arXiv:2301.00926v1 [math.CO] 3 Jan 2023

West 的栈排序映射在分割图上的提升

JOHN M. CAMPBELL多伦多都会大学数学系，350 Victoria St, Toronto, ON M5B 2K3
jmaxwellcampbell@gmail.com

摘要。我们将 West 的栈排序映射 s 提升到分割图上；分割图是用于标记分割代数基的组合对象。我们的提升 $\mathscr{S}$ 使得 s 在分割代数 $\mathscr{P}_n^{\xi}$的子代数——阶为 n的对称群代数——中的图基元素上进行限制时，其行为与 s相同。随后，我们利用 s 的提升，引入 1-栈可排序性概念的提升。Knuth 有一项著名结果：排列是 1-栈可排序的，当且仅当它规避模式 231。与此直接类比，我们证明了分割图（而非排列）具有相关的模式规避性质，并将其称为伸展栈可排序性。

关键词：栈排序；分割图；排列；排列模式；分割幺半群 数学主题分类：05A05，05E16

1. 引言

对于对称群 S_n 中的排列 p，我们记

$$p = LnR, \tag{1}$$

其中 p 表示由 p 的双行记法下行中的各项组成的字符串或元组。接着，我们递归地定义 West 的栈排序映射 s [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15] （参见 [27]），使其满足

$$s(p) = s(L)s(R)n \tag{2}$$

并且 s 将排列映射为排列，且将空排列映射为其自身。关于此映射的记号和术语主要依据 [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15] 等文献。本文将 s 提升，使其能够以称为分划图的组合对象作为输入。

在许多不同的背景下，人们都探讨过如何推广 West 的栈排序映射这一问题。值得注意的是，栈排序映射 s 已被推广到 Coxeter群[11] 以及字 [14], ，而 Cerbai、Claesson 和 Ferrari 则推广了

$$s\colon S_n \to S_n \tag{3}$$

到函数 $s_\sigma\colon S_n \to S_n$，针对排列模式 σ [5]，使得 $s = s_{21}$；Defant 和 Zheng 在 [15] 中给出了 s 的一个相关推广。由于 s 定义在排列上，自然可以考虑利用“类似排列”的组合对象来推广这一映射。分割代数 $\mathscr{P}_n^{\xi}$ 的基以多种方式推广了阶为 n 的对称群代数的基，这些推广在组合与代数两个视角下都颇具意义，因此我们开始思考如何利用分割图——它们为 $\mathscr{P}_n^{\xi}$ 的基提供索引——来推广 West 的栈排序映射。本文将 $s\colon S_n \to S_n$ 推广为一个映射 $\mathscr{S}\colon \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$，其定义为从分割幺半群 $\mathscr{P}_n$ 到其自身

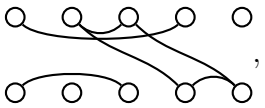
使得 $\mathscr{S}$ 限制在置换图上时，其表现方式与 s 相同。随后，我们运用提升 $\mathscr{S}$，确定 Knuth 关于 1-栈可排序排列 [20, 的著名结果的一个类比，见 §2.2.1]。

$\mathscr{P}_n^\xi$ 的表示论与 $n!$-维对称群代数的表示论密切相关。事实上，关于 $\mathscr{P}_n^\xi$的表示论以及 $\mathscr{P}_n^\xi$ 相关组合性质的许多内容，都是直接从代数 span(S_n) 的表示论及其相关组合学中推导出来的，或以此为基础。Schur–Weyl 对偶性体现为 $\mathscr{P}_n^\xi$ 的基如何推广 span(S_n) 的基；这不仅对组合表示论至关重要，也对统计力学领域意义重大，而分割代数最初正是 Martin [21, 22, 23, 24] 和 Jones [19] 在该领域中定义的。以上考量表明，分划图以一种对数学和物理学都极具意义的方式推广了排列。因此，我们旨在提升 West 的栈排序映射，使其输入除了排列之外，还能包括分划图。

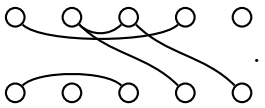
1.1. 预备知识。为与文献中的记号保持一致，例如 [6, 7, 8, 9, 10, 11,12, 14, 15] 中用于表示对称群和排列中极大元素的指标记法（如式（2）和式（3）），我们将给定分割代数／幺半群的阶记为与式（3）中对称群的阶相同的形式。特别地，按照 [16], ，我们将给定阶的分割幺半群记为 $\mathscr{P}_n$，并将对应的复参数为 ξ 的分割代数记为 $\mathscr{P}_n^\xi$。这些结构定义如下。

我们令 $\mathscr{P}_n$ 由 $\{1, 2, \ldots, n, 1', 2', \ldots, n'\}$ 的集合划分 μ 组成。仿照排列的双行记法，我们将标记为 1、2、. . .、 n的节点排列成上排，将标记为 $1'$、 $2'$、. . .、 n' 的节点排列成下行，并构造任意图 G，使得 G 的连通分支集合等于 μ。按上述方式表示的这类图称为分割图；若两个这样的分割图的连通分支相同，则认为它们相同。按前述方式给出的图 G 的各连通分支称为块。

例 1。 集合划分 $\{\{1,4\},\{2,3,4',5'\},\{5\},\{1',3'\},\{2'\}\}$ 可记作



或者等价地记作

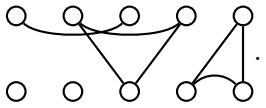


沿用 [18], 的做法，我们令分割代数和对称群代数的底域为 $\mathbb{C}$，因为 $\mathbb{C}$是代数闭的这一点，与分割代数 [18]的半单结构研究直接相关。我们可以将阶为 n的对称群代数记为对称群 S_n的线性张成 span(S_n)，或者更明确地记为 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\sigma : \sigma \in S_n\}$。

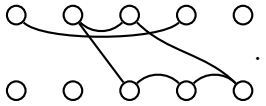
对于两个分割图 d_1 和 d_2，我们将 d_1 放在 d_2 上方，使 d_1 的底点与 d_2的顶部节点重合，然后从串接$d_1 * d_2$ 中移除中间行，同时保留以下关系： $d_1 * d_2$中最顶部的节点与最底部的节点属于同一个连通分支。接着，我们将由此得到的图记为 $d_1 \circ d_2$

。这就是分割幺半群的基本乘法运算。

例2. 借用 [16], 中的一个例子，令 d_1 如例1所示，并令 d_2如下：



我们可以验证，在此情形下，幺半群乘积 $d_1 \circ d_2$如下 [16]:



对于复参数 ξ，我们在 $\mathscr{P}_n$ 的 $\mathbb{C}$-张成空间上赋予如下乘法二元运算：$d_1 d_2 = \xi^{\ell} d_1 \circ d_2$，其中 ℓ 表示完全包含在 $d_1 * d_2$中间行的分支数。将此二元运算线性扩张后，便得到称为分割代数的结构所具有的底层乘法运算，记作 $\mathscr{P}_n^{\xi}$。集合 $\mathscr{P}_n$中的所有元素，视为 $\mathscr{P}_n^{\xi}$中的元素，称为 $\mathscr{P}_n^{\xi}$的图基。

尽管本文不会直接用到 $\mathscr{P}_n^{\xi}$ 的代数结构，但明确地定义 $\mathscr{P}_n^{\xi}$ 仍有助益，因为我们将大量使用一种定义在分割代数上、并在 [4], 中引入的代数同态；而且，使用与 $\mathscr{P}_n^{\xi}$ 或其代数结构相关的记号和术语通常很方便，例如，提及 $\mathscr{P}_n^{\xi}$的图基。

对于分割图 π， π 的传播数是指 π 中至少包含一个顶行顶点和一个下行顶点的块数。因此， S_n 中所有排列的集合与 $\mathscr{P}_n$ 中传播数为 n 的所有图的集合之间存在明显的双射。在将 West 的栈排序映射提升到分割幺半群时，为了与排列的双行记法及 (1) 保持一致，我们将一个排列

$$p\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} \tag{4}$$

be 对应于由集合划分给出的分割图 π

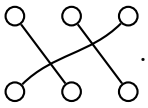
$$\{\{1, p(1)'\}, \{2, p(2)'\}, \ldots, \{n, p(n)'\}\}, \tag{5}$$

不过，通常也会将排列 p 映射为通过将 π 垂直翻转而得到的分割图。

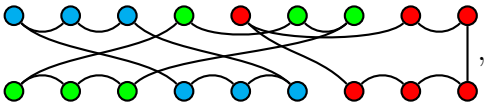
2. West 的栈排序映射的提升

正如 Defant 和 Kravtiz 在 [14], 中所解释的那样，在提升映射 s 以允许重复字符的字作为输入，而非如式 (1) 所示将排列写成字作为输入时，问题存在歧义；这是对 s 的扩展。对于提升 s 以允许分割图作为输入，而非将排列写成置换图作为输入时，我们也遇到了类似的问题；这同样是为了提升 s。如下所示。

例3。根据式 (5) 所示的嵌入，我们将排列 $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$ 写作

(6) .

如果我们设想将块 $\{2,3'\}$ 移除并放置在所得构形的右侧，类比于排列 (1) 在应用 West 的栈排序映射后被映射到 (2) 的右侧，那么显然可以直接类比 (1)，通过这一移除操作将 (6) 中的置换图“分割”为左构形和右构形。我们在第2.1节提出这一过程，部分目的正是要将这个想法形式化，使其能够推广到所有分划图。相反，如果我们移除例如最右侧的块

(7) ,

上面的着色用于区分所描绘分划图中的各个块；那么，绿色标出的块并不严格位于最右侧块的左边，因为上排中有绿色节点位于一个红色节点的左右两侧。

为了提升 (2) 中给出的 s 递归定义，使其允许以 $\mathscr{P}_n$ 的元素作为输入，从而扩展或提升 s，并解决例3中所述的歧义问题，我们希望仿照 (2)，允许存在“中间”构形，而不是局限于 (1) 和 (2) 所示的左右二分。我们将在第2.1节将这一想法形式化。

2.1. 分拆图的栈排序过程。对于任意的分割图 $\pi \in \mathscr{P}_n$，按照以下过程定义 $\mathscr{S}_n$: $\mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$。我们以自然顺序排列给定分割图 $\mathscr{P}_n$ 中的底节点，其中 $1' < 2' < \cdots < n'$。为方便起见，我们可以写作 $\mathscr{S} = \mathscr{S}_n$。

(1) 如果 π中没有传播块，则跳过下文涉及传播块的步骤。(2) 取 π 中属于传播块 B 的最大底节点。该传播块将 π 分成三类（可能为空）的构形，具体取决于移除 B后 π 的顶节点如何分隔。明确地说，我们直接类比 (1)，定义 $\mathscr{L}$、 $\mathscr{M}_1$、 $\mathscr{M}_2$、.....、 $\mathscr{M}_\mu$和 $\mathscr{R}$。我们可以将 $\mathscr{L}$、 $\mathscr{M}_i$和 $\mathscr{R}$ 记为 $\mathscr{P}_n$中的图。 $\mathscr{L}$ （分别为 $\mathscr{R}$）的块由以下任一项构成:

- π 中所有上节点都严格位于 B所有上节点左侧（分别为右侧）的块;

π 中位于 π 底行、且其所有节点都严格位于 B所有下节点左侧（分别为右侧）的非传播块;

或

- 单元素块。形式为 $\mathscr{M}_i$ 的表达式块由以下几种构成:
  - π 中不满足上述前两条的任何块；或
- 单元素块。

我们按照极小元素的顺序对 $\mathscr{M}_1 < \mathscr{M}_2 < \cdots < \mathscr{M}_\mu$ 排序，并遵循以下顺序：$1' < 2' < \cdots < n' < 1 < 2 < \cdots < n$。然后，我们令 B' 表示通过向 B 添加任意单例节点而得到的分割图，使其构成 $\mathscr{P}_n$ 中的分割图。在此设定下，我们写作

$$\mathscr{S}(\pi) = \mathscr{S}(\mathscr{L}) \odot \mathscr{S}(\mathscr{M}_1) \odot \cdots \odot \mathscr{S}(\mathscr{M}_\mu) \odot \mathscr{S}(\mathscr{R}) \odot B', \tag{8}$$

其中，结合二元关系 $\odot$ 将在后文定义。

(3) 在所有可能的地方重复应用上述步骤，即对由 $\mathscr{S}$ 在分割图上取值所得到的式（8）中的表达式或由其导出的表达式进行操作。

(4) 上述步骤得到由以下形式的表达式构成的 $\odot$-乘积

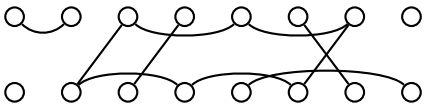
$$\mathscr{S}(N_1), \cdots, \mathscr{S}(N_{m_1}) \quad \text{and} \quad B'_1, \cdots, B'_{m_2}, \tag{9}$$

对于非传播图 N_i，这些表达式的排列顺序不一定如此；其中，每个形如 B'_j 的表达式都是一个恰有一个传播块、其余位置均为单元素块的分割图。式（9）中所示的上述 $\odot$-乘积的因子按以下方式排序： B'_j 是该 $\odot$-乘积中形如 B'_κ的 j^{th} 因子，而 $\mathscr{S}(N_i)$是该 $\odot$-乘积中形如 $\mathscr{S}(N_\kappa)$的 i^{th} 因子。运算 $\odot$表示需要进行如下操作：将 B'_1 中传播块的上节点从左到右标记为从 1 开始的连续整数；随后，将 B'_2 中传播块的上节点标记为连续整数，起始值为 1 加上 B'_1中传播块上节点的数量；并以此类推。接着继续进行标记：按照节点在连续N_i-图中出现的顺序，对 N_i表达式顶行中所有大小大于 1 的非传播块进行标记。如果顶行还有未使用的标签，就用这些剩余标签标记上排中的单元素块。不过，对于 π中任何非单元素块的底节点，我们保留其原有标签（如有必要，可按照前述步骤在下行添加单元素块，以构成分割图）。

（5）如上所述，上述步骤在 $\mathscr{P}_n$ 中生成一个元素。我们将 $\mathscr{S}(\pi)$ 设为该元素。

例4. 令 π 表示该分割图

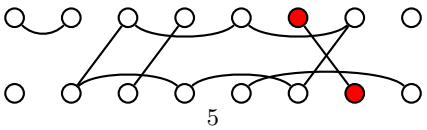
(10)



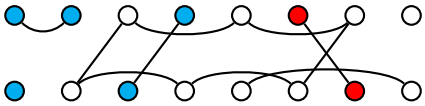
在 $\mathscr{P}_8$ 中对应于以下集合划分：

$$\{\{1,2\},\{3,5,7,-2,-4,-6\},\{4,-3\},\{6,-7\},\{8\},\{-1\},\{-5,-8\}\}.$$

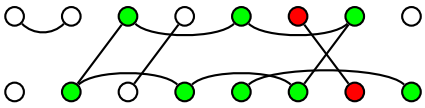
π 中属于传播块的最大底节点，在本例中是 $7'$，而B 是 $\{6,7'\}$。为了清晰起见，我们以下列方式突出显示这个块。



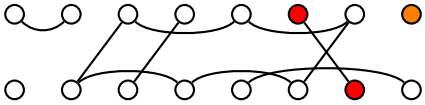
$\mathscr{L}$ 的块如下以青色突出显示（为清晰起见，传播块 B 再次以另一种颜色突出显示）。



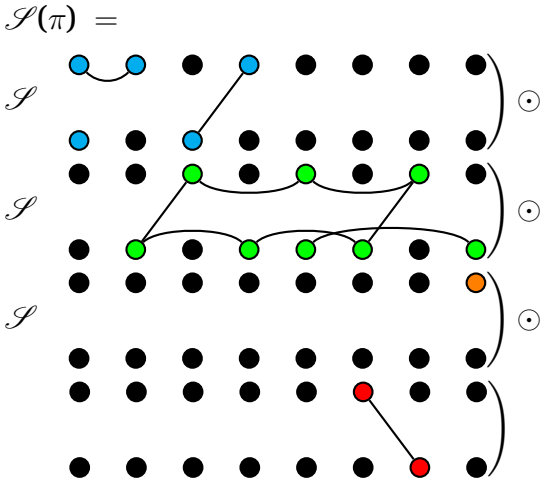
$\mathscr{M}$ 的块如下方所示，以绿色高亮标出。



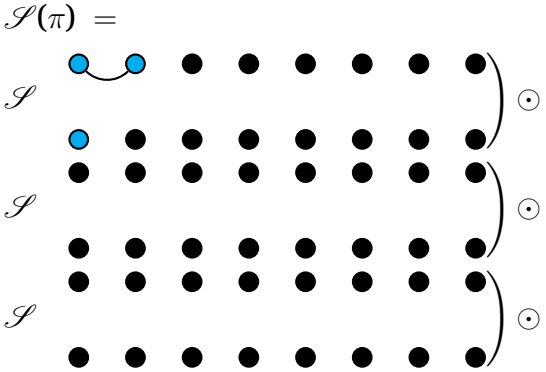
我们看到 $\mathscr{R}$ 仅由一个块构成，该块如下方所示，以橙色高亮标出 .

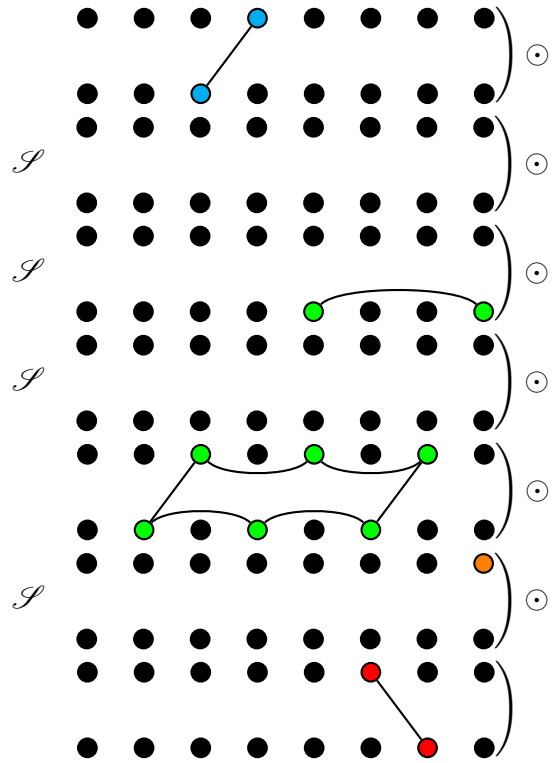


因此，根据我们对 West 的栈排序映射的提升，可得如下结果，其中黑色着色的单例节点表示这些单例节点是按照上述过程“添加进去的”。

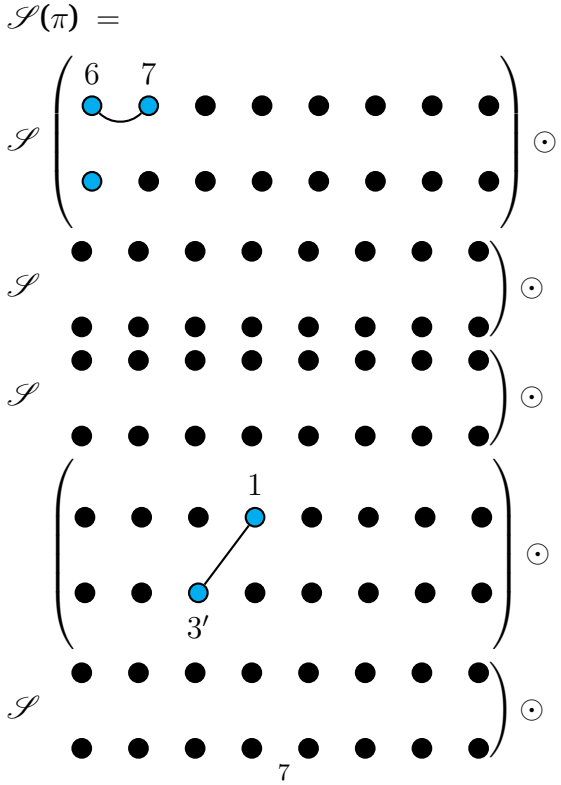


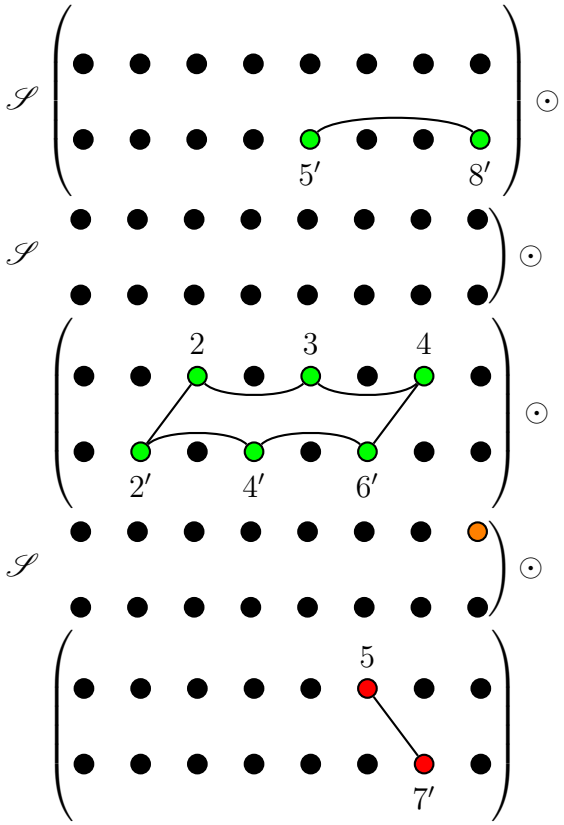
现在，让我们对上述等式右侧的第一个 $\mathscr{S}$ 因子重复给定的过程，然后对所得的 $\mathscr{S}$ 因子重复此过程，该因子包含一个带有大小为 6 的块的自变量。由此得到以下等式。



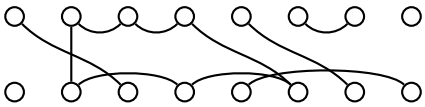


因此，我们已经确定了一个由 $\odot$ 个表达式组成的乘积，这些表达式具有 (9) 中所示的形式。现在，按照我们的过程，应用如下所示的标记。





因此，这说明了如何将（10）中的分割图映射为



按照我们的排序映射。

2.2. 排序置换图。由于我们声称我们的排序映射 $\mathscr{S}\colon \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$提升了（3），因此有必要像下文的定理1及其证明那样，将这一说法形式化并加以证明。接下来，我们简要回顾一些与定理1有关的预备知识。

我们将排列映射为置换图的约定，如（5）所示，全文始终一致使用。同样，这一约定与（1）中所示的 West 的栈排序映射的记号一致，因为它仿照了排列的双行记法。如下所示，我们将扩展这一嵌入，使其适用于置换分解（1）中 L and R 这样的表达式。

车代数是 $\mathscr{P}_n^{\xi}$ 的子代数，由部分置换张成。部分置换是由大小为 1 的块和大小为 2 的块构成的图，其中每个大小为 2 的块包含顶行中的一个顶点和下行中的一个顶点 [17]。按照 [28], ，表达式 Rd_k 表示所有车 k-分割图的集合。类似地，对于每个满足 $0 \le r \le k$ 的 $r \in \mathbb{Z}$ ，表达式 $\mathrm{Rd}_k[r]$ 表示每行恰有 r 个单点顶点的车 k-分割图。给定一个具有 (1) 中所示形式的置换分解，我们可以将 L （分别将 R）对应为一个部分置换，使得该部分置换中任意 2-块内的撇号元素，都是 L （分别为 R）中任意数字的加撇版本，并且这种对应方式

从而与 (1) 中所示的双行记法一致。具体而言，若 L 为空，我们将其映射到 $\mathscr{P}_n$ 中由单元素块构成的分割图；若记作 $L = l_1 l_2 \cdots l_{\ell(L)}$，则可将 L 对应为具有以下形式的 2-块的分割图

$$\{p^{-1}(l_1), l'_1\}, \{p^{-1}(l_2), l'_2\}, \ldots, \{p^{-1}(l_{\ell(L)}), l'_{\ell(L)}\}$$

其余位置均为单元素块，对 R也同样如此。这与我们在（5）中为将 S_n 嵌入 $\mathscr{P}_n$所采用的约定一致。

再次参照（1）中的置换分解，我们可以将表达式 n 视为一个部分置换，并以与上文类似的方式处理，同时要注意该表达式是（1）中串接的一部分。具体而言，我们将 n 视为由以下集合划分给出的分割图：

$$\{\{p^{-1}(n), n'\}\} \cup \tag{11}$$

$$\{\{x\} : x \in \mathbb{N}, 1 \le x \le n, x \ne p^{-1}(n)\} \cup \tag{12}$$

$$\{\{x\} : x \in \mathbb{N}, 1 \le x \le n, x \ne n\}. \tag{13}$$

如例4所示，对于置换图 π_1 和 π_2，若 π_2 完全由单例节点组成，则 $\mathscr{S}$（π_1）$\odot \mathscr{S}$（π_2）$= \mathscr{S}$（π_2）$\odot \mathscr{S}$（π_1）$= \mathscr{S}$（π_1）。这一代数性质将在定理1的证明中用到。

定理1. 设 p 是 S_n中的一个排列，并令 π 表示根据（5）对应的分割图。那么，$\mathscr{S}$（π）等于与 s（p）对应的分割图。

证明。如上所述，我们令 $p \in S_n$，记 p: $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$。如上所述，令$\pi$ 表示对应于 (5) 的分割图，也就是说，π 的块集为 (5)。按照 (8) 中的记号，表达式 $\mathscr{S}(\mathscr{L})$（分别为 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$）等于将$\mathscr{S}$ 作用于由 π 得到的图：取所有由底节点组成的块，这些底节点标记为某个数的加撇版本，且该数按照 (1) 中所示的含义位于 n 左侧（分别为右侧），即对于排列 $p \in S_n$，根据 (1) 中的记号，该数属于 L （分别为 R）。由于 π 是置换图，任何 $\mathscr{M}$-表达式都完全由单例节点组成。因此，(8) 中的乘积可化简为

$$\mathscr{S}(\pi) = \mathscr{S}(\mathscr{L}) \odot \mathscr{S}(\mathscr{R}) \odot B'. \tag{14}$$

如上所示，$\mathscr{L}$（分别为 $\mathscr{R}$）恰好是通过将 L（分别为 R）嵌入 $\mathscr{P}_n$ 所得到的分割图。同样，B' 恰好是按照 (11)–(13) 所示的方式，将 (1) 中的因子 n 嵌入后得到的分割图。因此，约定可将 (1) 中的因子及 (1) 左侧视为与各自的嵌入相同，我们便得到 (14) 中的 $\odot$-乘积可写为

$$\mathscr{S}(p) = \mathscr{S}(L) \odot \mathscr{S}(R) \odot n.$$

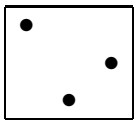
通过比较上述分解的两边与（2）中分解的两边，归纳论证便可得到所需结果。□

由于我们提升了 West 的栈排序映射，使其输入除了置换图之外还可以是分划图，因此我们开始思考，关于 s-映射 (3) 的基本性质应如何根据这项提升进行“转译”。具体而言，我们希望推广 Knuth 的经典结果：一个排列是 1-栈可排序的，当且仅当它避免模式 231。

下文第 3 节将探讨与我们对 West 的栈排序映射进行提升 $\mathscr{S}$ 相关的复杂组合结构及其行为。这些探讨的灵感来自数学界对一种重要变体所展现的优美组合性质的浓厚兴趣；这些性质既涉及结构层面，也涉及计数层面。该变体是指排列的弹出栈排序，即 s-映射的一种重要变体，相关研究可参见 Asinowski 等人 [1]的工作。

3. 模式避免

我们再次按照（4）中所示的方式将 $p \in S_n$ 写成一个映射。在研究排列的模式避免时，通常希望在笛卡尔平面中用一个 $n \times n$ 网格来表示 p。例如，若先按照（1）中所示的方式表示一个排列 $p \in S_3$，那么可以写成 $p = 312$，并用下方的 $n \times n$ 网格表示。



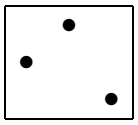
更一般地，我们可以用一个 $n \times n$ 数组表示排列 $p = p(1)p(2)\cdots p(n)$，使得当且仅当 (i, j) 的形式为 $(k, n - p^{-1}(k) + 1)$（其中某个指标为 k）时，(i, j) 位置的项非空；并且像上面那样，以某种方式突出显示 $(k, n - p^{-1}(k) + 1)$ 位置的项。我们称排列 $p = p(1)p(2)\cdots p(n)$ 包含模式 231，如果存在指标 k_1、k_2 和 k_3，使得 $k_1 < k_2 < k_3$，并且这些项

$$(k_1, n - p^{-1}(k_1) + 1), \tag{15}$$

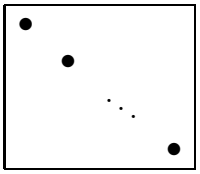
$$(k_2, n - p^{-1}(k_2) + 1), \tag{16}$$

$$(k_3, n - p^{-1}(k_3) + 1), \tag{17}$$

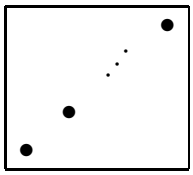
在我们用来表示 n 的 $n \times n$ 数组中满足以下条件：点 (15) 严格位于 (16) 下方，并严格位于点 (17) 上方。换言之，与 p 对应的 $n \times n$ 数组包含一个模式，该模式按照我们所规定的意义，等价于以下构形。



如果一个排列不包含模式 231，就称它避免模式 231。同理，我们可以将避免模式 12 的排列描述或定义为递减排列，即具有以下形式的排列。



相应地，递增排列具有下图所示的形式，也就是恒等排列。



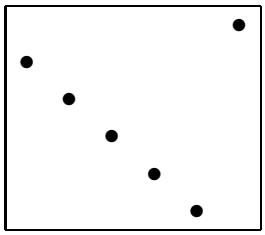
若排列 p 满足以下条件，则称其为 t-栈可排序：

$$\underbrace{s \circ s \circ \cdots \circ s}_{t}(p)$$

是递增的； 参见 [7, 14]，其中介绍了启发本文诸多内容的相关研究。

避免231模式的排列这一概念对于本文的目的而言颇具意义，因此有必要举例说明这种形式的排列。在这方面，我们注意到，与下列对象相对应的排列

(18)



避免了模式 231。因此，根据 Knuth 对 1-栈可排序排列的刻画，我们可以预期图（18）所示的排列是 1-栈可排序的。为了本文的目的，有必要对此加以说明。

例5。按照（1）中的记号，图（18）所示的排列 $p \in S_6$ 可以写作 543216。根据（2）中所示的 West 的栈排序映射递归关系，我们得到如下结果：

$$\begin{aligned} s(p) &= s(543216) \\ &= s(54321)6 \\ &= s(4321)56 \\ &= s(321)456 \\ &= s(21)3456 \\ &= s(1)23456 \\ &= 123456. \end{aligned}$$

因此，由于 $s(p)$ 是 S_6中的恒等排列，所以我们有 p 是 1-栈可排序的 e.

本节的主要目标是推广 Knuth 提出的以下开创性结果。正如 [7], 所指出的，这一结果是研究栈排序和排列模式避免的起点。

定理 2。 （Knuth，1973）一个排列是 1-栈可排序的，当且仅当它避免 231（参见 [7]）。

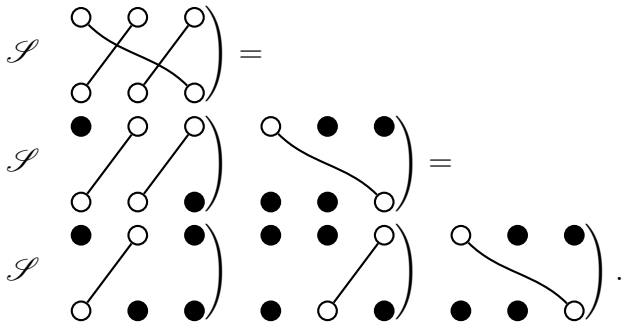
那么，鉴于我们对映射 s 的提升 $\mathscr{S}$，根据映射 $\mathscr{S}$，推广定理 2 的恰当方式是什么？尤其是，如何将这一概念

“1-栈可排序性”有意义地转化为适用于 $\mathscr{S}$ 的概念？为了回答这些问题，我们将使用一种分割代数上的态射，此前我们曾在表示论背景 [4] 中应用过它。

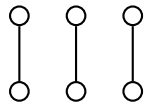
3.1. 伸展态射。为了说明如何根据我们对 West 的栈排序映射的提升 $\mathscr{S}$ 来确定定理 2 的合适类比，我们考虑在一个具有 1-栈可排序性的置换图上对 $\mathscr{S}$ 求值。

例 6。我们看到，置换 312 避免了模式 231。因此，考虑在如下所示的、对应于 312 的置换图上对 $\mathscr{S}$ 求值：

(19)

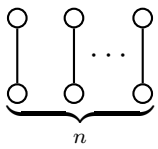


按照第 2 节中介绍的过程，我们得到 $\mathscr{P}_3$ 中如下所示的恒等置换图。



根据定理 1 以及例 6，给定一个分割图 $\pi \in \mathscr{P}_n$，为了以适用且有意义的方式推广 1-栈可排序性的概念，适宜采用这样的条件： $\mathscr{S}(\pi)$ 属于乘法单位元的一类固定推广

(20)



在 $\mathscr{P}_n$ 中。这促使我们如下应用一种在表示论背景下引入的分割代数上的态射，见 [4]。

由于我们对 West 的栈排序映射的提升适用于一般的分割图，而不是仅适用于车图之类的图，因此，在提升 1-栈可排序性这一概念时，允许非车图是恰当的。然而，我们对 s 的提升具有这样的性质：它保留分割图中各块的大小（但不一定保留块的排列或顺序）。因此，将一个分割图通过 $\mathscr{S}$ 映射到（20）的一个推广形式是恰当的，该推广形式允许存在 2-块以外的其他块。在这方面，我们将采用分割代数中所谓的伸展态射，该态射在 [4] 中被引入。

设 S 为自然数的有限集。设 π 为 $S \cup S'$的集合划分。设 k 为一个自然数，使得 $k \geq \max(S)$。依照 [4], , 我们用 $\delta_k(\pi)$ 表示 $\mathscr{P}_n^{\xi}$ 中的图基元素，它对应于通过向 π添加形如 $\{i, i'\}$ 的块所得到的集合划分，其中 i 为一个自然数，使得 $i \notin S$ 且 $i \leq k$。再次依照 [4], , 我们

设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\ell(\alpha)})$ 为自然数有限集的集合合成（关于 Stretch态射相关组合术语的详情，参见 [4] ），并记作 $m = \ell(\alpha)$，且设 $k \geq \max(\bigcup \alpha)$。与 [4], 中一样，我们定义

$$\mathrm{Stretch}_{\alpha,k} \colon \mathscr{P}_m^{\xi} \to \mathscr{P}_k^{\xi} \tag{21}$$

如下所示。

设 d_π 是 $\mathscr{P}_m^{\xi}$ 的图基中的一个元素。记 $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\ell(\pi)}\}$。那么

$$\mathrm{Stretch}_{\alpha,k}(d_\pi) = \delta_k\left(\left\{ \bigcup_{\substack{i \in \pi_j \\ i \text{ is unprimed}}} \alpha_i \cup \bigcup_{i' \in \pi_j} \alpha_i' : 1 \leq j \leq \ell(\pi) \right\}\right). \tag{22}$$

我们可以按照 [4] 中的方式将此定义线性扩展，从而得到一个代数同态，但这对我们的目的并不重要。

关于如何推广 1-栈可排序性，一个有趣之处在于：可以推广 (3)，使其允许将分割图作为 s-映射的提升/扩张的参数，具体说明如下。通过对 (20) 的推广方式施加不同条件，以便推广 1-栈可排序性——例如，在特定应用的背景下——我们便会得到不同的组合对象族，用于研究分划图的分类；这些对象族在应用 $\mathscr{S}$ 后会归约为 (20) 的某种指定推广形式。

定义 1. 若分割图 π 满足 $\mathscr{S}(\pi)$ 等于在恒等置换图处取值的 Stretch映射，则称其为 Stretch-栈可排序的。

首先，我们演示将 (22) 应用于分割代数中的乘法单位元所产生的效果。

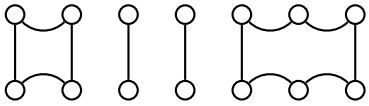
例 7. 关于 (22) 中的记号，令 d_π 为与下式对应的分割图

$$\pi = \{\{1, 1'\}, \{2, 2'\}, \{3, 3'\}, \{4, 4'\}\} \tag{23}$$

定义 α 为集合合成 ({1, 2}, {3}, {5, 6, 7}, {4})。注意， α 的长度等于 d_π 的阶，这与 (22) 中的定义一致。让我们考虑 (22) 中所示的 δ_k 的自变量族中的 $j = 3$ 情形，并令 π 中的元素按我们在 (23) 中列出的顺序排列。因此，与该 $j = 3$ 情形对应的元素为

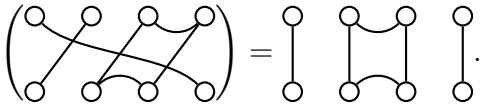
$$\bigcup_{\substack{i \in \pi_3 \\ i \text{ is unprimed}}} \alpha_i \cup \bigcup_{i' \in \pi_3} \alpha_i' = \alpha_3 \cup \alpha_3' = \{5, 6, 7, 5', 6', 7'\}.$$

对 j-指标的其他可能取值进行类似处理，我们得到在 d_π 处取值的 $\mathrm{Stretch}_{\alpha,7}$ 等于下式。



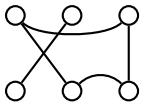
现在，让我们来看一个满足定义 1 条件的分割图示例。

例子 8. 根据第 2 节中的过程，我们可以验证以下计算结果

(24) $\mathscr{S}$  .

因此，在这种情况下， $\mathscr{S}$ 的论证是伸展堆栈可排序的。

例 9。我们还发现



它是伸展堆栈可排序的。

例 8 和例 9 展示了对伸展堆栈可排序分割图进行分类所面临的问题。图代数在代数群研究和结理论领域中的重要性，进一步促使我们有兴趣将排列中的栈可排序性和模式避免概念提升并推广至图代数中的基元素。以下定理似乎是朝这一方向迈出的第一个直接步骤。定理 3 中项目符号所示的情形，对如何将避免模式 231 的概念从排列提升至分划图进行了形式化，并且这种提升可直接用于提升 West 的栈排序映射。

定理 3. 分划图 π 是伸展堆栈可排序的，当且仅当 :

(1) π 的块均为贯穿块；(2) 对于 π 的每个块，其上顶点和下顶点的数量相同；(3) 对于 π 的每个块，其所有下节点作为带撇整数连续排列；(4) 将 π 的块记作 $C_i \cup D'_i$，其中指标为 i，并令 C_i 和 D'_i 分别表示给定块的上节点集和下节点集，记

(25) $$D'_1 < D'_2 < \cdots,$$

根据标记 D'_i 的连续带撇整数，不会出现以下项目符号所示的情形。

- $D'_{i_1} < D'_{i_2} < D'_{i_3}$;
- 通过应用用于定义 $\mathscr{S}$ 的过程，在此次应用中，当 D'_{i_3} 包含最大的非单点带撇节点时，会出现以下情形之一:
  - 或者， D'_{i_2} 是某个 $\mathscr{L}$-构形的一部分，且 D'_{i_1} 是某个 $\mathscr{R}$-构形的一部分；或者
- D'_{i_2} 属于一个 $\mathscr{L}$构形， D'_{i_1} 属于一个 $\mathscr{M}$构形；或者
- D'_{i_2} 属于一个 $\mathscr{M}$构形， D'_{i_1} 属于一个 $\mathscr{R}$构形；或者
- D'_{i_2} 属于一个 $\mathscr{M}_j$构形， D'_{i_1} 属于一个 $\mathscr{M}_k$构形，其中$j < k$。

证明。($\Longrightarrow$) 设 π 是一个伸展堆栈可排序分割图。映射 $\mathscr{S}$ 满足：具有 u 个上节点和 l 个下节点的分割图 μ 中的块数，等于 $\mathscr{S}(\mu)$ 中具有 u 个上节点和 l 个下节点的块数。因此， π 不能有任何非传播块，否则 π 就会有一个非传播块，这与 π 是伸展堆栈可排序的事实矛盾。利用我们先前指出的 $\mathscr{S}$的同一性质，可知 π 的每个块都具有相同数量的上顶点和下顶点。

设 B 是 π的一个块。反证，假设它的所有下节点并非都作为带撇整数连续排列。根据定义 $\mathscr{S}$所用的过程，在 $\mathscr{S}(\pi)$ 中，必定会出现一个新块 N，使得 N 的下节点标签与 B 的下节点标签相同，且 N 的上节点是连续整数。因此， $\mathscr{S}(\pi)$ 中会有一个块 N，其上节点标记为连续整数，而 N的下节点却不构成连续带撇整数集合。然而，这对于恒等图的延展是不可能的。现在，反证，假设上述六个要点所述的情形确实发生。在对应于最后四个要点的四种可能情形中，移除包含 D'_{i_3} 的块，会使包含 D'_{i_1} 和 D'_{i_2} 的分割图彼此分离；如此一来，在式（8）所示的 $\odot$-乘积中，包含 D'_{i_1} 的块将在 $\mathscr{S}$ 的某个自变量中，严格位于 $\odot$-乘积中由 $\mathscr{S}$ 给出的因子的左侧；该因子是在一个涉及 D'_{i_2}的表达式处取值的。因此， D'_{i_1} 和 D'_{i_2} 的底节点位置顺序将会反转；但在 $\mathscr{S}(\pi)$ 的求值过程中，对应于 D'_{i_2} 的顶节点所标记的整数将严格小于对应于 D'_{i_1} 的顶节点所标记的整数。这会导致分割图 $\mathscr{S}(\pi)$ 中出现交叉，而这在恒等分割图的延展中是不可能的。

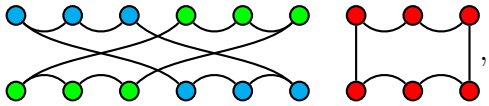
($\Longleftarrow$) 反过来，假设一个分割图 $\pi \in \mathscr{P}_n$ 满足上面列出的全部四个条件。我们将 $\mathscr{S}$ 应用于 π，从而得到(8)中所示形式的分解。采用(8)中的记号，并且仍假设所考虑的定理中的四个条件成立，我们可以推导出以下性质：(i) 除单元素块外，表达式 B' 由一个传播块组成，该传播块具有相同数量的上节点和下节点，并且其下节点标记为以 n'结尾的连续带撇整数；(ii) 如果保留下节点在 π'中的标记方式，那么在(8)的 $\odot$-分解中，下方非单元素块的标记将处于相同的阶序。这一性质可以通过按照上面给出的六个要点中的最后四个所建议的形式进行分类讨论来验证。重复这一论证并进行归纳，仿照(9)中的记号，我们发现$\mathscr{S}(\pi)$可以写成如下形式的 $\odot$-乘积

$$\mathscr{B}'_1 \odot \mathscr{B}'_2 \odot \cdots \odot \mathscr{B}'_{m_2}, \tag{26}$$

其中，每个形如 B'_i 的表达式除单元素块外，仅包含一个传播块；该传播块的顶部节点数与底节点数相同，且其底节点为连续的带撇整数；此外，按照式（26）中的顺序排列的底节点构成序列 $1' < 2' < \cdots < n'$。因此，直接按照 $\odot$-积的定义进行标记，便可得到恒等分割图的一个伸展。□

例10. 回到例3中（7）所示的分割图 $\mathscr{P}_9$，我们发现有一个传播块包含最大的底节点$9'$。按照记号（25），我们记作 $D'_1 = \{1', 2', 3'\}$、 $D'_2 = \{4', 5', 6'\}$ 和 $D'_3 = \{7', 8', 9'\}$，并将（7）中相应的块分别记为 $C_1 \cup D'_1$、$C_2 \cup D'_2$ 和 $C_3 \cup D'_3$。我们有 $D'_1 < D'_2 < D'_3$，但是，当我们对（7）中的分割图应用用于定义 $\mathscr{S}$ 的过程并移除块 $C_3 \cup D'_3$ 时，会发现 D'_2 属于一个 $\mathscr{L}$-构形，而 D'_1 属于一个 $\mathscr{M}$-构形；这正是

定理 3 所指出的禁用模式之一。因此，根据定理 3，（7）中的分割图不应是 Stretch-栈可排序的。我们可以验证，在同一个图（7）上计算 $\mathscr{S}$，结果等于

(27) 

与 (7) 中的着色一致。我们看到，(27) 中的分划图并不是任何恒等分划图的伸展。

4. Future work and applications

鉴于 Knuth 关于 S_n 中 1-栈可排序排列的数量等于 n^{th} 卡特兰数 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 的著名结果，若能得到一个在意义上类似的结果，用于计算 $\mathscr{P}_n$ 中满足定理 3 条件的元素数量，也就是 $\mathscr{P}_n$ 中 Stretch-栈可排序元素的数量，将是很有价值的。我们将此留作一个开放问题。

提升 West 的栈排序映射有如下优势。由于我们的映射 $\mathscr{S}$ 可以作用于任意分划图，因此我们能够尝试并检验不同的栈可排序性推广方式，这些方式基于恒等排列的不同分划图推广。通过采用定义 1 的变体和推广，我们可以在本文主要结果的基础上，获得更多组合结果。例如，相对于本文介绍的定理，如果我们改为考虑在应用 $\mathscr{S}$ 后映射到含有形如 $\{i, i'\}$ 的 2- 块的车图伸展的分划图，可以得到哪些双射结果和计数结果？如果允许非矩形块和非单元素块，又会如何？

许多重要的结果和应用都涉及 West 的栈排序映射的原像，例如 Defant 等人在 [13], 中的研究。关于我们对 s 的提升，我们能得到哪些与原像有关的应用和组合结果？

由于我们对伸展栈可排序性的定义是对 1-栈可排序性的提升，这便引出了一个问题：根据我们在第 2 节中提出的过程，t-栈可排序性这一概念可以如何推广？众所周知，相较于 $t = 1$ 情形，研究 t-栈可排序性要困难得多，即使是在 $t = 2$ 情形下也是如此；例如参见 [26, §1.2.3], 。考虑到 Zeilberger 关于 West 猜想的著名证明 [29]，该猜想指出 S_n 中的 2-栈可排序排列的数量为

$$\frac{2(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!},$$

这启发我们利用映射 $\mathscr{S}$，通过对 2-栈可排序性的提升，确定上述计数结果的一个类似结论。

致谢。作者想感谢 Mike Zabrocki，他曾向作者介绍并说明了 (22) 中所示形式的分划代数态射，以及这类态射如何应用于分划代数的表示论。

References

[1] A. Asinowski, C. Banderier, S. Billey, B. Hackl, S. Linusson, 《弹出栈排序及其像：具有重叠连续段的排列》, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 88 (2019), 395–402.[2] G. Benkart, T. Halverson, 《带有 $2k > n$ 的分划代数 $P_k(n)$ 及对称群 S_n 的不变理论基本定理》, J. Lond. Math. Soc. (2) 99 (2019), 194–224.[3] G. Benkart, T. Halverson, 《分划代数与对称群的不变理论》, 《代数组合学新趋势》, 第 16 卷, Springer, 沙姆, 2019.[4] J. M. Campbell, 《分划代数、车代数和车-Brauer代数的交错子模》, HAL:03850236 (2020).[5] G. Cerbai, A. Claesson, L. Ferrari, 《受限栈的栈排序》, J. Combin. Theory Ser. A 173 (2020), 105230.[6] C. Defant, 《 t排序排列中的下降》, J. Comb. 11 (2020), 511–526.[7] C. Defant, 《利用分解引理计数栈排序原像》, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 22 (2021), dmtcs:6709.[8] C. Defant, 《栈排序映射的可生育性单调性与平均复杂度》, Eur. J. Comb. 93 (2021), 103276.[9] C. Defant, 《高度排序排列与贝尔数》, Enumer. Comb. Appl. 1 (2021), Article #S2R6.[10] C. Defant, 《聚氨酯翻转》, Electron. J. Comb. 27 (2020), P2.46.[11] C. Defant, 《Coxeter群的栈排序》, Comb. Theory 2 (2022).[12] C. Defant, 《排列类的栈排序原像》, S´emin. Lothar. Comb. 82 (2020), B82b.[13] C. Defant, M. Engen, J. A. Miller, 《栈排序、集合分拆与Lassalle数列》, J. Combin. Theory Ser. A 175 (2020), 105275.[14] C. Defant, N. Kravitz, 《字的栈排序》, Australas. J. Comb. 77 (2020), 51–68.[15] C. Defant, K. Zheng, 《使用避开连续模式的栈进行栈排序》, Adv. Appl. Math. 128 (2021), 102192.[16] J. East, 《分割幺半群与代数的生成元和关系》, J. Algebra 339 (2011), 1–26.[17] T. Halverson, T. N. Jacobson, 《集合分拆杨表与图代数的表示》, Algebr. Comb. 3 (2020), 509–538.[18] T. Halverson, A. Ram, 《分划代数》, Eur. J. Comb. 26 (2005), 869–921.[19] V. F. R. Jones, 《波茨模型与对称群》, 《子因子》（Kyuzeso，1993）, World Sci. Publ., River Edge, 新泽西州, 1994.[20] D. E. Knuth, 《计算机程序设计艺术》, 第 1 卷, 《基本算法》, Addison-Wesley, 雷丁, 马萨诸塞州, 1973.[21] P. P. Martin, 《高维下分划代数与波茨模型转移矩阵谱》, J. Phys. A 33 (2000), 3669–3695.[22] P. Martin, 《波茨模型及统计力学中的相关问题》, World Scientific Publishing Co., Inc., 蒂内克, 新泽西州, 1991.[23] P. Martin, 《分划代数的结构》, J. Algebra 183 (1996), 319–358.[24] P. Martin, 《非平面统计力学的Temperley-Lieb代数——分划代数构造》, J. Knot Theory Ramifications 3 (1994), 51–82.[25] P. Martin, D. Woodcock, 《分划代数中的中心幂等元》, J. Algebra 217 (1999), 156–169.[26] V. Vatter, 《排列类的计数与结构》, 博士论文, 罗格斯大学, 新不伦瑞克-皮斯卡塔韦, 新泽西州, 2005.[27] J. West, 《具有受限子序列的排列与栈可排序排列》, 博士论文, 马萨诸塞州理工学院, 剑桥, 马萨诸塞州, 1990.[28] Z. K. Xiao, 《车幺半群代数的张量空间》, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 32 (2016), 607–620.[29] D. Zeilberger, 《证明 Julian West 关于长度为 n 的双栈可排序排列数量为 $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$ 的猜想》, Discrete Math. 102 (1992), 85–93.