$$

对所有 $\lambda > 0$。我们以与式（4.16）相同的方式分解这一项，

$$(4.17) = \langle Q^\varepsilon_{-+,D}{}^{(F_-,F_{(m_1,s)+})\ F^{(m_1,s)}{}_+}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.76}$$

$$+ \langle\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s Q^\varepsilon_{-+,D}(F_-,F_+) - Q^\varepsilon_{-+,D}(F_-,F_+^{(m_1,s)}),F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.77}$$

$$+ \langle\langle v\rangle^{m_1}\langle\nabla_x\rangle^s Q^\varepsilon_{-+,T}(F_-,F_+),F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.78}$$

项（4.76）和（4.77）采用与式（4.29）和（4.30）相同的方法，

$$(4.76) \le -\frac{1}{C}\|F_+^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v}, \tag{4.79}$$

$$(4.77) \lesssim \|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} + \|F_+^{(m_1,0)}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{2s-1}{s}}_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v}. \tag{4.80}$$

最后一项（4.78）需要采用不同的方法：我们将其分解为主项和交换子，

$$(4.78) = \langle Q^\varepsilon_{-+,T}(F_-,F_+^{(m_1,s)}),F^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.81}$$

$$+ \langle\langle\nabla_x\rangle^s Q^\varepsilon_{-+,T}(F_-,F_+^{(m_1,0)}) - Q^\varepsilon_{-+,T}(F_-,F_+^{(m_1,s)}),F^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.82}$$

$$+ \langle\langle\nabla_x\rangle^s\{\langle v\rangle^{m_1}Q^\varepsilon_{-+,T}(F_-,F_+) - Q^\varepsilon_{-+,T}(F_-,F_+^{(m_1,0)})\},F^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}}. \tag{4.83}$$

对于第一项，我们注意到 $\partial_{v_i}\partial_{v_j}\Phi_{ij}(v) = -8\pi\delta(v)$ 在分布意义下成立，其中 δ是狄拉克质量。因此，

$$\begin{aligned}(4.81) &= 4\pi\varepsilon\langle F_-|_{\xi=\varepsilon v}F_+^{(m_1,s)},F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} &(4.84)\\ &\lesssim \varepsilon\|\langle\varepsilon v\rangle^{\frac{3}{4}}F_-|_{\xi=\varepsilon v}\|_{L^\infty_x L^6_v}\|\langle\varepsilon v\rangle^{-\frac{3}{4}}F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_xL^3_v}\|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}} &(4.85)\\ &\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|F_-^{(\frac{3}{4},0)}\|_{L^\infty_xL^6_\xi}\|\langle\varepsilon v\rangle^{-\frac{3}{4}}F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_xL^3_v} &(4.86)\end{aligned}$$

现在，利用广义闵可夫斯基不等式和索 Sobolev 嵌入，

$$\|F_-^{(\frac{3}{4},0)}\|_{L^\infty_xL^6_\xi} \lesssim \|\nabla_v F_-^{(\frac{3}{4},0)}\|_{L^\infty_xL^2_\xi} \lesssim \|\nabla_v F_-^{(\frac{3}{4},s)}\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim 1 + \|F_-^{(\frac{9}{4},s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{4.87}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\|\langle\varepsilon v\rangle^{-\frac{3}{4}}F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_xL^3_v} &\lesssim \|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_{x,v}}\|\langle\varepsilon v\rangle^{\frac{3}{2}}F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_xH^1_v} &(4.88)\\ &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{4}}\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} &(4.89)\end{aligned}$$

我们得出结论：

$$(4.81) \le C\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v}\|F_-^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{4.90}$$

至于（4.82），我们有

$$(4.82) = 8\pi\langle\langle\nabla_x\rangle^s\{\nabla_\xi(-\Delta_\xi)^{-1}F_-|_{\xi=\varepsilon v}F_+^{(m_1,0)}\} - \nabla_\xi(-\Delta_\xi)^{-1}F_-|_{\xi=\varepsilon v}F_+^{(m_1,s)}, \nabla_v F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.91}$$

$$\lesssim \left\| \langle v\rangle^{\frac{3}{2}} \| |\nabla_\xi|^{-1}|F_-^{(0,s)}|_{\xi=\varepsilon v}| \|_{L^2_x} \|F_+^{(m_1,s-1)}\|_{L^2_x} \right\|_{L^2_v} \|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.92}$$

$$\lesssim \| |\nabla_\xi|^{-1}|F_-^{(0,s)}| \|_{L^2_x L^\infty_\xi} \|F_+^{(m+\frac{3}{2},s-1)}\|_{L^2_{x,v}} \|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.93}$$

$$\lesssim \| |F_-^{(0,s)}| \|_{L^2_x H^{\frac{3}{4}}_\xi} \|F_+^{(m+\frac{3s}{2},0)}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2_{x,v}} \|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{s-1}{s}}_{L^2_{x,v}} \|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.94}$$

$$\lesssim \|F^{(m_1,s)-}\|^{\frac{3}{4}}_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \|F^{(m_1,s)+}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}. \tag{4.95}$$

第二个交换子（4.82）有如下界：

$$(4.82) = 8\pi\langle\langle\nabla_x\rangle^s\{v\cdot\nabla_\xi(-\Delta_\xi)^{-1}F_-|_{\xi=\varepsilon v}F_+^{(m_1-2,0)}\}, F_+^{(m_1,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.96}$$

$$\lesssim \| |\nabla_v|^{-1}F_-^{(0,s)}\|_{L^2_x L^\infty_\xi} \|F_+^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_{x,v}} \tag{4.97}$$

$$\lesssim \|F_-^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{4.98}$$

因此，

$$(4.78) \lesssim (\|F_-^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\|F_+^{(m_1,s)}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} \|F_-^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{4.99}$$

$$+ \|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \|F_-^{(m_1,s)}\|^{\frac{3}{4}}_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}). \tag{4.100}$$

现在，结合（4.76）、（4.77）、（4.78）中的界以及杨氏不等式，可得（4.75）。

为完成步骤 1，我们结合（4.18）、（4.28）和（4.75），取 λ 充分小，从而得到（4.11）。

步骤 2（合并估计）：取 $0<\kappa_1<\kappa_2$，并令 $\mathscr{X}_+ := \kappa_1\|F^{(m_1,s)}_+\|^2_{L^2_{x,v}} + \kappa_2\|F^{(m_2,0)}_+\|^2_{L^2_{x,v}}$。由（4.10）和（4.11），可得

$$\frac{d}{dt}\mathscr{X}_+ + \frac{\kappa_1}{C}\|F^{(m_1,s)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma\cap\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} + \left(\frac{\kappa_2}{C} - C\kappa_1\right)\|F^{(m_2,0)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma\cap\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} \tag{4.101}$$

$$\le C(\kappa_1+\kappa_2)\langle\|F_-\|_{\mathfrak{D}}\rangle^{\frac{3}{2}} \tag{4.102}$$

Taki当 κ_2 充分大且 κ_1 充分小（取决于 M）时，可得（4.2）。

或者，直接将（4.10）和（4.11）相加，可得（4.3）。 □

4.2. 离子分布的误差估计。

命题 4.2. 设 $M,T>0$，且 $(F_+^\varepsilon, F_-^\varepsilon)$ 是方程 (1.7) 的一个解，满足与 4.1 中相同的假设；设 (F_+^0, β, ϕ^0) 是方程 (1.18) 的一个解，满足定理 1.1 的假设。那么，存在一个函数 $\mathscr{Y}_+^\varepsilon$: $[0,T^*) \to \mathbf{R}+$，使得 $\mathscr{Y}_+^\varepsilon \sim_M \|F_+^\varepsilon - F_+^0\|_{\mathfrak{E}'}$ and

$$\frac{d}{dt}\mathscr{Y}_+^\varepsilon + \|F_+^\varepsilon - F_+^0\|^2_{\mathfrak{D}'} \lesssim_M \langle\|(F_+^0, F_-^\varepsilon)\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2(\varepsilon^2 + \mathscr{Y}_+^\varepsilon) + \mathscr{D}^\varepsilon_{-,2}. \tag{4.103}$$

证明. 令 $G = F_+^\varepsilon - F_+^0$. 那么,

$$\partial_t G + \{v\cdot\nabla_x + E^\varepsilon\cdot\nabla_v\}G - (E^\varepsilon - E^0)\cdot\nabla_v F_+^0 - Q(F_+^\varepsilon, G) - Q(G, F_+^0) \tag{4.104}$$
$$= Q_{-+}(F_-^\varepsilon, F_+^\varepsilon) \tag{4.105}$$

与前一个命题的证明类似，给定 $m', s' \in \mathbf{R}$，我们记 $G^{(m',s')} = \langle v\rangle^{m'}\langle\nabla_x\rangle^s G$, $(F_\pm^\varepsilon)^{(m',s')} = \langle v\rangle^{m'}\langle\nabla_x\rangle^s F_\pm^\varepsilon$，等等。由此可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|G^{(m_0,s)}\|_{L^2_{x,v}}^2 = \langle[\langle v\rangle^{m_0}\langle\nabla_x\rangle^s, E^\varepsilon\cdot\nabla_v]G, G^{(m_0,s)}\rangle_{L^2_x} \tag{4.106}$$
$$+ \langle\langle v\rangle^{m_0}\langle\nabla_x\rangle^s\{(E^0 - E^\varepsilon)\cdot\nabla_v F_+^0\}, G^{(m_0,s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{4.107}$$
$$+ \langle\langle v\rangle^{m_0}\langle\nabla_x\rangle^s Q(F_+^\varepsilon, G), G^{(m_0,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.108}$$
$$+ \langle\langle v\rangle^{m_0}\langle\nabla_x\rangle^s Q(G, F_+^0), G^{(m_0,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.109}$$
$$+ \langle\langle v\rangle^{m_0}\langle\nabla_x\rangle^s Q_{-+}^\varepsilon(F_-^\varepsilon, F_+^\varepsilon), G^{(m_0,s)}\rangle_{L^2_{x,v}}. \tag{4.110}$$

我们修改命题 4.1 中的估计，得到

$$|(4.106)| \lesssim \|G\|_{\mathfrak{E}'}(\|G\|_{\mathfrak{E}'} + \|G^{(m_0,s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}), \tag{4.111}$$
$$|(4.108)| \le -\frac{1}{C}\|G^{(m_0,s)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} + C(\langle\|F_+^\varepsilon\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2\|G\|^2_{\mathfrak{E}'} + \|G^{(m_1,0)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}), \tag{4.112}$$
$$|(4.109)| \lesssim \|G\|^2_{\mathfrak{E}'} + \|G\|^{\frac{1}{4}}_{\mathfrak{E}'}\|G^{(m_0,s)}\|^{\frac{7}{4}}_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} + \langle\|F_+^0\|_{\mathfrak{D}}\rangle\|G\|_{\mathfrak{E}'}\|G^{(m_0,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.113}$$

剩下的工作是对 (4.107) 和 (4.110) 进行估计。对于前者，我们有

$$|(4.107)| \lesssim \|E^0 - E^\varepsilon\|_{H^s_x}(\|(F_+^0)^{(m_0,s)}\|_{L^2_{x,\xi}} + \|(F_+^0)^{(m_0+\frac{3}{2},s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v})\|G^{(m_0,s)}\|_{L^2_{x,v}} \tag{4.114}$$
$$\lesssim (\|G\|_{L^1_v H^{s-1}_x} + \|F_-^\varepsilon - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|_{L^1_\xi H^{s-1}_x})\langle\|F_+^0\|_{\mathfrak{D}}\rangle \tag{4.115}$$
$$\lesssim (\|G\|_{\mathfrak{E}'} + \|F_-^\varepsilon - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|_{\mathfrak{E}'})\langle\|F_+^0\|_{\mathfrak{D}}\rangle \tag{4.116}$$

在上述推导中，我们用到了这一事实：$m_0 + \frac{3}{2} \le m_1$，并且

$$-\Delta_x(\phi^\varepsilon - \phi^0) = \int_{\mathbf{R}^3} G dv - \int_{\mathbf{R}^3} F_-^\varepsilon - \mu_\beta e^{\beta\phi^0} d\xi. \tag{4.117}$$

对于（4.110），我们将该项拆分如下：

$$(4.110) = \langle\langle v\rangle^{m_0}\langle\nabla_x\rangle^s Q_{-+}^\varepsilon(F_-^\varepsilon - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}, F_+^\varepsilon), G^{(m_0,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.118}$$
$$+ \langle\langle v\rangle^{m_0}\langle\nabla_x\rangle^s Q_{-+}^\varepsilon(\mu_\beta e^{\beta\phi^0}, F_+^\varepsilon), G^{(m_0,s)}\rangle_{L^2_{x,v}} \tag{4.119}$$

Now,

$$|(4.118)| \lesssim \varepsilon\|\Delta_\xi^{-1}(F_-^\varepsilon - \mu_\beta e^{\beta\phi^0})\|_{L^\infty_\xi H^s_x}\|(F_+^\varepsilon)^{(m_0+\frac{3}{2},s)}\|_{L^2_x H^1_v}\|G^{(m_0-\frac{3}{2},s)}\|_{L^2_x H^1_v} \tag{4.120}$$
$$+ \|\nabla_\xi\Delta_\xi^{-1}(F_-^\varepsilon - \mu_\beta e^{\beta\phi^0})\|_{L^\infty_\xi H^s_x}\|(F_+^\varepsilon)^{(m_0+\frac{3}{2},s)}\|_{L^2_{x,v}}\|G^{(m_0-\frac{3}{2},s)}\|_{L^2_x H^1_v} \tag{4.121}$$
$$\lesssim \varepsilon\langle\|F_+^\varepsilon\|_{\mathfrak{D}}\rangle(\|G\|_{\mathfrak{E}'} + \|G^{(m_0,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}) \tag{4.122}$$
$$+ \|F_-^\varepsilon - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac{1}{4}}_{\mathfrak{E}'}\|F_-^\varepsilon - \mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac{3}{4}}_{\mathfrak{D}'}(\|G\|_{\mathfrak{E}'} + \|G^{(m_0,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}) \tag{4.123}$$

在上文中，我们使用了 $m_0+3\le m_1$。接下来，为了对（4.119）进行估计，我们直接由（1.10）计算得

$$Q^{\varepsilon}_{-+}(\mu_\beta e^{\beta\phi^0},F^{\varepsilon}_+) \tag{4.124}$$

$$=e^{\beta\phi^0}\nabla_v\cdot\int_{\mathbf{R}^3}\Phi(\xi-\varepsilon v)\{\varepsilon\mu_\beta(\xi)\nabla_v F^{\varepsilon}_+(v)+\beta\xi\mu_\beta(\xi)F^{\varepsilon}_+(v)\}d\xi \tag{4.125}$$

$$=\varepsilon e^{\beta\phi^0}\nabla_v\cdot\{\Phi*\mu_\beta(\varepsilon v)(\beta v+\nabla_v)F^{\varepsilon}_+(v)\}. \tag{4.126}$$

在上述推导中，我们使用了 $\Phi(\xi-\varepsilon v)\xi=\varepsilon\Phi(\xi-\varepsilon v)v$。现在，$\|\Phi_{ij}*\mu_\beta(v)\|_{L^\infty}\lesssim 1$，因此

$$|(4.119)|\lesssim\varepsilon(\|(F^{\varepsilon}_+)^{(m_0+\frac52,s)}\|_{L^2_{x,v}}\|G^{(m_0-\frac32,s)}\|_{L^2_xH^1_v}+\|(F^{\varepsilon}_+)^{(m_0+\frac32,s)}\|_{L^2_xH^1_v}\|G^{(m_0-\frac32,s)}\|_{L^2_xH^1_v}) \tag{4.127}$$

$$\lesssim\varepsilon\langle\|F^{\varepsilon}_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle(\|G\|_{\mathfrak{E}'}+\|G^{(m_0,s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_v}). \tag{4.128}$$

因此，

$$|(4.110)|\lesssim(\varepsilon\langle\|F^{\varepsilon}_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle+\|F^{\varepsilon}_--\mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac14}_{\mathfrak{E}'}\|F^{\varepsilon}_--\mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac34}_{\mathfrak{D}'}) \tag{4.129}$$

$$\cdot(\|G\|_{\mathfrak{E}'}+\|G^{(m_0,s)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}). \tag{4.130}$$

结合 (4.106) 至 (4.110) 的界，我们得到

$$\frac{d}{dt}\|G^{(m_0,s)}\|^2_{L^2_{x,v}}+\frac1C\|G^{(m_0,s)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.131}$$

$$\le C\{\langle\|(F^{\varepsilon}_+,F^0_+)\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2(\varepsilon^2+\|G\|^2_{\mathfrak{E}'})+\|G^{(m_1,0)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.132}$$

$$+\|F^{\varepsilon}_--\mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac12}_{\mathfrak{E}'}\|F^{\varepsilon}_--\mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac32}_{\mathfrak{D}'}\} \tag{4.133}$$

按照类似的论证，我们可以得到关于 $G^{(m_1,0)}$ 的如下上界：

$$\frac{d}{dt}\|G^{(m_1,0)}\|^2_{L^2_{x,v}}+\frac1C\|G^{(m_1,0)}\|^2_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v} \tag{4.134}$$

$$\le C(\langle\|(F^{\varepsilon}_+,F^0_+)\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2(\varepsilon^2+\|G\|^2_{\mathfrak{E}'})+\|F^{\varepsilon}_--\mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac12}_{\mathfrak{E}'}\|F^{\varepsilon}_--\mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac32}_{\mathfrak{D}'}). \tag{4.135}$$

现在，适当地选取 $0<\kappa_1<\kappa_2$，我们得到

$$\mathscr{Y}^{\varepsilon}_+=\kappa_2\|G^{(m_1,0)}(t)\|^2_{L^2_{x,v}}+\kappa_1\|G^{(m_0,s)}(t)\|^2_{L^2_{x,v}} \tag{4.136}$$

满足了

$$\frac{d}{dt}\mathscr{Y}^{\varepsilon}_++\|G\|^2_{\mathfrak{D}'} \tag{4.137}$$

$$\lesssim\langle\|(F^{\varepsilon}_+,F^0_+)\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2(\varepsilon^2+\|G\|^2_{\mathfrak{E}'})+\|F^{\varepsilon}_--\mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac12}_{\mathfrak{E}'}\|F^{\varepsilon}_--\mu_\beta e^{\beta\phi^0}\|^{\frac32}_{\mathfrak{D}'}. \tag{4.138}$$

由此，我们推得（4.103）。 □

4.3. 中间量。 为准备第 5 节，我们引入所谓的中间势 ψ^ε 和中间逆温度 γ^ε。固定一个初始逆温度 β_{in}，数对 $(\gamma^\varepsilon,\ \psi^\varepsilon)$ 对每个 ε 都满足庞加莱-泊松系统 $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\frac{3}{2\gamma^\varepsilon}+\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\frac{|v|^2}{2}F_+^\varepsilon dxdv+\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3}|\nabla_x\psi^\varepsilon|^2dx\right\}=0,\\ &\gamma^\varepsilon(0)=\beta_{in}\\ &-\Delta_x\psi^\varepsilon=4\pi(n_+^\varepsilon-e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}) \end{aligned} \tag{4.139}$$

我们称 ψ^ε 为中间势，因为它和 ϕ^0 一样，满足一个 Poincaré-Poisson 系统；然而，与 ϕ^0 不同，我们使用 F_+^0 而不是 F_+^ε。因此，与 ϕ^0 相比， ψ 是对 ϕ^ε 更好的近似。类似地，与 $\frac{3}{2\beta}$ 相比， $\frac{3}{2\gamma^\varepsilon}$ 是对 $\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}_3}\frac{|\xi|^2}{2}F_-^\varepsilon dxdv$ 更好的近似。下面的引理给出了给定 F_+^ε 时，$(\gamma^\varepsilon,\psi^\varepsilon)$ 这一对的存在唯一性，以及下一节将用到的界。

引理 4.3。 设 M， T， $\eta\in(0,1]$ 且 $\beta_{in}\in(e^{-M},\ e^M)$。另假设 $(F_+^\varepsilon,\ F_-^\varepsilon)$ 是方程 (1.7) 的弱解，其中 $0\le F_\pm^\varepsilon\in C([0,T];\ \mathfrak{E})\cap L^2([0,T];\ \mathfrak{D})$ 满足

$$\sup_{\pm\in\{-,+\},t\in[0,T]}\|\frac{1}{n_\pm^\varepsilon(t)}\|_{L_x^\infty}+\|F_\pm^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{E}}\le M. \tag{4.140}$$

那么，存在 $0<T^*$ 使得存在唯一解 $(\gamma^\varepsilon,\ \psi^\varepsilon)\in C([0,T]\cap[0,T^*);\ \mathbf{R}_+\times H^{s+2})$ 满足 (4.139)。此外，若 $T^*\le T$，则 $\beta(t)\uparrow+\infty$ 当 $t\uparrow T^*$时。

此外，假设对于某个 $T'\in(0,T]$，有

$$\sup_{t\in[0,T']}|\ln(\frac{\gamma^\varepsilon(t)}{\beta_{in}})|\le\eta,. \tag{4.141}$$

注意， $T<T^*$ 不一定成立。于是，我们得到以下估计

$$\sup_{t\in[0,T']}\|\psi^\varepsilon\|_{H_x^{s+2}}\lesssim_M 1, \tag{4.142}$$

$$\sup_{t\in[0,T']}\|\partial_t\psi^\varepsilon\|_{H_x^{s+1}}+|\dot\gamma^\varepsilon|\lesssim_M\langle\|\langle\xi\rangle^5F_-^\varepsilon\|_{L_x^2(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_\xi}\rangle, \tag{4.143}$$

接下来，假设 $(F_+^0,\ \beta,\ \phi^0)$ 是 (1.18) 的弱解，并满足定理1.1的假设（其中 $T_0=T$），且给定 β_{in}。那么，我们还可以控制 $(\gamma^\varepsilon,\ \psi^\varepsilon)$ 与$(\beta,\ \phi^0)$之间的差异:

$$\sup_{t\in[0,T']}\{|\gamma^\varepsilon(t)-\beta(t)|+\|\psi^\varepsilon(t)-\phi^0(t)\|_{H_x^{s+1}}\}\lesssim\sup_{t\in[0,T]}\|F_+^\varepsilon(t)-F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'}. \tag{4.144}$$

证明。 我们将证明分为三个部分：首先证明界（4.142）和（4.143）；其次证明界（4.144）；最后简述如何构造解。再次强调，所有涉及的界都可能依赖于 M。

步骤 1: 现在我们证明（4.142）和（4.143）。在这一步中，为方便起见，我们省略 ε 的上标，即 $F_+^\varepsilon=F_+$，$F_-^\varepsilon=F_-$ 等。现在我们从（4.139）的第三行以及最大值原理证明（4.142），得到如下估计

$$\|\psi\|_{L_x^\infty}\lesssim\frac{1}{\gamma}\|\ln(n_+)\|_{L_x^\infty}\lesssim 1. \tag{4.145}$$

接下来，将 $|\nabla_x|^s$ 应用于（4.139）的第三行两侧，

$$\frac{1}{4\pi}|\nabla_x|^{s'+2}\psi = |\nabla_x|^{s'}\{n_+ - e^{\gamma\psi}\}. \tag{4.146}$$

利用 [29], 中的定理 5.2.6

$$\|e^{\gamma\psi}\|_{H^s_x} \le C_{\|\psi\|_{L^\infty_x}}(\|\psi\|_{H^s_x}+1) \lesssim \|\psi\|_{H^s_x}+1. \tag{4.147}$$

因此,

$$\|\psi\|_{H^{s+2}_x} \lesssim 1 + \|n_+\|_{H^s_x} + \|\psi\|_{H^s_x} \lesssim 1 + \|\psi\|^{\frac{s}{s+2}}_{H^{s+2}_x}\|\psi\|^{\frac{2}{s+2}}_{L^2_x}. \tag{4.148}$$

现在，利用 $\|\psi\|_{L^2_x} \lesssim \|\psi\|_{L^\infty_x} \lesssim 1$ 和杨氏不等式，我们可推出 $\|\psi\|_{H^{s+2}_x} \lesssim 1$。
接下来，我们有

$$(\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)\partial_t\psi = \partial_t n_+ - \dot\gamma e^{\gamma\psi}\psi. \tag{4.149}$$

最大值原理意味着

$$e^{-C\|\psi\|_{L^\infty_x}}\|\partial_t\psi\|_{L^\infty_x} \le C\|\partial_t n_+\|_{L^\infty_x} + |\dot\gamma|e^{C\|\psi\|_{L^\infty_x}}\|\psi\|_{L^\infty_x}, \tag{4.150}$$

由连续性方程可知 $\|\partial_t n_+\|_{L^\infty_x} \lesssim \|\partial_t n_+\|_{H^{s-1}_x} \lesssim 1$；结合对 ψ 的估计，可得

$$\|\partial_t\psi\|_{L^\infty_x} \lesssim 1 + |\dot\gamma|. \tag{4.151}$$

与推导 $\|\psi\|_{H^{s+2}_x}$ 的界类似，我们得到

$$\|\partial_t\psi\|_{H^{s+1}_x} \lesssim 1 + |\dot\gamma|. \tag{4.152}$$

现在我们估计 $\dot\gamma$：首先,

$$\frac{3\dot\gamma}{2\gamma^2} = \frac{1}{2}\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}|v|^2\partial_t F_+ dxdv + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{T}^3}\nabla_x\psi\cdot\partial_t\nabla_x\psi dx. \tag{4.153}$$

我们首先分析最后一项。由（4.149）可得,

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{T}^3}\nabla_x\psi\cdot\partial_t\nabla_x\psi dx = -\frac{1}{4\pi}\langle\Delta_x\psi, \partial_t\psi\rangle_{L^2_x} \tag{4.154}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\langle\Delta_x\psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}\partial_t n_+\rangle_{L^2_x} \tag{4.155}$$

$$+ \frac{\dot\gamma}{4\pi}\langle\Delta_x\psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma\psi}\psi)\rangle_{L^2_x} \tag{4.156}$$

仔细考察后一项，我们发现

$$\frac{1}{4\pi}\langle\Delta_x\psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma\psi}\psi)\rangle_{L^2_x} \tag{4.157}$$

$$= -\langle(\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)\psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma\psi}\psi)\rangle_{L^2_x} \tag{4.158}$$

$$+ \gamma\langle e^{\gamma\psi}\psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma\psi}\psi)\rangle_{L^2_x} \tag{4.159}$$

$$= -\langle\psi, e^{\gamma\psi}\psi\rangle_{L^2_x} - \gamma\langle e^{\gamma\psi}\psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma\psi}\psi)\rangle_{L^2_x} \le 0. \tag{4.160}$$

因此，我们有

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{1}{2}\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} |v|^2 \partial_t F_+ dxdv - \frac{1}{4\pi}\langle \Delta_x \psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}\partial_t n_+\rangle_{L^2_x}}{\frac{3}{2\gamma^2} - \frac{1}{4\pi}\langle \Delta_x\psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma\psi}\psi)\rangle_{L^2_x}}, \tag{4.161}$$

分母严格有下界 $\frac{3}{2\gamma^2}$。另一方面，由连续性方程 $\partial_t n_+ + \int_{\mathbf{R}^3} v\cdot\nabla_x F_+ dxdv = 0$，我们有

$$|\langle \Delta_x\psi, (\gamma e^{\gamma\psi} - \frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}\partial_t n_+\rangle_{L^2_x}| \lesssim 1. \tag{4.162}$$

因此，

$$|\dot{\gamma}| \lesssim 1 + |\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} |v|^2 \partial_t F_+ dxdv|. \tag{4.163}$$

Now,

$$\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} |v|^2\partial_t F_+ dxdv = 2\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} v\cdot E F_+ dxdv + \iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} |v|^2 Q^{\varepsilon}_{-+}(F_-,F_+)dxdv \tag{4.164}$$

第一项有如下界

$$\begin{aligned} 2\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} v\cdot E F_+ dxdv &\lesssim \|E\|_{L^2_x}\||v|F_+\|_{L^2_x L^1_v} && (4.165)\\ &\lesssim (\|\langle\xi\rangle^2 F_-\|_{L^2_{x,v}} + \|\langle v\rangle^2 F_+\|_{L^2_{x,v}})\|\langle v\rangle^3 F_+\|_{L^2_{x,v}} && (4.166)\\ &\lesssim 1. && (4.167)\end{aligned}$$

接下来,

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} |v|^2 Q^{\varepsilon}_{-+}(F_-,F_+)dxdv && (4.168)\\ &= -2\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} v_j\{\varepsilon\Phi_{ij} *_\xi F_-|_{\xi=\varepsilon v}\partial_{v_i}F_+ - \partial_{\xi_i}\Phi_{ij} *_\xi F_-|_{\xi=\varepsilon v}F_+\}dxdv && (4.169)\\ &= 2\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\{\varepsilon\ \mathrm{tr}(\Phi *_\xi F_-|_{\xi=\varepsilon v}) + (1+\varepsilon^2)v_j\partial_{\xi_i}\Phi_{ij} *_\xi F_-|_{\xi=\varepsilon v}\}F_+ dxdv && (4.170)\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} &|\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} |v|^2 Q^{\varepsilon}_{-+}(F_-,F_+)dxdv| && (4.171)\\ &\lesssim (\|(-\Delta_\xi)^{-1}F_-\|_{L^2_x L^\infty_\xi} + \|\nabla_\xi(-\Delta_\xi)^{-1}F_-\|_{L^2_x L^\infty_\xi})\|vF_+\|_{L^2_x L^1_v} && (4.172)\\ &\lesssim \|\langle\xi\rangle^2\langle\nabla_v\rangle F_-\|_{L^2_{x,v}}\|\langle v\rangle^3 F_+\|_{L^2_{x,v}} && (4.173)\\ &\lesssim \langle\|\langle\xi\rangle^5 F_-\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_\xi}\rangle\|\langle v\rangle^3 F_+\|_{L^2_{x,v}} && (4.174)\\ &\lesssim \langle\|\langle\xi\rangle^5 F_-\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_\xi}\rangle. && (4.175)\end{aligned}$$

由此，我们得出（4.143）。

第二部分：现在我们来控制差值（4.144）。重新引入 ε的上标，以便区分 F^ε_+与 F^0_+等，不过我们仍忽略常数对 M的依赖。我们

首先估计差值 $\psi_{in}^{\varepsilon}-\phi_{in}^{0}$。只需证明以下情形即可

$$\sup_{t\in[0,T]}\|F_{+}^{\varepsilon}(t)-F_{+}^{0}(t)\|_{\mathfrak{E}'}\leq\alpha, \tag{4.176}$$

其中 $\alpha=\alpha(M)$ 足够小。如果这个界不成立，那么我们就使用界 d

$$\sup_{t\in[0,T]}|\gamma^{\varepsilon}(t)-\beta(t)|+\|\psi^{\varepsilon}(t)-\phi^{0}(t)\|_{H_x^{s+1}}\leq C_M \tag{4.177}$$

$$\leq\frac{C_M}{\alpha}\sup_{t\in[0,T]}\|F_{+}^{\varepsilon}(t)-F_{+}^{0}(t)\|_{\mathfrak{E}'}. \tag{4.178}$$

我们首先控制初始时刻的差异：

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta_x(\psi_{in}^{\varepsilon}-\phi_{in}^{0})=n_{+,in}^{\varepsilon}-n_{+,in}^{0}+e^{\beta_{in}\phi_{in}^{0}}-e^{\beta_{in}\psi_{in}^{\varepsilon}}. \tag{4.179}$$

利用最大值原理，我们得到

$$\|e^{\beta_{in}\psi_{in}^{\varepsilon}}-e^{\beta_{in}\phi_{in}^{0}}\|_{L_x^{\infty}}\lesssim\|n_{+,in}^{\varepsilon}-n_{+,in}^{0}\|_{L_x^{\infty}}\lesssim\sup_{t\in[0,T]}\|F_{+}^{\varepsilon}(t)-F_{+}^{0}(t)\|_{\mathfrak{E}'}. \tag{4.180}$$

由中值定理可知，这意味着 $\|\psi_{in}^{\varepsilon}-\phi_{in}^{0}\|_{L_x^{\infty}}\lesssim\sup_{t\in[0,T]}\|F_{+}^{\varepsilon}(t)-F_{+}^{0}(t)\|_{\mathfrak{E}'}$。事实上，写成

$$e^{\beta_{in}\phi^{0}}-e^{\beta_{in}\psi_{in}^{\varepsilon}}=\beta_{in}\int_0^1 e^{\lambda\phi^{0}+(1-\lambda)\psi^{\varepsilon}}(\phi^{0}-\psi^{\varepsilon})d\lambda, \tag{4.181}$$

容易证明，应用 $\langle\nabla_x\rangle^{s}$ 于（4.179）后，我们得到

$$\|\psi_{in}^{\varepsilon}-\phi_{in}^{0}\|_{H_x^{s+2}}\lesssim\|n_{+,in}^{\varepsilon}-n_{+,in}^{0}\|_{H_x^{s}}+\|\psi_{in}^{\varepsilon}-\phi_{in}^{0}\|_{H_x^{s}}. \tag{4.182}$$

因此，通过插值，我们得到

$$\|\psi_{in}^{\varepsilon}-\phi_{in}^{0}\|_{H_x^{s+2}}\lesssim\sup_{t\in[0,T]}\|F_{+}^{\varepsilon}(t)-F_{+}^{0}(t)\|_{\mathfrak{E}'}. \tag{4.183}$$

现在，我们说明如何估计正时间下的差值。取 $\kappa\in(0,1]$ 为一个待定的

~常数，稍后确定），并令 T 为满足 $T\leq\tilde{T}$ 且

$$\sup_{t\in[0,\tilde{T}]}|\beta-\gamma^{\varepsilon}|+\|\psi^{\varepsilon}-\phi^{0}\|_{H_x^{s+2}}\leq\kappa. \tag{4.184}$$

关于差值 $\psi^{\varepsilon}-\phi^{0}$，我们有如下方程

$$-\Delta_x(\psi^{\varepsilon}-\phi^{0})=4\pi(n_{+}^{\varepsilon}-n_{+}^{0}+e^{\beta\phi^{0}}-e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}). \tag{4.185}$$

重新整理后，我们得到

$$(\gamma^{\varepsilon}e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}-\frac{1}{4\pi}\Delta_x)(\psi^{\varepsilon}-\phi^{0}) \tag{4.186}$$

$$=n_{+}^{\varepsilon}-n_{+}^{0}+e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}(e^{\beta\phi^{0}-\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}-1-(\beta\phi^{0}-\gamma\psi^{\varepsilon})+(\beta-\gamma^{\varepsilon})(\phi^{0}-\psi^{\varepsilon})) \tag{4.187}$$

$$+(\beta-\gamma^{\varepsilon})e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}\psi^{\varepsilon}. \tag{4.188}$$

~那么，在区间 $t\in[0,T_{\varepsilon}]$ 上，我们有

$$\begin{aligned}&\|\psi^{\varepsilon}-\phi^{0}-(\beta-\gamma^{\varepsilon})(\gamma^{\varepsilon}e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}-\frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}}\psi^{\varepsilon})\|_{H_x^{s+2}}\\&\lesssim\|F_{+}^{\varepsilon}-F_{+}^{0}\|_{\mathfrak{E}'}+\kappa(|\gamma^{\varepsilon}-\beta|+\|\psi^{\varepsilon}-\phi^{0}\|_{H_x^{s+2}}).\end{aligned} \tag{4.189}$$

特别地，取足够小的 κ ，

$$\|\psi^\varepsilon-\phi^0\|_{H_x^{s+2}}\lesssim \sup_{t\in[0,T]}\|F_+^\varepsilon(t)-F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'}+|\gamma^\varepsilon-\beta|. \tag{4.190}$$

Now,

$$\Big|\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3}\nabla_x(\psi^\varepsilon-\phi^0)\cdot\nabla_x(\psi^\varepsilon+\phi^0)dx \tag{4.191}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{T}^3}(\beta-\gamma^\varepsilon)(\gamma^\varepsilon e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}-\frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\psi^\varepsilon)\Delta_x\psi^\varepsilon dx\Big| \tag{4.192}$$

$$\lesssim\Big|\int_{\mathbf{T}^3}\{(\psi^\varepsilon-\phi^0)-(\beta-\gamma^\varepsilon)(\gamma^\varepsilon e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}-\frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\psi^\varepsilon)\}\Delta_x\psi^\varepsilon dx\Big| \tag{4.193}$$

$$+\int_{\mathbf{T}^3}|\nabla_x(\psi^\varepsilon-\phi^0)|^2dx \tag{4.194}$$

$$\lesssim\sup_{t\in[0,T]}\|F_+^\varepsilon(t)-F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'}+|\gamma^\varepsilon-\beta| \tag{4.195}$$

接下来，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2\beta}-\frac{3}{2\gamma^\varepsilon}\right) \tag{4.196}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\frac{|v|^2}{2}(F_+^\varepsilon-F_+^0)dxdv+\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3}\nabla_x(\psi^\varepsilon-\phi^0)\cdot\nabla_x(\psi^\varepsilon+\phi^0)dx\right) \tag{4.197}$$

接着，利用 $\beta_{in}=\gamma(t=0)^\varepsilon$ 并对上式积分，可得

$$\frac{3(\gamma^\varepsilon-\beta)}{2\beta\gamma^\varepsilon}=\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\frac{|v|^2}{2}(F_+^\varepsilon-F_+^0)dxdv \tag{4.198}$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3}\nabla_x(\psi^\varepsilon-\phi^0)\cdot\nabla_x(\psi^\varepsilon+\phi^0)dx \tag{4.199}$$

$$-\iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3}\frac{|v|^2}{2}(F_{+,in}^\varepsilon-F_{+,in}^0)dxdv \tag{4.200}$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3}\nabla_x(\psi_{in}^\varepsilon-\phi_{in}^0)\cdot\nabla_x(\psi_{in}^\varepsilon+\phi_{in}^0)dx. \tag{4.201}$$

利用前面的界，再结合 (4.183)，可得

$$|\gamma^\varepsilon-\beta|\left|\frac{3}{2\beta\gamma^\varepsilon}-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{T}^3}(\gamma^\varepsilon e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}-\frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\psi^\varepsilon)\Delta_x\psi^\varepsilon dx\right| \tag{4.202}$$

$$\lesssim|\gamma^\varepsilon-\beta|^2+\sup_{t\in[0,T]}\|F_+^\varepsilon(t)-F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'}. \tag{4.203}$$

通过与估计 $\dot\gamma$ 的类似论证，可得

$$\int_{\mathbf{T}^3}(\gamma^\varepsilon e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}-\frac{1}{4\pi}\Delta_x)^{-1}(e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\psi^\varepsilon)\Delta_x\psi^\varepsilon dx\le 0. \tag{4.204}$$

˜我们得出结论：对所有 $t\in[0,T]$,

$$|\gamma^\varepsilon(t)-\beta(t)|\lesssim\kappa|\gamma^\varepsilon(t)-\beta(t)|+\sup_{t\in[0,T]}\|F_+^\varepsilon(t)-F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'} \tag{4.205}$$

取 κ 足够小，我们有 $|\gamma^\varepsilon(t) - \beta(t)| \le C_0\alpha$，其中某个 C_0。因此，取 $\alpha = \frac{\kappa}{2C_0}$，~我们有 $T = T$。

步骤 3：最后，我们概述如何构造满足（γ^ε，ψ^ε）4.139）的解。关于定理 1.4 的 (ii)，请读者参见 [3] 及其证明。根据标准椭圆理论，存在唯一的 $\psi^\varepsilon_{in} \in H^{s+2}$ 解该系统

$$-\Delta_x \psi^\varepsilon_{in} = 4\pi(n^\varepsilon_{+,in} - e^{\beta_{in}\psi^\varepsilon_{in}}). \tag{4.206}$$

现在，对于 $t > 0$，定义

$$E(t) := \frac{3}{2\beta_{in}} + \iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} \frac{|v|^2}{2}(F^\varepsilon_{+,in} - F^\varepsilon_+(t))dxdv + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3} |\nabla_x \psi^\varepsilon_{in}|^2 dx. \tag{4.207}$$

那么，对于所有满足 $E(t) > 0$ 的 $t > 0$，都存在 $(\gamma(t)\ \psi(t)) \in \mathrm{R}_+ \times H^{s+2}$，使其满足 (4.139) 的第三行以及在 $[0,t]$ 上积分的第一行。由于 $t \mapsto \iint_{\mathrm{T}^3\times\mathrm{R}_3} \frac{|v|^2}{2} F^\varepsilon_+(t)dxdv$ 连续，且上述条件在 $t = 0$ 时成立，我们将 $T^* > 0$ 取为小于 T 且使上述条件不成立的最早时刻；若不存在这样的时刻，则取 $T^* = T$。于是存在唯一的 (γ, ψ) 满足 (4.139)，其中 $\ln(\gamma) \in L^\infty_{loc}([0,T^*))$ 且 $\psi \in L^\infty_{loc}([0,T^*); H^{s+2})$。此外，$\frac{3}{2\gamma^\varepsilon}(t) \le E(t)$，因此只要 $T^* \le T$，当 $t \to T^*$ 时，$\gamma^\varepsilon(t) \to \infty$。

接下来，我们注意到 γ 关于时间连续。这可由恒等式（4.161）以及以下事实推出：

$$\|\partial_t n^\varepsilon_+(t)\|_{L^2_x}, \iint_{\mathbf{T}^3\times\mathbf{R}^3} \frac{|v|^2}{2}\partial_t F^\varepsilon_+(t,x,v)dxdv \in L^1([0,T]), \tag{4.208}$$

上文也证明了 a 上。容易证明 $\psi \in C$（$[0,T^*)$；H^{s+2}）由此可得，而（4.149 ）. □

5. Estimates on the electron distribution

5.1. 麦克斯韦分布的稳定性。本节的主要结果是命题5.1，粗略地说，它表明麦克斯韦分布 $\mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}$ 是稳定的；也就是说，如果 $F^\varepsilon_{-,\ in}$ 接近$\mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}$，那么它将保持接近。我们还利用拉伸指数衰减来获得某种形式的渐近稳定性。

为陈述该结果，令 $\eta > 0$，并回忆$q_\alpha = e^{\alpha\eta}\beta_{in}$ 对每个 $\alpha \in \{1,2,3\}$成立。然后，类似于 $\mathscr{E}_{-,\ \alpha}$ 和 $\mathscr{D}_{-,\ \alpha}$，我们对每个 $\alpha \in \{1,2\}$定义：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{E}}^\varepsilon_{-,\alpha} := &\|e^{q_\alpha|\xi|^2/4}\langle\nabla_x\rangle^s\{F^\varepsilon_- - \mu_{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\}\|^2_{L^2_{x,\xi}}\\ &+ \|e^{q_{\alpha+1}|\xi|^2/4}\{F^\varepsilon_- - \mu_{\gamma^\varepsilon}e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\}\|^2_{L^2_{x,\xi}}\end{aligned} \tag{5.1}$$

and

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{D}}^\varepsilon_{-,\alpha} := &\|e^{q_\alpha|\xi|^2/4}\langle\nabla_x\rangle^s\{F^\varepsilon_- - \mu_{\gamma^\varepsilon\psi}e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\\ &+ \|e^{q_{\alpha+1}|\xi|^2/4}\{F^\varepsilon_- - \mu_{\gamma^\varepsilon}e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

命题 5.1。固定 $M > 0$。那么存在正定常数 η、ς 和 $\bar\varepsilon$，使得以下结论成立。假设 $0 < \varepsilon \le \bar\varepsilon$。对每个这样的 ε，令 $(F^\varepsilon_+, F^\varepsilon_-)$ 为系统的一个解

(1.7)其中 $0 \le F_{\pm}^{\varepsilon} \in C([0,T];\ \mathfrak{E}) \cap L^2([0,T];\ \mathfrak{D})$。固定 $\beta_{in} \in (e^{-M},\ e^{M})$，令 $(\psi^{\varepsilon},\ \gamma^{\varepsilon})$ 为系统 (4.139)的相应解，假设

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|\frac{1}{n_{+}^{\varepsilon}(t)}\|_{L_x^\infty} + \|F_{+}^{\varepsilon}(t)\|_{\mathfrak{E}}) \le M, \tag{5.3}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\widetilde{\mathscr{E}}_{-,2}^{\varepsilon}(t)} \le \varsigma, \tag{5.4}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\ln(\frac{\gamma^{\varepsilon}(t)}{\beta_{in}})| \le \eta, \tag{5.5}$$

$$\int_0^T \|\partial_t(n_{-}^{\varepsilon} - e^{\gamma^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}})\|_{L_x^2} dt \le 1. \tag{5.6}$$

我们还对初始数据作出如下假设：

$$\left| \int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{T}^3} \frac{|\xi|^2}{2}(F_{-,in}^{\varepsilon} - \mu_{\beta_{in}} e^{\beta_{in}\psi_{in}^{\varepsilon}}) dx d\xi + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3} |\nabla_x \phi_{in}^{\varepsilon}|^2 - |\nabla_x \psi_{in}^{\varepsilon}|^2 dx \right| \le M\varepsilon. \tag{5.7}$$

于是，我们有

$$\varepsilon \sup_{t\in[0,T]} \widetilde{\mathscr{E}}_{-,2}^{\varepsilon}(t) + \int_0^T \widetilde{\mathscr{D}}_{-,2}^{\varepsilon}(t) dt \le C_M(\varepsilon \widetilde{\mathscr{E}}_{-,2,in}^{\varepsilon} + \varepsilon^2) \tag{5.8}$$

并且对所有的 $t \in [0,T]$，我们有

$$\mathscr{E}_{-,1}^{\varepsilon}(t) \le C_M(e^{-\frac{1}{C_M}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} \sup_{t'\in[0,T]} \mathscr{E}_{-,2}^{\varepsilon}(t') + \varepsilon^{\frac{5}{3}} t^{\frac{1}{3}}) \tag{5.9}$$

在本节余下部分中，我们将不再提及 $(F_{+}^{0}, \beta, \phi^{0})$ 及其导出量，而只处理 $(F_{-}^{\varepsilon}, F_{+}^{\varepsilon})$。明确这一点后，在本节中我们将记 $F_{+}^{\varepsilon} = F_{+}$, $F_{-}^{\varepsilon} = F_{-}$ 等，其中对 ε 的依赖关系将默认不写出。

5.2. 设定。我们引入 $a = n_{-} - e^{\gamma\psi}$，并注意到

$$4\pi a = -\Delta_x(\phi - \psi), \tag{5.10}$$

利用（5.5），我们注意到

$$\gamma(t) \le q_1 < q_2 < q_3. \tag{5.11}$$

接下来，我们将其分解为

$$F_{-} - \mu_{\gamma} e^{\gamma\psi} = \sqrt{\mu_{\gamma}} f = \sqrt{\mu_{q_\alpha} e^{q_\alpha \phi}} g_\alpha \tag{5.12}$$

其中 $\alpha \in \{1,2,3\}$。

f 的方程如下

$$\begin{aligned} &\varepsilon\mu_{\gamma}^{-\frac{1}{2}}\partial_t\{\mu_{\gamma}^{\frac{1}{2}} f\} + \{\xi\cdot\nabla_x + E\cdot(\frac{\xi}{2} - \nabla_\xi)\}f + e^{\gamma\psi}\mathcal{L}_\gamma f + \mathcal{M}_{\gamma,F_+} f \\ &\quad - 4\pi\gamma\xi\cdot\nabla_x\Delta_x^{-1} a\mu_{\gamma}^{\frac{1}{2}} e^{\gamma\psi} \\ &= -\varepsilon\mu_{\gamma}^{\frac{1}{2}}\partial_t\{\mu_\gamma e^{\gamma\psi}\} - e^{\gamma\psi}\mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mu_{\gamma}^{\frac{1}{2}} + \Gamma_\gamma(f,f) \end{aligned} \tag{5.13}$$

其中

$$\mathcal{L}_\gamma h = \mu_\gamma^{-\frac{1}{2}}\{Q(\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}h,\mu_\gamma)+Q(\mu_\gamma,\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}h)\}, \tag{5.14}$$

$$\mathcal{M}_{\gamma,F_+} h = \mu_\gamma^{-\frac{1}{2}} Q^{\varepsilon}_{+-}(F_+,\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}h), \tag{5.15}$$

$$\Gamma_\gamma(h_1,h_2) = -\mu_\gamma^{-\frac{1}{2}} Q(\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}h_1,\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}h_2). \tag{5.16}$$

另一方面， g_α, $\alpha\in\{1,2,3\}$ 满足方程

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\{\partial_t + q\partial_t\phi\}g_\alpha + \{v\cdot\nabla_x - E\cdot\nabla_\xi\}g_\alpha + e^{\gamma\psi}\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q}g_\alpha + \mathcal{M}_{q_\alpha,F_+}g_\alpha \\
&\quad - 4\pi\gamma\xi\cdot\nabla_x\Delta_x^{-1}a\frac{\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}}e^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi} \\
&= -\varepsilon\frac{\partial_t\{\mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}e^{q_\alpha\psi}}} - e^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi}\mathcal{M}_{q_\alpha,F_+}(\mu_{q_\alpha}^{-\frac{1}{2}}\mu_\gamma) + e^{\frac{q_\alpha}{2}\phi}\Gamma_{q_\alpha}(g_\alpha,g_\alpha)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

其中$\mathcal{M}_{q_\alpha,F_+}$ 和 Γ_{q_α} 的定义方式分别与 $\mathcal{M}_{\gamma,F_+}$ 和 Γ_γ 相同，只需将 γ 替换~为 q_α。算子 $\mathcal{L}_{\gamma,q}$ 定义如下。

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q}\psi = \mu_q^{-\frac{1}{2}}\{Q(\mu_q^{\frac{1}{2}}\psi,\mu_\gamma)+Q(\mu_\gamma,\mu_q^{\frac{1}{2}}\psi)\} \tag{5.18}$$

现在，我们还定义算子 $\mathcal{P}_\gamma$ 为 L^2-投影（关于 ξ 变量）到 $\mathcal{L}_\gamma$的核上，并取 $\mathcal{P}_\gamma^\perp = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbf{R}^3)} - \mathcal{P}_\gamma$。由 [19], 可知，该核为

$$N(\mathcal{L}_\gamma) = \mathrm{span}\{\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}(\xi), w_1\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}, \xi_2\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}, \xi_3\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}, |\xi|^2\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}\}. \tag{5.19}$$

除了已定义的扰动密度 a 外，我们还定义宏观变量 $c:\mathrm{T}^3\to\mathrm{R}$ 和 $b:\mathrm{T}^3\to\mathrm{R}^3$，作为该投影在 f 上的系数:

$$\mathcal{P}_\gamma f = a\mu_\gamma^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}b\cdot w\mu_\gamma^{\frac{1}{2}} + c\frac{\gamma|\xi|^2-3}{\sqrt{6}}\mu_\gamma^{\frac{1}{2}} \tag{5.20}$$

我们注意到 t 上面的表示是关于 $N(\mathcal{L}_\gamma)$ 的正交归一基的表示。此外 ,

$$a = \int_{\mathbf{R}^3}\{F_- - \mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}d\xi = n_- - e^{\gamma\psi} \tag{5.21}$$

$$b = \int_{\mathbf{R}^3}\gamma^{\frac{1}{2}}\xi\{F_- - \mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}d\xi = \gamma^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbf{R}^3}\xi F_- d\xi \tag{5.22}$$

$$c = \int_{\mathbf{R}^3}\frac{(\gamma|\xi|^2-3)}{\sqrt{6}}\{F_- - \mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}d\xi = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\gamma\int_{\mathbf{R}^3}|\xi|^2F_-d\xi - 3n_-\right). \tag{5.23}$$

因此，(a,b,c) 构成了电子的密度、电流和局部动能等物理宏观变量的线性变换。给定 $r\geq 0$, 我们将记作 $a^{(r)} = \langle\nabla_x\rangle^r a$、$g_\alpha^{(r)} = \langle\nabla_x\rangle^r g_\alpha$，依此类推。

最后，我们以提及本节中反复出现的一些常用估计来结束本节。注意，在自举假设下, $\|\phi\|_{H_x^{s+2}} + \|\psi\|_{H_x^{s+2}} \lesssim_M 1$。因此,

$$\|f\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim_M \|g_1\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim_M \|g_2\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim_M \|g_3\|_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.24}$$

$$\|f^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim_M \|g_1^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim_M \|g_2^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim_M \|g_3^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.25}$$

相同的不等式在空间 $L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi$ 和 $L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi$上也成立。此外，

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{-,\alpha} \sim_M \|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + \|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.26}$$

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{-,\alpha} \sim_M \|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.27}$$

5.3. 初步估计。接下来，我们给出线性化碰撞算子$\widetilde{}$的上下$\mathcal{L}_{q界\gamma}$。

引理 5.2。 假设 (5.5)。令 h_1， h_2， h_3： $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$。我们有如下结论：(i) 则

$$\|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_1\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} \lesssim \langle \mathcal{L}_\gamma h_1, h_1\rangle_{L^2} \lesssim \|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_1\|^2_{\mathcal{H}_\sigma}. \tag{5.28}$$

(ii) 取 $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$， 以及 h_1, h_2： $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$,

$$\langle \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q} h_1, h_2\rangle_{L^2} \lesssim \|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_1\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_2\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \eta\|h_1\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|h_2\|_{\mathcal{H}_\sigma}, \tag{5.29}$$

$$\|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_1\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} \lesssim \langle \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q} h_1, h_1\rangle_{L^2} + \eta^2\|\mathcal{P}_\gamma h_1\|^2_{L^2}. \tag{5.30}$$

(iii) 取 $\eta > 0$ 充分小。设 $h_1 = \sqrt{\frac{\mu_q}{\mu_\gamma}} h_2$ 其中 $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$。则，

$$\|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_1\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} \lesssim \eta\|\mathcal{P}_\gamma h_1\|^2_{L^2} + \|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_2\|^2_{\mathcal{H}_\sigma}. \tag{5.31}$$

此外，

$$\|h_1\|_{\mathcal{H}_\sigma} \lesssim \|\mathcal{P}_\gamma h_1\|_{L^2} + \|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_1\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \tag{5.32}$$

(iv) 若 $q \in \{q_1, q_2\}$， 则取 $q' \in [0, q)$ 后， 我们有

$$\langle \Gamma_q(h_1, h_2), h_3\rangle_{L^2} \lesssim_{q'} (\|e^{\frac{q'|\xi|^2}{4}} h_1\|_{L^2}\|h_2\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|e^{\frac{q'|\xi|^2}{4}} h_1\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|h_2\|_{L^2})\|h_3\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \tag{5.33}$$

证明。 对于 (i)， 在 $\gamma = 2$ 的情形下，等价关系（5.28）可见 [19]。一般的γ 情形由 ξ 中的重新缩放得到。

对于 (ii)，我们计算得

$$\langle \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q} h_1, h_2\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{L}_\gamma h_1, h_2\rangle_{L^2} + \frac{\gamma - q}{2}\{\langle \sigma^\gamma_{ij}\xi_i h_1, \partial_{\xi_j} h_2\rangle_{L^2} - \langle \sigma^\gamma_{ij}\xi_j \partial_{\xi_i} h_1, h_2\rangle_{L^2}\} \tag{5.34}$$

$$- \frac{(\gamma - q)^2}{2}\langle \sigma^\gamma_{ij}\xi_i\xi_j h_1, h_2\rangle_{L^2} \tag{5.35}$$

由上可知，我们有（5.29）。在 $h_2 = h_1$ 的情形下，由（5.28）和上述计算可得

$$\langle \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q} h_1, h_1\rangle_{L^2} \geq \langle \mathcal{L}_\gamma h_1, h_1\rangle_{L^2_\xi} - C\eta^2\|h_1\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} \tag{5.36}$$

$$\geq (\frac{1}{C} - C\eta^2)\|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_1\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} - C\eta^2|\mathcal{P}_\gamma h_1|^2_{\mathcal{H}_\sigma}. \tag{5.37}$$

取 η 充分小，可得（5.30）。

现在我们证明 (iii)。记 $\zeta = \sqrt{\frac{\mu_q}{\mu_\gamma}}$。现在，

$$\|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_1\|_{\mathcal{H}_\sigma} = \|\mathcal{P}^\perp_\gamma(\zeta h_2)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \|\mathcal{P}^\perp_\gamma(\zeta\mathcal{P}_\gamma h_2)\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\mathcal{P}^\perp_\gamma(\zeta\mathcal{P}^\perp_\gamma h_2)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \tag{5.38}$$

$$\lesssim \|\mathcal{P}^\perp_\gamma((\zeta - 1)\mathcal{P}_\gamma h_2)\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_2\|_{\mathcal{H}_\sigma} \tag{5.39}$$

$$\lesssim \|(\zeta - 1)\mathcal{P}_\gamma h_2\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\mathcal{P}^\perp_\gamma h_2\|_{\mathcal{H}_\sigma} \tag{5.40}$$

现在，$|\zeta-1|\lesssim\eta|\xi|^2$，且 $|\mathcal{P}_\gamma h_2(\xi)|\lesssim\langle\xi\rangle^2 e^{-\frac{\gamma}{2}|\xi|^2}\|\mathcal{P}_\gamma h_2\|_{L^2}$，$\|(\zeta-1)\mathcal{P}_\gamma h_2\|_{\mathcal{H}_\sigma}\lesssim\eta\|\mathcal{P}_\gamma h_2\|_{L^2}$。现在，

$$\|\mathcal{P}_\gamma h_2\|_{L^2}\le\|\mathcal{P}_\gamma(\zeta^{-1}\mathcal{P}_\gamma h_1)\|_{L^2}+\|\mathcal{P}_\gamma((\zeta^{-1}-1)\mathcal{P}_\gamma^\perp h_1)\|_{L^2} \tag{5.41}$$

$$\lesssim\|\mathcal{P}_\gamma h_1\|_{L^2}+\eta\|\mathcal{P}_\gamma^\perp h_1\|_{L^2}. \tag{5.42}$$

结合这些界，我们推出（5.31），令 η 充分小。由后一个估计，我们推出（5.32）。

最后，我们证明（iv）。当 $q=2$ 时，界（5.33）可由 [19]中定理3的证明得到。一般 q 的情形可通过 ξ中的重新缩放得到。□

引理5.3。设 $q\in\{q_1,q_2,q_3\}$ 并假设(5.5) 中 η 充分小。令$G,h_1,h_2:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$，$G=G(v)$，$h_1=h_1(\xi)$，$h_2=h_2(\xi)$。

(i) 我们有如下上界

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{M}_{q,G}h_1,h_2\rangle_{L^2}\lesssim{}&\|\langle v\rangle^3G\|_{L^2}(\|h_1\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}}+\varepsilon^{\frac12}\|\langle\tfrac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac12}h_1\|_{L^2})(\|h_2\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}}+\varepsilon^{\frac12}\|\langle\tfrac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac12}h_2\|_{L^2})\\&+\varepsilon^{\frac12}\|\langle v\rangle^{\frac72}G\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|\langle\tfrac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac12}h_1\|_{L^2}\|h_2\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}}.\end{aligned} \tag{5.43}$$

(ii) 假设 $G\ge0$、$\|\langle v\rangle^3G\|_{L^2}$、$\|\langle v\rangle^{\frac72}G\|_{\mathcal{H}_\sigma}<\infty$ 和 $\|G\|_{L^1_v}>0$。令

$$k_G:=\sup\{1,\|\langle v\rangle^3G\|_{L^2_v},\frac{1}{\|G\|_{L^1_v}}\}, \tag{5.44}$$

那么，

$$\langle\mathcal{M}_{q,G}h_1,h_1\rangle_{L^2_\xi}\ge\frac{1}{C_{k_G}}\|h_1\|^2_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}}-C_{k_G}\varepsilon\langle\|\langle v\rangle^{\frac72}G\|_{\mathcal{H}_\sigma}\rangle^2\|h_1\|^2_{L^2}. \tag{5.45}$$

证明。回忆一下，$\mathcal{M}_{q,\ G}h=\frac{1}{\sqrt{\mu_q}}Q^\varepsilon_{+-}(\mu_q,\ \sqrt{\mu_q}h)$，其中 Q^ε_{+-} 定义于（1.11）。那么，

$$\langle\mathcal{M}_{q,\ G}h_1,\ \ h_2\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.46}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\langle(\Phi_{ij}*G)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}(\partial_{\xi_i}-\frac{q\xi_i}{2})h_1,(\partial_{\xi_j}+\frac{q\xi_i}{2})h_1\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.47}$$

$$-\langle(\partial_{v_i}\Phi_{ij}*G)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}h_1,(\partial_{\xi_j}+\frac{q\xi_i}{2})h_1\rangle_{L^2_\xi}. \tag{5.48}$$

对于第一项，我们有

$$(5.47)\lesssim\frac{1}{\varepsilon}\langle(\Phi_{ij}*|G|)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}(\partial_{\xi_i}-\frac{q\xi_i}{2})h_1,(\partial_{\xi_j}-\frac{q\xi_i}{2})h_1\rangle^{\frac12}_{L^2_\xi} \tag{5.49}$$

$$\cdot\langle(\Phi_{ij}*|G|)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}(\partial_{\xi_i}+\frac{q\xi_i}{2})h_2,(\partial_{\xi_j}+\frac{q\xi_i}{2})h_2\rangle^{\frac12}_{L^2_\xi} \tag{5.50}$$

$$\lesssim\|\langle v\rangle^3G\|_{L^2_v}(\|h_1\|^2_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}\xi_i\xi_jh_1,h_1\rangle_{L^2_\xi})^{\frac12} \tag{5.51}$$

$$\cdot(\|h_2\|^2_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}\xi_i\xi_jh_2,h_2\rangle_{L^2_\xi})^{\frac12}. \tag{5.52}$$

上文使用了上界（3.5）。现在，回想根据（1.19），$\sigma_{ij}\ (z)\ z_iz_j\sim\frac{|z|^2}{\langle z\rangle^3}$。因此，

$$\frac{1}{\varepsilon}\sigma_{ij}(\frac{\xi}{\varepsilon})\xi_i\xi_j\sim\frac{|\xi|^2}{\varepsilon\langle\xi/\varepsilon\rangle^3}=\frac{\varepsilon|\xi/\varepsilon|^2}{\langle\xi/\varepsilon\rangle^3}\le\frac{\varepsilon}{\langle\xi/\varepsilon\rangle}\le\min\{\varepsilon,\frac{1}{|\xi|}\}. \tag{5.53}$$

因此，

$$(5.47) \lesssim \|\langle v\rangle^3 G\|_{L^2_v}(\|h_1\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|h_1\|_{L^2_\xi})(\|h_2\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|h_2\|_{L^2_\xi}). \tag{5.54}$$

接下来，我们考虑第二项：再次利用（1.19），并回忆$\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\sigma}$的定义，– 在（1.23）中，我们得到

$$|\langle(\partial_{v_i}\Phi_{ij} * G)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}} h_1, (\partial_{\xi_j} + \frac{q\xi_i}{2})h_2\rangle_{L^2_\xi}| \tag{5.55}$$

$$\lesssim \left(\int_{\mathbf{R}^3} (\sigma^{-1})_{ij}(\frac{\xi}{\varepsilon})\partial_{v_k}\Phi_{ki} * G|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}\partial_{v_l}\Phi_{lj} * G|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}} h_1^2(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.56}$$

$$\cdot \langle\sigma_{ij}(\frac{\xi}{\varepsilon})(\partial_{\xi_i} + \frac{q\xi_i}{2})h_2, (\partial_{\xi_j} + \frac{q\xi_i}{2})h_2\rangle_{L^2_\xi}^{\frac{1}{2}} \tag{5.57}$$

$$\lesssim \left(\int_{\mathbf{R}^3} \langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^3 |(\nabla_v(-\Delta_v)^{-1}G)(\frac{\xi}{\varepsilon})|^2 h_1^2(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.58}$$

$$\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sup_{v\in\mathbf{R}^3, i\in\{1,2,3\}} \{\langle v\rangle^2 |\nabla_v(-\Delta_v)^{-1}G(v)|\} \|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}} h_1\|_{L^2_\xi}(\|h_2\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}} h_2\|_{L^2_\xi}) \tag{5.59}$$

现在，我们有

$$\sup_{v\in\mathbf{R}^3} \|\langle v\rangle^2 |\partial_{v_j}\Phi_{ij} * G(v)\| \lesssim \|\langle v\rangle^2 G\|_{H^1_v} \lesssim \|\langle v\rangle^{\frac{7}{2}} G\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \tag{5.60}$$

（ii）的证明：我们写作

$$\langle\mathcal{M}_{q,G}h_1, h_1\rangle_{L^2_\xi} = \frac{1}{\varepsilon}\langle(\Phi_{ij} * G)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}(\partial_{\xi_i} - \frac{q\xi_i}{2})h_1, (\partial_{\xi_j} + \frac{q\xi_i}{2})h_1\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.61}$$

$$- \langle(\partial_{v_i}\Phi_{ij} * G)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}} h_1, (\partial_{\xi_j} + \frac{q\xi_i}{2})h_1\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.62}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\langle(\Phi_{ij} * G)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}\partial_{\xi_i} h_1, \partial_{\xi_j} h_1\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.63}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}\langle(\Phi_{ij} * G)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}\xi_i\xi_j h_1, h_1\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.64}$$

$$- \langle(\partial_{v_i}\Phi_{ij} * G)|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}} h_1, (\partial_{\xi_j} + \frac{q\xi_i}{2})h_1\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.65}$$

现在，应用（3.6），可得

$$(5.63) \geq \frac{1}{C_{k_G}\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{v=\frac{\xi}{\varepsilon}}\partial_{\xi_i} h_1, \partial_{\xi_j} h_1\rangle_{L^2_\xi}. \tag{5.66}$$

再次应用（3.5），得到

$$\frac{1}{\varepsilon}\sup_{\xi\in\mathbf{R}^3}\left|(\Phi_{ij} * G)(\frac{\xi}{\varepsilon})\xi_i\xi_j\right| \lesssim \frac{k_G}{\varepsilon}\sigma_{ij}(\frac{\xi}{\varepsilon})\xi_i\xi_j \lesssim \frac{k_G|\xi|^2}{\varepsilon\langle\xi/\varepsilon\rangle^3} \leq \frac{k_G\varepsilon}{\langle\xi/\varepsilon\rangle}. \tag{5.67}$$

因此，

$$|(5.64)| \leq C_{k_G}\varepsilon\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}} h_1\|^2_{L^2} \tag{5.68}$$

最后，我们重新利用第（i）部分中的界，从而对所有 $\lambda>0$，有

$$|(5.65)| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\langle v\rangle^{\frac{7}{2}}G\|_{\mathcal{H}_\sigma}\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}h_1\|_{L^2_\xi}\|h_1\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}} \tag{5.69}$$

$$\leq \frac{\lambda}{C_{k_G}}\|h_1\|^2_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}} + \frac{C_{k_G}\varepsilon}{\lambda}\|\langle v\rangle^{\frac{7}{2}}G\|^2_{\mathcal{H}_\sigma}\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}h_1\|^2_{L^2}. \tag{5.70}$$

取 λ 充分小，使得上式中的第一项被（5.63）控制，由此推出（5.45）。□

5.4. 能量估计。

命题 5.4. 我们假设 (5.3)、(5.4) 和 (5.5) 均成立。那么，对所有 $\kappa>0$，$t\in[0,T]$：（i）对于 $\alpha\in\{1,2,3\}$，有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{d}{dt}\{\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + 4\pi\sqrt{\gamma}\||\Delta_x|^{-1}a\|^2_{L^2_x}\} + \frac{1}{C}\{\|\mathcal{P}^\perp_\gamma g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})}\}\\
&\quad\leq C(\varepsilon+\varsigma+\eta+\kappa)\|\mathcal{P}_\gamma f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\\
&\qquad + C\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x} + \|F_+\|^2_{\mathfrak{D}}\rangle\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}}\\
&\qquad + C_\kappa\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2
\end{aligned} \tag{5.71}$$

（ii）对于 $\alpha\in\{1,2\}$，

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + \frac{1}{C}\{\|\mathcal{P}^\perp_\gamma g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})}\}\\
&\quad\leq C(\varepsilon+\varsigma+\eta+\kappa)\|\mathcal{P}_\gamma f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + C_{\eta,\kappa}\|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\\
&\qquad + C\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x} + \|F_+\|^2_{\mathfrak{D}}\rangle\|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}}\\
&\qquad + C_\kappa\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2
\end{aligned} \tag{5.72}$$

证明。我们将证明分为以下各部分：
(i) 的证明：将式（5.17）乘以 g_α 并积分：

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.73}$$

$$+\frac{q_\alpha\varepsilon}{2}\langle\partial_t\phi g_\alpha, g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.74}$$

$$+\langle e^{\gamma\psi}\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q_\alpha}g_\alpha, g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.75}$$

$$+\langle\mathcal{M}_{q_\alpha,F_+}g_\alpha, g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.76}$$

$$-4\pi\gamma\langle\xi\cdot\nabla_x\Delta_x^{-1}a\frac{\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}}e^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi}, g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.77}$$

$$=-\varepsilon\langle\frac{\partial_t\{\mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}e^{q_\alpha\phi}}}, g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.78}$$

$$-\langle e^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi}\mathcal{M}_{q_\alpha,F_+}(\frac{\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}}), g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.79}$$

$$+\langle e^{\frac{q_\alpha}{2}\phi}\Gamma_{q_\alpha}(g_\alpha,g_\alpha), g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}}. \tag{5.80}$$

由式（4.143），

$$|(5.74)| \lesssim \varepsilon(\|\partial_t\psi\|_{L^\infty_x} + \|\Delta_x^{-1}\partial_t a\|_{L^\infty_x})\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.81}$$

$$\lesssim \varepsilon\langle\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|\partial_t a\|_{L^2_x}\rangle\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.82}$$

$$\lesssim \varepsilon^2 + \varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x}\rangle\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + \varsigma\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.83}$$

接下来，我们应用（5.30）得到

$$(5.75) \geq \frac{1}{C}e^{-C\|\psi\|_{L^\infty_x}}\|\mathcal{P}_\gamma^\perp g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} - Ce^{C\|\psi\|_{L^\infty_x}}\eta^2\|\mathcal{P}_\gamma g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.84}$$

$$\geq \frac{1}{C}\|\mathcal{P}_\gamma^\perp g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} - C\eta^2\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.85}$$

在第二行中，我们使用 $\|\phi\|_{L^\infty_x} \lesssim M + \varsigma \lesssim 1$。接下来，我们应用（5.45）得到

$$(5.76) \geq \frac{1}{C_{k_{F_+}}}\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} - C_{K_{F_+}}\varepsilon\langle\|\langle v\rangle^{\frac{7}{2}}F_+\|_{L^\infty_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle^2\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.86}$$

其中

$$k_{F_+} = \max\{1, \|\langle v\rangle^3 F_+\|_{L^\infty_x L^2_v}, \|n_+^{-1}\|_{L^\infty_x}\} \lesssim 1. \tag{5.87}$$

利用这一点，我们得到

$$(5.76) \geq \frac{1}{C}\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} - C\varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.88}$$

对于下一项，我们写作

$$\frac{e^{\frac{q_\alpha}{2}\phi}g_\alpha}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}} = \frac{\sqrt{\mu_\gamma}f}{\mu_{q_\alpha}} = \frac{f}{\sqrt{\mu_\gamma}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_\gamma}} - \frac{\sqrt{\mu_\gamma}}{\mu_{q_\alpha}}\right)f = \frac{f}{\sqrt{\mu_\gamma}} + \left(\frac{\mu_{q_\alpha}}{\mu_\gamma} - 1\right)\frac{e^{\frac{q_\alpha}{2}\phi}g_\alpha}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}} \tag{5.89}$$

于是，

$$(5.77) = -4\pi\gamma\langle\xi\cdot\nabla_x\Delta_x^{-1}a\sqrt{\mu_\gamma}e^{\gamma\psi-q_\alpha\phi}, f\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.90}$$

$$- 4\pi\gamma\langle\xi\cdot\nabla_x\Delta_x^{-1}a\frac{\mu_{q_\alpha}-\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}}e^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi}, g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.91}$$

$$= -4\pi\gamma\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}a, b\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.92}$$

$$- 4\pi\gamma\langle(e^{\gamma\psi-q_\alpha\phi}-1)\nabla_x\Delta_x^{-1}a, b\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.93}$$

$$- 4\pi\gamma\langle\xi\cdot\nabla_x\Delta_x^{-1}a\frac{\mu_{q_\alpha}-\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}}e^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi}, g_\alpha\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.94}$$

对于项（5.92），我们使用连续性方程（见下文（5.201））

$$\varepsilon\partial_t a + \sqrt{\gamma}\nabla_x\cdot b = -\varepsilon\partial_t(e^{\gamma\psi}), \tag{5.95}$$

由此得到

$$(5.92) = 2\pi\sqrt{\gamma}\varepsilon\frac{d}{dt}\||\nabla_x|^{-1}a\|^2_{L^2_x} - 4\pi\sqrt{\gamma}\varepsilon\langle\partial_t(e^{\gamma\psi}), a\rangle_{L^2_x} \tag{5.96}$$

$$= 2\pi\varepsilon\frac{d}{dt}\{\sqrt{\gamma}\||\nabla_x|^{-1}a\|^2_{L^2_x}\} \tag{5.97}$$

$$- \frac{\varepsilon\pi\dot{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\||\nabla_x|^{-1}a\|^2_{L^2_x} - 4\pi\sqrt{\gamma}\varepsilon\langle\partial_t(e^{\gamma\psi}), a\rangle_{L^2_x} \tag{5.98}$$

现在，由（4.143），

$$|\frac{\varepsilon\pi\dot{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\||\nabla_x|^{-1}a\|_{L^2_x}^2+4\pi\sqrt{\gamma}\varepsilon\langle\partial_t(e^{\gamma\psi}),a\rangle_{L^2_x}|\lesssim\varepsilon(1+|\dot{\gamma}|+\|\partial_t\psi\|_{L^\infty_x})\|a\|_{L^2_x} \tag{5.99}$$

$$\lesssim\varepsilon(1+\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi})\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.100}$$

$$\lesssim\varepsilon^2+\varepsilon\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.101}$$

因此，

$$|(5.92)-2\pi\varepsilon\frac{d}{dt}\{\sqrt{\gamma}\||\nabla_x|^{-1}a\|_{L^2_x}^2\}|\lesssim\varepsilon^2+\varepsilon\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.102}$$

对于（5.93），我们有

$$\|e^{\gamma\psi-q_\alpha\phi}-1\|_{L^\infty_x}=\|e^{(\gamma-q_\alpha)\psi-4\pi q_\alpha\Delta_x^{-1}a}-1\|_{L^\infty_x}\lesssim\varsigma+\eta. \tag{5.103}$$

因此，

$$|(5.93)|\lesssim(\varsigma+\eta)\|a\|_{L^2_x}\|b\|_{L^2_x} \tag{5.104}$$

$$\lesssim(\varsigma+\eta)\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.105}$$

第三，我们有（5.94）。为此，我们注意到，当 η 取得足够小时，我们可以保证

$$|\frac{\mu_{q_\alpha}-\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}}|\lesssim\eta e^{-\frac{\beta_{in}}{8}|\xi|^2} \tag{5.106}$$

因此，

$$|(5.94)|\lesssim\eta\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.107}$$

综合这些界，我们得到

$$|(5.77)-2\pi\varepsilon\frac{d}{dt}\{\sqrt{\gamma}\||\nabla_x|^{-1}a\|_{L^2_x}\}|\lesssim\varepsilon^2+(\varepsilon+\varsigma+\eta)\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.108}$$

接下来考察下一项:

$$(5.78)\lesssim\varepsilon\|\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\frac{\partial_t\{\mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}e^{q_\alpha\phi}}}\|_{L^2_{x,\xi}}\|\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}}g_\alpha\|_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.109}$$

$$\lesssim\varepsilon\|\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\frac{\partial_t\{\mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}e^{q_\alpha\phi}}}\|_{L^2_{x,\xi}}\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.110}$$

Now,

$$\frac{\partial_t\{\mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}e^{q_\alpha\phi}}}=(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}(\frac{3}{2}-\gamma(|\xi|^2-\psi))+\gamma\partial_t\psi)\frac{\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}}e^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi}. \tag{5.111}$$

取 η充分小，可确保 $\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\mu_{q_\alpha}^{-\frac{1}{2}}\mu_\gamma\lesssim e^{-\frac{\beta_{in}|\xi|^2}{8}}$。因此，将其与（4.143）结合，

$$(5.78)\lesssim\varepsilon(|\dot{\gamma}|+\|\partial_t\psi\|_{L^\infty_x})\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.112}$$

$$\leq C_\kappa\varepsilon^2+(\varepsilon+\kappa)\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.113}$$

接下来，利用（5.79）和（5.43）进行估计：

$$(5.79) \lesssim (\|\mu_{q_\alpha}^{-\frac{1}{2}}\mu_\gamma\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}\mu_{q_\alpha}^{-\frac{1}{2}}\mu_\gamma\|_{L^2_\xi})(\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}g_\alpha\|_{L^2_{x,\xi}}) \tag{5.114}$$

$$+ \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}\mu_{q_\alpha}^{-\frac{1}{2}}\mu_\gamma\|_{L^2_\xi}\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.115}$$

现在，再次由（1.19），可得

$$\|\mu_{q_\alpha}^{-\frac{1}{2}}\mu_\gamma\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}} \lesssim \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbf{R}^3}\sigma_{ij}(\frac{\xi}{\varepsilon})\xi_i\xi_j e^{-\frac{\beta_{in}}{10}|\xi|^2}d\xi \tag{5.116}$$

$$\lesssim \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{|\xi|^2}{\langle\xi/\varepsilon\rangle^3}e^{-\frac{\beta_{in}}{10}|\xi|^2}d\xi \tag{5.117}$$

$$\leq \varepsilon^2\int_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|\xi|}e^{-\frac{\beta_{in}}{10}|\xi|^2}d\xi \tag{5.118}$$

$$\lesssim \varepsilon^2. \tag{5.119}$$

由于 $\frac{1}{|\xi|}$ 局部可积。同理，

$$\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}\mu_{q_\alpha}^{-\frac{1}{2}}\mu_\gamma\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim \varepsilon. \tag{5.120}$$

此外，由索 Sobolev 嵌入

$$\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}g_\alpha\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|1_{B_1}(\xi)|\xi|^{-\frac{1}{2}}g_\alpha\|_{L^2_{x,\xi}} + \|\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}}g_\alpha\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim \|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.121}$$

因此，

$$|(5.79)| \lesssim \varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.122}$$

于是，取稍后选定的 $\lambda > 0$，

$$|(5.79)| \leq \kappa\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + C_\kappa\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2. \tag{5.123}$$

最后，应用（5.33），得到

$$(5.80) \lesssim \|g_1\|_{L^\infty_x L^2_\xi}\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.124}$$

$$\lesssim \|g_1^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.125}$$

$$\lesssim \varsigma\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.126}$$

结合（5.74）至（5.80）的上界，我们得到

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\{\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + 4\pi\sqrt{\gamma}\||\Delta_x|^{-1}a\|^2_{L^2_x}\} + \frac{1}{C}\{\|\mathcal{P}^\perp_\gamma g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})}\} \tag{5.127}$$

$$\leq C(\varepsilon+\varsigma+\eta+\kappa)\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.128}$$

$$+ C\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x} + \|F_+\|^2_{\mathfrak{D}}\rangle\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.129}$$

$$+ C_\kappa\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2. \tag{5.130}$$

利用（5.32），并取 ε，ς，η 以及 κ 充分小，可得（5.71）。

现在证明（ii）。令 $g_j^{(s)} := \langle\nabla_x\rangle^s g_{\alpha\circ}$ 那么，

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}^2 \tag{5.131}$$

$$+ q_\alpha\varepsilon\langle\langle\nabla_x\rangle^s\{\partial_t\phi g_\alpha\}, g_\alpha^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.132}$$

$$+ \langle\langle\nabla_x\rangle^s\{Eg_\alpha\} - Eg_\alpha^{(s)}, \nabla_v g_\alpha^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.133}$$

$$+ \langle\langle\nabla_x\rangle^s(e^{\gamma\psi}\widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q_\alpha}g_\alpha), g_j^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.134}$$

$$- 4\pi\gamma\langle\frac{\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}}\langle\nabla_x\rangle^s\{\xi\cdot\nabla_x\Delta_x^{-1}ae^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi}\}, g_\alpha^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.135}$$

$$+ \langle\langle\nabla_x\rangle^s(\mathcal{M}_{q_\alpha,F_+}g_\alpha), g_\alpha^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.136}$$

$$= -\varepsilon\langle\langle\nabla_x\rangle^s\left(\frac{\partial_t\{\mu_\gamma e^{\gamma\psi}\}}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}e^{q_\alpha\phi}}}\right), g_\alpha^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.137}$$

$$- \langle\langle\nabla_x\rangle^s\{e^{\gamma\psi-\frac{q_\alpha}{2}\phi}\mathcal{M}_{q_\alpha,F_+}(\frac{\mu_\gamma}{\sqrt{\mu_{q_\alpha}}})\}, g_\alpha^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.138}$$

$$+ \langle\langle\nabla_x\rangle^s\{e^{\frac{q_\alpha}{2}\phi}\Gamma_{q_\alpha}(g_\alpha,g_\alpha)\}, g_\alpha^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.139}$$

首先，

$$|(5.132)| = q_\alpha\varepsilon|\langle\langle\nabla_x\rangle^s\{(\partial_t\psi + 4\pi\Delta_x^{-1}\partial_t a)g_\alpha\}, g_\alpha^{(s)}\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.140}$$

$$\lesssim \varepsilon\int_{\mathbf{R}^3}\big(\|\partial_t\psi\|_{H^s_x}\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x}^2 + \|\partial_t a\|_{H^{s-2}_x}\|g_\alpha\|_{L^\infty_x}\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x} \tag{5.141}$$

$$+ \|\Delta_x^{-1}\partial_t a\|_{L^\infty_x}\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x}\big)d\xi \tag{5.142}$$

将（5.95）应用于第二项，得到

$$\varepsilon\int_{\mathbf{R}^3}\|\partial_t a\|_{H^{s-2}_x}\|g_\alpha\|_{L^\infty_x}\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x}d\xi \tag{5.143}$$

$$\lesssim \int_{\mathbf{R}^3}\|b\|_{H^{s-1}_x}\|g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_x}\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x}d\xi + \varepsilon(1+|\dot\gamma| + \|\partial_t\psi\|_{H^s_x})\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}^2 \tag{5.144}$$

$$\lesssim \|b\|_{H^{s-1}_x}\|\langle\xi\rangle^{\frac12}g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_{x,\xi}}\|\langle\xi\rangle^{-\frac12}g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}} + \varepsilon(1+|\dot\gamma| + \|\partial_t\psi\|_{H^s_x})\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}^2 \tag{5.145}$$

合并各项，

$$|(5.132)| \lesssim \|b\|_{H^{s-1}_x}\|\langle\xi\rangle^{\frac12}g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.146}$$

$$+ \varepsilon(1 + \|\partial_t a\|_{L^\infty_x} + |\dot\gamma| + \|\partial_t\psi\|_{H^s_x})\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}^2 \tag{5.147}$$

应用（4.143），得到

$$\varepsilon(|\dot\gamma| + \|\partial_t\psi\|_{H^s_x})\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}^2 \lesssim \varepsilon^2 + \varepsilon\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}^2 + \varsigma\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2. \tag{5.148}$$

另一方面，利用插值可得

$$\|\langle\xi\rangle^{\frac12}g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_{x,\xi}}\|\langle\xi\rangle^{-\frac12}g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}} \le (C_\eta\|g_{\alpha+1}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2 + \|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2). \tag{5.149}$$

因此,

$$|(5.132)| \lesssim \varepsilon \langle \|\partial_t a\|_{L^2_x} \rangle \|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_{x,\xi}} + C\varsigma \|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + C_\eta \|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.150}$$

接下来,

$$|(5.133)| \lesssim \|\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}} (\langle\nabla_x\rangle^s \{E g_\alpha\} - E g_\alpha^{(s)})\|_{L^2_{x,\xi}} \|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.151}$$

$$\lesssim (\|E\|_{H^s_x} \|\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}} g_\alpha\|_{L^\infty_x L^2_\xi} + \|\nabla_x E\|_{L^\infty_x} \|\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}} g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_{x,\xi}}) \|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.152}$$

上面我们对 $[\langle\nabla_x\rangle^s, E_j]$ 使用了通常的交换子估计。接下来我们进行插值

$$\|\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}} g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_{x,\xi}} \lesssim \|\langle\xi\rangle^{s-\frac{1}{2}} g_\alpha\|^{\frac{1}{s}}_{L^2_{x,\xi}} \|\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}} g_\alpha^{(s)}\|^{\frac{s-1}{s}}_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.153}$$

$$\lesssim C_\eta \|\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}} g_{\alpha+1}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2_{x,\xi}} \|\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}} g_\alpha^{(s)}\|^{\frac{s-1}{s}}_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.154}$$

$$\lesssim C_\eta \|\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}} g_{\alpha+1}\|^{\frac{1}{s}}_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \|\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}} g_\alpha^{(s)}\|^{\frac{s-1}{s}}_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.155}$$

这意味着

$$|(5.133)| \le \kappa \|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x} + C_{\eta,\kappa} \|\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}} g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.156}$$

接下来，应用（5.29）和（5.30），我们有

$$(5.134) = \langle e^{\gamma\psi} \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q} g_\alpha^{(s)}, g_\alpha^{(s)} \rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.157}$$

$$+ \langle \widetilde{\mathcal{L}}_{\gamma,q} \{\langle\nabla_x\rangle^s (e^{\gamma\psi} g_\alpha) - e^{\gamma\psi} g_\alpha^{(s)}\}, g_1^{(s)} \rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.158}$$

$$\ge \frac{1}{C} \|\mathcal{P}_\gamma^\perp g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} - C\varsigma^2 \|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.159}$$

$$- C \|\langle\nabla_x\rangle^s (e^{\gamma\psi} g_\alpha) - e^{\gamma\psi} g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.160}$$

Now,

$$\|\langle\nabla_x\rangle^s (e^{\gamma\psi} g_\alpha) - e^{\gamma\psi} g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \lesssim \|\langle\nabla_x\rangle^s e^{\gamma\psi}\|_{L^2_x} \|g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.161}$$

$$\lesssim \|g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.162}$$

因此，我们可以通过插值得到

$$(5.134) \ge \frac{1}{C} \|\mathcal{P}_\gamma^\perp g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} - \kappa \|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.163}$$

$$- C_\kappa \|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.164}$$

对于下一项，我们有

$$|(5.135)| \lesssim \|e^{\gamma\psi - \frac{q_\alpha}{2}\phi} \nabla_x \Delta_x^{-1} a\|_{H^s} \|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.165}$$

$$\lesssim \|g_\alpha^{(s-1)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.166}$$

$$\le \kappa \|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + C_\kappa \|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.167}$$

对于下一项，我们有

$$(5.136) = \langle \mathcal{M}_{q_1,F_+} g_\alpha^{(s)}, g_\alpha^{(s)} \rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.168}$$

$$+ \langle \langle\nabla_x\rangle^s (\mathcal{M}_{q_1,F_+} g_\alpha) - \mathcal{M}_{q_1,F_+} g_\alpha^{(s)}, g_\alpha^{(s)} \rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.169}$$

对于第一项，与（5.134）类似，我们有

$$(5.168) \geq \frac{1}{C}\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} - C\varepsilon\langle\|F_+^{(s,m)}\|_{L^2_x(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}\rangle^2\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.170}$$

接下来，将交换子估计与（5.43）的证明结合起来，我们得到

$$|(5.169)| \lesssim \|F_+^{(m_1,s)}\|_{L^2_{x,v}}(\|g_1^{(s-1)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}g_1^{(s-1)}\|_{L^2_{x,\xi}}) \tag{5.171}$$

$$\cdot(\|g_1^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\langle\frac{\xi}{\varepsilon}\rangle^{-\frac{1}{2}}g_1^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}) \tag{5.172}$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\|g_1^{(s-1)}\|_{L^2_{x,\xi}}\|g_1^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.173}$$

$$\lesssim (\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi})^{\frac{1}{s}}(\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon\|g_\alpha\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi})^{\frac{2s-1}{s}} \tag{5.174}$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\|g_1^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}\|g_1^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}. \tag{5.175}$$

因此，我们得到

$$(5.136) \geq \frac{1}{C}\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} - C\{\|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\} \tag{5.176}$$

$$-C\varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.177}$$

接下来，类似于（5.78），

$$(5.137) \leq C_\kappa\varepsilon + \kappa\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.178}$$

并且，与（5.79）一样，我们利用（5.43）得到

$$(5.138) \leq \kappa\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + C_\kappa\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2. \tag{5.179}$$

最后，利用（5.33），

$$(5.139) \lesssim \|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.180}$$

$$\lesssim \varsigma\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.181}$$

现在我们将各项（5.132）至（5.139）的估计合并起来：

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_{x,\xi}} + \frac{1}{C}\{\|\mathcal{P}_\gamma^\perp g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\} \tag{5.182}$$

$$\leq C(\varepsilon+\varsigma+\eta+\kappa)\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + C_{\eta,\kappa}\{\|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\} \tag{5.183}$$

$$+C\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x} + \|F_+\|^2_{\mathfrak{D}}\rangle\|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.184}$$

$$+C_\kappa\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2. \tag{5.185}$$

再次利用（5.32），结合（5.72）即可得出结论。 □

5.5. 宏观估计。 剩下的工作是对 $\mathcal{P}_\gamma f$ 建立界。这需要分析局部守恒律。为了高效地推导这些方程，尤其是了解方程 (5.13) 的输运部分如何耦合 (a,b,c)，我们引入阶梯算子：降算子和升算子分别为

$$\mathcal{A}_j = \gamma^{\frac{1}{2}}\frac{\xi_j}{2} + \gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{\xi_j}, \quad \mathcal{A}_j^* = \gamma^{\frac{1}{2}}\frac{\xi_j}{2} - \gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{\xi_j}, \quad j\in\{1,2,3\}. \tag{5.186}$$

回顾以下恒等式

$$\mathcal{A}_j\mu^{\frac{1}{2}}=0,\quad [\mathcal{A}_j,\mathcal{A}_k^*]=\varsigma_{jk},\quad j,k\in\{1,2,3\}. \tag{5.187}$$

另请回忆，厄米函数族

$$\{\frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!n_3!}}(\mathcal{A}_1^*)^{n_1}(\mathcal{A}_2^*)^{n_2}(\mathcal{A}_3^*)^{n_3}\mu_\gamma^{\frac{1}{2}}\}_{n_1,n_2,n_3\in\mathbf{N}_0^3} \tag{5.188}$$

构成了 $L^2_\xi(\mathbf{R}^3)$ 上的完备正交归一基。我们将未归一化的厄米函数记为

$$\mathfrak{h}=\mu_\gamma^{\frac{1}{2}},\quad \mathfrak{h}_{j_1\dots j_m}=\mathcal{A}_{j_1}\cdots\mathcal{A}_{j_n}\mu_\gamma^{\frac{1}{2}},\quad j_1,\dots,j_m\in\{1,2,3\}. \tag{5.189}$$

我们可以用厄米函数表示 $\mathcal{L}_\gamma$ 的核，如下所示：

$$N(\mathcal{L})=\operatorname{span}\{\mathfrak{h},\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_3,\frac{1}{\sqrt{6}}\mathfrak{h}_{jj}\}. \tag{5.190}$$

因此，我们可以将（5.20）改写为

$$\mathcal{P}_\gamma f=a\mathfrak{h}+b_j\mathfrak{h}_j+c\frac{1}{\sqrt{6}}\mathfrak{h}_{jj} \tag{5.191}$$

定义 h 的如下投影也很方便，其中涉及三阶厄米函数：

$$d_j=\frac{1}{\sqrt{10}}\langle\mathfrak{h}_{jkk},f\rangle_{L^2_\xi},\quad j\in\{1,2,3\} \tag{5.192}$$

现在我们用 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^*$ 来改写（5.13）中的输运部分

$$\xi\cdot\nabla_x+E\cdot(\nabla_\xi-\frac{\xi}{2})=(\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j}+\gamma^{\frac{1}{2}}E_j)\mathcal{A}_j^*+\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j}\mathcal{A}_j. \tag{5.193}$$

我们还需要计算 $\mu^{-\frac{1}{2}}\partial_t(\mu^{\frac{1}{2}}f)$ 的投影。设 $\zeta(\xi)$ 是 $\gamma^{\frac{1}{2}}\xi$ 中厄米函数的某个线性组合，也就是说，存在一个多项式 $p:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$（其系数与 γ 无关），使得

$$\zeta(\xi)=p(\gamma^{\frac{1}{2}}\xi)\mu(\xi)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.194}$$

于是，

$$\langle\zeta,\mu^{-\frac{1}{2}}\partial_t(\mu^{\frac{1}{2}}f)\rangle_{L^2_\xi}=\partial_t\langle\zeta,f\rangle_{L^2_\xi}-\langle\partial_t(\zeta\mu^{-\frac{1}{2}})\mu^{\frac{1}{2}},f\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.195}$$

Now,

$$\partial_t\{\zeta\mu^{-\frac{1}{2}}\}=\partial_t\{p(\gamma^{\frac{1}{2}}\xi)\}=\frac{\dot\gamma}{2\gamma}\xi\cdot\nabla_\xi\{p(\gamma^{\frac{1}{2}}\xi)\}=\frac{\dot\gamma}{2\gamma}\xi\cdot\nabla_\xi\{\zeta\mu^{-\frac{1}{2}}\}. \tag{5.196}$$

因此，

$$\partial_t\{\zeta\mu^{-\frac{1}{2}}\}\mu^{\frac{1}{2}}=\frac{\dot\gamma}{2\gamma}(\xi\cdot\nabla_\xi+\frac{\gamma|\xi|^2}{2})\zeta \tag{5.197}$$

$$=\frac{\dot\gamma}{2\gamma}\xi\cdot(\nabla_\xi+\frac{\gamma\xi}{2})\zeta \tag{5.198}$$

$$=\frac{\dot\gamma}{2\gamma}(\mathcal{A}_j+\mathcal{A}_j^*)\mathcal{A}_j\zeta \tag{5.199}$$

总之，

$$\langle\zeta,\mu^{-\frac{1}{2}}\partial_t(\mu^{\frac{1}{2}}f)\rangle_{L^2_\xi}=\partial_t\langle\zeta,f\rangle_{L^2_\xi}-\frac{\dot\gamma}{2\gamma}\langle(\mathcal{A}_j+\mathcal{A}_j^*)\mathcal{A}_j\zeta,f\rangle_{L^2_\xi}. \tag{5.200}$$

以下　以下引理给出了方程的相关投影公式（5.13）　　.

引理 5.5. 以下公式成立：

$$\varepsilon\partial_t a+\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j}b_j=-\varepsilon\partial_t(e^{\gamma\psi}),\tag{5.201}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\partial_t-\frac{\dot\gamma}{2\gamma})b_j+(\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j}+\gamma^{\frac{1}{2}}E_j)a-4\pi\gamma^{\frac{1}{2}}e^{\gamma\psi}\partial_{x_j}\Delta_x^{-1}a+\sqrt{\frac{2}{3}}\partial_{x_j}c\\&+\partial_{x_k}\langle\mathfrak{h}_{jk},\mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_\xi}+\langle\mathfrak{h}_j,\mathcal{M}_{\gamma,F_+}f\rangle_{L^2_\xi}=-e^{\gamma\psi}\langle\mathfrak{h}_j,\mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}\rangle_{L^2_\xi},\end{aligned}\tag{5.202}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\partial_t c-\frac{\dot\gamma}{\gamma}(c+\sqrt{\frac{3}{2}}a))+\sqrt{\frac{2}{3}}(\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j}+\gamma^{\frac{1}{2}}E_j)b_j+\sqrt{\frac{5}{3}}\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j}d_j\\&+\frac{1}{\sqrt{6}}\langle\mathfrak{h}_{jj},\mathcal{M}_{\gamma,F_+}f\rangle_{L^2_\xi}=\varepsilon\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\dot\gamma}{\gamma}e^{\gamma\psi}+\frac{e^{\gamma\psi}}{\sqrt{6}}\langle\mathfrak{h}_{jj},\mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}\rangle_{L^2_\xi},\end{aligned}\tag{5.203}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\partial_t d_j-\frac{\dot\gamma}{2\gamma}(3d_j+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}b_j))+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}(\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x^j}+\gamma^{\frac{1}{2}}E_j)c\\&+\sqrt{\frac{2}{5}}(\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_k}+\gamma^{\frac{1}{2}}E_k)\langle\mathfrak{h}_{jk},\mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_\xi}+\gamma^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{10}}\partial_{x_k}\langle\mathfrak{h}_{jkll},f\rangle_{L^2_\xi}\\&+\frac{1}{\sqrt{10}}\langle\mathfrak{h}_{jll},\mathcal{L}_\gamma f+\mathcal{M}_{\gamma,F_+}f\rangle_{L^2_\xi}=\langle\mathfrak{h}_{jll},-e^{\gamma\psi}\mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}+\Gamma_\gamma(f,f)\rangle.\end{aligned}\tag{5.204}$$

证明。这些公式可通过直接计算 ξ 与（5.13）相乘后的积分得到，其中乘以 $\mathfrak{h}$、$\mathfrak{h}_j$、$\frac{1}{\sqrt{6}}\mathfrak{h}_{jj}$ 以及 $\frac{1}{\sqrt{10}}\mathfrak{h}_{jll}$。我们仅给出（5.202）的详细证明。其他公式的证明类似。利用（5.193）和（5.200），并注意到 $\mathcal{L}_\gamma f$、$\mu^{-\frac{1}{2}}\partial_t\nu_\gamma$ 以及 $\Gamma_\gamma(f,f)$ 均与 $\mathfrak{h}_j$ 正交，我们有

$$\varepsilon(\partial_t b_j-\frac{\dot\gamma}{2\gamma}\langle(\mathcal{A}_k\mathcal{A}_k+\mathcal{A}_k^*\mathcal{A}_k)\mathfrak{h}_j,f\rangle_{L^2_\xi}).\tag{5.205}$$

$$+\langle\mathfrak{h}_j,\{(\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_k}+\gamma^{\frac{1}{2}}E_k)\mathcal{A}_k^*+\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_k}\mathcal{A}_k\}f\rangle_{L^2_\xi}\tag{5.206}$$

$$+\langle\mathfrak{h}_j,\mathcal{M}_{\gamma,F_+}f\rangle_{L^2_\xi}\tag{5.207}$$

$$=-\langle\mathfrak{h}_j,e^{\gamma\psi}\mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}\rangle_{L^2_\xi}.\tag{5.208}$$

接下来需要计算涉及阶梯算子的项。利用（5.187），可得

$$(\mathcal{A}_k+\mathcal{A}_k^*)\mathcal{A}_k\mathfrak{h}_j=(\mathcal{A}_k^*+\mathcal{A}_k)\mathcal{A}_k\mathcal{A}_j^*\mathfrak{h}\tag{5.209}$$

$$=(\mathcal{A}_j^*+\mathcal{A}_j)\mathfrak{h}\tag{5.210}$$

$$=\mathfrak{h}_j\tag{5.211}$$

and

$$\langle \mathfrak{h}_j, \{(\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_k} + \gamma^{\frac{1}{2}}E_k)\mathcal{A}_k^* + \gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_k}\mathcal{A}_k\}f\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.212}$$

$$= \langle \mathcal{A}_k\mathcal{A}_j^*\mathfrak{h}, (\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_k} + \gamma^{\frac{1}{2}}E_k)f\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.213}$$

$$+ \gamma^{-\frac{1}{2}}\langle \mathcal{A}_k^*\mathcal{A}_j^*\mathfrak{h}, \partial_{x_k}f\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.214}$$

$$= (\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j} + \gamma^{\frac{1}{2}}E_k)a \tag{5.215}$$

$$+ \gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_k}\langle \mathfrak{h}_{jk}, \mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.216}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}}\gamma^{-\frac{1}{2}}\langle \mathfrak{h}_{jk}, \mathfrak{h}_{ll}\rangle_{L^2_\xi}\partial_{x_k}c. \tag{5.217}$$

最后，注意到在最后一项中，

$$\langle \mathfrak{h}_{jk}, \mathfrak{h}_{ll}\rangle_{L^2_\xi} = \sqrt{2}\delta_{jk}, \tag{5.218}$$

由此得到（5.202）。 □

引理 5.6。 假设命题 *5.1* 的假设成立。那么，对所有 $r \geq 0$,

$$\|b\|_{H^r_x} \lesssim_M \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f^{(r)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f^{(r)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon^2\|(a,c)\|^2_{H^r_x}. \tag{5.219}$$

证明。只需证明 $r = 0$ 的情形。由于 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}_{jj}$ 的径向对称性，我们有

$$\|(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_{jj})\|_{\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon}} \lesssim \varepsilon. \tag{5.220}$$

因此，

$$\|f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \geq \frac{1}{2}\|\mathcal{P}_\gamma^\perp f + b_j\mathfrak{h}_j\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} - C\varepsilon^2\|(a,c)\|^2_{L^2_x} \tag{5.221}$$

现在，设 $u = \mathcal{P}_\gamma^\perp f + b_j\mathfrak{h}_j$，我们有

$$\|u\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} = \frac{1}{\varepsilon}\langle \sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\partial_{\xi_i}u, \partial_{\xi_j}u\rangle_{L^2_{x,\xi}} \geq \frac{1}{\varepsilon}\langle \sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}u, \partial_{\xi_j}u\rangle_{L^2_{x,\xi}}. \tag{5.222}$$

另一方面，对于所有 $\nu \in \mathbb{S}^2$，和 $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus B_1$，我们有

$$\sigma_{ij}(\frac{\xi}{\varepsilon})\nu_i\nu_j \lesssim \sigma_{ij}(\xi)\nu_i\nu_j \tag{5.223}$$

现在，我们将 u 展开如下：

$$\frac{1}{\varepsilon}\langle \sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}u, \partial_{\xi_j}u\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.224}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\langle \sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}(b_k\mathfrak{h}_k), \partial_{\xi_j}(b_l\mathfrak{h}_l)\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.225}$$

$$+ \frac{2}{\varepsilon}\langle \sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}(b_k\mathfrak{h}_k), \partial_{\xi_j}\mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.226}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\langle \sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}\mathcal{P}_\gamma^\perp f, \partial_{\xi_j}\mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_{x,\xi}}. \tag{5.227}$$

现在，$\frac{1}{\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}\cdot,{}^{\partial_{\xi_j}\cdot}\rangle_{L^2_{x,\xi}}$定义了一个半内积。因此，我们对交叉项应用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，得到

$$\frac{1}{\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}u,\partial_{\xi_j}u\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.228}$$

$$\geq \frac{1}{2\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}(b_k\mathfrak{h}_k),\partial_{\xi_j}(b_l\mathfrak{h}_l)\rangle_{L^2_{x,\xi}} - \frac{2}{\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}\mathcal{P}_\gamma^\perp f,\partial_{\xi_j}\mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.229}$$

$$\geq \frac{1}{C}W_{kl}\langle b_l,b_k\rangle_{L^2_x} - C\|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}, \tag{5.230}$$

其中

$$W_{kl} := \frac{1}{\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}\mathfrak{h}_k,\partial_{\xi_j}\mathfrak{h}_l\rangle_{L^2_\xi}. \tag{5.231}$$

现在我们证明

$$W_{kl}\nu_k\nu_l \geq \frac{1}{C} \tag{5.232}$$

对所有 $\nu\in\mathbb{S}^2$ 均成立。现在，

$$\partial_{\xi_i}\mathfrak{h}_k = \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{2}(\delta_{ik}-\frac{\gamma}{2}\xi_i\xi_k)\mu_\gamma^{\frac{1}{2}} \tag{5.233}$$

于是，由反三角不等式可得，

$$\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\partial_{\xi_i}\mathfrak{h}_k,\partial_{\xi_j}\mathfrak{h}_l = \frac{\gamma}{4\varepsilon}\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}(\nu_i-\frac{\gamma}{2}(\nu\cdot\xi)\xi_i)(\nu_j-\frac{\gamma}{2}(\nu\cdot\xi)\xi_j)\mu_\gamma \tag{5.234}$$

$$\geq \{\frac{\gamma}{8\varepsilon}\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\nu_i\nu_j - C\frac{(\nu\cdot\xi)^2}{\varepsilon}\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\xi_i\xi_j\}\mu_\gamma \tag{5.235}$$

现在，对于 $|\xi|\geq 1$，我们有

$$\frac{1}{\varepsilon}\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\xi_i\xi_j \sim \frac{|\xi|^2}{\langle\xi/\varepsilon\rangle^3} \sim \varepsilon^2\frac{1}{|\xi|}. \tag{5.236}$$

另一方面，

$$\frac{1}{\varepsilon}\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\nu_i\nu_j \gtrsim \frac{1}{\varepsilon}\frac{|P_{\xi^\perp}\nu|^2}{\langle\xi/\varepsilon\rangle} \gtrsim \frac{|P_{\xi^\perp}\nu|^2}{|\xi|}. \tag{5.237}$$

因此，

$$W_{kl}\nu_k\nu_l \geq \frac{1}{C}\int_{\mathbf{R}^3\setminus B_1}\frac{|P_{\xi^\perp}\nu|^2}{|\xi|}\mu_\gamma d\xi - \varepsilon^2\int_{\mathbf{R}^3\setminus B_1}|\xi|\mu_\gamma d\xi \tag{5.238}$$

$$\geq \frac{1}{C} - C\varepsilon^2. \tag{5.239}$$

取 ε 充分小，可推出（5.232），从而

$$\frac{1}{\varepsilon}\langle\sigma_{ij}|_{\frac{\xi}{\varepsilon}}\mathbf{1}_{B_1^c}(\xi)\partial_{\xi_i}u,\partial_{\xi_j}u\rangle_{L^2_{x,\xi}} \geq \frac{1}{C}\|b\|^2_{L^2_x} - C\|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.240}$$

由此，我们在 $r=0$ 的情况下得到（5.219）。 □

下一个引理使我们能够控制 (a,b,c)。

命题 5.7。 设 $M \geq 1$，并设 η，ς且 ε 足够小，具体取决于 M。假设自举假设 (5.3) 至 (5.6) 成立。那么，存在两个实值函数 $\mathscr{G} = \mathscr{G}^{(M)}$和 $\mathscr{G}_{reg} = \mathscr{G}_{(M)^{reg}}$定义在 $[0,T]$ 上，满足对所有 $t \in [0,T]$

$$|\mathscr{G}(t)| \lesssim_M \|f(t)\|^2_{L^2_{x,\xi}}, \quad |\mathscr{G}_{reg}(t)| \lesssim_M \|f^{(s)}(t)\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.241}$$

使得

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{d}{dt}\mathscr{G}(t) + \|\mathcal{P}_\gamma f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \\ &\quad \lesssim_M \varepsilon^2 \langle \|F_+\|_{\mathfrak{D}} \rangle^2 + \min_{\alpha \in \{1,2,3\}} \{\|\mathcal{P}^\perp_\gamma g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\}, \end{aligned} \tag{5.242}$$

and

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{d}{dt}\mathscr{G}_{reg}(t) + \|\mathcal{P}_\gamma f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \\ &\quad \lesssim_M \varepsilon^2 \langle \|F_+\|_{\mathfrak{D}} \rangle^2 + \min_{\alpha \in \{1,2\}} \{\|\mathcal{P}^\perp_\gamma g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\}. \end{aligned} \tag{5.243}$$

证明。我们将证明分为若干步骤。给定 $u : \mathbf{T}^3 \to \mathbf{R}$，我们将 $u = u^\times + \overline{u}$ 分解，其中 $\overline{u}(t) = \int_{\mathbf{T}^3} u(t,x)dx$。第一步讨论 $(\overline{a}, \overline{c})$ 的界。第2步，我们对 $\|a\|_{L^2_x}$ 取界。第3步，我们对 $(e^{\gamma\psi}c)^\times$ 取界。第4步，我们对 $\|(a,c)\|_{H^s_x}$ 取界。第5步，我们综合这些界。

步骤1（关于 $\overline{a}$ 和 $\overline{c}$ 的估计）：关于 $\overline{a}$，由（5.21），我们直接得到

$$\int_{\mathbf{T}^3} a(t,x)dx \equiv 0 \tag{5.244}$$

对所有时刻均成立。特别地，$\Delta_x^{-1}a$定义良好。

现在我们讨论 c 的零模。从（4.139）的第一行减去（1.15），得到

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{c}(t)}{\gamma}\right) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{|\xi|^2}{2}(F_- - \mu_\gamma e^{\gamma\psi})dxd\xi \tag{5.245}$$

对时间积分可得

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\overline{c}(t)}{\gamma(t)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\overline{c}_{in}}{\beta_{in}} + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3} |\nabla_x \phi_{in}(x)|^2 - |\nabla_x \psi_{in}(x)|^2 dx \tag{5.246}$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3} |\nabla_x \psi(t,x)|^2 - |\nabla_x \phi(t,x)|^2 dx \tag{5.247}$$

另一方面，由式（5.10），

$$\int_{\mathbf{T}^3} |\nabla_x \psi(t,x)|^2 - |\nabla_x \phi(t,x)|^2 dx = -2\langle \nabla_x \psi, \nabla_x \Delta_x^{-1} a\rangle_{L^2_x} - \|\nabla_x \Delta_x^{-1} a\|_{L^2_x} \tag{5.248}$$

$$= 2\langle \psi, a\rangle_{L^2_x} - \|\Delta_x^{-\frac{1}{2}} a\|^2_{L^2_x}. \tag{5.249}$$

将这些结果与（5.7）结合起来，我们得到

$$\left| \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\overline{c}(t)}{\gamma(t)} - \frac{1}{4\pi}\langle \psi, a\rangle_{L^2_x} \right| \lesssim \varepsilon + \|a\|^2_{L^2_x}. \tag{5.250}$$

在下文中，我们将看到无法直接控制 $c^{\times}$ 。相反，我们只能得到（$ce^{\gamma\psi}$）$^{\times}$的一个界。因此，有必要用（$ce^{\gamma\psi}$）$^{\times}$ 和$\overline{c}$来计算 $c^{\times}$ 。注意到

$$e^{\gamma\psi}(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}+e^{\gamma\psi}\int_{\mathbf{R}^3}e^{-\gamma\psi}cdx'=c^{\times}+\overline{c}. \tag{5.251}$$

由于 $\int_{\mathbf{T}_3}e^{\gamma\psi}dx=1$，对上述内容关于 x 积分可得

$$\int_{\mathbf{R}^3}e^{-\gamma\psi}cdx=\overline{c}-\int_{\mathbf{T}^3}e^{\gamma\psi}(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}dx. \tag{5.252}$$

因此，我们有如下恒等式

$$c^{\times}=(e^{\gamma\psi}-1)\overline{c}+e^{\gamma\psi}(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}-e^{\gamma\phi_0}\int_{\mathbf{T}^3}e^{\gamma\psi}(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}dx \tag{5.253}$$

特别地，$\|c\|_{L^2_x}\lesssim|\overline{c}|+\|(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}\|_{L^2_x}$。

步骤 2（对 a 的估计）：现在，我们来估计 a。我们断言以下估计成立：

$$\begin{aligned}&-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a,b\rangle_{L^2_x}+\frac{1}{C}\|a\|^2_{L^2_x}\\&\quad\le C\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2+\|b\|^2_{L^2_x}+\|(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}\|^2_{L^2_x}+\|\mathcal{P}_\gamma^{\perp}f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}+\|f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\}.\end{aligned} \tag{5.254}$$

为证明这一点，首先注意到

$$(\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla_x+\gamma^{\frac{1}{2}}E)a=\gamma^{-\frac{1}{2}}e^{\gamma\psi}\nabla_x(e^{-\gamma\psi}a)-4\pi a\nabla_x\Delta_x^{-1}a, \tag{5.255}$$

因此，

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a,b\rangle_{L^2_x}+\gamma^{-\frac{1}{2}}\|e^{-\frac{\gamma\psi}{2}}a\|^2_{L^2_x}+4\pi\|e^{\frac{\gamma\psi}{2}}\nabla_x\Delta_x^{-1}a\|^2_{L^2_x}+4\pi\overline{c}^2 \tag{5.256}$$

$$=-\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a,\varepsilon\partial_t b+(\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla_x+\gamma^{\frac{1}{2}}E-4\pi\gamma^{\frac{1}{2}}e^{\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1})a+\sqrt{\frac{2}{3}}\nabla_x c\rangle_{L^2_x} \tag{5.257}$$

$$-\varepsilon\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}\partial_t a,\quad b\rangle_{L^2_x} \tag{5.258}$$

$$+\varepsilon\langle\partial_t\ (\gamma\psi)\ \ e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a,\quad b\rangle_{L^2{}_x} \tag{5.259}$$

$$+4\pi\varepsilon\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a,a\nabla_x\Delta_x^{-1}a\rangle_{L^2_x} \tag{5.260}$$

$$+4\pi\overline{c}^2+\sqrt{\frac{2}{3}}\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a,\nabla_x c\rangle_{L^2_x}. \tag{5.261}$$

由（5.202）可得

$$\|\varepsilon\partial_t b_j + (\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j} + \gamma^{\frac{1}{2}}E_j)a - 4\pi\gamma^{\frac{1}{2}}e^{\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a\|_{H_x^{-1}} \tag{5.262}$$

$$= \Big\|\varepsilon\frac{\dot\gamma}{2\gamma}b_j + \sqrt{\frac{2}{3}}\partial_{x_j}c + \partial_{x_k}\langle \mathfrak{h}_{jk}, \mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_\xi} + \langle \mathfrak{h}_j, \mathcal{M}_{\gamma,F_+}f\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.263}$$

$$+ e^{\gamma\psi}\langle \mathfrak{h}_j, \mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}\rangle_{L^2_\xi}\Big\|_{H_x^{-1}} \tag{5.264}$$

$$\lesssim \varepsilon|\dot\gamma|\|b\|_{L^2_x} + \|c\|_{L^2_x} + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.265}$$

$$+ \|\langle \mathfrak{h}_j, \mathcal{M}_{\gamma,F_+}f\rangle_{L^2_\xi}\|_{H_x^{-1}} \tag{5.266}$$

$$+ \|e^{\gamma\psi}\langle \mathfrak{h}_j, \mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}\rangle_{L^2_\xi}\|_{H_x^{-1}} \tag{5.267}$$

将（5.43）应用于后两项，可得

$$(5.266) \lesssim \Big\|\|F_+^{(3,0)}\|_{L^2_v}(\|f\|_{(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon\|f\|_{(\mathcal{H}_\sigma)_\xi})\Big\|_{H_x^{-1}} \tag{5.268}$$

$$+ \varepsilon\Big\|\|F_+^{(\frac{7}{2},0)}\|_{(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_v}\|f\|_{(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\Big\|_{H_x^{-1}} \tag{5.269}$$

$$\lesssim \|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.270}$$

and

$$(5.267) \lesssim \varepsilon\|F_+^{(3,0)}\|_{H_x^{-1}L^2_v} + \varepsilon\|F_+^{(\frac{7}{2},0)}\|_{H_x^{-1}(\dot{\mathcal{H}}_\sigma)_\xi} \tag{5.271}$$

$$\lesssim \varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle. \tag{5.272}$$

于是，

$$|(5.257)| \lesssim \|e^{\gamma\psi}\nabla_x(-\Delta_x)^{-1}a\|_{H^1_x} \tag{5.273}$$

$$\cdot \|\varepsilon\partial_t b + (\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla_x + \gamma^{\frac{1}{2}}E)a - 4\pi\gamma^{\frac{1}{2}}e^{\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a\|_{H_x^{-1}} \tag{5.274}$$

$$\lesssim \|a\|_{L^2_x}\{\varepsilon\|b\|_{L^2_x} + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.275}$$

$$+ \|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle\langle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle\}. \tag{5.276}$$

现在，注意到

$$\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \lesssim \|a\|_{L^2_x} + \|b\|_{L^2_x} + |\overline{c}| + \|(e^{\gamma\psi}c)^\times\|_{L^2_x} + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.277}$$

于是，取 $\lambda > 0$，并使用杨氏不等式和自举假设，可得

$$|(5.257)| \le C(\varepsilon + \varsigma + \lambda)(\|a\|^2_{L^2_x} + \overline{c}^2) \tag{5.278}$$

$$+ C_\lambda\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + \|(b, (e^{\gamma\psi}c)^\times)\|^2_{L^2_x} + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\} \tag{5.279}$$

We 现在转而估计 (5.258) 和 (5.259)。利用 (4.143) 和 (5.201)，我们有

$$\varepsilon\|\partial_t a\|_{H_x^{-1}} \lesssim \|b\|_{L^2_x} + \varepsilon\|\partial_t e^{\gamma\psi}\|_{H_x^{-1}} \lesssim \|b\|_{L^2_x} + \varepsilon\langle\|f\|_{L^2(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle. \tag{5.280}$$

因此，

$$|(5.258)| \lesssim (\varepsilon\langle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle + \|b\|_{L^2_x})\|b\|_{L^2_x} \tag{5.281}$$

$$\lesssim \varepsilon^2\langle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle^2 + \|b\|^2_{L^2_x} \tag{5.282}$$

$$\lesssim \varepsilon^2(\|a\|_{L^2_x} + |\overline{c}|^2) + \|(b, (e^{\gamma\psi}c)^\times)\|^2_{L^2_x} + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.283}$$

接下来,

$$|(5.259)| \lesssim \varepsilon(\|\partial_t\psi\|_{L^\infty_x} + |\dot\gamma|)\|a\|_{L^2_x}\|b\|_{L^2_x}. \tag{5.284}$$

再次应用（4.143），上式可化简为

$$|(5.259)| \lesssim \varepsilon\langle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle\|a\|_{L^2_x}\|b\|_{L^2_x} \tag{5.285}$$

$$\lesssim \varepsilon^2(\|a\|_{L^2_x} + |\overline{c}|^2) + \|(b,(e^{\gamma\psi}c)^\times)\|^2_{L^2_x} + \|\mathcal{P}^\perp_\gamma f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.286}$$

因此,

$$|(5.260)| \lesssim \varepsilon\|a\|_{L^\infty}\|a\|^2_{H^{-1}} \lesssim \varepsilon\|a\|^2_{L^2_x}. \tag{5.287}$$

现在，为了估计（5.261），利用（5.253）可得

$$\|\nabla_x c - \gamma\nabla_x\psi e^{\gamma\psi}\overline{c}\|_{H^{-1}_x} \lesssim \|(e^{-\gamma\psi}c)^\times\|_{L^2_x}. \tag{5.288}$$

因此,

$$\left|\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a, \nabla_x c\rangle_{L^2_x} - \gamma\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}a, \nabla_x\phi_0\rangle_{L^2_x}\overline{c}\right| \lesssim \|a\|_{L^2_x}\|(e^{-\gamma\psi}c)^\times\|_{L^2_x}. \tag{5.289}$$

结合上述结果与（5.250），得到

$$(5.261) \le \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a, \nabla_x c\rangle_{L^2_x} - \gamma\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}a, \nabla_x\phi_0\rangle_{L^2_x}\overline{c}\right| \tag{5.290}$$

$$+ \left|4\pi\overline{c} - \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\langle\phi_0, a\rangle_{L^2_x}\right||\overline{c}| \tag{5.291}$$

$$\lesssim \varsigma\|a\|^2_{L^2_x} + \|a\|_{L^2_x}\|(e^{-\gamma\psi}c)^\times\|_{L^2_x} + \varepsilon|\overline{c}| \tag{5.292}$$

现在，结合关于（5.257）至（5.261）的界，我们得到

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a, b\rangle_{L^2_x} + \gamma^{-\frac{1}{2}}\|e^{-\frac{\gamma\psi}{2}}a\|^2_{L^2_x} + 4\pi\overline{c}^2 \tag{5.293}$$

$$\le C(\varepsilon+\varsigma+\lambda)(\|a\|^2_{L^2_x} + \overline{c}^2) \tag{5.294}$$

$$+ C_\lambda\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + \|b\|^2_{L^2_x} + \|(e^{-\gamma\psi}c)^\times\|^2_{L^2_x} + \|P^\perp_\gamma f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\}. \tag{5.295}$$

因此，取 ε、ς 和 λ 充分小，可得（5.254）。

步骤 3（$a^{(s)}$ 的估计）：接下来，我们得到关于 $a^{(s)}$ 的如下估计:

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}a^{(s)}, b^{(s)}\rangle_{L^2_x} + \frac{1}{C}\|a\|^2_{H^s} \tag{5.296}$$

$$\lesssim \varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + \|a\|^2_{L^2_x} + \|(b,c)\|^2_{H^s_x} + \|\mathcal{P}^\perp_\gamma f^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.297}$$

为证明这一点，我们有

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}a^{(s)}, b^{(s)}\rangle_{L^2_x} + \gamma^{-\frac{1}{2}}\|a^{(s)}\|^2_{L^2_x} \tag{5.298}$$

$$= -\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}a^{(s)}, \varepsilon\partial_t b^{(s)} + \gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla_x a^{(s)}\rangle_{L^2_x} \tag{5.299}$$

$$- \varepsilon\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}\partial_t a^{(s)}, b^{(s)}\rangle_{L^2_x}. \tag{5.300}$$

由（5.202），我们有

$$\|\varepsilon\partial_t b_j^{(s)} + \gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j} a^{(s)}\|_{H_x^{-1}} \tag{5.301}$$

$$= \Big\|\varepsilon\frac{\dot\gamma}{2\gamma} b_j + \gamma^{\frac{1}{2}} E_j a - 4\pi\gamma^{\frac{1}{2}} e^{\gamma\psi}\partial_{x_j}\Delta_x^{-1} a + \sqrt{\frac{2}{3}}\partial_{x_j} c + \partial_{x_k}\langle \mathfrak{h}_{jk}, \mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_\xi} \tag{5.302}$$

$$+ \langle \mathfrak{h}_j, \mathcal{M}_{\gamma,F_+} f\rangle_{L^2_\xi} + e^{\gamma\psi}\langle \mathfrak{h}_j, \mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}\rangle_{L^2_\xi}\Big\|_{H_x^{s-1}} \tag{5.303}$$

$$\lesssim \varepsilon|\dot\gamma|\|b\|_{H_x^{s-1}} + \langle\|E\|_{H_x^{s-1}}\rangle\|a\|_{H_x^{s-1}} + \|c\|_{H^s} + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.304}$$

$$+ \|\langle \mathfrak{h}_j, \mathcal{M}_{\gamma,F_+} f\rangle_{L^2_\xi}\|_{H_x^{s-1}} + \|e^{\gamma\psi}\langle \mathfrak{h}_j, \mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}\rangle_{L^2_\xi}\|_{H_x^{s-1}} \tag{5.305}$$

$$\lesssim \varepsilon\langle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle\|b\|_{H_x^{s-1}} + \|a\|_{H_x^{s-1}} + \|c\|_{H_x^s} + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f^{(s-1)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.306}$$

$$+ \|f^{(s-1)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle\langle\|f^{(s-1)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle \tag{5.307}$$

在最后一行中，我们像之前一样使用自举假设，以及（4.143）和（5.43），并结合关于 H^{s-1} 的代数估计。因此，根据自举假设、杨氏不等式和插值，对于任意 $\lambda > 0$，我们有

$$|(5.299)| \le C(\varepsilon + \varsigma + \lambda)\|a^{(s)}\|_{L^2_x}^2 \tag{5.308}$$

$$+ C_\lambda\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle + \|a\|_{L^2_x}^2 + \|(b,c)\|_{H_x^s} + \|P_\gamma^\perp f^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\} \tag{5.309}$$

接下来，由（4.143）和（5.201）可得，

$$|(5.300)| \lesssim \|b^{(s)}\|_{L^2_x}^2 + \varepsilon\|\partial_t(e^{\gamma\psi})\|_{H_x^{s-1}}\|b^{(s)}\|_{L^2_x} \tag{5.310}$$

$$\lesssim (\varepsilon\langle\|f^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle + \|b^{(s)}\|_{L^2_x})\|b^{(s)}\|_{L^2_x} \tag{5.311}$$

$$\lesssim \varepsilon^2\|a\|_{H^2_x} + \|(b,c)\|_{H_x^s}^2 + \|P_\gamma^\perp f^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.312}$$

取 ε、ς 和 λ 充分小，我们便得到（5.296）。

第4步（关于 $(e^{\gamma\psi}c)^\times$ 的估计）：现在我们证明以下界，

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}c)^\times, d\rangle_{L^2_x} + \frac{1}{C}\|(e^{-\gamma\psi}c)^\times\|_{L^2_x}^2 \tag{5.313}$$

$$\le C\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + (\varepsilon+\varsigma)(\|a\|_{L^2_x}^2 + |\overline{c}|^2) \tag{5.314}$$

$$+ \|b\|_{L^2_x}^2 + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2 + \|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}^2\}. \tag{5.315}$$

通过写成

$$(\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla_x + \gamma^{\frac{1}{2}}E)c = \gamma^{-\frac{1}{2}}e^{\gamma\psi}\nabla_x(e^{-\gamma\psi}c) - 4\pi\gamma^{\frac{1}{2}}c\nabla_x\Delta_x^{-1}a, \tag{5.316}$$

我们有

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}c)^\times,d\rangle_{L^2_x}+\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{\gamma}}\|(e^{-\gamma\psi}c)^\times\|^2_{L^2_x} \tag{5.317}$$

$$=-\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}c)^\times,\varepsilon\partial_t d+\frac{3\sqrt{3}}{5}(\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla_x+\gamma^{\frac{1}{2}}E)c\rangle_{L^2_x} \tag{5.318}$$

$$-\varepsilon\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}\partial_t c)^\times,d\rangle_{L^2_x} \tag{5.319}$$

$$-\varepsilon\langle \partial_t(e^{-\gamma\psi})\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}c)^\times,d\rangle_{L^2_x} \tag{5.320}$$

$$-\varepsilon\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(\partial_t(e^{-\gamma\psi})c)^\times,d\rangle_{L^2_x} \tag{5.321}$$

$$-4\pi\frac{3\sqrt{3}}{5}\gamma^{\frac{1}{2}}\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}c)^\times,c\nabla_x\Delta_x^{-1}a\rangle_{L^2_x}. \tag{5.322}$$

首先，由（5.204），我们得到

$$\|\varepsilon\partial_t d+\frac{3\sqrt{3}}{5}(\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla_x+\gamma^{\frac{1}{2}}E)c\|_{H^{-1}_x} \tag{5.323}$$

$$\lesssim\varepsilon|\dot\gamma|(\|b\|_{H^{-1}_x}+\|d\|_{H^{-1}_x}) \tag{5.324}$$

$$+\sup_{j,k\in\{1,2,3\}}\{\|(\gamma^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_k}+\gamma^{\frac{1}{2}}E_k)\langle\mathfrak{h}_{jk},\mathcal{P}_\gamma^\perp f\rangle_{L^2_\xi}\|_{H^{-1}_x} \tag{5.325}$$

$$+\|\partial_{x_k}\langle\mathfrak{h}_{jkll},f\rangle_{L^2_\xi}\|_{H^{-1}_x} \tag{5.326}$$

$$+\|\langle\mathcal{L}_\gamma\mathfrak{h}_{jll},f\rangle_{L^2_\xi}\|_{H^{-1}_x} \tag{5.327}$$

$$+\|\langle\mathfrak{h}_{jll},\mathcal{M}_{\gamma,F_+}f\rangle_{L^2_\xi}\|_{H^{-1}_x} \tag{5.328}$$

$$+\|\langle\mathfrak{h}_{jll},e^{\gamma\psi}\mathcal{M}_{\gamma,F_+}\mathfrak{h}\rangle\|_{H^{-1}_x} \tag{5.329}$$

$$+\|\langle\mathfrak{h}_{jll},\Gamma_\gamma(f,f)\rangle\|_{H^{-1}_x}\} \tag{5.330}$$

逐行观察可知

$$(5.324)\lesssim\varepsilon(\|b\|_{L^2_x}+\|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}) \tag{5.331}$$

接下来，我们有

$$(5.325)+(5.326)+(5.327)\le\|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.332}$$

接下来，由（5.43），我们得到

$$(5.328)\lesssim\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}+\varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.333}$$

$$(5.329)\lesssim\varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle \tag{5.334}$$

最后，由（5.33），我们得到

$$(5.330)\lesssim\varsigma\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.335}$$

因此，

$$|(5.318)|\lesssim\|(ce^{\gamma\psi})^\times\|_{L^2_x}\{\|b\|_{L^2_x}+\|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}+\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.336}$$

$$+\varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle\langle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle+\varsigma\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\}. \tag{5.337}$$

利用（5.277），我们推得对于任意 $\lambda > 0$,

$$|(5.318)| \leq C(\varepsilon + \varsigma + \lambda)\|(e^{\gamma\psi}c)^{\times}\|_{L^2_x}^2 \tag{5.338}$$

$$+ C_\lambda\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + (\varepsilon+\varsigma)(\|a\|_{L^2_x}^2 + |\overline{c}|^2) \tag{5.339}$$

$$+ \|b\|_{L^2_x}^2 + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2 + \|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}^2\} \tag{5.340}$$

接下来，我们来看这一项（5.319）。由（5.203）和（4.143），

$$\varepsilon\|\partial_t c\|_{H_x^{-1}} \lesssim \varepsilon|\dot{\gamma}|\langle\|(a,c)\|_{L^2_x}\rangle + \|(b,d)\|_{L^2_x} + \varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle\langle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle \tag{5.341}$$

$$\lesssim \varepsilon\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle\langle\|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}\rangle + \varepsilon\|(a,c)\|_{L^2_x} + \|b\|_{L^2_x} + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.342}$$

Thus

$$|(5.319)| \lesssim \varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + \varepsilon\|(a,c)\|_{L^2_x}^2 + \|b\|_{L^2_x}^2 + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2 + \|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}^2 \tag{5.343}$$

Next,

$$|(5.320)| + |(5.321)| \lesssim \varepsilon\|c\|_{L^2_x}\|d\|_{L^2_x} \lesssim \varepsilon^2 + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2. \tag{5.344}$$

最后，

$$|(5.322)| \lesssim \|(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}\|_{L^2_x}(\|c\nabla_x\Delta_x^{-1}a\|_{L^2_x} + \|c\nabla_x\Delta_x^{-1}(n_+^\varepsilon - n_+^0)\|_{L^2_x}) \tag{5.345}$$

$$\lesssim \|a\|_{H^s_x}\|(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}\|_{L^2_x}(\|c\|_{L^2_x} + \|F_+^\varepsilon - F_+^0\|_{\mathfrak{E}'}) \tag{5.346}$$

$$\lesssim \varsigma\|(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}\|_{L^2_x}(\|c\|_{L^2_x} + \|F_+^\varepsilon - F_+^0\|_{\mathfrak{E}'}) \tag{5.347}$$

结合（5.318）至（5.322）的这些界，我们得出

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}, d\rangle_{L^2_x} + \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{\gamma}}\|(e^{-\gamma\psi}c)^{\times}\|_{L^2_x}^2 \tag{5.348}$$

$$\leq C(\varepsilon+\varsigma+\lambda)\|(e^{\gamma\psi}c)^{\times}\|_{L^2_x}^2 \tag{5.349}$$

$$+ C_\lambda\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + (\varepsilon+\varsigma)(\|a\|_{L^2_x}^2 + |\overline{c}|^2) \tag{5.350}$$

$$+ \|b\|_{L^2_x}^2 + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2 + \|f\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}^2\} \tag{5.351}$$

取 ε、ς 和 λ 充分小，可得（5.313）。

步骤5：对 $c^{(s)}$ 的估计：采用与前面各个界相同的方法，我们得到估计

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}c^{(s)}, d^{(s)}\rangle_{L^2_x} + \frac{1}{C}\|c\|_{H^s_x}^2 \tag{5.352}$$

$$\leq C\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + (\varepsilon+\varsigma)\|a\|_{L^2_x}^2 \tag{5.353}$$

$$+ \|c\|_{L^2_x}^2 + \|b\|_{H^s_x}^2 + \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}^2 + \|f^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}^2\} \tag{5.354}$$

证明与（5.296）类似。

步骤6：合并各界：合并（5.254）、（5.296）、（5.219）、（5.313）、（5.352）中的上界，可选择常数 $\kappa > 0$ 使其充分小，从而

泛函

$$\mathscr{G}_{reg}(t) := \kappa\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a, b\rangle_{L^2_x} - \kappa^3\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}a^{(s)}, b^{(s)}\rangle_{L^2_x} \tag{5.355}$$

$$- \langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}c)^\times, d\rangle_{L^2_x} - \kappa^2\langle\nabla_x\Delta_x^{-1}c^{(s)}, d^{(s)}\rangle_{L^2_x} \tag{5.356}$$

满足

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\mathscr{G}_{reg}(t) + \frac{1}{C}\|\mathcal{P}_\gamma f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.357}$$

$$\le C\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + (\varepsilon+\varsigma)\|\mathcal{P}_\gamma f^{(s)}\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.358}$$

$$+ \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \|F_+^\varepsilon - F_+^0\|^2_{\mathfrak{E}'}\} \tag{5.359}$$

另一方面，由（5.31），对每个 $\alpha\in\{1,2\}$,

$$\|\mathcal{P}_\gamma^\perp f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \lesssim \|\mathcal{P}_\gamma^\perp g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g_\alpha^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.360}$$

$$+ \eta\|\mathcal{P}_\gamma f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi}. \tag{5.361}$$

因此，取 ε，ς 并令 η 充分小，如有必要，对 $\mathscr{G}$ 重新缩放，即可由（5.243）得出结论。为得到（5.242），取 $\kappa>0$ 并

$$\mathscr{G}(t) := -\kappa\langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}a, b\rangle_{L^2_x} - \langle e^{-\gamma\psi}\nabla_x\Delta_x^{-1}(e^{-\gamma\psi}c)^\times, d\rangle_{L^2_x} \tag{5.362}$$

使得

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\mathscr{G}(t) + \frac{1}{C}\|\mathcal{P}_\gamma f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \le C\{\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 + (\varepsilon+\varsigma)\|\mathcal{P}_\gamma f\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.363}$$

$$+ \|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi}\}. \tag{5.364}$$

并且，再次由（5.31），对每个 $\alpha\in\{1,2,3\}$,

$$\|\mathcal{P}_\gamma^\perp f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \lesssim \|\mathcal{P}_\gamma^\perp g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} + \eta\|\mathcal{P}_\gamma f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.365}$$

再次取 ε，ς 和 η 充分小，并在必要时对 $\mathscr{G}$ 重新缩放，我们便可推出（5.242）。 □

我们用命题5.4 和5.7的一个推论来结束本节:

推论 5.8. 设 $M\ge 1$，且 η 足够小，具体取决于 M。令 ς 和 ε 足够小，具体取决于 M 和 η。假设自举假设 (5.3) 至 (5.6) 成立。那么，对每个 M、$\eta>0$ 和 $\alpha\in\{1,2,3\}$，存在函数 $\mathscr{Y}_{-,\alpha}=\mathscr{Y}_{(M,\eta)-,\alpha}$：$[0,T]\to\mathrm{R}+$，使得

$$\mathscr{Y}_{-,\alpha}\sim_{M,\eta}\widetilde{\mathscr{E}}_{-,\alpha} \tag{5.366}$$

and

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\mathscr{Y}_{-,\alpha} + \widetilde{\mathscr{D}}_{-,\alpha} \lesssim_{M,\eta} \varepsilon^2. \tag{5.367}$$

证明。 取 κ_0， κ_1， κ_2 和 $\kappa_3 \in (0,\ 1)$ 为待确定的常数。我们将情形 $\alpha = 2$ 下的 (5.242) 与 (5.71) 合并如下:

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\{\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + 4\pi\sqrt{\gamma}\||\Delta_x|^{-1}a\|^2_{L^2_x} + \kappa_1\mathscr{G}\} \tag{5.368}$$

$$+ (\frac{1}{C} - C\kappa_1)\{\|\mathcal{P}^\perp_\gamma g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})}\} + \kappa_0\|\mathcal{P}_\gamma f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.369}$$

$$\leq C(\varepsilon + \varsigma + \eta + \kappa_0)\|\mathcal{P}_\gamma f\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.370}$$

$$+ C\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x} + \|F_+\|^2_{\mathfrak{D}}\rangle\|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.371}$$

$$+ C_{\kappa_0}\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2. \tag{5.372}$$

利用（5.32），我们首先固定 κ_1 足够小，使得上文中的“$\frac{1}{C} - C\kappa_1$”严格为正，并且

$$\mathscr{X}_{-,\alpha} := \|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + 4\pi\sqrt{\gamma}\||\Delta_x|^{-1}a\|^2_{L^2_x} + \kappa_1\mathscr{G} \tag{5.373}$$

满足

$$\mathscr{X}_{-,\alpha} \sim \|g_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}}. \tag{5.374}$$

然后，我们固定 κ_0 为一个足够小的常数，并要求 ε、ς 和 η 也足够小，使得

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\mathscr{X}_{-,\alpha} + \frac{1}{C}\|g_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.375}$$

$$\leq C\{\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x} + \|F_+\|^2_{\mathfrak{D}}\rangle\mathscr{X}_{-,\alpha} + \varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2\}. \tag{5.376}$$

接下来，我们将这个界与（5.72）结合，

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\ (\|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + \kappa_3\mathscr{G}_{reg}) \tag{5.377}$$

$$+ (\frac{1}{C} - C\kappa_3)\{\|\mathcal{P}^\perp_\gamma g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + \|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})}\} + \kappa_3\|\mathcal{P}_\gamma f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} \tag{5.378}$$

$$\leq C(\varepsilon + \varsigma + \eta + \kappa_2)\|\mathcal{P}_\gamma f^{(s)}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)_\xi} + C_{\eta,\kappa_2}\|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.379}$$

$$+ C\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{H^{s-\frac{1}{4}}_x} + \|F_+\|^2_{\mathfrak{D}}\rangle\|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} \tag{5.380}$$

$$+ C_{\kappa_2}\varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 \tag{5.381}$$

现在我们取 κ_3 足够小，使得上文中的“$\frac{1}{C} - C\kappa_3$”为正，并且

$$\|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + \kappa_3\mathscr{G}_{reg} \sim \|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}}, \tag{5.382}$$

并固定 κ_2，且取足够小的 ε、ς 和 η，使得

$$\varepsilon\frac{d}{dt}(\|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + \kappa_3\mathscr{G}_{reg}) + \frac{1}{C}\|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})_\xi} \tag{5.383}$$

$$\leq C_\eta\|g_{\alpha+1}\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma\cap\mathcal{H}^-_{\sigma;\varepsilon})\xi} \tag{5.384}$$

$$+ C\{\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x} + \|F_+\|^2_{\mathfrak{D}}\rangle\|g^{(s)}_\alpha\|^2_{L^2_{x,\xi}} + \varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2\}. \tag{5.385}$$

最后，我们取充分小的 $\kappa_4^{(\eta)}$，其大小取决于 η，使得

$$\mathscr{X}_{-,\alpha,reg}^{(\eta)} := \kappa_4^{(\eta)}(\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_{x,\xi}}^2 + \kappa_3 \mathscr{G}_{reg}) + \mathscr{X}_{-,\alpha+1} \tag{5.386}$$

满足

$$\frac{d}{dt}\mathscr{X}_{-,reg,\alpha}^{(\eta)} + \frac{1}{C_\eta}\widetilde{\mathscr{D}}_{-,\alpha} \tag{5.387}$$

$$\leq C_\eta\{\varepsilon\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x} + \|F_+\|_{\mathfrak{D}}^2\rangle\mathscr{X}_{-,reg,\alpha}^{(\eta)} + \varepsilon^2\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2\}. \tag{5.388}$$

由（4.2），我们有

$$\frac{1}{C}\langle\|F_+\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 \leq -\frac{d}{dt}\mathscr{X}_+ + C(1+\widetilde{\mathscr{D}}_{-,\alpha}). \tag{5.389}$$

现在取 ε 和 ς 充分小，使其依赖于 η，这样我们就可以吸收 $\|g_\alpha^{(s)}\|_{L^2_x(\mathcal{H}_\sigma)}^2$ 项，并得到某组常数 $C_1^{(\eta)}$、$C_2^{(\eta)}$ 和 $C_3^{(\eta)}$，使得

$$\varepsilon(\frac{d}{dt} + C_1^{(\eta)}\frac{d}{dt}\mathscr{X}_+ - C_2^{(\eta)}\langle\|\partial_t a\|_{L^2_x}\rangle)\mathscr{X}_{-,reg,\alpha}^{(\eta)} + \frac{1}{C_3^{(\eta)}}\widetilde{\mathscr{D}}_{-,\alpha} \tag{5.390}$$

$$\leq C_3^{(\eta)}\varepsilon^2. \tag{5.391}$$

现在我们定义

$$\Omega^{(\eta)}(t) := C_1^{(\eta)}\mathscr{X}_+(t) - C_2^{(\eta)}\int_0^t \langle\|\partial_t a(t')\|_{L^2_x}\rangle dt' \tag{5.392}$$

由（5.3）和（5.6），我们有 $|\Omega^{(\eta)}|$ 小于等于某个依赖于η的常数，$C_4^{(\eta)} > 0$。因此，若令 $\mathscr{Y}_j^\eta = C_3^{(\eta)}e^{\Omega+C_4^{(\eta)}}\mathscr{X}_-^{(\eta)}$，$reg,\ \alpha$，则我们得到一个满足（5.366）和（5.367）的函数。□

5.6. 命题 **5.1** 的证明。 现在，我们以证明命题 5.1 来结束本节。

命题 *5.1* 的证明：在整个证明过程中，我们取 η 足够小，使其满足推论 5.8 的假设。估计中出现的任意常数都隐含地依赖于常数 M、$\eta > 0$，即 $C = C_{M,\eta}$。

对每个 $\alpha \in \{1,2\}$，我们对推论 5.8 在 $t \in [0,T]$ 上的界进行积分，并利用（5.366）得到

$$\varepsilon \sup_{t\in[0,\hat{T}]}\widetilde{\mathscr{E}}_{-,\alpha}(t) + \int_0^{\hat{T}}\widetilde{\mathscr{D}}_{-,\alpha}(t)dt \tag{5.393}$$

$$\leq C(\varepsilon^2 + \varepsilon\widetilde{\mathscr{E}}_{-,\alpha}(0)). \tag{5.394}$$

取 $j = 2$，这意味着（5.8）。

现在证明（5.9）。为此，我们引入 $\theta > 0$，其值稍后确定。现在，对于任意 $h = h$（ξ），注意到

$$\|h\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 \gtrsim \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{\langle\xi\rangle} h(\xi)^2 d\xi \tag{5.395}$$

$$\geq \frac{1}{\theta t^{\frac{1}{3}}} \int_{\langle\xi\rangle \leq \theta t^{\frac{1}{3}}} h(\xi)^2 d\xi \tag{5.396}$$

$$\geq \frac{1}{\theta t^{\frac{1}{3}}} \left(\|h\|_{L^2}^2 - \int_{\langle\xi\rangle \geq \theta t^{\frac{1}{3}}} h(\xi)^2 d\xi \right) \tag{5.397}$$

$$\geq \frac{1}{\theta t^{\frac{1}{3}}} \left(\|h\|_{L^2}^2 - \int_{\langle\xi\rangle \geq \theta t^{\frac{1}{3}}} e^{\frac{1}{4}(e^\eta - 1)\beta_{in}(|\xi|^2 + 1 - \theta^2 t^{\frac{2}{3}})} h(\xi)^2 d\xi \right) \tag{5.398}$$

$$\geq \frac{1}{\theta t^{\frac{1}{3}}} \left(\|h\|_{L^2}^2 - e^{-\frac{1}{4}(e^\eta - 1)\beta_{in}\theta^2 t^{\frac{2}{3}}} \|e^{\frac{1}{4}(e^\eta - 1)\beta_{in}(|\xi|^2 + 1)} h\|_{L^2}^2 \right) \tag{5.399}$$

将其应用于 $h = g_1^{(s)}$ 和 g_2，并对 x 积分，再对 θ 进行重新缩放，我们得到 e

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{-,1} \gtrsim \frac{1}{\theta t^{\frac{1}{3}}} \left(\mathscr{Y}_{-,1} - e^{-\theta^2 t^{\frac{2}{3}}} \mathscr{Y}_{-,2} \right) \tag{5.400}$$

因此，利用（5.4）和（5.367），我们得到

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \mathscr{Y}_{-,1} + \frac{2}{3C\theta t^{\frac{1}{3}}} \mathscr{Y}_{-,1} \leq C(\varepsilon^2 + \frac{2}{3\theta t^{\frac{1}{3}}} e^{-\theta^2 t^{\frac{2}{3}}} \sup_{t' \in [0,T]} \widetilde{\mathscr{E}}_{-,2}(t'). \tag{5.401}$$

因此

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{C\theta\varepsilon} t^{\frac{2}{3}}} \mathscr{Y}_{-,1}) \leq C(\varepsilon e^{\frac{1}{C\theta\varepsilon} t^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\varepsilon\theta t^{\frac{1}{3}}} e^{(\frac{1}{C\theta\varepsilon} - \theta^2) t^{\frac{2}{3}}} \sup_{t' \in [0,T]} \widetilde{\mathscr{E}}_{-,2}(t'). \tag{5.402}$$

取 $\theta = \left(\frac{2}{C\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}}$，并令 C 如上所述，可得对于某些 C_0、C_1、C_2，

因此，

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{C_0}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} \mathscr{Y}_{-,1}) \leq C_2(\varepsilon e^{\frac{1}{C_0}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} + \frac{d}{dt} e^{-\frac{1}{C_1}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} \sup_{t' \in [0,T]} \widetilde{\mathscr{E}}_{-,2}(t') \tag{5.403}$$

Now,

$$\int_0^t e^{\frac{1}{C_0}(\frac{t'}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} dt' \leq \varepsilon^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} \int_0^t \frac{1}{\varepsilon^{\frac{2}{3}} (t')^{\frac{1}{3}}} e^{\frac{1}{C_0}(\frac{t'}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} dt' \lesssim \varepsilon^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{C_0}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}}. \tag{5.404}$$

因此，对5.403进行积分，可得

$$\mathscr{Y}_{-,1}(t) \lesssim e^{-\frac{1}{C}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} \sup_{t' \in [0,T]} \widetilde{\mathscr{E}}_{-,2}(t') + \varepsilon^{\frac{5}{3}} t^{\frac{1}{3}}. \tag{5.405}$$

对所有 $t \in [0, T]$，利用5.366，我们得出5.9。 □

6. Proof of Theorem 1.1

本节最后给出主定理的证明。

定理*1.1*的证明：我们将定理的证明分解为对 (i) 和 (ii) 两部分的证明。

（i）的证明：我们将（i）的证明分为若干步骤：自举论证的设定、综合前述结果中的估计，以及完成自举论证

论证。

步骤 (i) 的第 1 步（设定与自举假设）： 取 $\kappa = \kappa(M) > 0$ 为一个待定常数。取 (F_+^0, β, ϕ^0) 为 (1.7) 在 $[0, T_0]$ 上满足定理假设的一个弱解。此外，我们不妨取 $T_0 > 0$ 足够小，使得

$$\int_0^{T_0} \|F_+^0(t)\|_{\mathfrak{D}}^2 dt \le \kappa^2. \tag{6.1}$$

现在，对于所有 ε 充分小的值，存在唯一的弱解 $(F_+^\varepsilon, F_-^\varepsilon)$，它在某个包含零的区间上满足 (1.7)，其意义如引理 3.1所述。此外，令 $(\psi^\varepsilon, \gamma^\varepsilon)$ 为引理4.3意义下的 (4.139) 的解，它定义在某个包含 0 的时间区间上。然后，取 $\eta, \bar{\epsilon}$ 和 ς 如命题 5.1所述，并取 $\varepsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$。

ˆ 由所考虑的量关于时间的连续性，存在 $T_\varepsilon > 0$，使得以下条件成立：

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} (\|\frac{1}{n_+^\varepsilon(t)}\|_{L_x^\infty} + \|F_+^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{E}}) \le 2M, \tag{6.2}$$

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \|F_+^\varepsilon(t) - F_-^0(t)\|_{\mathfrak{E}'} \le \kappa \tag{6.3}$$

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \sqrt{\mathscr{E}_{-,2}^\varepsilon(t)} \le \kappa, \tag{6.4}$$

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} |\ln(\frac{\gamma^\varepsilon(t)}{\beta_{in}})| \le \eta, \tag{6.5}$$

$$\int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \|\partial_t(n_-^\varepsilon - e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon})\|_{L_x^2} dt \le 1. \tag{6.6}$$

根据引理 3.1 （取 $\kappa < \frac{\varrho}{(2M)\ 2}$）以及 4.3 （使用条件（6.5））， 我们可以将 κ 取得足够小ˆ，使得（F_+^ε， F_-^ε）和（γ^ε， ψ^ε）的存在区间严格大于 $[0, T_\varepsilon]$。因此，ˆ我们可以将 $T_\varepsilon > 0$ 取为满足此条件的最大时间，使得上述条件中至少有一个取等号，或者 $T_\varepsilon = T_0$。

接下来，注意到由条件（6.4）和（6.5），可得

$$\sup_{t\in[0,T]} \{\|\frac{1}{n_-^\varepsilon(t)}\|_{L_x^\infty} + \|F_-^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{E}}\} \le C_M, \tag{6.7}$$

因此，命题 4.1 和 4.2 的结论均成立，只需在其假设中将 M 替换为某个 C_M。

步骤 2：第 (i) 部分（合并估计）： 现在我们合并前述命题和引理中的估计。我们首先证明命题 5.1 的假设均已满足。

ˆ由 (4.144)，对每个 $\alpha \in \{1,2\}$，以及 $T \in [0, T_\varepsilon]$，我们有

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|e^{\frac{q_\alpha|\xi|^2}{2}}\langle\nabla_x\rangle^s\langle\nabla_\xi\rangle(\mu_\beta e^{\beta\phi^0} - \mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon})\|_{L^2_{x,\xi}} \tag{6.8}$$

$$+ \|e^{\frac{q_{\alpha+1}|\xi|^2}{2}}\langle\nabla_\xi\rangle(\mu_\beta e^{\beta\phi^0} - \mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon})\|_{L^2_{x,\xi}}) \tag{6.9}$$

$$\lesssim_M \sup_{t\in[0,T]} (|\beta - \gamma^\varepsilon| + \|\phi^0 - \psi^\varepsilon\|_{H^s_x}) \tag{6.10}$$

$$\lesssim_M \sup_{t\in[0,T]} \|F^\varepsilon_+(t) - F^0_+(t)\|_{\mathfrak{E}'}. \tag{6.11}$$

因此，对于所有这样的 T 以及每个 $\alpha \in \{1,2\}$，我们有

$$\sup_{t\in[0,T]} |\mathscr{E}^\varepsilon_{-,\alpha}(t) - \widetilde{\mathscr{E}}^\varepsilon_{-,\alpha}(t)| \le C_M \sup_{t\in[0,T]} \|F^\varepsilon_+(t) - F^0_+(t)\|^2_{\mathfrak{E}'},, \tag{6.12}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\mathscr{D}^\varepsilon_{-,\alpha}(t) - \widetilde{\mathscr{D}}^\varepsilon_{-,\alpha}(t)| \le C_M \sup_{t\in[0,T]} \|F^\varepsilon_+(t) - F^0_+(t)\|^2_{\mathfrak{E}'}.. \tag{6.13}$$

利用（6.12）以及 $T = 0$，我们有

$$\widetilde{\mathscr{E}}^\varepsilon_{-,\alpha,in} \lesssim_M \mathscr{E}^\varepsilon_{-,\alpha,in} + C_M\varepsilon^2 \lesssim \varepsilon^2. \tag{6.14}$$

根据条件 $\mathscr{E}^\varepsilon_{-,\ 2,\ in} \le M\varepsilon$，我们有

$$\left|\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{T}^3} \frac{|\xi|^2}{2}(F^\varepsilon_{-,in} - \mu_{\gamma^\varepsilon_{in}} e^{\beta_{in}\psi^\varepsilon_{in}})dxd\xi + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbf{T}^3} |\nabla_x\phi^\varepsilon_{in}|^2 - |\nabla_x\psi^\varepsilon_{in}|^2 dx\right| \tag{6.15}$$

$$\lesssim \sqrt{\widetilde{\mathscr{E}}_{-,2,in}} + \widetilde{\mathscr{E}}_{-,2,in} \tag{6.16}$$

$$\lesssim C_M(\varepsilon + \varepsilon^2). \tag{6.17}$$

因此，我们有（5.7）在命题 5.1 中成立。另一方面，由（6.3）、（6.4）和（6.12），我们有 $\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\widetilde{\mathscr{E}}^\varepsilon_{-,\ \alpha}(t)} \lesssim_M \kappa$。取 $\kappa \le \frac{\varsigma}{C_M}$，我们有命题 ˆ Proposition 5.1 的结论在 $[0, T_\varepsilon]$上成立。

由（5.8），我们有

$$\varepsilon \sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \mathscr{E}^\varepsilon_{-,2}(t) + \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \mathscr{D}^\varepsilon_{-,2}(t)dt \le C_M(\varepsilon\mathscr{E}^\varepsilon_{-,2,in} + \varepsilon^2). \tag{6.18}$$

ˆ 将上述结果与（5.9）结合，可得对于所有 $t \in [0, T_\varepsilon]$，都有

$$\mathscr{E}^\varepsilon_{-,1}(t) \le C_M(e^{-\frac{1}{C_M}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}}\varepsilon + \varepsilon^{\frac{5}{3}}t^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2). \tag{6.19}$$

现在我们来证明这个估计

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \|F^\varepsilon_+(t) - F^0_+(t)\|^2_{\mathfrak{E}'} + \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \|F^\varepsilon_+(t) - F^0_+(t)\|^2_{\mathfrak{D}'}dt \lesssim_M \varepsilon^2. \tag{6.20}$$

利用 t ˆ如上所述并结合（5.8），则对所有 $T \le T_\varepsilon$，我们在 4.103）上对 $t \in [0,T]$ 积分，得到 t

$$\sup_{t\in[0,T]} \|F_+^\varepsilon(t) - F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'}^2 + \int_0^T \|F_+^\varepsilon(t) - F_+^0(t)\|_{\mathfrak{D}'}^2 dt \tag{6.21}$$

$$\lesssim_M \|F_+^\varepsilon(0) - F_+^0(0)\|_{\mathfrak{E}'}^2 \tag{6.22}$$

$$+ \int_0^T \langle \|(F_+^\varepsilon, F_+^0)\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 (\varepsilon^2 + \|F_+^\varepsilon(t) - F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'}) + \mathscr{D}_{-,2}(t) dt \tag{6.23}$$

$$\lesssim_M \int_0^T \langle \|(F_+^\varepsilon, F_+^0)\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 (\varepsilon^2 + \sup_{t'\in[0,t]} \|F_+^\varepsilon(t') - F_+^0(t')\|_{\mathfrak{E}'}^2) dt + \varepsilon^2. \tag{6.24}$$

在最后一行中，我们使用了 (6.18)。利用 Gr¨onwall 不等式的时间积分形式，我们推得 (6.20)，前提是以下估计成立：

$$\int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \langle \|(F_+^0(t), F_+^\varepsilon(t))\|_{\mathfrak{D}}\rangle^2 dt \lesssim_M 1. \tag{6.25}$$

事实上，对命题 4.1中的 (4.2) 积分，并利用 (6.18) 控制右端项，可得

$$\int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \|F_+^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{D}}^2 dt \lesssim_M 1. \tag{6.26}$$

结合 (6.1)，我们得到 (6.25)。

ˆ ˆ第 (i) 部分的步骤 3（结束 bootstrap）：现在我们证明 $T := \inf_{\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]} T_\varepsilon \ge \kappa$。为证明这一点，我们假设 $T_\varepsilon < \kappa$，从而导出矛盾。现在，(6.2) 至 (6.6) 中有一个等号成立。我们现在证明，在这五种情形下，条件 $T_\varepsilon < \kappa$ 均不成立。

首先，假设 (6.2) 中等号成立。对 (4.3) 积分，并利用 (6.18) 控制右端，可得对所有 $t \in [0, T_\varepsilon]$,

$$\|F_+^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{E}}^2 \le \|F_{+,in}^\varepsilon\|_{\mathfrak{E}}^2 + C_M(t + \|\langle v\rangle^{m_1} F_+^\varepsilon\|_{L_x^2(\dot{\mathcal{H}}_\sigma \cap \mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^+)_v}^2 dt') \tag{6.27}$$

我们断言

$$\int_0^t \|\langle v\rangle^{m_1} F_+^\varepsilon(t')\|_{L_x^2(\dot{\mathcal{H}}_\sigma \cap \mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^+)_v}^2 dt' \lesssim_M \kappa + \varepsilon. \tag{6.28}$$

事实上，

$$\int_0^t \|\langle v\rangle^{m_1} F_+^\varepsilon(t')\|_{L_x^2(\dot{\mathcal{H}}_\sigma \cap \mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^+)_v}^2 dt' \le \int_0^t \|F_+^\varepsilon(t')\|_{\mathfrak{D}'} dt' + \int_0^t \|\langle v\rangle^{m_1} F_+^\varepsilon(t')\|_{L_x^2(\mathcal{H}_{\sigma;\varepsilon}^+)_v}^2 dt' \tag{6.29}$$

现在，由 (6.1) 和 (6.20)，

$$\int_0^t \|F_+^\varepsilon(t')\|_{\mathfrak{D}'}^2 dt' \lesssim \int_0^t \|F_+^\varepsilon\|_{\mathfrak{D}'}^2 dt' + \int_0^t \|F_+^\varepsilon(t') - F_+^0(t')\|_{\mathfrak{D}'}^2 dt' \lesssim_M \varepsilon^2 + \kappa^2. \tag{6.30}$$

另一方面，回顾式（1.22），我们注意到，对于所有 $\nu \in \mathbf{S}^2$,

$$\varepsilon\sigma_{ij}(\varepsilon v)\nu_i\nu_j \lesssim \varepsilon \lesssim \varepsilon\langle v\rangle^3 \sigma_{ij}(v)\nu_i\nu_j. \tag{6.31}$$

因此，利用式（6.25），

$$\int_0^t \|\langle v\rangle^{m_1} F_+^\varepsilon\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} dt' \lesssim t + \int_0^t \|\langle v\rangle^{m_2} F_+^\varepsilon\|^2_{L^2_x(\mathcal{H}^+_{\sigma;\varepsilon})_v} dt' \tag{6.32}$$

$$\lesssim_M t + \varepsilon \int_0^t \|F_+^\varepsilon\|^2_{\mathfrak{D}} dt' \tag{6.33}$$

$$\lesssim_M t + \varepsilon. \tag{6.34}$$

ˆ利用 $t \le T_\varepsilon \le \kappa$，我们得出（6.28）成立。对所有$t \in [0, \hat{} T_\varepsilon]$，将（6.27）取上确界，可得

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}\varepsilon]} \|F_+^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{E}} \le \|F^\varepsilon_{+,in}\|_{\mathfrak{E}} + C_M(\kappa+\varepsilon). \tag{6.35}$$

ˆ 接下来，由连续性方程，对所有 $t \in [0, T_\varepsilon]$，我们有，

$$\frac{1}{n_+^\varepsilon(t,x)} = \frac{1}{n^\varepsilon_{+,in}(x) - \int_0^t \int_{\mathbf{R}^3} v\cdot\nabla_x F_+(t,x,v)dvdt} \tag{6.36}$$

如有必要，取更小的 κ，可得

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \|\frac{1}{n_+^\varepsilon(t)}\|_{L^\infty_x} \le \|\frac{1}{n^\varepsilon_{+,in}}\|_{L^\infty_x} \frac{1}{1 - C\|\frac{1}{n^\varepsilon_{+,in}}\|_{L^\infty_x}\|F_+^\varepsilon\|_{\mathfrak{E}}\kappa} \le \frac{3}{2}\|\frac{1}{n^\varepsilon_{+,in}}\|_{L^\infty_x}. \tag{6.37}$$

现在，取充分小的 ε 和 κ，可得

$$2M = \sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} (\|\frac{1}{n_+^\varepsilon(t)}\|_{L^\infty_x} + \|F_+^\varepsilon(t)\|_{\mathfrak{E}}) \le \frac{3}{2}\|\frac{1}{n^\varepsilon_{+,in}}\|_{L^\infty_x} + \|F^\varepsilon_{+,in}\|_{\mathfrak{E}} + C_M(\kappa+\varepsilon) \tag{6.38}$$

$$= \frac{3}{2}M. \tag{6.39}$$

接下来，假设（6.3）取等号。然而，由（6.20），我们有 $\sup^{t\in[0,\hat{}T_\varepsilon]} \|F_+^\varepsilon(t) - F_+^0(t)\|_{\mathfrak{E}'} \lesssim_M \varepsilon$，因此可以取充分小的 ε，从而导出矛盾。

接下来，假设（6.4）取等号。然而，由（6.18）可知，$\sqrt{\mathscr{E}^\varepsilon_{-,2}} \lesssim_M \sqrt{\varepsilon}$。因此，只要取足够小的$\varepsilon$，我们就能保证

$$\kappa = \sqrt{\mathscr{E}^\varepsilon_{-,2}(\hat{T}_\varepsilon)} \le \frac{\kappa}{2}, \tag{6.40}$$

矛盾。

接下来，假设（6.5）取等号。由（4.143）和（6.18），

$$\eta = |\ln(\frac{\gamma^\varepsilon(\hat{T}_\varepsilon)}{\beta_{in}})| \tag{6.41}$$

$$\le \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} |\frac{\dot{\gamma}^\varepsilon(t)}{\gamma^\varepsilon(t)}| dt \tag{6.42}$$

$$\lesssim \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} 1 + \sqrt{\mathscr{D}^\varepsilon_{-,2}} dt \tag{6.43}$$

$$\le \hat{T}_\varepsilon + \hat{T}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T_\varepsilon} \mathscr{D}^\varepsilon_{-,2} dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.44}$$

ˆ ˆ结合（6.18），我们得出 $\eta \lesssim T_\varepsilon$。我们得出 $\eta = \eta(M) \lesssim_M T_\varepsilon \leq \kappa$。取 κ充分小，即可得到矛盾。

现在，假设（6.6）取等号。由（5.201）、（4.143）、（5.8），可得

$$1 = \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \| \int_{\mathbf{R}^3} (F_-^\varepsilon - \mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon \psi^\varepsilon}) d\xi \|_{L^2_x} dt \tag{6.45}$$

$$\lesssim_M \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \| \int_{\mathbf{R}^3} v \cdot \nabla_x (F_-^\varepsilon - \mu_{\gamma^\varepsilon} e^{\gamma^\varepsilon \psi^\varepsilon}) d\xi \|_{L^2_x} + \| \partial_t (\gamma^\varepsilon \psi^\varepsilon) e^{\gamma^\varepsilon \psi^\varepsilon} \|_{L^2_x} dt \tag{6.46}$$

$$\lesssim_M \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} 1 + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\widetilde{\mathscr{D}}^\varepsilon_{-,2}} dt \tag{6.47}$$

$$\lesssim_M \hat{T}_\varepsilon + \hat{T}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{6.48}$$

ˆ 这意味着 $1 \lesssim_M T_\varepsilon \leq \kappa$。取足够小的 κ，即可得到矛盾。

ˆ ˆ 总之，$T_\varepsilon \geq \kappa$ 对于所有足够小的 ε，因此 $T \geq \kappa$。（6.18）和（6.19）中的界分别推出（1.34）和（1.35）。

（ii）的证明：证明与（i）类似，因此省略部分细节。与（i）相同，我们取（F_+，β，ϕ^0）的解（1.18）（满足（6.1））。我们还取（F_+^ε，F_-^ε）的解（1.7），以及满足条件（6.2）至（6.6）的（γ^ε，ψ^ε），其中某个 ˆ$T_\varepsilon > 0$。注意，命题 4.1 和 4.2 的结论均成立。

由（1.38）以及 $\psi^\varepsilon_{in} = \phi^0_{in}$这一事实可知，（5.7）中的表达式恰好为零。在此情形下，界（6.12）和（6.13）也都成立，因此只需取 κ 充分小，就能保证 $\sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \sqrt{\widetilde{\mathscr{E}}^\varepsilon_{-,\,2}} < \varsigma$。因此，命题 5.1 的所有假设在 $T = $ ˆT_ε之前均成立。接下来，有 $\mathscr{E}^\varepsilon_{-,\,\alpha,\,in} = \widetilde{\mathscr{E}}^\varepsilon_{-,\,\alpha,\,in} \lesssim_M \delta^2$（且此表达式与 ε无关）。因此，由（5.8）可得

$$\varepsilon \sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \widetilde{\mathscr{E}}^\varepsilon_{-,2}(t) + \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \widetilde{\mathscr{D}}^\varepsilon_{-,2}(t) dt \leq C_M(\varepsilon\delta^2 + \varepsilon^2). \tag{6.49}$$

另一方面，由上述结果和（5.9）可得界

$$\widetilde{\mathscr{E}}^\varepsilon_{-,1}(t) \lesssim_M e^{-\frac{1}{C_M}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} \delta^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} t^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2. \tag{6.50}$$

接下来，类似于第（i）部分中的（6.20），有

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \|F_+^\varepsilon(t) - F_+^0(t)\|^2_{\mathfrak{E}'} + \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \|F_+^\varepsilon(t) - F_+^0(t)\|^2_{\mathfrak{D}'} dt \lesssim \varepsilon(\varepsilon + \delta^2). \tag{6.51}$$

现在，将（6.51）与（6.12）、（6.13）、（6.49）和（6.50）结合，可得

$$\varepsilon \sup_{t\in[0,\hat{T}_\varepsilon]} \mathscr{E}^\varepsilon_{-,2}(t) + \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \mathscr{D}^\varepsilon_{-,2}(t) dt \leq C_M(\varepsilon\delta^2 + \varepsilon^2) \tag{6.52}$$

ˆ 且对所有 $t \in [0, T_\varepsilon]$，我们有

$$\mathscr{E}^\varepsilon_{-,1}(t) \lesssim_M e^{-\frac{1}{C_M}(\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}} \delta^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} t^{\frac{1}{3}} + \varepsilon\delta^2. \tag{6.53}$$

ˆ ˆ ˆ 现在我们证明 $T = \inf_{\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]} T_\varepsilon$ 为正。如前所述，我们取 $T_\varepsilon < \kappa$，并证明若（6.2）至（6.6）中的任一不等式取等号，则会导出矛盾，前提是 κ 取得足够小。在（6.2）、（6.3）、（6.4）和（6.5）的情形中，证明与第（i）部分的情形基本相同，只需在 δ 足够小的基础上，再令 κ 和 ε足够小即可。

ˆ ˆ 现在我们讨论 (6.6) 在 $T = T_\varepsilon$处取等号的情形。接下来，取 $0 < t_0 < T_\varepsilon$，其取值稍后确定。通过对命题 5.1的证明作平凡修改，可得估计式 (5.8) 中的 $\alpha = 1$ 替代 $\alpha = 2$，且 $[t_0, T]$ 替代 $[0, T]$。于是得到

$$\varepsilon \sup_{t\in[t_0,T]} \widetilde{\mathscr{E}}^{\varepsilon}_{-,1}(t) + \int_{t_0}^{\hat{T}_\varepsilon} \mathscr{D}_{-,1}(t)dt \lesssim_M \mathscr{E}^{\varepsilon}_{-,1}(t_0) + \varepsilon^2 \tag{6.54}$$

$$\lesssim_M \varepsilon(e^{-\frac{1}{C_M}(\frac{t_0}{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}}\delta^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}}t_0^{\frac{1}{3}}) + \varepsilon^2 \tag{6.55}$$

取 $t_0 = \varepsilon(C_M|\ln(\varepsilon)|)^{\frac{3}{2}}$,，我们可以用 ε^2对最后一个表达式进行界估计。另一方面，在 6.50 上积分 $[0, t_0]$，得到

$$\int_0^{t_0} \sqrt{\widetilde{\mathscr{E}}^{\varepsilon}_{-,1}(t)}dt \lesssim_M \varepsilon\delta + \varepsilon^{\frac{5}{4}}t_0^{\frac{7}{6}} + \varepsilon t_0 \lesssim_M \varepsilon\delta + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \tag{6.56}$$

因此，结合这些界，我们得到

$$\int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \| \int_{\mathbf{R}^3} \xi\cdot\nabla_x(F^{\varepsilon}_{-} - \mu_{\gamma^\varepsilon}e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon})d\xi\|^2_{L^2_x}dt \tag{6.57}$$

$$\lesssim_M \int_0^{t_0} \sqrt{\widetilde{\mathscr{E}}^{\varepsilon}_{-,1}(t)}dt + \left(\int_0^{t_0} \widetilde{\mathscr{D}}^{\varepsilon}_{-,1}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim_M \varepsilon. \tag{6.58}$$

现在，将上述结果与 (5.201)、(4.143) 以及 (6.52) 结合，

$$1 = \int_0^t \| \int_{\mathbf{R}^3} (F^{\varepsilon}_{-} - \mu_{\gamma^\varepsilon}e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon})d\xi\|_{L^2_x}dt \tag{6.59}$$

$$\lesssim_M \int_0^{\hat{T}_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\| \int_{\mathbf{R}^3} \xi\cdot\nabla_x(F^{\varepsilon}_{-} - \mu_{\gamma^\varepsilon}e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon})d\xi\|_{L^2_x} + \|\partial_t(\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon)e^{\gamma^\varepsilon\psi^\varepsilon}\|_{L^2_x}dt \tag{6.60}$$

$$\lesssim_M \varepsilon\delta + \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \hat{T}_\varepsilon + \hat{T}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{6.61}$$

$$\leq \varepsilon\delta + \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \kappa^{\frac{1}{2}} \tag{6.62}$$

取 ε、δ 和 κ 充分小，我们便得到矛盾。

综上，我们有 此外，(1.39)、(1.40) 和 (1.41) 分别由 (6.51)、(6.52) 和 (6.53) 得出。 □

References

[1] R. Alexandre 和 C. Villani。等离子体物理中的 Landau近似。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré C Analyse non linéaire* 21 1 61 95, 2004 , , ( ): –

Jan. . [2] R. Balescu。 *Transport processes in plasmas*。1988。[3] C. Bardos、F. Golse、T. T. Nguyen 和 R. Sentis。离子动力学建模的麦克斯韦–玻尔兹曼近似。 *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 376-377:94–107, Aug. 2018。[4] Y. A. Berezin 和 V. Karpman。等离子体及其他色散介质中扰动的非线性演化。*Soviet Physics JETP*, 24:1049–1056, 1967。[5] F. Bouchut。小电子质量下 Vlasov–Poisson 系统的全局弱解。 *Communications in partial differential equations* 16 8 9 1337 1365, 1991 , (-): – .

[6] F. Bouchut 和 J. Dolbeault。关于具有库仑势和牛顿势的 Vlasov–Fokker–Planck方程及 Vlasov-Poisson-Fokker-Planck系统的长时间渐近行为。*Equations* 8 3 487 514, 1995 *Differential and Integral* , ( ): – . [7] L. Cesbron 和 M. Iacobelli。有界区域中 Vlasov-Poisson 型系统的全局适定性。*arXiv preprint arXiv:2108.11209*, 2021。[8] P. Degond 和 M. Lemou。线性化Fokker-Planck方程的色散关系。*Rational Mechanics and Analysis* 138 2 137 167, 1997 *Archive for* , ( ): – July . [9] P. Degond 和 B. Lucquin-Desreux。悬殊质量的两种粒子之碰撞算子的渐近行为。*Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 6(03):405–436, 1996。[10] P. Degond 和 B. Lucquin-Desreux。等离子体和悬殊质量二元气体的输运系数。*Transport Theory and Statistical Physics*, 25(6):595–633, 1996。[11] R. Duan、D. Yang 和 H. Yu。Landau方程光滑解的可压缩流体极限。*preprint arXiv:2207.01184* 2022 *arXiv* , . [12] P. Flynn。含无质量电子的 Vlasov-Poisson-Landau 系统的局部适定性。*tion* 2023 *In preparation* , . [13] A. Gagnebin 和 M. Iacobelli。环面上含无质量电子的 Vlasov-Poisson系统的 Landau阻尼。 *arXiv preprint arXiv:2209.04676*, 2022。[14] E. Grenier、Y. Guo、B. Pausader 和 M. Suzuki。离子方程的推导。*mathematics* 78 2 2020 *Quarterly of applied* , ( ), . [15] M. Griffin-Pickering 和 M. Iacobelli。含无质量电子的 Vlasov-Poisson系统在三维中的全局适定性。 *arXiv*, 2018, 2018。[16] M. Griffin-Pickering 和 M. Iacobelli。Vlasov型方程适定性理论的最新进展。 *From Particle Systems to Partial Differential Equations*, pages 301–319, 2019。[17] M. Griffin-Pickering 和 M. Iacobelli。含热化电子等离子体的奇异极限。*Mathématiques Pures et Appliquées* 135 199 255, 2020 *Journal de* , : – . [18] M. Griffin-Pickering 和 M. Iacobelli。离子Vlasov-Poisson系统在 R^3 中的全局强解。*Kinetic & Related Models*, 14(4):571, 2021。[19] Y. Guo。周期盒中的 Landau方程。 *Communications in Mathematical Physics*, 231(3):391–434, Dec. 2002。[20] Y. Guo。周期盒中的 Vlasov-Poisson-Landau 系统。*Society* 25 3 759 812, 2012 *Journal of the American Mathematical* , ( ): – . [21] Y. Guo 和 J. Jang。Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的全局Hilbert展开。*in Mathematical Physics* 299 2 469 501, 2010 *Communications* , ( ): – . [22] Y. Guo、J. Jang 和 N. Jiang。Boltzmann方程的局部Hilbert展开。*Models* 2 1 *Kinetic & Related* , ( ):205, 2009。[23] Y. Guo 和 Q. Xiao。相对论Vlasov–Maxwell–Boltzmann系统的全局Hilbert展开。*Communications in Mathematical Physics*, 384(1):341–401, 2021。[24] D. Han-Kwan。含无质量电子的 Vlasov-Poisson系统的准中性极限。*in Partial Differential Equations* 36 8 1385 1425, 2011 *Communications* , ( ): – . [25] D. Han-Kwan。从 Vlasov–Poisson方程到 Korteweg–de Vries方程和 Zakharov–Kuznetsov方程。*Mathematical Physics* 324 3 961 993, 2013 *Communications in* , ( ): – . [26] D. Han-Kwan 和 M. Iacobelli。Wasserstein度量下 Vlasov–Poisson方程的准中性极限。*Communications in Mathematical Sciences*, 15(2):481–509, 2017。[27] M. Herda。具有外磁场的多组分动力学系统的无质量电子极限。*of Differential Equations* 260 11 7861 7891, 2016 *Journal* , ( ): – . [28] F. L. Hinton。等离子体中的碰撞输运。 *Handbook of Plasma Physics*, 1(147):331, 1983。[29] G. M´etivier。*Para-differential calculus and applications to the Cauchy problem for nonlinear systems*。2008。[30] Z. Ouyang、L. Wu 和 Q. Xiao。库仑碰撞动力学模型的Hilbert展开。*arXiv:2207.00126* 2022 *arXiv preprint* , . [31] K. Shimizu 和 Y. H. Ichikawa。等离子体中离子振荡模态的自调制。*Society of Japan* 33 3 789 792, 1972 *Journal of the Physical* , ( ): – . [32] H. Washimi 和 T. Taniuti。小振幅离子声孤波的传播。*Letters* 17 19 996, 1966 *Physical Review* , ( ): . [33] V. E. Zakharov 等。朗缪尔波的塌缩。 *Sov. Phys. JETP*, 35(5):908–914, 1972。

[34] M. Zhang。R^3 中 Vlasov–Poisson–Boltzmann 系统的稳定性。 *Journal of Differential Equations*，2477 2027 2073，2009（）：–。