arXiv:2301.00940v1 [math.AP] 3 Jan 2023

内部 $W^{2,\,p}$ 复 Monge-Ampère 方程小扰动的估计

JINGRUI CHENG，YULUN XU

Abstract. 设 w_0 是定义在$B_1 \subset \mathbb{C}^n$上的有界、 C^3严格多重次调和函数。则 w_0 在 $L^\infty(B_1)$ 中存在一个邻域，具有如下性质：对于该邻域内任意满足 $1-\varepsilon \leq MA(u) \leq 1+\varepsilon$ 的连续多重次调和函数 u，只要 $\varepsilon > 0$ 足够小（其大小仅取决于 n 和 p），就有 $u \in W^{2,\,p}(B_{\frac{1}{2}})$。这在一定程度上将 Caffarelli 对实 Monge-Ampère 方程的内部 $W^{2,\,p}$ 估计推广到了复数情形。

1. Introduction

Monge-Ampère 方程是二阶偏微分方程，其最高阶项是实未知函数的海森矩阵的行列式。海森矩阵要求为正定或至少半正定，从而使方程为椭圆型或退化椭圆型。根据所考虑的是实海森矩阵还是复 Hessian，Monge-Ampère 方程可分为实数情形和复数情形。在实数情形中，海森矩阵为 u_{ij}，因此海森矩阵的正定性就是凸性条件。在复数情形中，海森矩阵为 $u_{i\bar{j}}$，其正定性则是多重次调和性条件。

对于实数和复数 Monge-Ampère 方程，光滑数据下的存在性与正则性理论都已得到充分确立。在实数情形中，Caffarelli-Nirenberg-Spruck [4] 在 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑严格凸域中证明了这一点。在复数情形中，丘成桐 [18] 在紧致 K¨ahler 流形的背景下，以及 Caffarelli-Kohn-Nirenberg-Spruck [5], 在光滑伪凸域的背景下，奠定了存在性与正则性理论的基础。

关于 Monge-Ampère 方程的另一个重要方面是其先验估计，首先是内部估计。一般而言，实数情形中已知的结果远强于复数情形，这是因为解的凸性所带来的约束，远比多重次调和性严格。例如，对于实 Monge-Ampère 方程，内部梯度估计大致上是显而易见的（若已知解有界），因为所考虑的解是凸的。复数 Monge-Ampère 方程则并非如此，而多重次调和函数的有界性只能推出其梯度属于 L^2。

可以说，Monge-Ampère 方程中最重要的估计就是二阶导数估计。若能在 L^∞ 中得到这样的估计，那么该方程就会变为一致椭圆型，标准理论也就可以适用。另一方面，令人遗憾的是，无论对于实 Monge-Ampère 方程还是复 Monge-Ampère 方程，都不存在纯粹的内部 C^2 估计。事实上，在某个区域内有一个满足 $\det u_{ij} = 1$ 的凸解，并不意味着其在内部满足 $u \in C^2$；Pogorelov 给出了一个反例 [14]（He 在 [9] 中给出了复数版本的反例）。一般而言，需要施加一些边界条件

Date: 2022年11月。

（例如， $u=0$ 在边界上），才能得出 D^2u 在内部有界的结论（Pogorelov 估计 [13]）。基于此，Caffarelli 证明了以下内部 $W^{2,\,p}$估计，其中右端项是一个常数的小扰动：

定理 1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸域，使得 $B_1 \subset \Omega \subset B_n$，且 u 是方程 $\det u_{ij} = f$ 的弱解，并满足 $|f-1|<\varepsilon$ 以及在 $\partial\Omega$ 上的 $u=0$。那么对任意 $1<p<\infty$，如果$\varepsilon>0$足够小（其大小仅取决于 p和 n），则$||u||_{W^{2,\,p}(B_{\frac{1}{2}})}$ </style}可由一个仅取决于 p和 n的常数控制。

在上述定理中，弱解是利用梯度映射像集的测度来定义的。也可以用一个 $strict\ convexity$ 假设替代边界条件，即凸函数的支撑平面仅在一个点处与该函数相切。也就是说，我们有：

定理1.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界凸域，且 u 是方程 $\det u_{ij} = f$ 的弱解，并满足 $|f-1|<\varepsilon$ 且为严格凸函数。那么对任意紧子域 Ω'，有$||u||_{W^{2,\,p}(\Omega')} \le C$，其中 C取决于 p、 n、 $dist(\Omega', \partial\Omega)$ 以及 u的严格凸性模，只要 ε 足够小（其大小仅取决于 p和 n）。

定理1.2实际上可由定理 1.1 推出。事实上，对于任意 $x_0 \in \Omega'$，我们可以取l_{x_0}为一个从下方与 u 相切的线性函数；由于严格凸性，当 c 足够小时， $S_c := \{u(x) \le l_{x_0}(x) + c\}$ 将包含在 Ω 中。然后可以对S_c 进行归一化，使其满足定理 1.1 的情形。

本文的目标是将定理 1.1 和定理1.2（部分地）推广到复 Monge-Ampère 方程。更准确地说，我们证明：

定理 1.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界域，满足 $B_{1-\gamma_0} \subset \Omega \subset B_{1+\gamma_0}$，其中$\gamma_0>0$为某个量。设 $u \in C^2(\Omega) \cap PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足 $1-\varepsilon \le \det u_{i\bar{j}} \le 1+\varepsilon$ 在 Ω 中成立，且$u=0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。给定 $1<p<\infty$，若 γ_0 足够小（其取值仅取决于 n），且 ε 足够小（其取值仅取决于 n 和 p），则

$$||u||_{W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})} \le C, \quad ||\sum_i \frac{1}{u_{i\bar{i}}}||_{L^p(B_{\frac{1}{2}})} \le C,$$

其中常数 C 仅取决于 n和 p。

应将此定理理解为定理 1.1 的类似结果。更一般地，我们有：

定理 1.4。设 w_0 是单位球中的光滑函数，使得对于某个 $C_0>1$ ：

$$\frac{1}{C_0} I \le (w_0)_{z_i\bar{z}_j} \le C_0 I, \ |D^3 w_0| \le C_0 \ in\ B_1.$$

那么存在足够小的 $\delta_0>0$，其大小仅取决于 C_0 和 n，使得对于所有满足 $|u-w_0| \le \delta_0$ 于 B_1 上、解 $1-\varepsilon \le MA(u) \le 1+\varepsilon$ 的 $u \in PSH(B_1) \cap C(B_1)$，只要 ε 足够小且其大小仅取决于 n 和 p，就有 $u \in W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})$ 以及 $\sum_i \frac{1}{u_{i\bar{i}}} \in L^p(B_{\frac{1}{2}})$。

上文中， $MA(u)$ 是针对连续多重次调和函数定义的复 Monge-Ampère 算子，取 Bedford-Taylor 意义（参见 [1]），因此当 $u \in C^2$ 时， $MA(u) = \det u_{i\bar{j}}$。

若将定理 1.3 与定理 1.1 比较，或将定理 1.4 与定理 1.2 比较，最大的区别在于，我们必须假设解接近一个光滑的多重次调和函数。之所以必须作出这一假设，是因为复 Monge-Ampère 方程是否具有 Pogorelov 型估计这一问题至今仍未解决。需要指出的是，F. Schulz 在 [16]，中运用 N. M. Ivochikina 针对实 Monge-Ampère 方程提出的积分方法，研究了零边界值复 Monge-Ampère 方程的内部 C^2 估计。然而， [16] 中的证明并不完整，这一点最早由 Blocki [2] 指出。稍后我们将进一步讨论技术层面的问题；现在先介绍一些由主定理直接推出的结论，这些结论似乎是新的，也很有趣。

首先，我们注意到，定理 1.4 在流形情形下将给出以下结果：

推论 1.1. 设 (M,ω_0) 是一个紧 K¨ahler 流形。设 $\varphi \in PSH(M,\omega_0)\cap C(M)$ 是下列方程的解：

$$(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n = f\omega_0^n,\ \ \omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi>0,$$

其中 $|f-1|<\varepsilon$ 和 $\int_M f\omega_0^n=\int_M\omega_0^n$。设 $1<p<\infty$，则只要 ε 足够小（其大小仅取决于 p、 n 和背景度量 ω_0），我们就有 $\varphi\in W^{2,\,p}(M)$。

对于有界域情形也有类似的结果。换言之，我们有：

推论 1.2. 设 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 是一个有界域。设 $u_0\in C^3(\Omega)\cap C(\bar\Omega)\cap PSH(\Omega)$ 是方程 $\det(u_0)_{i\bar j}=f_0>0$ 在 Ω 中的解，且 $u_0|_{\partial\Omega}=\varphi_0$。设 $u\in C(\Omega)\cap PSH(\Omega)$ 是方程 $MA(u)=f$ 的解，并且 $u|_{\partial\Omega}=\varphi$ 满足 $|f-f_0|<\varepsilon$, $|\varphi-\varphi_0|<\varepsilon$。设 Ω′ 是 Ω 的一个紧子域，则只要 ε 足够小，且其大小仅取决于 Ω′、Ω、 C^3 界以及 u_0 在 Ω′ 的某个邻域内的复 Hessian 下界、 p 和 n，我们就有 $u\in W^{2,\,p}(\Omega')$。

定理 1.4 的另一个应用是以下关于 $\mathbb{C}^n$ 上整体标量平坦度量的刘维尔定理，它推广了 Yu Wang 的一项结果 [17]：

推论 1.3. 设 u C^2 球 上的一个多重次调和函数。记 $\omega_u=\sqrt{-1}\partial\bar\partial u$ 并假设 ω_u 是标量平坦的，即

$$\sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar j}\partial_{i\bar j}\big(\log\det u_{a\bar b}\big)=0.$$

那么，存在一个仅依赖于 n 的充分小的 $\varepsilon_n>0$ ，使得我们可以推出 u 是二次函数，条件是：

(1) $\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\sup_{B_r}|u(z)-|z|^2|}{r^2}\le\varepsilon_n$,
(2) $1-\varepsilon_n\le\det u_{a\bar b}\le 1+\varepsilon_n$.

结　果 Yu Wang [17] 是上述推论的一个特例，其中 $\det u_{a\bar b}=1$.

最后，我们注意到复 Monge-Ampère 方程的小扰动具有如下 $C^{2,\alpha}$ 估计。对于 $K>0$, $0<\alpha<1$ 和 $C_1>1$，我们定义如下函数类：

$$\mathcal{F}(K,\alpha,C_1)=\{f \text{ is defined on } B_1 : ||f||_{\alpha,B_1}\le K,\ \frac{1}{C_1}\le f\le C_1 \text{ on } B_1\}.$$

推论 1.4. 设 w_0 如定理 1.4 所述。则存在 $\delta_0 > 0$，它仅依赖于 C_0, n, K, α, C_1，使得对于任意满足 $|u - w_0| \leq \delta_0$ 于 B_1 且求解 $MA(u) = f$（其中某个 $f \in \mathcal{F}(K, \alpha, C_1)$）的 $u \in PSH(B_1) \cap C(B_1)$，都有 $u \in C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})$。

接下来，我们想说明定理 1.3 的证明思路。其核心思想源自 Caffarelli 的论文 [3]，我们先在此作解释。由于解 u 严格凸，我们可以考虑如下形式的 u 截面：$S_c(x_0) := \{(u - l)(x) \leq u(x_0) + c\}$，且该截面严格包含于 Ω 中。其中，$l(x)$ 是 u 在 x_0 处的支撑线性函数，而 $c > 0$ 称为截面的“高度”。现在，我们在这个开集上求解 $\det w_{ij} = 1$，并在边界上取值为 u。由 Pogorelov 估计可知，w 在内部光滑。对 w 作泰勒展开后，我们发现 w 的截面将接近椭球。另一方面，由于 f 接近 1，根据最大值原理，u 也非常接近 w，因此 u 的截面同样接近椭球。如果随着高度趋于 0，椭球的形状与球可比，那么该点处的二阶导数就能得到控制。因此，$W^{2,p}$ 估计的关键在于估计这样一类集合的测度：其中椭球的形状失去控制。（这反映为从下方接触 u 的抛物面的开口。）为此，我们需要一个适用于截面的 Vitali 覆盖引理。要建立截面的覆盖引理，我们需要以下关键的包裹性质：

如果 $S_{\mu_1}(x_1) \cap S_{\mu_2}(x_2) \neq \emptyset$，且 $\mu_1 \leq \mu_2$，那么 $S_{\mu_1}(x_1) \subset S_{10\mu_2}(x_2)$。

这一性质将是紧性的结果。事实上，如果 u 是标准解 $\frac{1}{2}|x|^2$，我们就有 $S_{\mu_1}(x_1) = B_{\sqrt{\mu_1}}(x_1)$、$S_{\mu_2}(x_2) = B_{\sqrt{\mu_2}}(x_2)$，并且确实满足包裹性质。如果 u 接近某个二次多项式，我们仍可以期待这一性质成立。

我们在定理 1.3 的证明中采用类似的论证思路。我们面临的第一个难题是选取满足 u的截面。与凸函数的情形不同，给定 $x_0 \in \Omega$，并不清楚能否找到一个多重调和函数 h，使得当 $c > 0$ 足够小时，$\{u - h < u(x_0) + c\}$紧含于 Ω。尽管一般情况下这并不明显，但我们证明，如果 u 接近一个光滑的多重次调和函数，且该函数的复 Hessian 有下界，那么确实可以做到。

接下来，我们需要像在实数情形中所做的那样，在 u 的一个小截面的边界上求解狄利克雷问题 $\det w_{i\bar{j}} = 1, w = u$。我们目前面临的问题是，不知道 w 是否光滑，因为对于复 Monge-Ampère 方程，我们尚无 Pogorelov 估计。不过，如果 u 接近一个光滑且严格多重次调和的函数，那么由 u 定义的截面从一开始就会接近一个椭球。这使我们能够运用 Savin 扰动结果，得出结论：w 在内部确实光滑。在本文中，我们采用归纳过程，为 $\mu > 0$ 且充分小的情形构造截面 $S_\mu(x_0)$，其形式为 $\{(u - h_{\mu,\, x_0})(z) \leq u(x_0) + \mu\}$，其中 $h_{\mu,\, x_0}(z)$ 是多重调和函数。此外，我们还证明，在归纳过程中，$S_\mu(x_0)$ 始终接近一个椭球。

我们的构造有一个缺点：它高度依赖具体选择，因为它依赖于在一系列越来越小、以x_0“为中心”的截面上求解狄利克雷问题。$S_\mu(x_0)$ 的这一构造与我们用于规范化椭球的线性变换不交换。我们将在命题 4.16 下方的第 4.2 小节中更详细地说明这一问题。

$S_\mu(x_0)$并非典范的这一事实，显然使得即使 x_0 和 x_1 非常接近，也很难将 $S_\mu(x_0)$与 $S_\mu(x_1)$联系起来。这似乎使得

证明我们构造的 $S_\mu(x_0)$具有包裹性质变得不可能。（另外，我们也指出，上述$h_{\mu,\,x_0}(z)$一般而言在 $\mu \to 0$时是无界的，这与实数情形截然不同。）然而，我们观察到一个令人惊讶的现象：如果一个形如$\{u - h \le u(x_0) + \mu\}$ 的截面恰好接近某个椭球，那么从定量意义上说，这个椭球的形状是“唯一”的。这一关键观察使我们得以证明包裹性质。

上述讨论表明，理解复 Monge-Ampère 方程是否具有 Pogorelov 估计至关重要。特别是，我们因此提出以下定义：

定义 1.5. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为一个有界域，且 $\Omega' \subset \Omega$ 紧包含于 Ω 中。若满足以下条件，则称 (Ω, Ω') 具有 Pogorelov 性质：

(1) 存在 $u \in PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$，在 Bedford-Taylor 意义下于 Ω 中满足 $MA(u) = 1$，且在 $\partial\Omega$ 上满足 $u = 0$；(2) 解 u 在 Ω' 上为 C^2（因此 C^∞）。

仔细检查本文的论证便会发现，我们真正证明的是以下结果：

定理 1.5. 设 $u \in PSH(B_1) \cap C(\bar{B}_1)$ 满足 $1-\varepsilon \le MA(u) \le 1+\varepsilon$于 B_1 中。假设存在有限多个 Pogorelov 对 (Ω_i, Ω_i')，$1 \le i \le N$，使得

(1) 每个 Ω_i 都具有形式 $\{u - h_i < c_i\}$，其中 h_i 是多重调和函数，且$c_i \in \mathbb{R}$。

(2) $\bar{B}_{\frac{1}{2}} \subset \cup_{i=1}^N \Omega_i'$。

那么，只要 ε 足够小，我们就有 $u \in W^{2,\,p}(B_{\frac{1}{2}})$；其充分小的程度仅取决于 n、p、Hessian 下界和上界，以及 u_i 在 Ω_i' 上的 C^3 界。这里，u_i 是以下方程的解：$MA(u_i) = 1$ 在 Ω_i 上，且在 $\partial\Omega_i$ 上为 $u_i = 0$。

目前，(1) 和 (2) 中的假设何时成立，似乎仍难以刻画。目前，我们只能在 u 接近某个光滑函数时验证这类假设。例如，在定理 1.3 的情形中，$\Omega = \{u < 0\}$，且 $(\Omega\ B_{0.6})$ 具有 Pogorelov 性质，只要 Ω 接近单位球，这得益于 Savin 对小扰动给出的 $C^{2,\,\alpha}$ 估计。

最后，我们将说明本文其余部分的组织结构。

第 2 节介绍本文中反复用到的一些定义、记号和预备结果。

第3节说明如何将定理 1.4 化归为定理 1.3。取 $w_0 = |z|^2 - 1$ 时，后者是前者的一个特例。下文第4至第6节将用于证明定理 1.3。

第4节中，我们构造了 $S_\mu(x_0)$ 的截面，这些截面具有如下形式：$u\ \{(u-h_{\mu,x_0})(z) \le u(x_0) + \mu\}$，其中 h_{μ,x_0} 是多重调和的，且 $S_\mu(x_0)$ 接近一个椭球。本节的后半部分将重点讨论截面的包裹性质。

在第5节中，我们证明了一些测度论引理，以便估计二阶导数失去控制的“坏”集。这些引理都是关于球的标准结果，但我们必须将它们调整到我们在第4节中构造的 $S_\mu(x_0)$ 上。建立这些引理时，$S_\mu(x_0)$ 的包裹性质至关重要。

在第6节中，我们验证“坏集”满足第5节测度论引理的假设，并得到坏集测度的幂衰减。与实数情形不同，我们首先对混合海森矩阵 $u_{i\bar{j}}$ 得到控制，然后利用拉普拉斯算子的经典估计推出完整的 $W^{2,\,p}$ 估计。

在第7节中，我们讨论定理 1.4 的一些推论。特别地，我们详细证明推论 1.1、1.2、1.3 和 1.4。

2. PRELIMINARIES

我们将反复用到的关键结果是下面这个引理：

引理 2.1. 设 u 是 B_1 中 $det(u_{i\bar{j}}) = 1$ 的一个黏性解。假设 $||u - w||_{L^\infty} \leq \delta$，其中 w 是 B_1 中 $det(w_{i\bar{j}}) = 1$ 的一个光滑解。若 δ 足够小，且其大小仅取决于 w 和 n 的光滑性，则有 $||u||_{C^4\,(B_{0.99})} \leq C$，其中 C 的依赖关系与 δ 相同。

Savin 的小扰动定理适用于更一般的完全非线性椭圆方程，可用于如下形式的方程：$F(D^2u, x) = 0$，其中 $F(r, x) : \mathcal{S} \times B_1 \to \mathbb{R}$ 对变量 x 是 C^2 的，对变量 r 是椭圆型的，并且仅当 r 位于 0 的某个邻域内时才是一致椭圆的，且 $F(0, x) = 0$。于是，对于任意满足 $F(D^2u, x) = 0$ 且 $||u||_{L^\infty}$ 足够小的解，我们都能在内部得到 $C^{2,\,\alpha}$ 估计。

引理 2.1 可由 Savin 在 [15] 中给出的一般扰动定理推出：只需将复 Monge-Ampère 算子写成实形式。详情见 Yu Wang [17]。此外，一旦我们得到 $C^{2,\,\alpha}$ 对上述方程的估计，便可直接应用标准椭圆估计，将估计改进为 C^4。本文中，我们主要在 $w = |z|^2 - 1$ 的情形下应用引理 2.1。

我们还需要以下插值引理：

我们需要以下插值估计。

引理2.2. 设 u 是 $B_{r_0}(0)$ 中的一个 C^4函数，满足 $|D^4u|_{L^\infty\,(B_{r_0})} \leq C$，且 $|u|_{L^\infty\,(B_{r_0})} \leq \mu$，则对任意 $0 < \lambda < r_0$，有

$$|u(0)| \leq \mu,\ |Du(0)| \leq C(\lambda^3 + \frac{\mu}{\lambda}),$$
$$|D^2u(0)| \leq C(\lambda^2 + \frac{\mu}{\lambda^2}),\ |D^3u(0)| \leq C(\lambda + \frac{\mu}{\lambda^3}).$$

证明. 根据泰勒展开可知，对 $x \in B_{r_0}$，以下估计成立：

$$|u(x) - \sum_{|\alpha|\leq 3} \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!} x^\alpha| \leq C_n C|x|^4.$$

如果我们限制在 $|x| \leq \lambda$ 上，就会发现

$$|\sum_{|\alpha|\leq 3} \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!} x^\alpha| \leq C_n C\lambda^4 + \mu.$$

这等价于：

$$\sup_{|y|\leq 1} |\sum_{|\alpha|\leq 3} \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!} \lambda^{|\alpha|} y^\alpha| \leq C_n C\lambda^4 + \mu.$$

因此我们有：

$$|D^m u(0)|\lambda^m \leq C_n' C\lambda^4 + \mu,\ \ m = 1,\, 2,\, 3.$$

□

本文将频繁使用关于复变量的微分。按照通常的约定，我们定义：

$$\partial_{z_i} = \frac{1}{2}(\partial_{x_i} - \sqrt{-1}\partial_{y_i}),\ \ \partial_{\bar{z}_i} = \frac{1}{2}(\partial_{x_i} + \sqrt{-1}\partial_{y_i}),\ \ z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i. \tag{2.1}$$

因此，我们发现拉普拉斯算子可以写为：

$$\Delta = 4\sum_{i=1}^{n} \partial_{z_i\bar{z}_i}.$$

一个我们会反复遇到的概念是多重调和函数，下面对此作出解释。

定义 2.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个区域。设 $h \in C^2(\Omega)$。若对所有 $1 \leq i, j \leq n$，都有 h 是多重调和的，当且仅当 $h_{z_i\bar{z}_j}(z) = 0$。

注意， h 是多重调和函数意味着 h 是调和函数，但反之不成立。还可以看出，若 h是全纯函数的实部，则 h 是多重调和函数。

我们还需要另一个定义：

引理 2.4. 设 $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性变换，我们将 $||T||$ 定义为 T 的算子范数，即：

$$||T|| = \sup_{|z|\leq 1} |T(z)|.$$

在证明截面的包裹性质时，我们需要频繁考虑膨胀映射。因此，我们引入以下定义，以简化记号。

定义 2.5. 设 $E \subset \mathbb{C}^n$ 是一个集合且 $x_0 \in E$。我们有时将 E 记为 $E(x_0)$，以表示它是一个“带基点集合”。设 $c > 0$，定义如下：

$$cE(x_0) = \{x_0 + c(y - x_0) : y \in E(x_0)\}.$$

也就是说， $cE(x_0)$ 是以 x_0 为中心、按因子 c 进行膨胀映射所得的像。

3. Reduction of Theorem 1.4 to Theorem 1.3

在本节中，我们将说明如何利用定理 1.3 推导出定理 1.4。

为了直观地理解这一推论，我们可以取任意一点 $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$。减去一个多重调和函数 h_{x_0}后，我们会看到，当 μ 足够小时， $\{w - h_{x_0}(z) \leq w_0(x_0) + \mu\}$会接近一个椭球（其中心位于 x_0）。对于 $\{u - h_{x_0}(z) \leq \mu\}$，情况也相同。将椭球归一化为单位球后，我们就处于定理 1.3 的情形，从而在 x_0 的某个邻域内得到 $u \in W^{2,\,p}$。在本节余下部分，我们将把这一想法精确化。

设 w_0 如定理 1.4 所述。取任意一点 $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$，我们可以写出 w_0 在 x_0 处的泰勒展开：

$$\begin{aligned} w_0 = w_0(x_0) + Re(\sum_i l_{x_0,i}(z-x_0)_i) + \sum_{i,j} a_{x_0,i\bar{j}}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)}_j \\ + Re(\sum_{i,j} b_{x_0,ij}(z-x_0)_i(z-x_0)_j) + O(|z-x_0|^3). \end{aligned} \tag{3.1}$$

定义 $h_{x_0}(z) = Re(\sum_i l_{x_0,\ i}(z-x_0)_i) + Re(\sum_{i,\ j} b_{x_0,\ ij}(z-x_0)_i(z-x_0)_j)$。首先，我们想证明：如果另有一个函数 u_0，使得 $|u_0 - w_0| \le \delta$，那么当 μ 足够小、但远大于 δ 时，截面$\{z:\ u_0 - h_{x_0}(z) \le u_0(x_0) + \mu\}$ 将接近一个椭球。更准确地说

引理 3.1. 设 w_0 如定理 1.4 中所述。也就是说，我们假设 $w_0 \in C^3(B_1)$，且 $\frac{1}{C_0} I \le (w_0)_{i\bar{j}} \le C_0 I$，在 $B_{0.99}$ 上成立。设 $\delta \ge 0$，且 u_0 是定义在 B_1 上的函数，在 $B_{0.95}$ 上满足 $|u_0 - w_0| \le \delta$。那么存在仅依赖于 C_0 的足够大的 $C_1 > 0$ 和足够小的 $\mu_0 > 0$，使得对所有满足 $4C_1\delta \le \mu \le \mu_0$ 的 μ，都有：

$$(1 - C_1\gamma)E_\mu(x_0) \subset \{z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}}(x_0) : (u_0 - h_{x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu\} \subset (1 + C_1\gamma)E_\mu(x_0).$$

Moreover, $(u_0 - h_{x_0})(z) = u_0(x_0) + \mu$ *on* $\partial\{z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}}(x_0) : (u_0 - h_{x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu\}$.

这里 $\gamma = \frac{\delta}{\mu} + \mu^{\frac{1}{2}}$ 和 $E_\mu(x_0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i,j=1}^n a_{x_0,ij}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le \mu\}$.

证明。利用 (3.1)，我们得到在 B_1 上：

$$-C_0|z-x_0|^3 \le w_0 - w_0(x_0) - h_{x_0}(z) - \sum_{i,j} a_{x_0,ij}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le C_0|z-x_0|^3. \tag{3.2}$$

由于 $|u_0 - w_0| \le 2\delta_0$ 在 $B_{0.95}$ 上，我们得到对于任意 $x_0 \in B_{0.95}$：

$$\begin{aligned} -2\delta - C_0|z-x_0|^3 \le u_0 - u_0(x_0) - h_{x_0}(z) - \sum_{i,j} a_{x_0,ij}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \\ \le C_0|z-x_0|^3 + 2\delta. \end{aligned}$$

令 $z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}}(x_0)$ 和 $(u_0 - h_{x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu$，我们得到

$$-2\delta - C_0|z-x_0|^3 \le \mu - \sum_{i,j} a_{x_0,ij}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j}.$$

由于 $a_{x_0,ij} \ge \frac{1}{C_0} I$，我们得到

$$\frac{1}{C_0}|z-x_0|^2 \le \sum_{i,j} a_{x_0,ij}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le \mu + 2\delta + C_0 \cdot \frac{1}{2C_0^2}|z-x_0|^2.$$

从而

$$|z-x_0| \le \sqrt{2C_0(\mu + 2\delta)} \le \sqrt{3C_0\mu}.$$

因此

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} a_{x_0,ij}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le u_0 - u_0(x_0) - h_{x_0}(z) + 2\delta + C_0|z-x_0|^3 \\ &\le \mu + 2\delta + C_0(3C_0\mu)^{\frac{3}{2}} \le (1 + C_1\gamma)\mu. \end{aligned}$$

这证明了包含关系

$$\{z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}}(x_0) : (u_0 - h_{x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu\} \subset (1 + C_1\gamma)E_\mu(x_0).$$

现在我们证明另一个包含关系。设 $z \in (1 - C_1\gamma)E_\mu(x_0)$，这意味着

$$\sum_{i,j} a_{x_0,ij}(z - x_0)_i\overline{(z - x_0)_j} \le (1 - C_1\gamma)^2\mu \le (1 - C_1\gamma)\mu.$$

从而

$$|z - x_0|^2 \le C_0 \sum_{i,j} a_{x_0,ij}(z - x_0)_i\overline{(z - x_0)_j} \le C_0(1 - C_1\gamma)\mu < \frac{1}{2C_0^2},$$

只要 $\mu \le \mu_0$ 足够小，且 μ_0。此外

$$u_0 - u_0(x_0) - h_{x_0}(z) \le \sum_{i,j} a_{x_0,ij}(z - x_0)_i\overline{(z - x_0)_j} + C_0|z - x_0|^3 + 2\delta$$

$$\le (1 - C_1\gamma)\mu + C_0(3C_0\mu)^{\frac{3}{2}} + 2\delta \le \mu.$$

如果我们取足够大的 C_1（其大小取决于 C_0），则最后一个不等式成立。这就证明了包含关系:

$$(1 - C_1\gamma)E_\mu(x_0) \subset \{z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}}(x_0) : (u_0 - h_{x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu\}.$$

□

现在我们可以验证定理 1.3 推出定理 1.4。

设 u 和 w_0 如定理 1.4 所述。设 $\mu > 0$ 和 $x_0 \in B_{0.8}$。设 T_{μ,x_0} 为一个$\mathbb{C}$-仿射变换，使得 $T_{\mu,x_0}(B_{\sqrt{\mu}}(0)) = E_\mu(x_0)$。定义

$$u_{\mu,x_0}(\zeta) = \frac{1}{\mu|\det T_{\mu,x_0}|^{\frac{2}{n}}}(u - h_{x_0} - \mu)(T_{\mu,x_0}(\sqrt{\mu}\zeta)). \tag{3.3}$$

由于 $E_\mu(x_0)$ 是根据 $a_{x_0,ij}$ 定义的，其中 $\frac{1}{C_0} \le a_{x_0,ij} \le C_0 I$，容易看出:

$$||T_{\mu,x_0}|| \le C_2,\ ||T_{\mu,x_0}^{-1}|| \le C_2,\ \frac{1}{C_2} \le |\det T_{\mu,x_0}|^2 \le C_2.$$

这里 C_2 是一个足够大的常数，仅依赖于 C_0 和 n。定义 $\Omega_\mu = T_{\mu,x_0}^{-1}(\{z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}} : (u - h_{x_0})(z) \le u(x_0) + \mu\})$。经过直接计算并应用引理 3.1，可得:

引理 3.2。存在一个足够小的 $\mu_0 > 0$，仅依赖于 C_0，使得对所有$4C_1\delta_0 \le \mu \le \mu_0$（其中 $C_1 > 0$ 为引理 3.1 给出的常数），都有

(1) $B_{1-C_1\gamma} \subset \Omega_\mu \subset B_{1+C_1\gamma}$, *with* $\gamma = \frac{\delta_0}{\mu} + \mu^{\frac{1}{2}}$.

(2) $\det(u_{\mu,x_0})_{\zeta_i\bar{\zeta}_j} = f(T_{\mu,x_0}(\sqrt{\mu}\zeta))$ *in* Ω_μ, $u_{\mu,x_0} = 0$ *on* $\partial\Omega_\mu$.

重归一化函数 $u_{\mu,\ x_0}$ 在适当选择参数后满足定理 1.3 的假设，因此定理 1.4 可直接推出:

推论 3.3. 假设定理 1.3 和 $u \in C^2(B_1)$ 成立，则定理 1.4 也成立。

证明. 我们希望将定理 1.3 应用于每个 $u_{\mu,\ x_0}$。为此，我们只需要：

$$C_1\gamma = C_1(\frac{\delta_0}{\mu} + \mu^{\frac{1}{2}}) \leq \gamma_0(n),\ \ |f(T_{\mu,x_0}(\sqrt{\mu}\zeta)) - 1| \leq \varepsilon(n,p).$$

这里， $\gamma_0(n)$ 和 $\varepsilon(n,p)$ 是定理 1.3 给出的常数。

因此，我们只需取 μ，使得 $2C_1\mu^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\gamma_0(n)$，并且 $\mu \leq \mu_0$（由引理 3.2 给出）。有了这个 μ，我们可以取 δ_0，使得 $C_1\frac{\delta_0}{\mu} \leq \frac{1}{2}\gamma_0(n)$，并且 $4C_1\delta_0 \leq \mu_0$。从现在起，我们固定这一选择。

由于我们假设定理 1.3 成立，因此可以得出：

$$||u_{\mu,x_0}||_{W^{2,p}}(B_{\frac{1}{2}}) \leq C,$$

其中， C 是一个仅依赖于 n 和 p 的常数。然后利用 (3.3)，我们可以回到 u 并得到

$$||u||_{W^{2,p}(E_{\frac{1}{2}\mu}(x_0))} \leq C'.$$

这里， C' 依赖于 C_0、 p 和 n。注意， μ 已经选定，且仅依赖于 C_0 和 n；而 h_{x_0} 是利用 w_0 定义的，它也可以用 C_0 和 n 来界定。

注意，对于任意 $x_0 \in B_{0.8}$，当 $r_0 > 0$ 足够小（仅依赖于C_0）时，$E_{\frac{1}{2}\mu}(x_0)$包含 $B_{r_0}(x_0)$。定理 1.4 的结论便立即成立。□

接下来，我们可以使用逼近论证，去掉 $u \in C^2(B_1)$这一假设。

证明。（定理 1.4 的证明，不假设 $u \in C^2(B_1)$）

首先，我们可以找到 $f_k \in C^\infty(B_{0.9})$，使得 $f_k \to f$ 属于 $L^2(B_{0.9})$且 $|f_k - 1| \leq \varepsilon$ （因为$|f-1| \leq \varepsilon$，可以看出标准的卷积平滑会保留这一性质）。我们还可以找到一个 $g_k \in C^\infty(\partial B_{0.9})$序列，使得 $g_k \to u$ 在 $\partial B_{0.9}$ 上一致收敛（因为假设 u 连续）。

令 v_k 为狄利克雷问题的解：

$$\det(v_k)_{i\bar{j}} = f_k \ \text{ in } B_{0.9},\ v_k = g_k \ \text{ on } \partial B_{0.9}.$$

根据 Caffarelli-Kohn-Nirenberg-Spruck [5], ，我们知道 $v_k \in C^\infty(B_{0.9})$。此外，由以下引理 3.4 ，我们知道 $v_k \to u$ 在 $B_{0.9}$ 上一致成立。因此，当 k 足够大时， v_k 将满足定理 1.4 的假设，并且每个 v_k 都是光滑的。因此，我们可以使用推论 3.3 得出

$$||v_k||_{W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C,$$

其中 C 仅依赖于 C_0、 n 和 p。特别地， C 在 k 上是一致的。取极限可得，$u \in W^{2,\ p}(B_{\frac{1}{2}})$，且具有相同的界 C。□

上文中，我们使用了 Dinew-Kolodziej 的以下稳定性估计 [7] ，从而推出逼近序列的一致收敛：

引理 3.4. ([7]) 设 ω_E 为 $\mathbb{C}^n$ 上的欧氏 K ¨ahler 形式。设 $q > 1$。考虑$u, v \in PSH(\Omega) \cap C(\Omega)$。假设

$$MA(u) = f,\ \ MA(v) = g.$$

对某个 $f, g \in L^q(\Omega, dV)$ 成立。那么

$$\sup_{\Omega}(v-u) \leq \sup_{\partial\Omega}(v-u) + c(q,n,diam(\Omega))||f-g||^{\frac{1}{n}}_{L^q(\Omega)}.$$

4. CONSTRUCTION OF SECTIONS

从现在起，我们将专注于定理 1.3 的证明。首先，我们通过归纳过程构造接近椭球的 u 截面。接下来，我们证明这些截面的一些精细性质，以确保它们是良好的微分基。

4.1. 截面的归纳构造。我们将构造过程概括为以下命题：

命题 4.1. 设 Ω 和 u 如定理 1.3 中所述，其中 γ_0 足够小，且只依赖于 n。给定 $0 < \sigma < 1$。那么存在仅依赖于 σ 和 n 的 $\varepsilon > 0$，使得若 $|f-1| \leq \varepsilon$，则以下结论成立：

(1) 存在仅依赖于 n 和 σ 的足够小的 $\mu_0 > 0$，使得对所有 $x_0 \in B_{0,8}$ 以及所有 $\mu \leq \mu_0$，存在一个二次多重调和多项式 $h_{\mu,x_0}(z)$，满足 $h_{\mu,x_0}(x_0) = 0$，使得

$$(1-0.1\sigma)E_\mu(x_0) \subset S_\mu(x_0) := \{z \in \Omega : (u-h_{\mu,x_0})(z) \leq u(x_0) + \mu\}$$
$$\subset (1+0.1\sigma)E_\mu(x_0).$$

在上述内容中，$E_\mu(x_0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i,j=1}^n a_{\mu,x_0,ij}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \leq \mu\}$，其中$a_{\mu,x_0,ij}$ 为正定 Hermitian，且 $\det a_{\mu,x_0,ij} = 1$。

(2) 存在函数 $c(\sigma) : \sigma \in (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$，使得对于任意 $x_0 \in B_{0.8}$ 和任意$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \frac{\mu_0}{1+c(\sigma)}$，有 $S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{(1+c(\sigma))\mu_2}(x_0)$。此外，$0 < c(\sigma) \leq C_{2,n}\sigma^{\frac{1}{2}}$，其中某个维数常数为 $C_{2,n}$。

(3) 存在维数常数 $C_{3,n} > 0$，使得对于所有 $0 < \mu \leq \mu_0$ 和任意 $x_0 \in B_{0.8}$，存在一个 $\mathbb{C}$-线性变换 T_{μ,x_0}，使得 $|\det T_{\mu,x_0}| = 1, T_{\mu,x_0}(B_{\sqrt{\mu}}(0)) = E_\mu(x_0)$，$T_{\mu_0,x_0} = id$。此外，对于任意 $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_0$ 和任意 $x_0 \in B_{0.8}$：

$$||T_{\mu_1,x_0} \circ T^{-1}_{\mu_2,x_0}|| \leq C_{3,n}(\frac{\mu_2}{\mu_1})^{\frac{C_{3,n}\sigma^{\frac{1}{2}}}{-\log(0.1\sigma)}}, \quad ||T_{\mu_2,x_0} \circ T^{-1}_{\mu_1,x_0}|| \leq C_{3,n}(\frac{\mu_2}{\mu_1})^{\frac{C_{3,n}\sigma^{\frac{1}{2}}}{-\log(0.1\sigma)}}.$$

注 4.2。我们稍后再选取 σ，具体取值取决于$W^{2,p}$ 估计中的 p。（p 越大，σ 就需要越小。）这样，ε的选取最终只取决于 p和 n。

我们固定某个 $0 < \sigma < 1$，并描述 $S_\mu(x_0)$ 的构造。

首先，我们在 Ω 上求解以下狄利克雷问题。

$$\begin{aligned} &\det((v_0)_{i\bar{j}}) = 1 \text{ in } \Omega \\ &v_0 = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

为启动这一过程，我们需要 v_0 在内部是光滑的。这由 Ω 接近 B_1 这一事实保证。更确切地说，我们有：

引理 4.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为一个有界域，且 $B_{1-\gamma}(0) \subset \Omega \subset B_{1+\gamma}(0)$，其中某个$0 < \gamma < 1$。设 v_0 为 (4.1) 中狄利克雷问题的解，则

$$|z|^2 - 1 - 3\gamma \leq v_0 \leq |z|^2 - 1 + 3\gamma.$$

此外，存在足够小的 $\gamma_n > 0$，使得若 $\gamma \le \gamma_n$，则有 $v_0 \in C^4(\bar{B}_{0.9})$，其中 $||v_0 - (|z|^2 - 1)||_{C^4,\ B_{0.9}} \le C$。这里 C 仅依赖于 n。

证明。从假设可知，在 $\partial\Omega$ 上 $1 - \gamma \le |z| \le 1 + \gamma$，因此

$$|z|^2 - 1 - 3\gamma \le v_0 \le |z|^2 - 1 + 3\gamma, \quad \text{on } \partial\Omega.$$

注意，$|z|^2 - 1 - 3\gamma$ 和 $|z|^2 - 1 + 3\gamma$ 都满足 $\det u_{i\bar{j}} = 1$。因此，由最大值原理可知

$$|z|^2 - 1 - 3\gamma \le v_0 \le |z|^2 - 1 + 3\gamma \text{ in } \Omega.$$

若 γ 足够小，则可使用 Savin 估计（引理 2.1）得出，v_0 在 $C^{2,\alpha}$ 在 $B_{0.95}$ 上有界，且上界为某个维数常数 C。然后对 $\det(v_0)_{i\bar{j}} = 1$ 求导，并使用经典椭圆估计，便可得出 $|v_0|_{C^4,\ B_{0.9}} \le C'$。□

因此可知，v_0 实际上与 $|z|^2 - 1$ C^3 接近，所以当 γ 足够小时它是凸的。更准确地说：

推论 4.4. 设 v_0 如引理 4.3 中所述。那么对于任意足够小的 $0 < \gamma \le \gamma_n$，只要 γ_n 足够小，我们就有：

$$|D^m(v_0 - (|z|^2 - 1))|_{B_{0.9}} \le C_n \gamma^{1 - \frac{m}{4}}, \ m = 1, 2, 3.$$

证明. 这由引理 4.3 和插值估计得出。 □

为了为 u 定义截面，我们需要证明 u 和 v_0 足够接近。以下引理保证了这一点：

引理 4.5. 假设 $\det u_{i\bar{j}} = f$ 在 Ω 中且 $u|_{\partial\Omega} = 0$。设 v_0 为狄利克雷问题 (4.1) 的解。假设 $1 - \varepsilon \le f \le 1 + \varepsilon$。那么我们有 $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}} v_0 \le u \le (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} v_0$。特别地，

$$|v_0 - u| \le 4\varepsilon \ \text{in } \Omega.$$

证明. 由于 $\det\left((1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}(v_0)_{i\bar{j}}\right) = 1 + \varepsilon \ge f = \det u_{i\bar{j}} \ge 1 - \varepsilon = \det\left((1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}(v_0)_{i\bar{j}}\right)$，且这三个函数在边界上取值相同，我们可以利用最大值原理得出

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}} v_0 \le u \le (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} v_0.$$

因此

$$u - v_0 \le ((1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} - 1)v_0 \le \frac{2}{n}\varepsilon |v_0| \le \frac{4}{n}\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

在上述过程中，我们使用了引理 4.3，即 $|v_0| \le 2$（如果 γ 足够小）。对于 $u - v_0$ 的下界估计，证明完全类似。□

为了定义第一步所需的截面，我们需要引理 3.1 的一个类似结果：

引理 4.6. 设 $v \in C^3(B_1)$ 和 $|v_{i\bar{j}} - \delta_{ij}| \le c$、$|D^3 v| \le c$ 定义在 $B_{0.9}$ 上，其中 $0 < c < 1$。设 $\delta \ge 0$，且 u_0 是定义在 B_1 上的函数，在 $B_{0.95}$ 上满足 $|u_0 - v| \le \delta$。那么，当 $c > 0$ 足够小（仅依赖于 n）时，对于任意 $x_0 \in B_{0.8}$，存在一个二次多重调和多项式 $h_{v,x_0}(z)$，使得对于所有满足 $4\delta \le \mu \le 0.9(0.9 - |x_0|)^2$ 的 μ，都有：

$$(1-\gamma)E_\mu(x_0) \subset \{z \in B_1 : (u_0 - h_{v,x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu\} \subset (1+\gamma)E_\mu(x_0),$$

以及 $E_\mu(x_0) \subset B_1$。这里 $\gamma = \frac{2\delta}{\mu} + (3c)^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}$，而 $E_\mu(x_0) = \{z : \sum_{i,j} v_{i\bar{j}}(x_0)(z - x_0)_i \overline{(z - x_0)_j} \le \mu\}$。

证明。证明过程与引理 3.1 非常相似。首先，我们可以写出 v 在 x_0 处的泰勒展开：

$$v(z) = v_0(x_0) + Re\big(\sum_i l_{0,x_0,i}(z-x_0)_i\big) + \sum_{i,j} v_{i\bar{j}}(x_0)(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j}$$
$$+ Re\big(\sum_{i,j} b_{0,x_0,ij}(z-x_0)_i(z-x_0)_j\big) + O(|z-x_0|^3).$$

定义 $h_{v,x_0}(z) = Re\big(\sum_i l_{0,x_0,i}(z-x_0)_i + \sum_{i,j} b_{0,x_0,ij}(z-x_0)_i(z-x_0)_j\big)$，并利用 D^3v，$u_0 - v$ 的界，我们得到

$$-2\delta - c|z-x_0|^3 \le (u_0 - h_{v,x_0})(z) - u_0(x_0) - \sum_{i,j} v_{i\bar{j}}(x_0)(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le c|z-x_0|^3 + 2\delta.$$

令 $z \in B_1$，并满足 $(u_0 - h_{v,x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu$，我们得到

$$\sum_{i,j} v_{i\bar{j}}(x_0)(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le \mu + 2\delta + c|z-x_0|^3.$$

通过取 c 足够小，我们可以假设 $v_{i\bar{j}}(x_0) \ge \frac{1}{2}I$，于是

$$\frac{1}{2}|z-x_0|^2 \le \mu + 2\delta + 2c|z-x_0|^2.$$

因此，若 $4c < \frac{1}{2}$，我们得到

$$|z-x_0|^2 \le 2(\mu + 2\delta) \le 3\mu.$$

因此

$$\sum_{i,j} v_{i\bar{j}}(x_0)(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le \mu(1 + \frac{2\delta}{\mu} + 3^{\frac{3}{2}}c\mu^{\frac{1}{2}}).$$

这就证明了包含关系

$$\{z \in B_1 : (u_0 - h_{v,x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu\} \subset (1 + C_1\gamma)E_\mu(x_0).$$

接下来我们证明 $E_\mu(x_0) \subset B_1$。由 $|v_{i\bar{j}} - \delta_{ij}| \le c$ 可知，$E_\mu(x_0) \subset B_{(\frac{\mu}{1-c})^{\frac{1}{2}}}(x_0)$。因此，我们只需确保 $(\frac{\mu}{1-c})^{\frac{1}{2}} \le 0.9 - |x_0|$。如果 c 取得足够小，这确实成立。

现在我们证明包含关系

$$(1-\gamma)E_\mu(x_0) \subset \{z \in B_1 : (u_0 - h_{v,x_0})(z) \le u_0(x_0) + \mu\}.$$

假设 $z \in (1-\gamma)E_\mu(x_0)$，于是

$$\sum_{i,j} v_{i\bar{j}}(x_0)(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le (1-\gamma)^2\mu.$$

因此 $|z-x_0| \le \sqrt{2\mu}$，利用 $v_{i\bar{j}}(x_0) \ge \frac{1}{2}I$。所以

$$(u_0 - h_{v,x_0})(z) - u_0(x_0) \le \sum_{i,j} v_{i\bar{j}}(x_0)(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} + c|z-x_0|^3 + 2\delta$$
$$\le (1-\gamma)\mu + (2\mu)^{\frac{3}{2}} + 2\delta \le \mu.$$

□

现在我们选择 $\mu_0 > 0$，使得：

$$3^{\frac{3}{2}}\mu_0^{\frac{1}{2}} = \min(\frac{1}{20}\sigma, \frac{1}{20}\gamma_n), \mu_0 < 0.9 \cdot 0.1^2. \tag{4.2}$$

其中 γ_n 是引理 4.3 给出的常数。不失一般性，假设 $\sigma \leq \gamma_n$，并且在本节中始终作此假设。

我们可以对 v_0 和 u 应用引理 4.6，并构造截面 $S_\mu(x_0)$，对所有 $\mu_0^2 < \mu \leq \mu_0$。

推论 4.7. 设 u 和 Ω 如定理 1.3 所述。假设 γ_n 足够小，μ_0 按照 (4.2) 选取，并且 $16\varepsilon \leq \mu_0^2$、$\frac{8\varepsilon}{\mu_0} \leq \frac{1}{20}\sigma$。对于 $\mu_0^2 < \mu \leq \mu_0$ 和 $x_0 \in B_{0.8}$，我们定义：

$$S_\mu(x_0) = \{z \in B_1 : (u - h_{v_0,x_0})(z) \leq u_0(x_0) + \mu\}.$$

于是我们有

$$(1 - 0.1\sigma)E_\mu(x_0) \subset S_\mu(x_0) \subset (1 + 0.1\sigma)E_\mu(x_0),$$

对于任意 $\mu_0^2 < \mu \leq \mu_0$.

证明。由引理 4.6 可直接得到，只需在该引理中取 u_0 为 u、v 为 v_0。取 $\delta = 4\varepsilon$，并假设定理 1.3 中所述的 γ_n 足够小，从而使 $|(v_0)_{i\bar{j}} - \delta_{ij}|$ 和 $|D^3 v_0|$ 在 $B_{0.9}$上都足够小。作出这些选择后，我们可以利用引理 4.6 得出，对于 和 $x_0 \in B_{0.8}$ 及 $4 \cdot 4\varepsilon \leq \mu \leq 0.9 \cdot 0.1^2$，可得：

$$(1 - \gamma)E_\mu(x_0) \subset S_\mu(x_0) \subset (1 + \gamma)E_\mu(x_0).$$

注意，范围 $16\varepsilon \leq \mu \leq 0.9 \cdot 0.1^2$ 包含范围 $\frac{1}{2}\mu_0 \leq \mu \leq \mu_0$。此外，根据关于这些参数的假设，我们得到

$$\gamma \leq \frac{2 \cdot 4\varepsilon}{\mu_0} + 3^{\frac{3}{2}}\mu_0^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sigma}{20} + \frac{\sigma}{20} \leq \frac{\sigma}{10}.$$

□

现在我们需要为 $\mu \leq \mu_0^2$定义 $S_\mu(x_0)$。

设 T_{1,x_0}是一个 $\mathbb{C}$-仿射映射，满足 $T_{1,x_0}(B_{\sqrt{\mu_0}}(0)) = E_{\mu_0}(x_0)$。我们希望根据椭球 $E_{\mu_0}(x_0)$ 与球的接近程度，估计 $\tilde{T}_{1,x_0}$ 与恒等映射的偏离程度。为此，我们需要以下引理：

引理 4.8。设 $E \subset \mathbb{C}^n$ 是一个椭球，由下式给出：

$$E = \{z : \sum_{i,j=1}^n a_{i\bar{j}}(z - x_0)_i \overline{(z - x_0)_j} \leq r^2\},$$

其中 $a_{i\bar{j}}$ 是正厄米矩阵，$\det a_{i\bar{j}} = 1$。那么存在一个 $\mathbb{C}$-仿射变换 T，使得 $T(B_r(0)) = E$，$\det T = 1$，且 $||T - I|| \leq \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i^{-\frac{1}{2}} - 1|$, $||T^{-1} - 1|| \leq \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i^{\frac{1}{2}} - 1|$, 其中 λ_i 是 $a_{i\bar{j}}$的特征值。

证明。首先考虑 $a_{i\bar{j}}$ 为对角的情形，此时 $E = \{z : \sum_{i=1}^n \lambda_i |z_i|^2 \leq r^2\}$，其中 $\Pi_i \lambda_i = 1$。然后定义 $T(w) = x_0 + (\frac{w_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \cdots, \frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}})$。一般情形下，我们可以取一个酉变换 U，使得在新的坐标下 E 变为对角形式，那么所需的 $\mathbb{C}$-仿射映射由 $T = U^{-1}T'U$ 给出，其中 T' 是沿坐标轴的膨胀映射。因此，结论可由对角情形推出。□

因此，我们得到：

引理 4.9. 设 u 和 Ω 如定理 1.3 中所述。假设 γ 足够小，$\tilde{}$ 取决于 n。令 T_{1,x_0} 为引理 4.8 给出的 $\mathbb{C}$-仿射映射，该引理应用于 $E_{\mu_0}(x_0)$。那么对于某个 $C_n' > 0$，我们有

$$||\tilde{T}_{1,x_0} - I|| \leq C_n'\gamma^{\frac{1}{2}}, \ ||\tilde{T}_{1,x_0}^{-1} - I|| \leq C_n'\gamma^{\frac{1}{2}}.$$

证明。注意到 $E_\mu(x_0) = \{z : \sum_{i,j}(v_0)_{i\bar{j}}(x_0)(z-x_0)_i(z-x_0)_j \leq \mu\}$。由推论 4.4 可知，对于所有足够小的 γ，都有 $|(v_0)_{i\bar{j}} - \delta_{ij}| \leq C_n\gamma^{\frac{1}{2}}$。因此 $1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_i \leq 1 + C_n\gamma^{\frac{1}{2}}$。所以

$$|\lambda_i^{\frac{1}{2}} - 1| \leq |(1 + C_n\gamma^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} - 1| \leq C_n'\gamma^{\frac{1}{2}},$$

这意味着 $||\tilde{T}_{1,x_0}^{-1} - I|| \leq C_n'\gamma^{\frac{1}{2}}$。关于 $||\tilde{T}_{1,x_0} - I||$ 的估计类似。 □

为了对 $\mu < \mu_0^2$ 定义 $S_\mu(x_0)$，我们需要将椭球 $E_{\mu_0}(x_0)$ 缩放为单位球。定义坐标变换：

$$z^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\tilde{T}_{1,x_0}^{-1}(z).$$

于是 $\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\tilde{T}_{1,\,x_0}^{-1}(E_{\mu_0}(x_0)) = B_1(0)$。定义 $\Omega_{x_0,\,1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\tilde{T}_{1,\,x_0}^{-1}(S_{\mu_0}(x_0))$。根据推论 4.7，我们有：

$$B_{1-0.1\sigma}(0) \subset \Omega_{x_0,1} \subset B_{1+0.1\sigma}(0), \ \Omega_{x_0,1} \text{ is pseudoconvex.}$$

定义 $v_{x_0,\,1}$ 为以下狄利克雷问题的解：

$$\begin{aligned} &\det(v_{x_0,1})_{i\bar{j}} = 1, \quad \text{in } \Omega_{x_0,1}, \\ &v_{x_0,1} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_{x_0,1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

我们可以将 $\Omega_{x_0,\,1}$ 上的 u 归一化为：

$$u_{x_0,1} = \frac{1}{\mu_0}\big(u - u(x_0) - h_{v_0,x_0} - \mu_0\big)(\tilde{T}_{1,x_0}(\sqrt{\mu_0}z^{(1)})), \ \ z^{(1)} \in \Omega_{x_0,1}. \tag{4.4}$$

Then

$$\begin{aligned} &\det(u_{x_0,1})_{i\bar{j}} = f_{x_0,1} \text{ in } \Omega_{x_0,1}, f_{x_0,1}(z^{(1)}) = f(\tilde{T}_{1,x_0}(\sqrt{\mu_0}z^{(1)})), \\ &u_{x_0,1} = 0 \text{ on } \partial\Omega_{x_0,1}. \end{aligned}$$

我们注意到，对于 $u_{x_0,\,1}$ 和 $v_{x_0,\,1}$，以下结论成立：

引理 4.10。设 $v_{x_0,\,1}$ 和 $u_{x_0,\,1}$ 分别由 (4.3) 和 (4.4) 定义。假设 $\sigma \leq \gamma_n$，其中 γ_n 由引理 4.3 给出。设 μ_0 由 4.2 定义。则以下结论成立：

(1) $v_{x_0,1} \in C^4(B_{0.95})$，以及 $|D^m(v_{x_0,1} - (|z^{(1)}|^2 - 1))|_{B_{0.9}} \leq C_n\sigma^{1-\frac{m}{4}}$，$m = 1, 2, 3$，其中 C_n 与推论 4.4 中的 C_n 相同。(2) $|v_{x_0,1} - u_{x_0,1}| \leq 4\varepsilon$ 在 $\Omega_{x_0,1}$ 中。(3) 定义

$$\tilde{h}_{x_0,1}(z^{(1)}) = Re\big(\sum_i (v_{x_0,1})_i(0)z_i^{(1)} + \sum_{i,j}(v_{x_0,1})_{ij}(0)z_i^{(1)}z_j^{(1)}\big),$$

那么对于 $\mu_0^2 \le \mu \le \mu_0$，我们有：

$$(1-0.1\sigma)\tilde{E}_\mu(0) \subset \{z^{(1)} \in B_1 : (u_{x_0,1} - \tilde{h}_{x_0,1} - u_{x_0,1}(0))(z^{(1)}) \le \mu\}$$
$$\subset (1+0.1\sigma)\tilde{E}_\mu(0),$$

where $\tilde{E}_\mu(0) = \{z^{(1)} : \sum_{i,j}(v_{x_0,1})_{i\bar{j}}(0) z_i^{(1)} z_{\bar{j}}^{(1)} \le \mu\}$.

~(4)~令 T_{2,x_0} 为引理 4.8 给出的将 $E_{\mu_0}(x_0)$ 规范化的 $\mathbb{C}$-仿射变换，则有：

$$||\tilde{T}_{2,x_0} - I|| \le C_n' \sigma^{\frac{1}{2}}, \quad ||\tilde{T}_{2,x_0}^{-1} - I|| \le C_n' \sigma^{\frac{1}{2}},$$

其中 C_n' 是引理 4.9 给出的常数。

证明。为证明 (1)，只需注意到，由于 $v_{x_0,1}$ 是方程 (4.3) 的解，且 $B_{1-0.1\sigma} \subset \Omega_{x_0,1} \subset B_{1+0.1\sigma}$，并且 $\sigma \le \gamma_n$，因此可应用引理 4.3 和推论 4.4，得到 (1) 成立，其中将 γ 替换为 σ。上面的第 (2) 项由引理 4.5 得出，因为$u_{x_0,1}$ 是 $\det(u_{x_0,1})_{i\bar{j}} = f_{x_0,1}$ 的解，且$|f_{x_0,1} - 1| \le \varepsilon$ （因为 f 满足相同条件）。第 (3) 项基本上由引理 4.6 应用于 $v = v_{x_0,1}$, $u = u_{x_0,1}$, $c = 1$, $\delta = 4\varepsilon$,$x_0 = 0$ 得出。由于我们对 μ_0 和 ε的选择，可得 $\gamma \le 0.1\sigma$。此外，引理 4.6 中 μ的取值范围为 $4 \cdot 4\varepsilon \le \mu \le 0.9^3$ （其中 $x_0 = 0$），它包含取值范围 $\mu_0^2 \le \mu \le \mu_0$。第 (4) 项的证明由引理 4.9 得出，这是因为第 (3) 项。□

我们定义

$$\tilde{S}_{1,\mu}(0) = \{z^{(1)} \in B_{0.9} \subset \Omega_{x_0,1} : (u_{x_0,1} - \tilde{h}_{x_0,1} - u_{x_0,1}(0))(z^{(1)}) \le \mu\}, \ \mu_0^2 < \mu \le \mu_0.$$

现在，我们可以通过变回 z 变量来定义 $S_\mu(x_0)$，其中 $\mu_0^3 < \mu \le \mu_0^2$。换言之，对于 $\mu_0^3 < \mu \le \mu_0^2$，我们定义

$$S_\mu(x_0) = \tilde{T}_{1,x_0}\big(\sqrt{\mu_0}\tilde{S}_{1,\mu_0^{-1}\mu}(0)\big)$$
$$= \{z \in 0.9E_{\mu_0}(x_0) \subset S_{\mu_0}(x_0) : u(z) - h_{v_0,x_0}(z) - \mu_0\tilde{h}_{x_0,1}(\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\tilde{T}_{1,x_0}^{-1}(z)) \le u(x_0) + \mu\}.$$

接下来，我们使用归纳过程来定义所有 $0 < \mu \le \mu_0$对应的 $S_\mu(x_0)$。假设对于某个 $k_0 \ge 2$，我们已定义了所有$\mu_0^{k_0} < \mu \le \mu_0$对应的 $S_\mu(x_0)$，现在希望为 $\mu_0^{k_0+1} < \mu \le \mu_0^{k_0}$定义 $S_\mu(x_0)$。

我们作出以下归纳假设，并用 k_0表述：

(1) $S_\mu(x_0) = \{z \in S_{\mu_0^{k-2}}(x_0) : u(z) - h_{x_0,\ k-2}(z) \le u(x_0) + \mu\}$，对所有 $\mu_0^k < \mu \le \mu_0^{k-1}$，$2 \le k \le k_0$均成立。这里$h_{x_0,\ k-2}$ 是一个二次多重调和多项式。(2) 存在一个以 x_0为中心的椭球族 $E_\mu(x_0)$，使得$(1-0.1\sigma)E_\mu(x_0) \subset S_\mu(x_0) \subset (1+0.1\sigma)E_\mu(x_0)$。此外，

$$E_\mu(x_0) = \{z : \sum_{i,j} a_{i\bar{j},k-2}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j} \le \mu\},$$

对于所有的 $\mu_0^k < \mu \le \mu_0^{k-1}$、$2 \le k \le k_0$ 和 $\det a_{i\bar{j},\ k-2} = 1$。

(3) 存在一列 $\mathbb{C}$-仿射坐标变换：$z^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\tilde{T}_{k\ x_0}^{-1}(z^{(k-1)})$，满足$k \ge 2$，$z^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\tilde{T}_{x_0,\ 1}^{-1}(z - x_0)$，且 $\det \tilde{T}_{k,\ x_0} = 1$。$\tilde{T}_{k,\ x_0}$将$B_{\sqrt{\mu_0}}(0)$映为 $E_{\mu_0^k}(x_0)$在 $z^{(k-1)}$下的像。此外，对所有 $2 \le k \le k_0 - 1$，$||\tilde{T}_{k,\ x_0} - I|| \le C_n'\sigma^{\frac{1}{2}}$, $||\tilde{T}_{k\ ,\ x_0}^{-1} - I|| \le C_n'\sigma^{\frac{1}{2}}$。

(4) 记 $\Omega_{x_0,\ k}$ 为 $S_{\mu_0^k}(x_0)$在坐标 $z^{(k)}$下的像，则对所有 $1 \le k \le k_0 - 1$，有$B_{1-0.1\sigma} \subset \Omega_{x_0,\ k} \subset B_{1+0.1\sigma}$。(5) $E_\mu(x_0)$在坐标 $z^{(k-1)}$ 下的像为$B_{\sqrt{\mu_0^{1-k}\mu}}(0)$，其中 $\mu_0^k < \mu \le \mu_0^{k-1}$,$2 \le k \le k_0$。

首先我们注意到，上述归纳假设确实对 $k_0 = 2$ 成立。事实上，(1) 和 (3) 可由推论 4.7 得出。(2) 可由引理 4.10 的第 (3) 项得出。

现在我们将为 $\mu_0^{k+1} \le \mu < \mu_0^{k_0}$ 构造 $S_\mu(x_0)$，并验证将 k_0 替换为 $k_0 + 1$ 后，上述归纳假设仍然成立。也就是说，我们证明：

引理 4.11。假设上述归纳假设对某个 $k_0 \ge 2$ 成立，那么我们可以为 $\mu_0^{k_0+1} < \mu \le \mu_0^{k_0}$ 构造 $S_\mu(x_0)$，使得将 k_0 替换为 k_0+1 后，归纳假设仍然成立。特别地，对所有 $k_0 \ge 2$，归纳假设都成立。

证明。我们在 $\Omega_{x_0,\ k_0-1}$ 上求解以下狄利克雷问题：

$$\det(v_{x_0,k_0-1})_{i\bar{j}} = 1, \quad \text{in } \Omega_{x_0,k_0-1}, \quad v_{x_0,k_0-1} = 0 \text{ on } \partial\Omega_{x_0,k_0-1}. \tag{4.5}$$

定义 $T_{k,\ x_0} = \tilde{T}_{1,\ x_0} \circ \tilde{T}_{2,\ x_0} \cdots \tilde{T}_{k,\ x_0}$，使得 $z^{(k)}$ 与 z 之间的坐标变换由 $z = x_0 + T_{k,\ x_0}(\mu_0^{\frac{k}{2}} z^{(k)})$ 给出。

$$u_{x_0,k_0-1}(z^{(k_0-1)}) = \frac{1}{\mu_0^{k_0-1}}(u - h_{x_0,k_0-2} - u(x_0) - \mu_0^{k_0-1})(x_0 + T_{k_0-1,x_0}(\mu_0^{\frac{k_0-1}{2}} z^{(k_0-1)})). \tag{4.6}$$

那么$u_{x_0,\ k_0-1}$ 满足：

$$\det(u_{x_0,k_0-1})_{i\bar{j}} = f_{x_0,k_0-1}, \ \text{ in } \Omega_{x_0,k_0-1}, \ f_{x_0,k_0-1} = f(x_0 + T_{k_0-1,x_0}(\mu_0^{\frac{k_0-1}{2}} z^{(k_0-1)})),$$
$$u_{x_0,k_0-1} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega_{x_0,k_0-1}.$$

利用与引理 4.10 中 (1) 相同的论证，我们有 $v_{x_0,\ k_0-1} \in C^4(B_{0.95})$，且 $|D^m(v_{x_0,\ k_0-1} - |z^{(k_0-1)}|^2 - 1)|_{B_{0.9}} \le C_n\sigma^{1-\frac{m}{4}}$ 对于 $m = 1$、2、3 成立。这由我们的归纳假设 $B_{1-0.1\sigma} \subset \Omega_{x_0,\ k_0-1} \subset B_{1+0.1\sigma}$，以及引理 4.3 和推论 4.4 的应用得到。此外，我们还有

$$|v_{x_0,k_0-1} - u_{x_0,k_0-1}| \le 4\varepsilon \text{ on } \Omega_{x_0,k_0-1},$$

按照引理 4.10 中的相同论证。

然后，我们可以考虑 $v_{x_0,\ k_0-1}$ 在 $z^{(k_0-1)} = 0$处的泰勒展开：

$$v_{x_0,k_0-1}(z^{(k_0-1)}) = v_{x_0,k_0-1}(0) + Re\big(\sum_i l_i z_i^{(k_0-1)}\big) + \sum_{i,j} a_{i\bar{j}} z_i^{(k_0-1)} \bar{z}_j^{(k_0-1)}$$
$$+ Re\big(\sum_{i,j} b_{ij} z_i^{(k_0-1)} z_j^{(k_0-1)}\big) + O(|z^{(k_0-1)}|^3).$$

定义

$$\tilde{h}_{x_0,k_0-1}(z^{(k_0-1)}) = Re(\sum_i l_i z_i^{(k_0-1)}) + Re\big(\sum_{i,j} b_{ij} z_i^{(k_0-1)} z_j^{(k_0-1)}\big). \tag{4.7}$$

那么，引理 4.10 第 (3) 部分的论证表明：

(4.8)

$$(1-0.1\sigma)\tilde{E}_\mu(0)$$
$$\subset \tilde{S}_{k_0-1,\mu} := \{z^{(k_0-1)} \in \Omega_{x_0,k_0-1} : (u_{x_0,k_0-1} - \tilde{h}_{x_0,k_0-1} - u_{x_0,k_0-1}(0))(z^{(k_0-1)}) \le \mu\}$$
$$\subset (1+0.1\sigma)\tilde{E}_\mu(0),$$

对任意 $\mu_0^2 < \mu \le \mu_0$，其中 $\tilde{E}_\mu(0) = \{z^{(k_0-1)} : \sum_{i,j}(v_{x_0,k_0-1})_{i\bar{j}}(0) z_i^{(k_0-1}\ \bar{z}^{(k_0-1)}{}_j) \le \mu\}$。现在我们定义 T_{k_0,x_0} 为由引理 4.8 给出的 $\mathbb{C}$-线性变换，用以将上述 $E_{\mu_0}(0)$ 规范化。于是对 $\mu_0^{k_0+1} < \mu \le \mu_0^{k_0}$，我们定义

$$S_\mu(x_0) = x_0 + \tilde{T}_{k_0,x_0}(\mu_0^{\frac{k_0-1}{2}} \tilde{S}_{k_0-1,\mu_0^{-(k_0-1)}\mu}).$$

类似地，我们定义

$$E_\mu(x_0) = x_0 + \tilde{T}_{k_0,x_0}(\mu_0^{\frac{k_0-1}{2}} \tilde{E}_{\mu_0^{-(k_0-1)}\mu}).$$

利用 (4.6)，可得对于 $\mu_0^{k_0+1} \le \mu < \mu_0^{k_0}$：

$$S_\mu(x_0) = \{z \in 0.9E_{\mu_0^{k_0-1}}(x_0) : u(z) - h_{x_0,k_0-2}(z) - \mu_0^{k_0-1}\tilde{h}_{x_0,k_0-1}(\mu_0^{-\frac{k_0-1}{2}} T_{k_0-1,x_0}^{-1}(z-x_0)) \le \mu\}.$$

定义

$$h_{x_0,k_0-1}(z) = h_{x_0,k_0-2}(z) + \mu_0^{k_0-1}\tilde{h}_{x_0,k_0-1}(\mu_0^{-\frac{k_0-1}{2}} T_{k_0-1,x_0}^{-1}(z-x_0)).$$

鉴于 (4.7)，以及关于 $h_{x_0,k_0-2}(z)$ 的归纳假设，我们看到 $h_{x_0,k_0-1}(z)$ 是一个次数为 2 的多重调和多项式，并且 $h_{x_0,k_0-1}(x_0) = 0$。这就证明了对 $k = k_0+1$ 的归纳假设第 (1) 部分。

第 (2) 部分直接由 (4.8) 以及 $\det(v_{x_0,k_0-1})_{i\bar{j}}(0) = 1$ 和 $\det T_{k,x_0} = 1$ 这一事实得出。

由于 $|(v_{x_0,k_0-1})_{i\bar{j}}(0) - \delta_{ij}| \le C_n\sigma^{\frac{1}{2}}$，引理 4.10 的第 (4) 部分中的论证表明

$$||\tilde{T}_{k_0,x_0} - I|| \le C_n'\sigma^{\frac{1}{2}},\ \ ||\tilde{T}_{k_0,x_0}^{-1} - I|| \le C_n'\sigma^{\frac{1}{2}}.$$

利用 $\tilde{T}_{k_0,x_0}$，我们可以定义坐标变换 $z^{(k_0)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\tilde{T}_{k_0}^{-1}{}_{,x_0}(z^{(k_0-1)})$。这就证明了归纳假设的第 (2) 部分，其中 $k = k_0$。第 (3) 部分由 (4.8)、我们上面对 T_{k_0,x_0} 的选择以及˜得出。□

现在我们已构造出 $S_\mu(x_0)$，对于 $0 < \mu \le \mu_0$，接下来验证命题 4.1。

第 (1) 部分已由上述论证证明。事实上，我们对 $\mu_0^k < \mu \le \mu_0^{k-1}$ 定义 $h_{\mu,x_0}(z) = h_{x_0,k-1}(z)$。事实上，命题 4.1 的第 (1) 部分由归纳假设的第 (1) 和第 (2) 部分推出。现在我们验证命题 4.1 的第 (2) 部分。首先，我们从上述归纳过程中得到以下观察。

引理 4.12. 设 $0 < \mu_1 < \mu_2$，则以下结论成立：

(1) 如果存在某个 $k \ge 2$，使得 $\mu_0^k < \mu_1 < \mu_2 \le \mu_0^{k-1}$，那么 $S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{\mu_2}(x_0)$，$E_{\mu_1}(x_0) \subset E_{\mu_2}(x_0)$；(2) 如果存在某个 $k \ge 1$，使得 $\frac{1}{2}\mu_0^k < \mu_2$ 且 $\mu_1 \le \mu_0^{k+1}$，那么 $S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{\mu_2}(x_0)$，$E_{\mu_1}(x_0) \subset E_{\mu_2}(x_0)$。

证明。上面的（1）显然成立，这是归纳假设的（1）和（2）所致。

第 (2) 部分需要更多工作，因为 $S_\mu(x_0)$ 和 $E_\mu(x_0)$ 在 μ 中对于 $\mu \to \mu_0^k+$ 和 $\mu \to \mu_0^k-$ 是不连续的。首先，不失一般性，我们可以假设$\mu_0^{k+2} < \mu_1 \le \mu_0^{k+1}$。

如果 $\mu_0^k < \mu_2 \le \mu_0^{k-1}$（此处 $k \ge 2$），根据归纳假设第 (5) 部分，我们知道 s 在 $z^{(k-1)}$ 下， $E_{\mu_2}(x_0)$ 由 $B_{\sqrt{\mu_0^{1-k}\mu_2}}(0)$ 给出。另一方面，$E_{\mu_1}(x_0)$ 在 $z^{(k+1)}$ 下的像由 $B_{\sqrt{\mu_0^{-1-k}\mu_1}}(0)$ 给出。因此，回想归纳假设第 (3) 部分给出的过渡公式，我们可知:

$$\begin{aligned} &E_{\mu_1}(x_0) \text{ under } z^{(k-1)} = \mu_0 \tilde{T}_{k+1,x_0} \circ \tilde{T}_{k,x_0}(B_{\sqrt{\mu_0^{-1-k}\mu_1}}(0)) \\ &\subset (1 + C_n' \sigma^{\frac{1}{2}})^2 B_{\sqrt{\mu_0^{1-k}\mu_1}}(0). \end{aligned} \tag{4.9}$$

在上面的第一个包含关系中，我们用到了 $||\tilde{T}_{i,x_0}|| \le 1 + C_n' \sigma^{\frac{1}{2}}$。因此

$$\text{image of } S_{\mu_1}(x_1) \text{ under } z^{(k-1)} \subset B_{(1+0.1\sigma)(1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})^2\sqrt{\mu_0^{1-k}\mu_1}}(0)$$

另一方面,

$$\text{image of } S_{\mu_2}(x_2) \text{ under } z^{(k-1)} \supset (1 - 0.1\sigma) B_{\sqrt{\mu_2\mu_0^{1-k}}}(0)$$

如果我们能确保：我们就可以证明 $S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{\mu_2}(x_0)$

$$(1 + C_n' \sigma^{\frac{1}{2}})^4 (1 + 0.1\sigma)^2 \mu_1 \le (1 - 0.1\sigma)^2 \mu_2.$$

只要取 μ_0 足够小，使得 $(1 + C_n' \sigma^{\frac{1}{2}})^4 {}_{(1+0.1\sigma)^2\,(1-0.1\sigma)_2} \le \mu_0^{-1}$，就能保证这一点，因为 $\mu_2 \ge \mu_0\mu_1$。

另一种情况是 $\frac{1}{2}\mu_0^k < \mu_2 \le \mu_0^k$。这种情况下的计算与 $\mu_0^k < \mu_2 \le \mu_0^{k-1}$ 时的情况类似，但我们需要使用坐标 $z^{(k)}$，于是可以得出:

$$\text{image of } S_{\mu_2}(x_0) \text{ under } z^{(k)} \supset (1 - 0.1\sigma) B_{\sqrt{\mu_2\mu_0^{-k}}}(0),$$

另一方面,

$$\text{image of } S_{\mu_1}(x_0) \text{ under } z^{(k+1)} \subset (1 + 0.1\sigma) B_{\sqrt{\mu_1\mu_0^{-1-k}}}(0).$$

因此，利用 $z^{(k)}$ 和 $z^{(k+1)}$之间的变换:

$$\text{image of } S_{\mu_1}(x_0) \text{ under } z^{(k)} \subset \sqrt{\mu_0}(1 + C_n' \sigma^{\frac{1}{2}})(1 + 0.1\sigma) B_{\sqrt{\mu_1\mu_0^{-1-k}}}(0).$$

只要我们能确保：就能得到包含关系。

$$(1 - 0.1\sigma)^2 \mu_2 \ge (1 + C_n' \sigma^{\frac{1}{2}})^2 (1 + 0.1\sigma)^2 \mu_1.$$

由于 $\mu_2 \ge \frac{1}{2}\mu_1\mu_0$，这一点仍然成立，而且我们可以将 μ_0 取到足够小。 □

借助前一个引理，我们现在可以证明第 (2) 部分所述的截面的近似单调性:

推论 4.13. 设 $c(\sigma) = \frac{(1+0.1\sigma)^2}{(1-0.1\sigma)^2}(1 + C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})^2 - 1$，其中 C_n' 由引理 4.10 给出。那么对于所有 $0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \frac{\mu_0}{1+c(\sigma)}$ 以及任意 $x_0 \in B_{0.8}$,

$$S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{(1+c(\sigma))\mu_2}(x_0).$$

证明。记 $c(\sigma) = \frac{(1+0.1\sigma)^2}{(1-0.1\sigma)^2}(1 + C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})^2 - 1$。令 $k \ge 1$ 满足 $\mu_0^{k+1} < \mu_1 \le \mu_0^k$ 且 $\mu_2 > \mu_1$。需要考虑几种情形：

情形 1： $\mu_0^{k+1} < \mu_1 < \mu_2 \le \frac{\mu_0^k}{1+c}(\sigma)$。那么由引理 4.12 可知， $S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{(1+c(\sigma))\mu_2}(x_0)$。

情形 2： $\frac{\mu_0^k}{1+c}(\sigma) < \mu_2 \le \frac{\mu_0^{k-1}}{1+c\ \sigma}()$ （针对这种情形，$k \ge 2$ ）。

首先，在坐标 $z^{(k-1)}$ 下，我们有以下包含关系：

$$\begin{aligned} &\text{image of } S_{(1+c(\sigma))\mu_2}(x_0) \text{ under } z^{(k-1)} \supset B_{(1-0.1\sigma)\sqrt{(1+c(\sigma))\mu_2\mu_0^{1-k}}}(0) \\ &= B_{(1+0.1\sigma)(1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})\sqrt{\mu_2\mu_0^{1-k}}}(0). \end{aligned} \tag{4.10}$$

另一方面，若考虑 $S_{\mu_1}(x_0)$ 在 $z^{(k)}$ 下的像，则有

$$\text{image of } S_{\mu_1}(x_0) \text{ under } z^{(k)} \subset B_{(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_1\mu_0^{-k}}}(0)$$

接下来我们使用 $z^{(k)}$ 与 $z^{(k-1)}$之间的变换： $z^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\tilde{T}_{k,\ x_0}(z^{(k-1)})$，得到：

(4.11)

$$\text{Image of } S_{\mu_1}(x_0) \text{ under } z^{(k-1)} \subset \sqrt{\mu_0}\tilde{T}_{k,x_0}^{-1}(B_{(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_1\mu_0^{-k}}}(0)) \subset B_{(1+0.1\sigma)(1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})\sqrt{\mu_1\mu_0^{1-k}}}(0).$$

结合 (4.10) 和 (4.11)，我们得到：

$$S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{(1+c(\sigma))\mu_2}(x_0).$$

情形 3： $\mu_2 \ge \frac{\mu_0^{k-1}}{1+c\ \sigma}()$ （此情形下的 $k \ge 2$ ）。

不失一般性，我们可以假设 σ 足够小，使得 $1 + c(\sigma) < 2$，那么结论可由引理 4.12 得出。由于 $\mu_1 \le \mu_0^k$ 但 $\mu_2 \ge \frac{1}{2}\mu_0^{k-1}$。□

现在我们验证命题 4.1 的第 (3) 部分。

引理 4.14。定义 $T_{\mu,x_0} = T_{k,x_0} := \tilde{T}_{1,x_0} \circ \tilde{T}_{2,x_0} \cdots \tilde{T}_{k,x_0}$，其中 $\mu_0^{k+1} < \mu \le \mu_0^k$, $k \ge 1$。那么对于 $0 < \mu_1 < \mu_2 \le \mu_0$，我们有：

$$||T_{\mu_1,x_0}^{-1} \circ T_{\mu_2,x_0}||,\ ||T_{\mu_2,x_0}^{-1} \circ T_{\mu_1,x_0}|| \le C_{3,n}\big(\frac{\mu_2}{\mu_1}\big)^{\frac{C_{3,n}\sigma^{\frac{1}{2}}}{\log(0.1\sigma)}}.$$

这里 $C_{3,n}$ 是某个维数常数。

证明。首先我们找到 $k_1 \ge k_2$，使得 $\mu_0^{k_1+1} < \mu_1 \le \mu_0^{k_1}$, $\mu_0^{k_2+1} < \mu_2 \le \mu_0^{k_2}$。然后我们有：

$$T_{\mu_1,x_0}^{-1} \circ T_{\mu_2,x_0} = \tilde{T}_{k_1,x_0}^{-1} \circ \tilde{T}_{k_1-1,x_0}^{-1} \cdots \tilde{T}_{k_2+1,x_0}^{-1},\ \ T_{\mu_2,x_0}^{-1} \circ T_{\mu_1,x_0} = \tilde{T}_{k_2+1,x_0} \circ \tilde{T}_{k_2+1,x_0} \cdots \tilde{T}_{k_1,x_0}.$$

然后，我们可以使用归纳假设的第 (3) 部分：

$$||T_{\mu_1,x_0}^{-1} \circ T_{\mu_2,x_0}|| \le \Pi_{k=k_2}^{k_1-1}||T_{k,x_0}^{-1}|| \le (1 + C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})^{k_1-k_2}.$$

另一方面，我们很容易得到界 $\mu_0^{k_2-k_1+1} \le \frac{\mu_2}{\mu_1}$，因此

$$||T^{-1}_{\mu_1,x_0} \circ T_{\mu_2,x_0}|| \le (1+C'_n\sigma^{\frac{1}{2}})^{-\frac{\log(\mu_2\mu_1^{-1})}{-\log(\mu_0)}+1}.$$

回忆一下我们在 (4.2) 中对 μ_0的选择： $3^{\frac{3}{2}}\mu_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{20}$。于是所需的估计很容易得出。同样的计算也适用于 $T^{-1}_{\mu_2,x_0} \circ T_{\mu_1,x_0}$。□

直接推论是，当 $\mu \to 0$时， $S_\mu(x_0)$ 的直径应趋于零。具体而言：推论 4.15。假设 σ 足够小（取决于 n）。那么，当 $\mu \to 0$时， $S_\mu(x_0)$ 的直径趋于零。对 $x_0 \in B_{0.8}$而言，这种收敛是一致的。

证明。由于对于 $\mu_0^2 < \mu \le \mu_0$, $T_{\mu,x_0} = id$，我们可知，对于任意 $\mu \le \mu_0^2$,

$$||T^{-1}_{\mu,x_0}||, \ ||T_{\mu,x_0}|| \le C_{3,n}(\frac{\mu}{\mu_0})^{\frac{C_{3,n}\sigma^{\frac{1}{2}}}{\log(0.1\sigma)}}.$$

另一方面， $T_{\mu,x_0}(B_{\sqrt{\mu}}(0)) = E_\mu(x_0) - x_0$，我们可知

$$diam\, E_\mu(x_0) \le 2\mu^{\frac{1}{2}}||T_{\mu,x_0}|| \le 2C_{3,n}\mu^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{\mu}{\mu_0})^{\frac{C_{3,n}\sigma^{\frac{1}{2}}}{\log(0.1\sigma)}}.$$

[1]若 σ 足够小，使得 $\frac{1}{2} + \frac{C_{3,n}\sigma^{\frac{1}{2}}}{\log(0.1\sigma)} > 0$，那么当 $\mu \to 0$ 时，右端趋于零。由此可得 $S_\mu(x_0) \subset (1+0.1\sigma)E_\mu(x_0)$。□

4.2. 截面的进一步性质。我们的目的是利用命题 4.1 给出的截面，替代一致椭圆情形下球所起的作用。我们需要的最关键性质是截面的以下“包裹性质”，表述如下：

命题 4.16。假设 x_1、 $x_2 \in B_{0.8}$、 $0 < \mu_1$、 $\mu_2 \le \mu_0$ 和 $\mu_1 \le 4\mu_2$。令 $\sigma > 0$ 足够小（仅取决于维数）。另假设 $S_{\mu_1}(x_1) \cap S_{\mu_2}(x_2) \ne \emptyset$，则 $S_{\mu_1}(x_1) \subset 10S_{\mu_2}(x_2)$。

在 Caffarelli 对实数情形下的 $W^{2,p}$ 估计的证明中，我们也需要这种“包裹性质”，但在实数情形下，这一性质并不是问题。关键在于“截面在线性变换下的不变性”。更具体地说，在实数情形下，截面定义如下：（其中 u 是严格凸函数）

$$S_\mu(x_0) = \{x : u(x) \le u(x_0) + \nabla u(x_0) \cdot (x - x_0) + \mu\}, \ \mu > 0.$$

现在定义 $v(y) = \frac{1}{r^2}u(x'_0 + rTy)$，其中 T 是行列式为 $T = 1$ 的线性变换。这样的变换会保持 Monge-Ampere 方程不变。在坐标变换 $x = x'_0 + rTy$ 下， $S_\mu(x_0)$ 将变为以 y_0 为中心、高度为 $\frac{\mu}{r^2}$ 的 v 的截面：$= T^{-1}(\frac{1}{r}(x_0 - x'_0))$。

在复数情形下，我们不再具有这一性质。事实上，如果进行类似的坐标变换（此时 T 是 $\mathbb{C}$-线性的），并对变量 y 中的函数 v 按照命题 4.1 中所述的方法进行同样的构造，再变换回 x，得到的截面将不同于直接在原始 x 坐标中构造的截面。这两种定义相差一个多重调和函数。

以下“唯一性”性质为我们解决了问题：它表明，只要所得截面接近椭球，加上一个多重调和函数就不会对这些截面产生影响。

引理 4.17. 设 u 是定义在开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 上的函数，并设 $h(z)$ 是 U 上的多重调和函数，使得 $h(0) = 0$。设 $0 < \gamma < 1$ 和 $\mu > 0$ 满足：

$$\begin{aligned} &B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}(0) \subset \{u \le u(0) + \mu\} \subset B_{(1+\gamma)\sqrt{\mu}}(0) \subset U, \\ &(1-\gamma)E_\mu(0) \subset \{u \le h + u(0) + \mu\} \subset (1+\gamma)E_\mu(0) \subset U. \end{aligned} \tag{4.12}$$

在上述内容中，$E_\mu(0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i,\ j=1}^n a_{i\bar{j}} z_i \bar{z}_j \le \mu\}$ 其中 $a_{i\bar{j}}$ 为正定厄米矩阵。因此我们有：

$$B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}(0) \subset (1+\gamma)E_\mu(0), \quad (1-\gamma)E_\mu(0) \subset B_{(1+\gamma)\sqrt{\mu}}(0). \tag{4.13}$$

证明。首先，必要时通过酉变换，我们可以假设$E_\mu(0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i |z_i|^2 \le \mu\}$ 且 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \cdots \le \lambda_n$。此外，只需证明 (4.13) 中两个包含关系之一，例如 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}(0) \subset (1+\gamma)E_\mu(0)$。为了证明另一个包含关系，我们可以作坐标变换：$w_i = \sqrt{\lambda_i} z_i$，使得 $E_\mu(0)$变为 $B_{\sqrt{\mu}}(0)$，并用 $v(z) := u(z) - h(z)$替换 u。于是，第二个包含关系可由第一个推出。

我们希望通过矛盾法进行论证，并假设 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}(0)$ 不包含于 $(1+\gamma)E_\mu(0)$，那么必有：

$$B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}(0) \cap \partial\big((1+\gamma)E_\mu(0)\big) \neq \emptyset.$$

注意，$u \ge h(z) + u(0) + \mu$在 $(1+\gamma)\partial E_\mu(0)$ 上，且 $u \le u(0) + \mu$在 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}$ 中。因此，$h(z) \le 0$ 在 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}} \cap (1+\gamma)\partial E_\mu$ 上。我们将证明，若此超曲面非空，它实际上界定了一个非平凡区域，从而可得在 0 的一个邻域内有 $h \le 0$。由于 h 是一个多重调和函数，且 $h(0) = 0$，我们可以利用强极大值原理得到 $h \equiv 0$。因此，(4.12) 将给出 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}(0) \subset \{u \le h + \mu\} \subset (1+\gamma)E_\mu(0)$，这与我们上面的假设矛盾。

首先，我们给出 $n = 2$ 时的论证。我们要证明，如果 $\lambda_2 > (1+\gamma)(1-\gamma)^2$，~~那么~~$h \equiv 0$，这将与 (4.12) 矛盾。另一方面，如果 $\lambda_2 \le (1+\gamma)^2\,(1-\gamma)^2$，那么我们~~就会得~~到 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}} \subset (1+\gamma)E_\mu$，这又是一个矛盾。

为了说明 $\lambda_2 > ~~(1+\gamma)^2~~(1-\gamma)^2$ 蕴含 $h \equiv 0$，我们固定某个 $z_{1,*}$，并考察 $(z_{1,*}, z_2)$ 与 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}} \cap (1+\gamma)E_\mu$ 之间的截面（将其视为 $\mathbb{C}$ 中的子集，其中 z_2）。它们由下式给出：

$$\begin{aligned} &|z_{1,*}|^2 + |z_2|^2 \le (1-\gamma)^2\mu, \\ &\lambda_1 |z_{1,*}|^2 + \lambda_2 |z_2|^2 \le (1+\gamma)^2\mu. \end{aligned} \tag{4.14}$$

我们要论证，若 $\lambda_2 > (1+\gamma)^2\,(1-~~\gamma)^2$，~~，~~ 那么对于所有接近零的 $z_{1,*}$，截面的边界都将位于 $(1+\gamma)\partial E_\mu \cap B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}$ 上。由于 $h \le 0$ 位于截面的边界上，因此 $h(z_{1,*}, z_2) \le 0$ 位于截面 $(z_{1,*}, z_2)$ 的内部，因为 h 是多重调和的。对于所有接近 0 的 $z_{1,*}$，这都成立。因此，在 0 的某个邻域内有 $h \ge 0$，由强极大值原理可得 $h \equiv 0$，因为 $h(0) = 0$。

截面的边界位于 $(1+\gamma)\partial E_\mu \cap B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}$，当且仅当（固定 $z_{1,\ *}$ 时）(4.14) 中的第二个不等式蕴含第一个不等式。第一个不等式等价于：

$$|z_2|^2 \le (1-\gamma)^2\mu - |z_{1,*}|^2,$$

而第二个不等式等价于：

$$|z_2|^2 \le \frac{(1+\gamma)^2}{\lambda_2}\mu - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}|z_{1,*}|^2.$$

为了使第二个不等式强于第一个不等式，我们需要满足 :

$$\frac{(1+\gamma)^2}{\lambda_2}\mu - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}|z_{1,*}|^2 \le (1-\gamma)^2\mu - |z_{1,*}|^2. \tag{4.15}$$

若 $\lambda_2 > \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}$，式 (4.15) 中的不等式是严格的，且 $z_{1,\,*} = 0$。因此，当$z_{1,\,*}$足够接近零时，(4.15) 就成立。这证明了我们先前关于截面的边界的断言，并完成了论证，即 $\lambda_2 > \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}$ 蕴含 $h \equiv 0$。若 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}$，则 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}} \subset (1+\gamma)E_\mu$。事实上， $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}$ 由下式给出：

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 \le (1-\gamma)^2\mu,$$

但此时 $\lambda_1|z_1|^2 + \lambda_2|z_2|^2 \le \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}\cdot(1-\gamma)^2\mu = (1+\gamma)^2\mu$，因此 $(z_1, z_2) \in (1+\gamma)E_\mu$.

现在我们来看一般的 n。如同在 $n = 2$中， $\lambda_n \le \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}$ 将立即推出 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}} \subset (1+\gamma)E_\mu$ （因为 λ_n 是最大的特征值），从而立即得到我们要证明的结论。我们只需证明 $\lambda_n > \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}$ 蕴含 $h \equiv 0$，然后(4.12)便可得出结果。

我们为此考虑$(z_{1,\,*}, \cdots, z_{n-1,\,*}, z_n)$与 $B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}} \cap (1+\gamma)E_\mu$之间的截面，它由下式给出：

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1}|z_{i,*}|^2 + |z_n|^2 \le (1-\gamma)^2\mu, \\ &\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i|z_{i,*}|^2 + \lambda_n|z_n|^2 \le (1+\gamma)^2\mu. \end{aligned} \tag{4.16}$$

截面的边界位于$(1+\gamma)\partial E_\mu \cap B_{(1-\gamma)\sqrt{\mu}}$上，当且仅当(4.16)中的第二个不等式比第一个更强。这意味着：

$$\frac{1}{\lambda_n}\big((1+\gamma)^2\mu - \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i|z_{i,*}|^2\big) \le (1-\gamma)^2\mu - \sum_{i=1}^{n-1}|z_{i,*}|^2. \tag{4.17}$$

注意，如果 $\lambda_n > \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}$，则（4.17）中的不等式对于 $z_{i,\,*} = 0$、$1 \le i \le n-1$是严格的。因此，当（$z_{1,\,*}$、 $\cdots$、 $z_{n-1,\,*}$）充分接近 0 时，（4.17）仍将成立。因此，我们将在 0 的一个邻域内得到$h \le 0$，而强极大值原理将推出 $h \equiv 0$。 □

因此，我们得到：

推论 4.18. 设 u 是定义在开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 上的函数，且满足 $0 \in U$。设 $h_1(z)$ $h_2(z)$ 是定义在 U 上的多重调和函数，使得 $h_1(0) = h_2(0) = 0$。设 $0 < \gamma < 1$ 和 $\mu > 0$ 满足：

$$(1-\gamma)E_{p,\mu}(0) \subset \{u \le h_p + u(0) + \mu\} \subset (1+\gamma)E_{p,\mu}(0) \subset U, \quad p = 1,\, 2.$$

在上述条件中，$E_{p,\ \mu}(0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i,\ j} a_{p,\ i\bar{j}} z_i \bar{z}_j \leq \mu\}$，其中 $a_{p,\ i\bar{j}}$ 是正定 Hermitian 矩阵，且 $\det a_{p,\ i\bar{j}} = 1$, $p = 1, 2$。设 T_p 是一个 $\mathbb{C}$-线性变换，将 $B_{\sqrt{\mu}}$ 映射到 $E_{p,\ \mu}$，则有：

$$||T_1^{-1} \circ T_2|| \leq \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}, \quad ||T_2^{-1} \circ T_1|| \leq \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}.$$

证明。我们可以对上述图景应用映射 T_1^{-1}，并将 $E_{1,\mu}$ 化为 $B_{\sqrt{\mu}}(0)$。记 $\tilde{E}_{2,\mu} = T_1^{-1}(E_{2,\mu}) = T_1^{-1} \circ T_2(B_{\sqrt{\mu}})$。于是我们知道，$\tilde{E}_{2,\mu}$ 的特征值介于 $\frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}$ 和 $\frac{(1-\gamma)^2}{(1+\gamma)^2}$ 之间。这就得到了所需结果。□

在继续之前，我们先解释一下推论 4.18 有助于证明包裹性质的思路。假设，比如说，我们有 $S_\mu(x_1) \cap S_\mu(x_2) \neq \emptyset$。取 $x_* \in S_\mu(x_1) \cap S_\mu(x_2)$。我们可以将 $S_{100\mu}(x_1)$ 归一化，使其接近一个单位球，而 $\tilde{S_\mu(x_1)}$ 随后将接近半径为 0.1 的球。现在，我们可以使用新的坐标定义一个高度为 $1\ 100$ 、以 x'_*（在新坐标下 x_* 的像）为中心的截面，使其形状与一个球可比。

然后回到原来的坐标系，我们得到一个以 x_* 为中心、高度为 μ 的截面 S^*，其形状与 $S_\mu(x_1)$ 相当。由推论 4.18，S^* 和 $S_\mu(x_*)$ 也具有相似的形状。因此，我们看到 $S_\mu(x_*)$ 与 $S_\mu(x_1)$ 的形状相当（引理 4.19）。同样，$S_\mu(x_*)$ 与 $S_\mu(x_2)$ 也相当。因此，若将 $S_\mu(x_1)$ 归一化为接近单位球，则另一个截面 $S_\mu(x_2)$ 将接近一个偏心程度不大的椭球。于是，包裹性质可由球的标准包裹性质推出。

引理 4.19. 设 $x_* \in S_\mu(x_0)$ 对于某些 $x_0 \in B_{0.8}$ 和 $0 < \mu \leq \mu_0$ 满足 $\cap B_{0.8}$。令 T_{μ,x_*} 和 T_{μ,x_0} 为命题 4.1 第 (3) 部分给出的 $\mathbb{C}$- 线性变换。那么，当 σ 取得足够小且仅依赖于 n 时，

$$||T_{\mu,x_*}^{-1} \circ T_{\mu,x_0}|| \leq 1.1^3, \quad ||T_{\mu,x_0}^{-1} \circ T_{\mu,x_*}|| \leq 1.1^3.$$

证明。首先，我们可以找到 $k \geq 1$，使得 $\mu_0^{k+1} < \mu \leq \mu_0^k$。我们将在$_{k-1}$坐标 $z^{(k-1)}$ 下进行讨论，它定义为 $z = x_0 + \overline{\mu_0^{\ 2}}\, T_{k-1,x_0}(z^{(k-1)})$，其中 T_{k-1,x_0} 是将一个球映射到 $E_{\mu_0^{k-1}}(0)$ 的 $\mathbb{C}$-线性变换。我们有

$$S_\mu(x_0) \text{ under } z^{(k-1)} = \{z^{(k-1)} : u_{x_0,k-1}(z^{(k-1)}) \leq u_{x_0,k-1}(0) + \tilde{h}_{x_0,k-1}(z^{(k-1)}) + \frac{\mu}{\mu_0^{k-1}}\},$$

其中 $u_{x_0,k-1}$ 是 Ω 上归一化的 $u_{\ x_0,k-1}(S_{\mu_0^{k-1}}(x_0)$ 在 $z^{(k-1)}$ 下接近一个球。）此外，我们还有

$$E_\mu(x_0) \text{ under } z^{(k-1)} = \{z^{(k-1)} : \sum_{i,j} (v_{x_0,k-1})_{i\bar{j}}(0) z_i^{(k-1)} \bar{z}_j^{(k-1)} \leq \frac{\mu}{\mu_0^{k-1}}\}.$$

这里 $v_{x_0,k-1}$ 满足狄利克雷问题 (4.5)。另一方面，记 z_* 为 x_* 在 $z^{(k-1)}$下的像，则我们知道 $z_* \in$是 $S_\mu(x_0)$ 在 $z^{(k-1)}$下的像。

我们可以利用引理 4.6 找到一个以 z_* 为中心、位于 $z^{(k-1)}$ 下方的截面，将 $v_{x_0,k-1}$ 和 $u_{x_0,k-1}$, $\delta = 4\varepsilon$, $x_0 = z_*$, μ 替换为 $\frac{\mu}{\mu_0^{k-1}} \leq \mu_0$（它介于 μ_0 和 μ_0^2之间），于是我们

有:

$$\begin{aligned}(1-\gamma)\tilde{E}_{\frac{\mu}{\mu_0^{k-1}}}(z_*) &\subset \{z^{(k-1)} \in B_1 : (u_{x_0,k-1}-h_*)(z^{(k-1)}) \le u_{x_0,k-1}(z_*) + \frac{\mu}{\mu_0^{k-1}}\} \\ &\subset (1+\gamma)\tilde{E}_{\frac{\mu}{\mu_0^{k-1}}}(z_*).\end{aligned} \tag{4.18}$$

上述中，$\gamma = \frac{8\varepsilon\mu_0^{k-1}}{\mu} + 3\mu^{\frac{1}{2}}\mu_0^{-\frac{k-1}{2}}$. 小于 0.1σ，这是因为我们在 (4.2) 中对 μ_0的选择，以及我们假设 ε 很小（我们在推论 4.7 中对 ε 作了精确选择。）˜此外，$E_{\frac{\mu}{\mu_0^{k-1}}}(z_*)$ 的系数由 $(v_{x_0,\ k-1})_{i\bar{j}}(z_*)$ 定义。令 T_* 为引理 4.8 给出的 $\mathbb{C}$-线性˜变换，使得 $T_*(B_{\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}}(0)) = E_{\mu\mu_0^{1-k}}(0)$。那么，与引理 4.10 的第 (4) 部分类似，我们有（利用 $(v_{x_0,\ k-1})_{i\bar{j}}$由于 $\sigma^{\frac{1}{2}}$而接近恒等变换）：

$$||\tilde{T}_* - I|| \le C_n'\sigma^{\frac{1}{2}},\ \ ||\tilde{T}_*^{-1} - I|| \le C_n'\sigma^{\frac{1}{2}}.$$

我们可以将图（4.18）变换回 z 变量，并得到:

- 存在一个以 x_*为中心的椭球E_μ^*，使得:

$$(1-0.1\sigma)E_\mu^*(x_*) \subset S_\mu^*(x_*) \subset (1+0.1\sigma)E_\mu^*(x_*) \subset S_{\mu_0^{k-1}}(x_0),$$

其中$S_\mu^*(x_*) = \{z \in S_{\mu_0^{k-1}}(x_0) : (u-h_*)\ z \le u(x_*) + \mu\}$，其中 h_* 为二次多重调和多项式。

- 当$T_* = T_{k-1,\ x_0}\circ\tilde{T}_*$，则有 $T_*(B_{\sqrt{\mu}}(0)) = E_\mu^*(z_*)$，且 $||T^{-}{}_{k-1,}{}^{1}{}_{x_0}\circ T_* - I|| \le 0.1$，$||T_*^{-1}\circ T_{k-1,\ x_0} - I|| \le 0.1$，只要 σ 足够小，且其大小仅取决于 n。

另一方面，取命题 4.1 给出的 $S_\mu(x_*)$、$E_\mu(x_*)$，我们还有 $(1-0.1\sigma)E_\mu(x_*) \subset S_\mu(x_*) \subset (1+0.1\sigma)E_\mu(x_*)$。此外，我们有一个 $\mathbb{C}$-线性变换 $T_{\mu,\ x_*}$使得 $T_{\mu,\ x_*}(B_{\sqrt{\mu}}(0)) = E_\mu(x_*)$。利用推论 4.18，我们得到

$$||T_*^{-1}\circ T_{\mu,x*}|| \le \frac{(1+0.1\sigma)^2}{(1-0.1\sigma)^2},\ \ ||T_{\mu,x_*}^{-1}\circ T_*|| \le \frac{(1+0.1\sigma)^2}{(1-0.1\sigma)^2}$$

因此我们得到

$$||T_{k-1,x_0}^{-1}\circ T_{\mu,x_*}||,\ \ ||T_{\mu,x_*}^{-1}\circ T_{k-1,x_0}|| \le 1.1^2,\ \ \text{if } \sigma \text{ is small enough.}$$

最后，我们注意到 $T_{\mu,\ x_0} = T_{k-1,\ x_0}\circ\tilde{T}_{k,\ x_0}$，且$||\tilde{T}_{k,\ x_0}||$，$||\tilde{T}_k^{-1}{}_{,\ x_0}|| \le 1 + C_n'\sigma^{\frac{1}{2}}$，因此只要 σ 足够小，且其大小仅取决于 n，结论便成立。□

那么，包裹性质即可由引理 4.19 推出。

证明。（命题 4.16 的证明）

首先，我们希望归结到 μ_1 和 μ_2 可比较的情形。事实上，若 $\mu_1 < \mu_2$，由命题 4.1 可知 $S_{\mu_1}(x_1) \subset S_{(1+c(\sigma))\mu_2}(x_1)$，且 $c(\sigma) \to 0$，因为 $\sigma \to 0$。因此，我们可以假设 σ 足够小，使得对于某个 $\mu_2 < \mu_1' \le 4\mu_2$，有 $S_{\mu_1}(x_1) \subset S_{\mu_1'}(x_1)$。于是，只需证明下面的命题:

For 任意 $0 < \mu_2 \le \mu_1 \le 4\mu_2$，若 $S_{\mu_1}(x_1) \cap S_{\mu_2}(x_2) \ne \emptyset$，则有 $S_{\mu_1}(x_1) \subset 10S_{\mu_2}(x_2\ \ )$.

首先，我们选择 $x_* \in S_{\mu_1}(x_1) \cap S_{\mu_2}(x_2)$。通过将 σ 取得足够小，由引理 4.19 可知

$$||T_{\mu_p,x_*}^{-1}\circ T_{\mu_p,x_p}|| \le 1.1^3,\ \ ||T_{\mu_p,x_p}^{-1}\circ T_{\mu_p,x_*}|| \le 1.1^3,\ \ p = 1,\ 2.$$

On 另一方面，由引理 4.9 可知，当 σ 足够小时，我们有

$$||T^{-1}_{\mu_1,x_*}\circ T_{\mu_2,x_*}||\le 1.1,\ \ ||T^{-1}_{\mu_2,x_*}\circ T_{\mu_1,x_*}||\le 1.1.$$

这由以下观察可得： μ_1 和 μ_2 必定属于同一层级或相邻层级（即 $\mu_0^{k+1}<\mu_2\le\mu_1\le\mu_0^k$或 $\mu_0^{k+1}<\mu_2\le\mu_0^k<\mu_1\le\mu_0^{k-1}$）。因此我们得到：

$$||T^{-1}_{\mu_1,x_1}\circ T_{\mu_2,x_2}||,\ \ ||T^{-1}_{\mu_2,x_2}\circ T_{\mu_1,x_1}||\le 1.1^6\cdot 1.1\le 2. \tag{4.19}$$

现在我们证明截面的包含关系：

$$\begin{aligned} &S_{\mu_1}(x_1)\subset(1+0.1\sigma)E_{\mu_1}(x_1)=T_{\mu_1,x_1}(B_{(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_1}}(x_{1,*}))\\ &=T_{\mu_2,x_2}\circ T^{-1}_{\mu_2,x_2}\circ T_{\mu_1,x_1}(B_{(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_1}}(x_{1,*}))\subset T_{\mu_2,x_2}(B_{2(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_1}}(x'_{1,*})). \end{aligned} \tag{4.20}$$

在上文中，我们记 $x_{1,\ *}$和 $x'_{1,\ *}$，使得 $T_{\mu_1,\ x_1}(x_{1,\ *})=x_1$，$T^{-1}_{\mu_2,\ x_2}\circ T_{\mu_1,\ x_1}(x_{1,\ *})=x'_{1,\ *}$。我们还用到了界（4.19）。另一方面，

$$S_{\mu_2}(x_2)\subset T_{\mu_2,x_2}(B_{(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_2}}(x_2^*)),$$

其中 $x_{2,\ *}=T^{-1}_{\mu_2,\ x_2}(x_2)$。由此可得 $B_{(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_2}}(x_2^*)\cap B_{2(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_1}}(x'_{1,\ *})\neq\emptyset$。由于 $\mu_1\le 4\mu_2$，可得

$$B_{2(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu_1}}(x'_{1,*})\subset B_{(1+0.1\sigma)9\sqrt{\mu_2}}(x_2^*). \tag{4.21}$$

因此，由（4.20）可得：

$$\begin{aligned} &S_{\mu_1}(x_1)\subset T_{\mu_2,x_2}(B_{(1+0.1\sigma)9\sqrt{\mu_2}}(x_2^*))\subset T_{\mu_2,x_2}(B_{9.1\sqrt{\mu_2}}(x_2^*))\\ &=9.1E_{\mu_2}(x_2)\subset 10S_{\mu_2}(x_2). \end{aligned}$$

□

最后，我们补充以下包含关系结果，以供后续参考。

引理 4.20. 令 σ 足够小，具体取决于 n。那么，对任意 $0<\mu\le\frac{\mu_0}{121}$，都有

$$10S_\mu(x_0)\subset S_{121\mu}(x_0)\subset 12S_\mu(x_0).$$

证明. 令 $k\ge 1$ 满足 $\mu_0^{k+1}<\mu\le\mu_0^k$。需要考虑以下两种情况：

若 $121\mu\le\mu_0^k$，则 $E_{121\mu}(x_0)$ 和 $E_\mu(x_0)$ 由相同的系数定义，因此

$$10S_\mu(x_0)\subset 10(1+0.1\sigma)E_\mu(x_0).$$

另一方面，

$$(1-0.1\sigma)E_{121\mu}(x_0)=(1-0.1\sigma)11E_\mu(x_0)\subset S_{121\mu}(x_0).$$

因此，只要 $10(1+0.1\sigma)\le 11(1-0.1\sigma)$，便有 $10S_\mu(x_0)\subset S_{121\mu}(x_0)$。另一方面，$S_{121\mu}(x_0)\subset(1+0.1\sigma)E_{121\mu}(x_0)=11(1+0.1\sigma)E_\mu(x_0)\subset 12(1-0.1\sigma)E_\mu(x_0)\subset 12S_\mu(x_0)$。

如果$\mu_0^k<121\mu\le\mu_0^{k-1}$，那么在 $z^{(k-1)}$下，$E_{121\mu}(x_0)$ 变为半径为$11\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}$的球，因此 $S_{121\mu}(x_0)$ 包含球 $B_{11(1-0.1\sigma)\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}}(0)$，并且在 $z^{(k-1)}$下包含于 $B_{11(1+0.1\sigma)\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}}$ 中。另一方面，$z^{(k)}$ 与 $z^{(k-1)}$ 相差一个坐标变换 $\tilde{T}_{k,\ x_0}$，对此我们有界 $||\tilde{T}_{k,\ x_0}||\le 1+C'_n\sigma^{\frac{1}{2}}$、$||\tilde{T}^{-1}_{k,\ x_0}||\le 1+C'_n\sigma^{\frac{1}{2}}$。

因此， $E_\mu(x_0)$ 包含于 $B_{(1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}}(0)$ 中，并且在$1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}}$下包含 $B_{\frac{\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}}{1}}(0)$

$z^{(k-1)}$。因此，在 $z^{(k-1)}$条件下进行讨论，可得

$10S_\mu(x_0)$ 在 $z^{(k-1)}$ 中$1+0.1\sigma(E_\mu)$ 在x_0下的 10 像 $z^{(k-1)}$

$$\subset B_{10(1+0.1\sigma)(1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}}(0) \subset (1-0.1\sigma)B_{11\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}}(0) \subset \text{image of } S_{121\mu}(x_0) \text{ under } z^{(k-1)}.$$

只要 $10(1+0.1\sigma)(1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}}) \leq 11(1-0.1\sigma)$，上述不等式就成立。另一方面，仍在 $z^{(k-1)}$ 条件下：

$$\begin{aligned}&\text{Image of } S_{121\mu}(x_0) \text{ in } z^{(k-1)} \subset 11(1+0.1\sigma)B_{\sqrt{\mu\mu_0^{1-k}}}(0)\\ &\subset 11(1+0.1\sigma)(1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}})\times E_\mu(x_0) \text{ in } z^{(k-1)} \subset 12(1-0.1\sigma)\times E_\mu(x_0) \text{ in } z^{(k-1)}\\ &\subset 12\times S_\mu(x_0) \text{ in } z^{(k-1)}.\end{aligned}$$

在上述内容中，我们需要要求 $11(1+0.1\sigma)(1+C_n'\sigma^{\frac{1}{2}}) \leq 12(1-0.1\sigma)$。 □

因此，我们还得到以下版本的包裹性质：

推论 4.21。在命题 4.16 的假设下，我们有：

$$S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{121\mu_2}(x_0).$$

5. Some measure theoretic lemmas

本节将证明一个覆盖引理，该引理将在 $W^{2,\ p}$ 估计中使用。下文中， m 始终表示标准勒贝格测度。

引理 5.1。设 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) \subset \mathbb{R}^d$ 是一个集合族。假设对于所有 α， $0<\mu_\alpha\leq\mu_0$ 且 $\cup_\alpha S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$ 有界。假设 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$ 的体积与半径为 $\sqrt{\mu_\alpha}$ 的标准球的体积可比。也就是说，存在一个统一常数 C，使得

$$\frac{1}{C}m(B_{\sqrt{\mu_\alpha}}(0)) \leq m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)) \leq Cm(B_{\sqrt{\mu_\alpha}}(0))$$

假设 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$ 满足以下包裹性质：

对于任意 $S_{\mu_{\alpha_1}}(x_{\alpha_1})$ 和 $S_{\mu_{\alpha_2}}(x_{\alpha_2})$，若 $S_{\mu_{\alpha_1}}(x_{\alpha_1})\cap S_{\mu_{\alpha_2}}(x_{\alpha_2}) \neq \emptyset$，且 $\sqrt{\mu_{\alpha_1}} \leq 2\sqrt{\mu_{\alpha_2}}$，则 $S_{\mu_{\alpha_1}}(x_{\alpha_1}) \subset 10S_{\mu_{\alpha_2}}(x_{\alpha_2})$。

设 X 为可测集，且 $X \subset \cup_\alpha S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$，则可选取一个序列（有限或无限） $S_{\mu_i}(x_i)$，使得：

(1) $S_{\mu_i}(x_i)$ 两两不相交。(2) $X \subset \cup_i 10S_{\mu_i}(x_i)$。

证明。这个引理的证明与测度论中的标准 Vitali 覆盖引理非常相似。

首先，我们选取一个集合 $S_{\mu_1}(x_1)$，满足 $\sqrt{\mu_1} > \frac{1}{2}\sup_\alpha \sqrt{\mu_\alpha}$。然后考虑所有与 $S_{\mu_1}(x_1)$ 不相交的 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$，并从中选择 $S_{\mu_2}(x_2)$，使得 $\sqrt{\mu_2} > \frac{1}{2}\sup\{\sqrt{\mu_\alpha} : S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) \cap S_{\mu_1}(x_1) = \emptyset\}$。接着考虑所有既不与 $S_{\mu_1}(x_1)$ 也不与 $S_{\mu_2}(x_2)$ 相交的 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$，并从中选择 $S_{\mu_3}(x_3)$，使得 $\sqrt{\mu_3} > \frac{1}{2}\sup$ 在所有不与 $S_{\mu_1}(x_1)$ 或 $S_{\mu_2}(x_2)$ 相交的 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$ 中的 $\sqrt{\mu_\alpha}$。我们继续这一过程。

这一过程可能在有限步后终止。若确实如此，那么我们得到一个有限序列 $S_{\mu_1}(x_1)$ $S_{\mu_2}(x_2)$ $\cdots$、 $S_{\mu_N}(x_N)$，它们两两不相交，并且所有 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$ 都必须与其中一个相交。设 i_0 是使得 $S_{\mu_i}(x_i)\cap S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) \neq \emptyset$ 的第一个指标，那么 $S_{\mu_{i_0-1}}(x_{i_0-1})\cap S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) = \emptyset$，并且根据我们的归纳选择，$\sqrt{\mu_\alpha} \leq 2\sqrt{\mu_{i_0}}$。利用包裹性质，我们得到：

$$S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) \subset 10S_{\mu_{i_0}}(x_{i_0}).$$

因此，$X \subset \cup_\alpha S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) \subset \cup_{i=1}^N 10S_{\mu_i}(x_i)$。

另一种可能是，我们找到一个由 $\{S_{\mu_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ 构成的无限序列。根据我们的构造，它们两两不相交。于是必有 $\mu_i \to 0$，因为$\cup_\alpha S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$ 有界，且 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$ 的体积与半径为 $\sqrt{\mu_\alpha}$ 的标准球的体积相当。特别地，若定义 $d_i = \sup\{\mu_\alpha : S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) \cap S_{\mu_j}(x_j) = \emptyset, 1 \leq j \leq i\}$，则有 $d_i \to 0$。由此可知，对任意 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)$，都存在 $S_{\mu_{i_0}}(x_{i_0})$，使得 $\sqrt{\mu_\alpha} \leq 2\sqrt{\mu_{i_0}}$，且 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)\cap S_{\mu_{i_0}}(x_{i_0}) \neq \emptyset$。因此，利用包裹性质可知 $S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) \subset 10S_{\mu_{i_0}}(x_{i_0})$。□

据此，我们可以沿用勒贝格微分定理的通常证明，得出：

引理 5.2. 设 $\{S_\mu(x)\}_{0<\mu\leq\mu_0,\, x\in B_{0.8}}$ 是一个集合族，满足：

(1) $S_\mu(x) \subset B_1$，对所有 $0 < \mu \leq \mu_0$ 和 $x \in B_{0.8}$ 均成立；(2) 存在 $C > 0$，使得对所有 $0 < \mu \leq \mu_0$ 和所有 $x \in B_{0.8}$，$\frac{1}{C} m(B_{\sqrt{\mu}}(0)) \leq m(S_\mu(x)) \leq C m(B_{\sqrt{\mu}}(0))$；(3) 对任意 $S_{\mu_1}(x_1)$ 和 $S_{\mu_2}(x_2)$，若 $\sqrt{\mu_1} \leq 2\sqrt{\mu_2}$ 且 $S_{\mu_1}(x_1) \cap S_{\mu_2}(x_2) \neq \emptyset$，则 $S_{\mu_1}(x_1) \subset 10S_{\mu_2}(x_2)$；(4) 当 $\mu \to 0$ 时，$diam\, S_\mu(x)$ 趋于 0，且对 $x \in B_{0.8}$ 一致成立。

设 $f:\ B_{0.8} \to \mathbb{R}$ 是一个 L^1 函数。那么对于几乎处处的 m $x \in B_{0.8}$，有：

$$\lim \sup_{x\in S_{\mu_\alpha}(x_\alpha),\, \mu_\alpha\to 0} \frac{1}{m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha))} \int_{S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)} |f(y) - f(x)| dm(y) = 0.$$

特别地，对于所有可测集 A，有：

$$\lim \inf_{x\in S_{\mu_\alpha}(x_\alpha),\, \mu_\alpha\to 0} \frac{m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha) \cap A)}{m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha))} = 1,\ a.e.\, x \in A.$$

证明。这个引理的证明沿用标准勒贝格微分定理的证明。

首先，我们定义极大函数：给定 $f \in L^1$（$B_{0.8}$），

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{x\in S_\mu(x'),\, 0<\mu\leq\mu_0,\, x'\in B_{0.8}} \frac{1}{m(S_\mu(x'))} \int_{S_\mu(x')} f(y) dm(y).$$

与勒贝格微分定理的证明一样，结论可由以下估计推出：

$$m\{x \in B_{0.8} : \mathcal{M}(|f|)(x) > t\} \leq C_n \frac{||f||_{L^1}}{t},\ \forall t > 0. \tag{5.1}$$

事实上，对于 $t > 0$，我们可以定义：

$$\Omega_t := \{x \in B_{0.8} : \lim \sup_{x\in S_{\mu_\alpha}(x_\alpha),\, \mu_\alpha\to 0} \frac{1}{m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha))} \int_{S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)} |f(y) - f(x)| dm(y) > t\}.$$

我们只需证明，对于任意 $t>0$， $m(\Omega_t)=0$ 。另一方面，对于任意 $g\in C(B_{0.8})$，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha))}\int_{S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)}|f(y)-f(x)|dm(y)\le\mathcal{M}(|f-g|)(x)\\&+\frac{1}{m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha))}\int_{S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)}|g(y)-g(x)|dm(y)+|f-g|(x).\end{aligned}\tag{5.2}$$

因此,

$$\Omega_t\subset\{x:\mathcal{M}(|f-g|)>\frac{t}{3}\}\cup\{x:|f-g|(x)>\frac{t}{3}\}.$$

这里我们隐含地使用了假设中的第（4）项，因此（5.2）中的中间项当 $\mu_\alpha\to 0$ 时趋于零。于是

$$m(\Omega_t)\le m\{x:\mathcal{M}(|f-g|)>\frac{t}{3}\}+m\{x:|f-g|(x)>\frac{t}{3}\}\le C_n\frac{3||f-g||_{L^1}}{t}+\frac{||f-g||_{L^1}}{t}.$$

于是我们可以选取一个序列 $g_j\in C(\bar{B}_{0.8})$，使得 $g_j\to f$ 属于 L^1，从而可以得到 $m(\Omega_t)=0$。

现在只需证明（5.1）。记左端的集合为 E，那么对于任意 $x\in E$，我们可以找到 $0<\mu_x\le\mu_0$ 和 $y_x\in B_{0.8}$，满足 $x\in S_{\mu_x}(y_x)$，使得:

$$tm(S_{\mu_x}(y_x))\le\int_{S_{\mu_x}(y_x)}|f(y)|dm(y).$$

因此我们得到 E 的一个覆盖：$E\subset\cup_{x\in E}S_{\mu_x}(y_x)$。现在我们可以应用引理 5.1，选取一个可数序列 $S_{\mu_i}(x_i)$，它们两两不相交，并且$E\subset\cup_i 10S_{\mu_i}(x_i)$。因此

$$\begin{aligned}&m(E)\le m(\cup_i 10S_{\mu_i}(x_i))\le\sum_i m(10S_{\mu_i}(x_i))=10^{2n}\sum_i m(S_{\mu_i}(x_i))\\&\le 10^{2n}\sum_i\frac{1}{t}\int_{S_{\mu_i}(x_i)}|f(y)|dm(y)\le 10^{2n}\frac{||f||_{L^1}}{t}.\end{aligned}$$

这就证明了 (5.1)。 □

我们还需要以下引理:

引理 5.3. 令 $\{S_\mu(x)\}_{0<\mu\le\mu_0,\,x\in B_{0.8}}$ 满足引理 5.2 的假设，并且我们进一步假设:

$$10S_\mu(x)\subset S_{121\mu}(x)\subset 12S_\mu(x),\ \textit{for any } x\in B_{0.8},\ 0<\mu\le\frac{\mu_0}{121}.\tag{5.3}$$

设 X、 $Y\subset B_{0.8}$ 为两个可测集。令 $0<\bar{\varepsilon}<1$。假设:

(1) 对任意 $x_0\in B_{0.8}$， $m(S_\mu(x_0)\cap X)<\bar{\varepsilon}m(S_\mu(x_0))$ 对任意 $\frac{\mu_0}{4}\ge\mu\ge\frac{\mu_0}{484}$ 成立。
(2) 对任意 $S_\mu(x)$，若 $m(S_\mu(x)\cap X)\ge\bar{\varepsilon}m(S_\mu(x))$ 且 $\mu\le\frac{\mu_0}{2}$，则有 $S_\mu(x)\subset Y$。于是

$$m(X)\le 12^{2n}\bar{\varepsilon}m(Y).$$

证明。对于几乎处处的任意 $x_0\in X$，根据前一个引理，我们知道:

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{m(X\cap S_\mu(x))}{m(S_\mu(x))}=1.\tag{5.4}$$

因此，若我们定义 $\mu'_x = \sup\{0 < \mu \le \frac{1}{4}\mu_0 : m(X \cap S_\mu(x)) \ge \bar{\varepsilon} S_\mu(x)\}$，则 $0 < \mu'_x \le \frac{\mu_0}{484}$对满足 (5.4) 的 $x \in X$ 成立。对于这样的 x，我们可以选择 μ_x，使得 $\frac{5}{6}\mu'_x \le \mu_x \le \mu'_x$，并且 $m(X \cap S_{\mu_x}(x)) \ge \bar{\varepsilon} S_{\mu_x}(x)$。不失一般性，我们可以假设 (5.4) 对所有 $x \in X$ 都成立，于是得到 X 的一个覆盖：$X \subset \cup_{x\in X} S_{\mu_x}(x)$（否则，我们得到的是除去一个零测集后的 X 的覆盖）。

然后，我们可以使用引理 5.1 得到一个可数序列 $S_{\mu_i}(x_i)$，使得 $S_{\mu_i}(x_i)$ 两两不相交，且 $X \subset \cup_i 10 S_{\mu_i}(x_i)$。因此

$$m(X) \le \sum_i m(X \cap 10 S_{\mu_i}(x_i)) \le \sum_i m(X \cap S_{121\mu_i}(x_i)) \le \sum_i \bar{\varepsilon} m(S_{121\mu_i}(x_i))$$
$$\le \bar{\varepsilon} \sum_i m(12 S_{\mu_i}(x_i)) \le \bar{\varepsilon} 12^{2n} \sum_i m(S_{\mu_i}(x_i)) \le 12^{2n} \bar{\varepsilon} m(Y).$$

在第二个不等式中，我们使用了 (5.3)。

在第三个不等式中，我们利用了 $\frac{\mu_0}{4} \ge 121\mu_i > \mu'_{x_i}$，因为我们对 μ_x 的选择保证了 $\mu_i \ge \frac{5}{6}\mu'_{x_i}$。因此 $m(X \cap S_{121\mu_i}(x_i)) < \bar{\varepsilon} m(S_{121\mu_i}(x_i))$。

在第四个不等式中，我们再次使用了 (5.3)。

在最后一个不等式中，我们利用了 $S_{\mu_i}(x_i)$ 两两不相交且包含于 Y，这是由于本引理的假设 (2)。□

6. The $W^{2,\,p}$ estimate

定义 6.1. 我们将 D_k 定义为由满足以下条件的 $z_0 \in B_{0.8}$ 组成的集合：对于任意 $0 < \mu \le \mu_0$，$S_\mu(z_0) \subset B(z_0, \sqrt{10^k \mu})$。定义 $A_k = \bar{B}_{0.8} - D_k$。

在上文中，可以将 D_k 视为“好集”，将 A_k 视为“坏集”。

粗略地说，D_k 是 $\lambda_i(z_0) \ge 10^{-k}$ 的集合。因此，凭直觉我们可以得出 $\lambda_i(z_0) \le 10^{k(n-1)}$，因为方程是 $\Pi_i \lambda_i = f$。为了直观地理解这一点，我们可以假设 $S_\mu(z_0) \approx \{z : \sum_{i,\,j} u_{i\bar{j}}(z_0)(z - z_0)_i (z - z_0)_j \le \mu\}$。要求这个椭球包含于 $B_{\sqrt{10^k \mu}}(z_0)$，意味着 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \le 10^{\frac{k}{2}}$。当然，这需要严格论证，因为我们的解 u 只是一个黏性解（因此仅连续）。

为了证明 $W^{2,\,p}$ 估计，大致需要两个步骤。

(1) 对于每个 $k \ge 1$, $m(A_k \cap B_{r_k}(0)) \le (12^{2n}\bar{\varepsilon})^{k-1} m(B_{0.7})$，当 $k \ge 1$ 时，通过选择 σ并将 ε 取得足够小，以及$r_k = r_{k-1} - \frac{1}{10}2^{-k}$, $r_0 = 0.7$。 (2) 证明对于几乎处处的 $x \in D_k$，存在开口为 $M_0^{k(n-1)}$ 的抛物面从上方在 x 处与u 相切，并存在开口为 M_0^{-k} 的抛物面从下方在x处与 u 相切。这就是 $D^2 u(x) \le M^{(k-1)}{}_0{}^{n}$以及 $u_{i\bar{j}}(x) \ge M_0^{-k}$的黏性解释。

我们将在下面的两个小节中分别完成步骤（1）和（2）。为便于论证，我们假设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$，并得到 $quantitative\ W^{2,\,p}$关于 $B_{\frac{1}{2}}$ 的界。然后，一般情形可由逼近论证得到。

6.1. 坏集测度的幂次衰减。我们的计划是将引理 5.3 用于$X = A_{k+1} \cap B_{r_{k+1}}(0)$、$Y = A_k \cap B_{r_k}(0)$。注意，截面 $S_\mu(x)$ 满足该引理的所有假设。因此，我们只需证明以下两点：

(1) 选择足够大的 M_0（具体取决于 $\bar{\varepsilon}$ 和 n），则对于任意 $\frac{\mu_0}{2} \ge \mu \ge \frac{\mu_0}{242}$，都有 $m(S_\mu(x_0) \cap A_1 \cap B_{r_1}(x_0)) < \bar{\varepsilon} m(S_\mu(x_0))$。

(2) 对于所有满足 $m(S_\mu(x_0) \cap A_{k+1} \cap B_{r_{k+1}}(0)) \geq \bar{\varepsilon} m(S_\mu(x_0))$ 且满足 $\mu \leq \frac{\mu_0}{2}$ 的 $S_\mu(x_0)$，只要将 σ 和 ε 取得足够小，就有 $S_\mu(x_0) \subset A_k \cap B_{r_k}(0)$。

我们从以下引理开始，它是 [3] 中引理 6 的类似结果。

引理 6.2. 设 u_0 是 Ω 上满足 $\det(u_0)_{i\bar{j}} = f_0$ 的一个 C^2 解，且 $B_{1-\gamma}(0) \subset \Omega \subset B_{1+\gamma}$。我们还假设在 Ω 上 $|f_0 - 1| < \varepsilon$。设 v_0 是 Ω 上满足 $\det(v_0)_{i\bar{j}} = 1$ 且 $v_0|_{\partial\Omega} = 0$ 的解。那么存在一个维数常数 $C_{6,n}$，使得对所有 γ，以及足够小的 ε（仅取决于维数），

$$\frac{m(\{x \in B_{\frac{1}{2}} : \Gamma(u_0 - \frac{1}{2}v_0) = u_0 - \frac{1}{2}v_0\})}{m(B_{\frac{1}{2}})} \geq 1 - C_{6,n}\varepsilon^{\frac{1}{2}} - C_{6,n}\gamma^{\frac{1}{2}}.$$

上文中，$\Gamma(u_0 - \frac{1}{2}v_0)$ 是 $B_{0.9}$ 中 $u_0 - \frac{1}{2}v_0$ 的凸包络，定义如下：

$$\Gamma(u_0 - \frac{1}{2}v_0)(z) = \sup\{l(z) : l(z) \text{ is affine and } l \leq u_0 - \frac{1}{2}v_0 \text{ on } B_{0.9}\}.$$

证明。证明思路与 [3] 中的引理 6 类似。首先，我们可以利用引理 4.3 和推论 4.4 得出，只要将 γ 取得足够小：

$$|D^m(v_0 - (|z|^2 - 1))|_{B_{0.9}} \leq C_n\gamma^{1-\frac{m}{4}}, \ m = 0, 1, 2, 3. \tag{6.1}$$

特别地，由 (6.1) 可知，在将 γ 取得足够小之后，v_0 严格凸。此外，根据最大值原理，

$$(1 + 3\varepsilon)v_0 \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{n}}v_0 \leq u_0 \leq (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{n}}v_0 \leq (1 - 3\varepsilon)v_0.$$

因此我们得到：

$$(\frac{1}{2} + 3\varepsilon)v_0 \leq \Gamma(u_0 - \frac{1}{2}v_0) \leq (\frac{1}{2} - 3\varepsilon)v_0.$$

以下我们将 $\Gamma(u_0 - \frac{1}{2}v_0)$ 简记为 Γ。我们作出如下断言：

断言 6.3。

$$\nabla\big((\frac{1}{2} - 3\varepsilon)v_0\big)(B_{\frac{1}{2}-\sqrt{96\varepsilon}}) \subset \nabla\Gamma(B_{\frac{1}{2}}). \tag{6.2}$$

首先，我们利用断言 6.3 完成证明，然后再证明断言 6.3 本身。事实上，我们有：

$$\begin{aligned} m(\nabla\Gamma(B_{\frac{1}{2}})) &\geq m\big(\nabla(\frac{1}{2} - 3\varepsilon)v_0\big)(B_{\frac{1}{2}-\sqrt{96\varepsilon}}) = \int_{B_{\frac{1}{2}-\sqrt{96\varepsilon}}} \det\big((\frac{1}{2} - 3\varepsilon)D^2v_0\big)dm(x) \\ &\geq (\frac{1}{2} - 3\varepsilon)^{2n}(2 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})^{2n}m(B_{\frac{1}{2}-\sqrt{96\varepsilon}}) \geq m(B_{\frac{1}{2}})(1 - C_{5,n}\varepsilon^{\frac{1}{2}} - C_{5,n}\gamma^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \tag{6.3}$$

在上面第一行的等式中，我们利用了 v_0 在 $B_{0.9}$ 上是严格凸的，因此 ∇v_0 是单射。

在第二行的第一个不等式中，我们使用 (6.1) 和 $m = 2$，得到 $|D^2(v_0 - |z|^2)| \leq C_n'\gamma^{\frac{1}{2}}$。

另一方面，利用下面的引理 6.4，我们有：

$$
\begin{aligned}
m(\nabla\Gamma(B_{\frac{1}{2}})) &\le \int_{B_{\frac{1}{2}}\cap\{\Gamma=u_0-\frac{1}{2}v_0\}} \big(2(1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}} - \det(D^2(\frac{1}{2}v_0))^{\frac{1}{2n}}\big)dm(x) \\
&\le \int_{B_{\frac{1}{2}}\cap\{\Gamma=u_0-\frac{1}{2}v_0\}} \big(2(1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}} - (1-C_n'\gamma^{\frac{1}{2}})\big)^{2n}dm(x) \qquad (6.4)\\
&\le (1+C_{5,n}\gamma^{\frac{1}{2}}+C_{5,n}\varepsilon)^{2n}m(B_{\frac{1}{2}}\cap\{\Gamma=u_0-\frac{1}{2}v_0\}).
\end{aligned}
$$

该结果由（6.3）和（6.4）结合得出。

现在只需证明断言 6.3。事实上，设 $p = \nabla(\frac{1}{2}-3\varepsilon)v_0(x_0)$，其中$x_0 \in B_{\frac{1}{2}-\sqrt{96\varepsilon}}$。记 $l_{x_0} = (\frac{1}{2}-3\varepsilon)v_0(x_0) + p\cdot(x-x_0)$。我们只需证明：

$$\{z\in B_{0.9}:\Gamma(z)<l_{x_0}(z)\}\subset\{(z\in B_{0.9}:(\frac{1}{2}+3\varepsilon)v_0\le l_{x_0}\}\subset B_{\sqrt{96\varepsilon}}(x_0).$$

也就是说， $\Gamma - l_{x_0}$的最小值在$B_{\sqrt{96\varepsilon}}(x_0) \subset B_{\frac{1}{2}}$的内部取得，从而有$p\in\nabla\Gamma(B_{\frac{1}{2}})$。上面的第一个包含关系显然成立，因为 $\Gamma \ge (\frac{1}{2}+3\varepsilon)v_0$。为证明第二个包含关系，我们需要进行如下计算：

首先注意，对于 $z\in B_{0.9}$，有：

$$v_0(z)\ge v_0(x_0)+\nabla v_0(x_0)\cdot(z-x_0)+(2-C_n\gamma^{\frac{1}{2}})|z-x_0|^2.$$

在上述过程中，我们再次使用了 (6.1)。因此，

$$
\begin{aligned}
&\{z\in B_{0.9}:(\frac{1}{2}+3\varepsilon)v_0\le l_{x_0}\}\subset\{z\in B_{0.9}:(\frac{1}{2}+3\varepsilon)(v_0(x_0)+\nabla v_0(x_0)\cdot(z-x_0)\\
&+(2-C_n\gamma^{\frac{1}{2}})|z-x_0|^2\}\le(\frac{1}{2}-3\varepsilon)(v_0(x_0)+\nabla v_0(x_0)\cdot(z-x_0))\}
\end{aligned}
$$

因此，上述内容意味着

$$(\frac{1}{2}+3\varepsilon)(2-C_n\gamma^{\frac{1}{2}})|z-x_0|^2\le -6\varepsilon(v_0(x_0)+\nabla v_0(x_0)\cdot(z-x_0)). \qquad (6.5)$$

在上述过程中，我们可以假设 $|v_0\ x_0\ |\le 1.1$ $|\nabla v_0\ x_0\ |\le 2$ $|z-x_0|^2\le()$ 和 ( )，并得到 $()(\frac{1}{2}+3\varepsilon)(2-C_n\gamma^{\frac{1}{2}})\le 96\varepsilon$，断言 6.3 得证。□

在上述证明中，我们使用了下面的引理，它是 [3] 中引理 5 的类似结果。

引理 6.4. 设 u_0 和 v_0 如引理 6.2 所给，且 γ 足够小，使得 (6.1) 成立。将引理 6.2 定义的 $\Gamma=\Gamma(u_0-\frac{1}{2}v_0)$ 记为。则有：

$$\mathcal{M}(\Gamma)\le\big(2(1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}-\det(D^2(\frac{1}{2}v_0))^{\frac{1}{2n}}\big)^{2n}\chi_{\Gamma=u_0-\frac{1}{2}v_0}\ on\ B_{0.8}.$$

这里， $\mathcal{M}(\Gamma)$ 是凸函数的（实）蒙日-安培测度，定义为 $\mathcal{M}(\Gamma)(E) = m(\partial\Gamma(E))$。

证明。由于 u_0 是 C^2，因此我们知道 Γ 在 C^1, 1 上是 $B_{0.8}$。于是对于任意博雷尔集$E\subset B_{0.8}$，都有： $\mathcal{M}(\Gamma)(E) = \int_E \det(D^2\Gamma)(x)dm(x)$。此外，一个普遍

事实是， $\mathcal{M}$(Γ)集中在接触集 $\{\Gamma = u_0 - \frac{1}{2}v_0\}$上。在这样的集合上，我们有：

$$D^2 u_0 \geq D^2\Gamma + D^2(\frac{1}{2}v_0), \ \ a.e.$$

因此

$$\det(D^2\Gamma)^{\frac{1}{2n}} + \det(D^2(\frac{1}{2}v_0))^{\frac{1}{2n}} \leq \det(D^2 u_0)^{\frac{1}{2n}} \leq \left(2^{2n}\det(u_0)_{i\bar{j}}^2\right)^{\frac{1}{2n}} \leq 2(1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}.$$

在上述推导中，我们用到了函数 $A \mapsto \det^{\frac{1}{d}}(A)$ 在正定 $d \times d$ 对称矩阵上的凹性。□

由引理 6.2 可得以下推论：

推论 6.5. 设 u_0 满足引理 6.2，且 C_n 来自 (6.1)。定义 E 为 $B_{0.8}$ 中的子集，使得 $x_0 \in E$ 当且仅当存在一个开口为$1\,2(1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})$的抛物面，在 $B_{0.9}$中从下方于 x_0 处与 u_0 相切。则有：

$$\frac{m(E \cap B_{\frac{1}{2}})}{m(B_{\frac{1}{2}})} \geq 1 - C_{6,n}\varepsilon^{\frac{1}{2}} - C_{6,n}\gamma^{\frac{1}{2}},$$

其中 $C_{6,n}$ 来自引理 6.2。

证明。我们只需证明 $\Gamma(u_0 - \frac{1}{2}v_0) = u_0 - \frac{1}{2}v_0$ 具有本引理所述的性质。设 $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$满足 $\Gamma(u_0 - \frac{1}{2}v_0)(x_0) = (u_0 - \frac{1}{2}v_0)(x_0)$。由于 Γ是 $B_{0.9}$上的凸函数，我们可以找到 $p \in \mathbb{C}^n$，它在 Γ处定义了一个支撑平面，于是有：

$$(u_0 - \frac{1}{2}v_0)(z) \geq \Gamma(u_0 - \frac{1}{2}v_0)(z) \geq (u_0 - \frac{1}{2}v_0)(x_0) + p \cdot (z - x_0), \ \ z \in B_{0.9}.$$

另一方面，由 (6.1) 可知：

$$v_0(z) \geq v_0(x_0) + \nabla v_0(x_0) \cdot (z - x_0) + (1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})|z - x_0|^2, \ z \in B_{0.9}.$$

因此在 $B_{0.9}$上：

$$u_0(z) \geq u_0(x_0) + (p + \frac{1}{2}\nabla v_0(x_0)) \cdot (z - x_0) + \frac{1}{2}(1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})|z - x_0|^2.$$

上式在 $z = x_0$ 处取等号，且右侧定义了一个开口为 $1\,2(1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})$ 的抛物面。□

在一点 x_0 处有一个从下方与之相切的抛物面，是一个非常强的条件；它意味着可以在 μ的所有尺度上控制 $S_\mu(x_0)$ 的形状，同时还能控制相应的多重调和函数 $h_{\mu,\ x_0}$。更准确地说

引理 6.6. 设 u 是定义在 $B_{0.9}$ 上的函数。设 $x_0 \in B_{0.8}$ 满足：存在一个开口为 $\kappa > 0$ 的抛物面，在 x_0 处从下方与 u 相切，且 x_0 位于 $B_{0.9}$ 中。设 $0 < \tilde{\gamma} < 1$、$\mu > 0$ 和 $A = a_{i\bar{j}}$ 为正定 Hermitian 矩阵，且 $\det A = 1$。定义 $E(x_0) = \{z : \sum_{i,j} a_{i\bar{j}}(z - x_0)_i(z - x_0)_j \leq \mu\}$。设 $h(z)$ 是一个二次多重调和多项式，满足 $h(x_0) = 0$。

$$(1 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma})E(x_0) \subset \{z \in B_{0.9} : (u - h)(z) \leq u(x_0) + \mu\} \subset\subset B_{0.9}.$$

于是，我们得到关于 A 和 $h(z)$ 的如下估计：

$$\kappa(1-\tilde{\gamma})^2 \leq \lambda_i(A) \leq \kappa^{1-n}(1-\tilde{\gamma})^{2(1-n)},\ 1 \leq i \leq n.$$
$$-\frac{1}{(1-\tilde{\gamma})^{2n}}\kappa^{1-n}I_{2n} \leq D^2h \leq \frac{n-1}{(1-\tilde{\gamma})^{2n}}\kappa^{1-n}I_{2n}.$$

证明。记 $S(x_0) = \{z \in B_{0.9} : (u-h)(z) \leq u(x_0) + \mu\}$。首先我们看到

$$\sum_{i,j} a_{i\bar{j}}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)}_j > (1-\tilde{\gamma})^2\mu \text{ on } (1-\frac{1}{2}\tilde{\gamma})\partial E(x_0).$$

因此

$$\frac{1}{(1-\tilde{\gamma})^2}\sum_{i,j} a_{i\bar{j}}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)}_j + u(x_0) > (u-h)(z),\ z \in (1-\frac{1}{2}\tilde{\gamma})\partial E(x_0). \tag{6.6}$$

另一方面，由于 u 在下方与一个抛物面相切，我们得到

$$u(z) \geq \kappa|z-x_0|^2 + l_{x_0}(z),\ z \in B_{0.9}.$$

这里 $l_{x_0}(z)$ 是一个仿射函数，且 $l_{x_0}(x_0) = u(x_0)$。因此

$$\frac{1}{(1-\tilde{\gamma})^2}\sum_{i,j} a_{i\bar{j}}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)}_j + u(x_0) > \kappa|z-x_0|^2 + l_{x_0}(z) - h(z),\ z \in (1-\frac{1}{2}\tilde{\gamma})\partial E(x_0). \tag{6.7}$$

然而，上述不等式在 $z = x_0$ 处取等号。因此，(6.7) 的左端与 – (6.7) 的右端之差在 $S(x_0)$ 的内部取得最小值。记该点为 x_0'。在 x_0' 处取复 Hessian，我们看到：

$$\frac{1}{(1-\tilde{\gamma})^2}a_{i\bar{j}} \geq \kappa I.$$

即 $\lambda_i(A) \geq \kappa(1-\tilde{\gamma})^2$. 另一方面，由于 $\Pi_i\lambda_i(A) = 1$，可知 $\lambda_i(A) \leq \kappa^{1-n}(1-\tilde{\gamma})^{2(1-n)}$。

接下来，我们在 x_0' 处对 (6.7) 取全海森矩阵，得到：

$$\frac{1}{(1-\tilde{\gamma})^2}D^2\big(\sum_{i,j} a_{i\bar{j}}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)_j}\big) \geq 2\kappa I - D^2h.$$

因此

$$D^2h \geq -\frac{1}{(1-\tilde{\gamma})^{2n}}\kappa^{1-n}I.$$

另一方面，由于 h 是调和的，可得：

$$D^2h \leq \frac{n-1}{(1-\tilde{\gamma})^{2n}}\kappa^{1-n}.$$

□

由此可得：

推论 6.7. 设 u_0 如引理 6.2 所述，并令 γ 和 ε 足够小，以满足该引理的要求。定义 D 为 $B_{0.8}$ 的子集，使得当且仅当对于任意 $0 < \mu \leq \mu_0$，$x_0 \in D$ 满足 $S_\mu(x_0) \subset B_{\sqrt{M_1\mu}}(x_0)$，其中 $M_1 = 2(1+0.1\sigma)^2(1-C_n\gamma^{\frac{1}{2}})^{-1}(1-0.2\sigma)^{-2}$，

其中 $S_\mu(x_0)$ 是在第 2 节中构造的截面族（应用于 u_0）。于是我们有：

$$\frac{m(B_{\frac{1}{2}} \cap D)}{m(B_{\frac{1}{2}})} \geq 1 - C_{6,n}\gamma^{\frac{1}{2}} - C_{6,n}\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

证明。首先，根据推论 6.5，我们只需证明 $E \cap B_{\frac{1}{2}} \subset D \cap B_{\frac{1}{2}}$。事实上，取 $x_0 \in E$，使得存在一个开口为$1\,2(1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})$的抛物面，其中 C_n 来自（6.1）。另一方面，我们在第 2 节中的构造给出 $S_\mu(x_0)$，$0 < \mu \leq \mu_0$，其中

$$(1 - 0.1\sigma)E_\mu(x_0) \subset S_\mu(x_0) \subset (1 + 0.1\sigma)E_\mu(x_0),$$

其中 $S_\mu(x_0) = \{z : u(z) \leq h_{\mu,\,x_0}(z) + u(x_0) + \mu\}$ 且 $E_\mu(x_0) = \{\sum_{i,j} a_{\mu,x_0,i\bar{j}}(z - x_0)_i\overline{(z - x_0)_j} \leq \mu\}$。现在我们可以应用引理 6.6（我们可以预先假设$\mu_0$ 足够小，使得 $S_\mu(x_0) \subset B_{0.9}$ 且 $0 < \mu \leq \mu_0, x_0 \in B_{0.8}$），其中$\kappa = \frac{1}{2}(1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})$，$\tilde{\gamma} = 0.2\sigma$，$A = a_{\mu,\,x_0,\,i\bar{j}}$，从而得到：

$$\frac{1}{2}(1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})(1 - 0.2\sigma)^2 I_n \leq a_{\mu,x_0,i\bar{j}} \leq 2^{n-1}(1 - C_n\gamma^{\frac{1}{2}})^{1-n}(1 - 0.2\sigma)^{2(1-n)} I_n.$$

这将意味着 $E_\mu(x_0) \subset B_{(1-C_n\gamma^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(1-0.2\sigma)^{-1}\sqrt{2\mu}}(x_0)$。因此，对于所有 $0 < \mu \leq \mu_0$，$S_\mu(x_0) \subset B_{\sqrt{M_1\mu}}(x_0)$。□

现在，我们可以证明本小节开头给出的第一个命题了。更确切地说，

命题 6.8. 设 $0 < \bar{\varepsilon} < 1$。若 σ 和 ε 足够小，且其大小仅取决于 n 和$\bar{\varepsilon}$，则有：

$$m(S_\mu(x_0) \cap A_1 \cap B_{r_1}(x_0)) < \bar{\varepsilon} m(S_\mu(x_0)), \text{ for any } \frac{\mu_0}{484} \leq \mu \leq \frac{\mu_0}{4}.$$

证明. 固定一个介于 $\frac{\mu_0}{484}$ 和 $\frac{\mu_0}{4}$之间的 μ。我们还可以假设 $\mu_0 \leq \frac{1}{484}$，使得 $\mu_0^2 < \mu \leq \mu_0$，从而 $E_{4\mu}(x_0)$、$E_\mu(x_0)$ 和 $E_{\mu_0}(x_0)$具有相同的系数。

回顾第 2 节中的结论，T 可以是这样的仿射变换：$z = x_0 + \sqrt{4\mu}T_{1,\,x_0}(w)$ 将使 $E_{4\mu}(x_0)$ 在 w 下变为 B_1。记 Ω 为$S_{4\mu}(x_0)$ 在 w 下的像。那么，由 $(1 - 0.1\sigma)E_{4\mu}(x_0) \subset S_{4\mu}(x_0) \subset (1 + 0.1\sigma)E_{4\mu}(x_0)$，可知：

$$B_{1-0.1\sigma} \subset \tilde{\Omega} \subset B_{1+0.1\sigma}. \tag{6.8}$$

我们还定义了 $\tilde{u} = \frac{1}{4\mu}(u - h_{4\mu,\,x_0})(x_0 + \sqrt{4\mu}T_{1,\,x_0}(w))$，那么 $\tilde{u}$, $\tilde{\Omega}$ 将满足我们在引理 6.2 中所作的假设。现在我们可以应用推论 6.7 得出：

$$\frac{m(B_{\frac{1}{2}} \cap \tilde{D})}{m(B_{\frac{1}{2}})} \geq 1 - C_{6.n}\sigma^{\frac{1}{2}} - C_{6,n}\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{6.9}$$

这里，D是 $B_{0.8}$（关于 w 变量）的子集，当且仅当对任意 $0 < \tilde{\mu} \leq \mu_0$，$w_0 \in D\tilde{S}_{\tilde{\mu}}(w_0) \subset B_{\sqrt{M_1\tilde{\mu}}}(w_0)$，其中 $M_1 = \frac{2}{(1+0.1\sigma)^2(1-0.1C_n\sigma^{\frac{1}{2}})(1-0.2\sigma)^2}$由推论 6.7给出，但由于（6.8），需将$\tilde{}$替换为 γ。这里，$S_{\tilde{\mu}}(w_0)$是通过第 2 节的构造得到的截面，只不过该构造是针对 $\tilde{u}$进行的。首先，由于 $E_\mu(x_0)$和

$E_{4\mu}(x_0)$具有相同的系数， $E_\mu(x_0)$现在位于$B_{\frac{1}{2}}$之下。因此，若将$\tilde{\Omega}_1$定义为 $S_\mu(x_0)$在 w 下的像，则可得：

$$\frac{m(\tilde{\Omega}_1 \cap \tilde{D})}{m(\tilde{\Omega}_1)} \geq 1 - C_{7,n}\sigma^{\frac{1}{2}} - C_{7,n}\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{6.10}$$

接下来，我们希望将集合 D 变回 z 变量，并证明：

$$\text{the image of } \tilde{D} \text{ under } z \text{ variable} \subset D_1, \tag{6.11}$$

其中， D_1 由定义 6.1 定义。这样便完成了证明。

为了证明 (6.11)，我们取 $w_0 \in D$，于是对于 $0 < \tilde{\mu} \leq \mu_0$，有 $S_{\tilde{\mu}}(w_0) \subset B_{\sqrt{M_1\tilde{\mu}}}(w_0)$，且 $(1-0.1\sigma)E_{\tilde{\mu}}(w_0) \subset S_{\tilde{\mu}}(w_0) \subset (1+0.1\sigma)E_{\tilde{\mu}}(w_0)$。现在我们切换回 z 坐标，于是上述包含关系变为：

$$S'_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0) \subset x_0 + \sqrt{4\mu}\tilde{T}_{1,x_0}(B_{\sqrt{M_1\tilde{\mu}}}(w_0)) \subset B_{(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})\sqrt{4M_1\mu\tilde{\mu}}}(z_0),$$
$$(1-0.1\sigma)E'_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0) \subset S'_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0) \subset (1+0.1\sigma)E'_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0).$$

上述内容中， z_0是 w_0在 z下的像，$S'_{4\mu\tilde{\mu}}$具有 $\{u-h \leq u(z_0)+4\mu\tilde{\mu}\}$的形式，而 $E'_{4\mu\tilde{\mu}}$是一个与 $B_{\sqrt{4\mu\tilde{\mu}}}$体积相同的椭球。现在我们可以利用推论 4.18 得出 $(1-0.1\sigma)E_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0) \subset (1+0.1\sigma)E'_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0)$，其中 $E_{4\mu\tilde{\mu}}$ 是第 2 节给出的椭球，但直接用 z_0 构造（在 z 坐标下）。由此可知：

$$S_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0) \subset (1+0.1\sigma)E_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0) \subset \frac{(1+0.1\sigma)^2}{1-0.1\sigma}E'_{4\mu\tilde{\mu}}(z_0) \subset B_{(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})\frac{(1+0.1\sigma)^2}{(1-0.1\sigma)^2}\sqrt{4M_1\mu\tilde{\mu}}}.$$

这将得到对 $S_{\mu'}(z_0)$ 的控制，其中 $\mu' \leq 4\mu\mu_0$，且 $4\mu\mu_0 \geq \frac{\mu_0^2}{121}$。

对于 $\mu' \geq \frac{\mu^2}{121}$, 不失一般性，我们可以假设 $\mu_0 < \mu' \leq \mu_0$, ，那么$S_{\mu'}(z_0) \subset (1+0.1\sigma)E_{\mu'}(z_0) = z_0 + (1+0.1\sigma)T_{2,\ z_0}(B_{\sqrt{\mu'}}(0)) \subset B_{(1+0.1\sigma)(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})^2\sqrt{\mu'}}(z_0)$。

因此我们看到，如果满足以下条件：

$$10 \geq \max\left((1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})\sqrt{M_1},\ (1+0.1\sigma)(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})^2\right), \tag{6.12}$$

我们便可得出结论 $z_0 \in D_1$，从而完成证明。只要我们选取 σ 足够小，且仅依赖于 n，这一点确实成立。此外，我们还需要取 σ 和 ε，使得在 (6.10) 中有 $C_{7,n}\sigma^{\frac{1}{2}} + C_{7,n}\varepsilon^{\frac{1}{2}} < \bar{\varepsilon}$. □

现在我们继续证明命题 (2) 在小节 6.1 开头提出的。

首先，我们需要证明：若 $m(S_\mu(x_0) \cap A_{k+1} \cap B_{r_{k+1}}(0)) \geq \bar{\varepsilon}m(S_\mu(x_0))$，则 $S_\mu(x_0) \subset B_{r_k}(0)$，其中 σ 和 ε 足够小。

为此，我们注意到：

引理 6.9。设 $0 < \mu \leq \frac{\mu_0}{4}$和 $x_0 \in B_{0.8}$ 满足 $S_{4\mu}(x_0) \subset B_{0.8}$。假设存在 $\Lambda > 0$ 使得$||T_{\mu_1,\ x_0}|| \leq \Lambda$ 对所有 $4\mu \leq \mu_1 \leq \mu_0$均成立。那么，对于仅依赖于 n和 $\bar{\varepsilon}$且足够小的 $\sigma > 0, \varepsilon > 0$，我们有

$$\frac{m(S_\mu(x_0) \cap D_{2\Lambda})}{m(S_\mu(x_0))} \geq 1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}.$$

这里， $D_{2\Lambda}$ 是满足对所有 $0 < \mu' \leq \mu_0$， $S_{\mu'}(z_0) \subset B_{2\Lambda\sqrt{\mu'}}(z_0)$ 的 z_0 集合。

证明。我们考虑满足 $\mu_0^{k+1} < 4\mu \le \mu_0^k$ 的截面 $S_{4\mu}(x_0)$。由假设可知 $||T_{4\mu,\,x_0}|| \le \Lambda$。

与命题 6.8 的证明类似，我们考虑坐标变换 $z = x_0 + \sqrt{4\mu}T_{4\mu,\,x_0}(w)$，使得 $E_{4\mu}(x_0)$ 被变换为一个单位球。我们将 $\tilde{\Omega}$ 记为 $S_{4\mu}(x_0)$ 在 w 下的像，并将 Ω_1 记为 $S_\mu(x_0)$ 的像。与命题 6.8 的证明类似。

$$\frac{m(\tilde{\Omega}_1 \cap \tilde{D})}{m(\tilde{\Omega}_1)} \ge 1 - C_{7,n}\sigma^{\frac{1}{2}} - C_{7,n}\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

这里，D 是 $B_{0.8}$ 在变量 w 下的子集，使得当且仅当 $\tilde{S}_{\tilde{\mu}}(w_0) \subset B_{\sqrt{M_1\tilde{\mu}}}(w_0)$ 对于 $0 < \tilde{\mu} \le \mu_0$ 成立，其中 $M_1 = {}^{2}_{(1+0.1\sigma)^2(1-0.1C_n\sigma^{\frac{1}{2}}(1-0.2\sigma)^2}$。我们在下文（6.11）处重复命题 6.8 证明中的论证，将这一包含关系变换回变量 z，并得出

$$S_{\mu'}(z_0) \subset B_{(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})\frac{(1+0.1\sigma)^2}{(1-0.1\sigma)^2}\Lambda\sqrt{M_1\mu'}},\ 0 < \mu' \le 4\mu\mu_0. \tag{6.13}$$

现在只需控制 $S_{\mu'}(z_0)$，其中 $\mu' > 4\mu\mu_0$。

首先，若 $\mu' \ge 4\mu$，则有 $z_0 \in S_{\mu'}(x_0)$。由引理 4.19 可知：

$$||T^{-1}_{\mu',x_0} \circ T_{\mu',z_0}|| \le 1.1^3,\ \ ||T^{-1}_{\mu',z_0} \circ T_{\mu',x_0}|| \le 1.1^3.$$

因此

$$||T_{\mu',z_0}|| \le 1.1^3\Lambda,\ \ \mu' \ge 2\mu.$$

因此，我们有：

$$S_{\mu'}(z_0) \subset (1+0.1\sigma)E_{\mu'}(z_0) \subset B_{1.1^3(1+0.1\sigma)\Lambda\sqrt{\mu'}}(z_0),\ \ \mu' \ge 2\mu. \tag{6.14}$$

最后，对于 $2\mu\mu_0 < \mu' \le 2\mu$，注意到 $T_{2\mu,\,x_0}$ 与 $T_{\mu',\,x_0}$ 至多相差 $T_{k+1,\,x_0}$，其范数有界于 $1 + C_n\sigma^{\frac{1}{2}}$，因此我们有：

$$S_{\mu'}(z_0) \subset B_{1.1^3(1+0.1\sigma)(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})\Lambda\sqrt{\mu'}}(z_0),\ \ 2\mu\mu_0 < \mu' < 2\mu. \tag{6.15}$$

因此，若将 (6.13)-(6.15) 合并并定义

$$M_2 = \max\left((1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})^2\frac{(1+0.1\sigma)^4}{(1-0.1\sigma)^4}M_1,\, 1.1^6(1+0.1\sigma)^2(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})^2\right), \tag{6.16}$$

那么，对于 z 坐标中 D 的像里的任意 z_0，$S_{\mu'}(z_0) \subset B_{\sqrt{M_2\Lambda^2\mu'}}(z_0)$，$0 < \mu' \le \mu_0$。此外，我们注意到，如果 σ 足够小（仅取决于 n），则 (6.16) 的右侧小于 4。□

因此，我们得到

推论 6.10. 设 $0 < \mu \le \frac{\mu_0}{4}$ 和 $x_0 \in B_{0.8}$ 满足 $S_{4\mu}(x_0) \subset B_{0.8}$。假设存在某个 $k_0 \ge 1$，使得 $m(S_\mu(x_0) \cap A_{k_0+1} \cap B_{r_{k_0+1}}(0)) \ge \bar{\varepsilon}m(S_\mu(x_0))$。还假设 σ 和 ε 的选取足够小，且其大小取决于 $\bar{\varepsilon}$ 和 n。那么我们有：

$$\mu \le 10^{-\frac{|\log(\mu_0)|}{2\log(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})}k_0}.$$

证明. 设 $k_1 \geq 1$ 满足 $\mu_0^{k_1+1} < 4\mu \leq \mu_0^{k_1}$。那么 $T_{4\mu,\ x_0} = T_{k_1,\ x_0}$，并且我们有如下估计：

$$||T_{k,x_0}||,\ ||T_{k,x_0}^{-1}|| \leq (1 + C_n\sigma^{\frac{1}{2}})^{k_1},\ 1 \leq k \leq k_1.$$

因此，我们可以应用引理 6.9，其中 $\Lambda = (1 + C_n\sigma^{\frac{1}{2}})^{k_1}$，从而得出 ：

$$\frac{m(S_\mu(x_0) \cap D_{2\Lambda})}{m(S_\mu(x_0))} \geq 1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}.$$

根据我们的假设 $m(S_\mu(x_0) \cap A_{k_0+1} \cap B_{r_{k_0+1}}(0)) \geq \bar{\varepsilon} m(S_\mu(x_0))$，必有$D_{k_0+1} \subset D_{2\Lambda}$ （注意，根据定义，我们要么有 $D_{k_0+1} \subset D_{2\Lambda}$，要么有 $D_{2\Lambda} \subset D_{k_0+1}$），换言之，

$$10^{k_0+1} \leq 4(1 + C_n\sigma^{\frac{1}{2}})^{2k_1}. \tag{6.17}$$

因此

$$\mu \leq \frac{1}{4}\mu_0^{k_1} \leq 10^{-\frac{|\log(\mu_0)|}{2\log(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})}k_0}.$$

□

作为进一步的推论，我们得到

推论 6.11. 假设对于某个 $k_0 \geq 1$，$m(S_\mu(x_0) \cap A_{k_0+1} \cap B_{r_{k_0+1}}(0)) \geq \bar{\varepsilon} m(S_\mu(x_0))$，其中某个 $x_0 \in B_{0.8}$ 和 $\mu \leq \frac{\mu_0}{4}$ 满足条件，则 $S_\mu(x_0) \subset B_{r_{k_0}}(0)$；如果 σ 和 ε 取得足够小，且其取值依赖于 n 和 $\bar{\varepsilon}$。

证明。根据我们的假设，$S_\mu(x_0) \cap B_{0.7} \neq \emptyset$，因此我们知道 $S_{4\mu}(x_0) \subset B_{0.8}$（通过选取 σ，从而使 μ_0 足够小。）此外，我们记 k_1，使得 $\mu_0^{k_1+1} < 4\mu \leq \mu_0^{k_1}$。然后我们可以利用推论 6.10 得到：

$$\begin{aligned} &diam\, S_\mu(x_0) \leq diam\, E_{4\mu}(x_0) \leq (4\mu)^{\frac{1}{2}}||T_{4\mu,x_0}|| \leq \mu_0^{k_1}(1 + C_n\sigma^{\frac{1}{2}})^{k_1} \\ &\leq \left(\mu_0(1 + C_n\sigma^{\frac{1}{2}})\right)^{\frac{\log 10}{2\log(1+C_n\sigma^{\frac{1}{2}})}k_0} \leq \frac{1}{40} \cdot 2^{-k_0}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

只要我们根据 n 选取足够小的 σ，上述结论就成立（根据我们在（4.2）中对 μ_0 的选取，$\mu_0 \leq \sigma^2$。）

另一方面，$r_{k_0} - r_{k_0+1} = \frac{1}{10} \cdot 2^{-k_0-1}$。由于 $S_\mu(x_0) \cap B_{r_{k_0+1}}(0) \neq \emptyset$，结论由（6.18）得出。□

命题（2）的剩余部分是证明 $S_\mu(x_0) \subset A_k$。由以下观察可直接得出这一结论：

引理 6.12. 设 $0 < \mu \leq \frac{\mu_0}{4}$ 和 $x_0 \in B_{0.8}$ 满足 $S_{4\mu}(x_0) \subset B_{0.8}$ 且 $S_\mu(x_0) \cap D_{k_0} \neq \emptyset$，其中 $k_0 \geq 1$。则有：

$$m(S_\mu(x_0) \cap D_{k_0+1}) \geq (1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2})m(S_\mu(x_0)),$$

前提是 σ 足够小，且其大小仅取决于 $\bar{\varepsilon}$ 和 n。

证明。根据假设，我们可以找到 $x_* \in S_\mu(x_0) \cap D_{k_0}$，这意味着对于任意 $0 < \mu' \leq \mu_0$，都有$S_{\mu'}(x_*) \subset B_{\sqrt{10^{k_0}\mu'}}(x_*)$。由于 $(1 - 0.1\sigma)E_{\mu'}(x_*) \subset S_{\mu'}(x_*)$ 且$T_{\mu',x_*}(B_{\sqrt{\mu'}}(0)) = E_{\mu'}(0)$，我们看到

$$||T_{\mu',x_*}|| \leq \frac{\sqrt{10^{k_0}}}{1 - 0.1\sigma},\ 0 < \mu' \leq \mu_0.$$

由于 $x_* \in S_\mu(x_0)$，我们知道对于所有 $\mu' \geq 4\mu$，都有 $x_* \in S_{\mu'}(x_0)$。因此，我们可以使用引理 4.19 得出：

$$||T^{-1}_{\mu',x_*} \circ T_{\mu',x_0}|| \leq 1.1^3, \ ||T^{-1}_{\mu',x_0} \circ T_{\mu',x_*}|| \leq 1.1^3.$$

因此我们得到

$$||T_{\mu',x_0}|| \leq \frac{1.1^3\sqrt{10^{k_0}}}{1-0.1\sigma}, \ 4\mu \leq \mu' \leq \mu_0.$$

现在我们可以使用引理 6.9 和 $\Lambda = \frac{1.1^3\sqrt{10^{k_0}}}{1-0.1\sigma}.$，从而得出：

$$\frac{m(S_\mu(x_0) \cap D_{2\Lambda})}{m(S_\mu(x_0))} \geq 1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}.$$

这里，$D_{2\Lambda}$ 是满足以下条件的 z_0 集合：对于所有 $0 < \mu' \leq \mu_0$，$S_{\mu'}(z_0) \subset B_{2\Lambda\sqrt{\mu'}}(z_0)$。如果我们能确保 $D_{2\Lambda} \subset D_{k_0+1}$，就可以完成证明；我们只需证明：

$$4\Lambda^2 = 4 \cdot \frac{1.1^6 \cdot 10^{k_0}}{(1-0.1\sigma)^2} \leq 10^{k_0+1}.$$

如果 σ 足够小，这一点显然成立。 □

现在我们准备证明小节 6.1 开头的陈述（2）。

命题 6.13. 设 $0 < \mu \leq \frac{\mu_0}{4}$, $x_0 \in B_{0.8}$ 满足 $m(S_\mu(x_0) \cap A_{k_0+1} \cap B_{r_{k_0+1}}) \geq \bar{\varepsilon} m(S_\mu(x_0))$，其中某个 $k_0 \geq 1$，则 $S_\mu(x_0) \subset A_{k_0} \cap B_{r_{k_0}}(0)$，只要 σ 和 ε 足够小，且其大小取决于 $\bar{\varepsilon}$ 和 n。

证明. 推论 6.11 已经推出 $S_\mu(x_0) \subset B_{r_k}(0)$，因此我们只需证明 $S_\mu(x_0) \subset A_{k_0}$。

若不然，即 $S_\mu(x_0) \cap D_{k_0} \neq \emptyset$，那么引理 6.12 将给出：

$$m(S_\mu(x_0) \cap D_{k_0+1}) \geq (1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}) m(S_\mu(x_0)).$$

这与我们的假设矛盾：$m(S_\mu(x_0) \cap A_{k_0+1} \cap B_{r_{k_0+1}}) \geq \bar{\varepsilon} m(S_\mu(x_0))$。□

现在我们可以证明：

定理 6.1. 设 A_k 由定义 6.1 定义。设 $0 < \bar{\varepsilon} < 1$ 给定。若 $\sigma > 0$和 $\varepsilon > 0$ 相对于 n 和 ε 足够小，则有：

$$m(A_k \cap B_{r_k}(0)) \leq m(B_{0.7})(12^{2n}\bar{\varepsilon})^{k-1}, \ k \geq 1.$$

Here $r_k = r_{k-1} - \frac{1}{10} \cdot 2^{-k}$, $r_0 = 0.7$. 特别地，$m(A_k \cap B_{0.6}) \leq m(B_{0.7})(12^{2n}\bar{\varepsilon})^{k-} \quad ^1$.

证明. 对于 $k = 1$，上述估计显然成立。

对于 $k \geq 1$，有如下估计成立：

$$m(A_{k+1} \cap B_{r_{k+1}}(0)) \leq 12^{2n}\bar{\varepsilon} m(A_k \cap B_{r_k}(0)).$$

这是在引理 5.3 中取 $X = A_{k+1} \cap B_{r_{k+1}}(0)$、$Y = B_{r_k}(0) \cap B_{r_k}(0)$ 得到的；由于命题 6.8 和 6.13，该引理的两个假设确实成立。□

6.2. 好集上的二阶导数控制与证明的完成。本节中，我们证明这些导数在好集 D_k 上受到控制。我们想强调的是，我们假设 $u \in C^2(\Omega)$ 仅仅是为了论证方便，而 u 的正则性并未用于定量估计。

我们从以下引理开始：

引理 6.14. 设 $u \in C^2(B_1)$ 满足 $\det u_{i\bar{j}} = f$，且 $|f-1| < \varepsilon_0$。设 $x_0 \in D_k$，其中 $k \geq 1_0$。则

$$\frac{1}{10^k} I_n \leq u_{i\bar{j}}(x_0) \leq 2 \cdot 10^{(n-1)k} I_n.$$

证明. 根据定义 6.1，我们知道 $S_\mu(x_0) \subset B_{\sqrt{10^k \mu}}(x_0)$。设 $0 < c < 1$，则在 $\partial S_\mu(x_0)$上有：

$$u - h_{\mu,x_0} = u(x_0) + \mu \geq u(x_0) + \frac{|x-x_0|^2}{10^k} > u(x_0) + \frac{c|x-x_0|^2}{10^k}. \tag{6.19}$$

在上文中，我们注意到 $|x-x_0|^2 \leq 10^k \mu$ 在 $\partial S_\mu(x_0)$ 上。

另一方面，当 $x = x_0$ 时，(6.19) 取等号。因此，函数 $x \mapsto (u - h_{\mu,x_0})(x) - \frac{c|x-x_0|^2}{10^k}$ 在 $S_\mu(x_0)$ 的内部取得最小值，记为 x_μ。于是有：

$$u_{i\bar{j}}(x_\mu) \geq \frac{c}{10^k} I_n. \tag{6.20}$$

由于 $\det u_{i\bar{j}} \leq 1 + \varepsilon$，我们得到

$$u_{i\bar{j}}(x_\mu) \leq (1+\varepsilon) c^{1-n} 10^{k(n-1)} I_n.$$

由于 $diam\, S_\mu(x_0) \to 0$ 和 $x_\mu \in S_\mu(x_0)$，我们得到 $x_\mu \to x_0$，因为 $\mu \to 0$。因此我们得出：

$$\frac{c}{10^k} I_n \leq u_{i\bar{j}}(x_0) \leq 2 \cdot c^{1-n} 10^{k(n-1)} I_n.$$

由于 $0 < c < 1$ 是任意的，我们可以令 $c \to 1$，从而得出结论。 □

因此，我们得到：

命题 6.15. 给定 $p > 1$。令 u 由定理 1.3 给出，且为 $C^2(B_1)$。令 γ 充分小，且仅依赖于 n；令 ε 充分小，且依赖于 p 和 n，则有：

$$\int_{B_{0.6}} \left((\Delta u)^p + (tr_u \omega_E)^p \right) \leq C_{p,n}.$$

这里 $\Delta u = \sum_i u_{i\bar{i}}$, $tr_u \omega_E = \sum_i \frac{1}{u_{i\bar{i}}}$。

证明。注意，在 D_k 上，我们有：

$$\Delta u \leq 2n \cdot 10^{(n-1)k}, \ tr_u \omega_E \leq n \cdot 10^k.$$

因此，对于 $k \geq 1$， $\{\Delta u > 2n \cdot 10^{(n-1)k}\}$ 和 $\{tr_u\omega_E > n \cdot 10^k\}$ 都包含在 A_k 中。

$$\int_{B_{0.6}\cap\{\Delta u>2n\cdot 10^{n-1}\}} (\Delta u)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{0.6}\cap\{2n\cdot 10^{(n-1)k}<\Delta u\leq 2n\cdot 10^{(n-1)(k+1)}\}} (\Delta u)^p$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(2n \cdot 10^{(n-1)(k+1)}\right)^p m(A_k \cap B_{0.6}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(2n \cdot 10^{(n-1)(k+1)}\right)^p \cdot m(B_{0.7})(12^{2n}\bar{\varepsilon})^{k-1}$$

$$= (2n \cdot 10^{2(n-1)})^p m(B_{0.7}) \sum_{k=1}^{\infty} (10^{(n-1)p} 12^{2n} \bar{\varepsilon})^{k-1}.$$

为了使上述和有限，我们可以选择 $\bar{\varepsilon} > 0$ 使得 $10^{(n-1)p}12^{2n}\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}$ 从而上述积分 $\leq 2(2n \cdot 10^{2(n-1)})^p m(B_{0.7})$。在上面，我们使用了定理 6.1。为了使该定理适用，我们需要选择 ε 和 σ 足够小，且只依赖于 $\bar{\varepsilon}$ 和 n，因此对 ε 和 σ 的选择最终取决于 p 和 n。

$tr_u\omega_E$ 的估计完全类似。 □

根据命题 6.15，通过应用拉普拉斯算子的 L^p-估计，我们可以得到完整的二阶估计。也就是说，我们得到：

推论 6.16。在命题 6.15 的假设下，我们有：

$$||u||_{W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C_{p,n},$$

若 γ 足够小，且其取值仅取决于 n；并且 ε 足够小，且其取值仅取决于 p 和n。

证明。由命题 6.15 和经典的 $W^{2,p}$ 估计（Gilbarg-Trudinger [8], 第 9 章）即可得出结论：对于任意的 $u \in C^2(B_{0.6})$ 和 $1 < p < \infty$,

$$||u||_{W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C(||u||_{L^p(B_{0.6})} + ||\Delta u||_{L^p(B_{0.6})}).$$

□

7. Some corollaries of the main theorem

首先证明推论 1.1。

证明。（推论 1.1 的证明）首先，我们希望利用以下引理 7.1 得出φ 接近于零。事实上，在下文中取 $g = 1$、 $\psi = 0$、 $p = 2$ ，可得：

$$||\varphi||_{L^\infty} \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2(n+4)}}.$$

这里的 c 仅取决于背景度量。

现在取一点 $p_0 \in M$，并在 p_0 处取正规坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$，使得 $g_{i\bar{j}}(p_0) = \delta_{ij}$ 且 $\nabla g(p_0) = 0$。我们可以选取局部势函数 $\rho(z)$，使得 $\omega_0 = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\rho$ 在 p_0 附近成立，例如在 $B_1(p_0)$ 上（相对于局部坐标 z）。因此，在这个邻域内，方程可写为：

$$\det((\rho+\varphi)_{i\bar{j}}) = f \det(g_{i\bar{j}}), \quad \text{in } B_1. \tag{7.1}$$

为了使用定理 1.4，我们需要在适当尺度下对 p_0 处的 (7.1) 进行放大，使得右端项接近一个常数。

记 $u=\rho+\varphi$。令 $0<r_0<1$，我们作变量代换 $z=r_0w$。接下来定义

$$\tilde{u}_{r_0}(w)=\frac{1}{r_0^2}u(r_0w),\ \tilde{\rho}_{r_0}=\frac{1}{r_0^2}\rho(r_0w),\ \tilde{\varphi}_{r_0}(w)=\frac{1}{r_0^2}\varphi(r_0w).$$

假设对于某个 $C_0>0$，我们在 B_1 上有 $\frac{1}{C_0}I\le\rho_{i\bar{j}}\le C_0I$、$|D^3\rho|\le C_0$，那么可以看到，对于相同的 $C_0>1$:

$$\frac{1}{C_0}I\le(\tilde{\rho}_{r_0})_{w_i\bar{w}_j}\le C_0I,\ |D_w^3\tilde{\rho}_{r_0}|\le C_0,\quad\text{for }|w|<1.$$

Also

$$|\tilde{u}_{r_0}-\tilde{\rho}_{r_0}|\le\frac{1}{r_0^2}||\varphi||_{L^\infty}\le c\frac{1}{r_0^2}\varepsilon^{\frac{1}{2(n+4)}}.$$

此外，在 $\{|w|<1\}$ 上，我们有

$$\det(\tilde{u}_{r_0})_{i\bar{j}}=f\det(g_{i\bar{j}})(r_0w),$$

并且我们可以估计右端与 1 的接近程度:

$$|f\det(g_{i\bar{j}})-1|\le|f-1|\det g_{i\bar{j}}(r_0w)+f|\det(g_{i\bar{j}})(r_0w)-1|\le C_1\varepsilon+C_1r_0.$$

这里的 C_1 仅取决于背景度量和 n。

因此，为了应用定理 1.4，我们需要确保:

$$C_1\varepsilon+C_1r_0\le\varepsilon_{p,n},$$
$$c\frac{1}{r_0^2}\varepsilon^{\frac{1}{2(n+4)}}\le\delta_0.$$

这里，$\varepsilon_{p,n}$ 和 δ_0 由定理 1.4 确定。因此，我们需要先选择 r_0，使得$C_1r_0=\frac{1}{2}\varepsilon_{p,n}$。然后固定这一选择，并将 ε 取得足够小，以确保$C_1\varepsilon\le\frac{1}{2}\varepsilon_{p,n}$以及 $c\frac{1}{r_0^2}\varepsilon^{2^{\frac{1}{(n+4)}}}\le\delta_0$。接着，定理 1.4 给出 $W^{2,p}$在$\overline{B_{\frac{1}{2}}}$中的 $\tilde{u}_{r_0}$估计。缩放回 u后，我们得到 $W^{2,p}$在$B_{\frac{1}{2}r_0}(p_0)$中的 u估计。□

在上述证明中，我们使用了 Kołodziej 给出的以下稳定性估计 [11]

引理 7.1. ([11]) 设(M,ω_0)为一个紧致 K ¨ahler 流形。设 $\varphi\in PSH(M,\omega_0)$和 $\psi\in PSH(M,\omega_0)$为以下复 Monge-Ampère 方程的解:

$$(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n=f\omega_0^n,\ \sup_M\varphi=0,$$
$$(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi)^n=g\omega_0^n,\ \sup_M\psi=0.$$

假设存在某个 $c_0>0, p>1$，使得

$$||f||_{L^p}\le c_0,\ ||g||_{L^p}\le c_0.$$

那么我们有

$$\sup_M|\varphi-\psi|\le c(c_0,p)||f-g||_{L^p}^{\frac{1}{n+4}}.$$

现在我们证明推论 1.2。论证与推论 1.2 类似。

证明。（推论 1.2）我们首先利用引理 3.4 和 $q=2$ 来估计 φ 与 φ_0 之间的差。我们有

$$\sup_{\Omega}|u-u_0|\le\varepsilon+c\varepsilon^{\frac{1}{2n}}\le c'\varepsilon^{\frac{1}{2n}}.$$

这里， c 仅取决于 n 和 $diam\Omega$。其余论证与推论 1.1 类似。换言之，我们取任意一点 $z_0\in\Omega'$，并考虑重缩放 $\tilde{u}_{r_0}(w)=\frac{1}{r_0^2}u(z_0+r_0w)$，同样也考虑$\tilde{u}_{0,\ r_0}=\frac{1}{r_0^2}u_0(z_0+r_0w)$。于是，对适当选取的 r_0，我们将有 $\tilde{u}_{r_0}$ 满足定理 1.4 的假设。□

接下来，我们证明刘维尔定理推论 1.3。

证明。（推论 1.3 的证明）
设 $r>1$，我们考虑:

$$u_r(w)=\frac{1}{r^2}u(rw).$$

于是我们知道，当 r 足够大时，有

$$|u_r(w)-|w|^2|\le 2\varepsilon,\ \ w\in B_1.$$

另一方面，我们有 $1-\varepsilon\le\det u_{a\bar{b}}\le 1+\varepsilon$，因此由定理 1.4 可得:

$$||u_r||_{W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})}\le C_{p,n},$$

只要我们选择的 ε 足够小，并且依赖于 n 和 p。另一方面， u_r 也满足标量平坦方程，因此我们可以使用以下引理 7.2，并选择 $p=p_n$，从而得到:

$$||u_r||_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{4}})}\le C.$$

这里 C 是一个与 r 无关的统一常数。缩放回 u 后，可得:

$$|D^2u(x)-D^2u(y)|r^{\alpha}\le C|x-y|^{\alpha},\ \forall x,\,y\in B_{\frac{r}{2}}.$$

我们可以固定 x、 y，令 $r\to\infty$，并得出 D^2u 是一个常数，因此 u 是一个二次多项式。□

在下文中，我们使用了标量平坦方程的以下估计，该估计源自 Chen-Cheng [6], 推论 6.2。请注意，此结果出自 arXiv 上的预印本版本，在发表版本中已被删除。

引理 7.2. ([6]) 设 $u\in C^4(B_1)\cap PSH(B_1)$ 是标量平坦方程的有界解:

$$\sum_{i,j=1}^{n}u^{i\bar{j}}\partial_{i\bar{j}}\big(\log\det u_{a\bar{b}}\big)=0.$$

假设对于某个 $p>3n(n-1)$, 有 $\Delta u\in L^p(B_1)$、 $\sum_i\frac{1}{u_{i\bar{i}}}\in L^p(B_1)$。那么对于任意 $0<\alpha<1$,

$$||u||_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})}\le C.$$

这里 C 取决于 n、 p、 $||u||_{L^\infty(B_1)}$、$||\Delta u||_{L^p(B_1)}$、$||\sum_i\frac{1}{u_{i\bar{i}}}||_{L^p(B_1)}$。

现在我们来证明 Schauder型估计，即推论 1.4。

证明。（推论 1.4）首先，我们只需证明对于足够大的 p，其中大小仅取决于 n 和 α，$u \in W^{2,p}$。事实上，$W^{2,p}$ 嵌入到 $C^{1,1-\frac{2n}{p}}$ 中，其中 $p > 2n$（请记住，实维数为 $2n$。）为了应用引理 7.3，我们只需取足够大的 p，使得

$$1 - \frac{2n}{p} > 1 - \frac{\alpha}{n(2+\alpha)-1}.$$

现在固定这个 p，只需证明 $u \in W^{2,p}$。论证与推论 1.1 和 1.2 类似。我们需要进行重标度，使其满足定理 1.4 的情形。换言之，取 $z_0 \in B_{\frac{1}{2}}$，并考虑重标度后的 $\tilde{u}_{r_0}(w) = r_0^2 f((z_0))^{\frac{1}{n}} u(z_0 + r_0 w)$。类似地，定义 $\tilde{w}_{r_0}(w) = r_0^2 f((z_0))^{\frac{1}{n}} w_0(z_0 + r_0 w)$。于是对 $|w| < 1$，$\tilde{u}_{r_0}$ 与 $\tilde{w}_{r_0}$ 之间的接近程度变为：

$$|\tilde{u}_{r_0} - \tilde{w}_{r_0}| \le \frac{\delta_0}{r_0^2 (f(z_0))^{\frac{1}{n}}} \le \delta_0 \frac{C_1^{\frac{1}{n}}}{r_0^2}.$$

另一方面，

$$\det(\tilde{u}_{r_0})_{i\bar{j}} = \frac{f(z_0 + r_0 w)}{f(z_0)},$$

并且我们可以估计：

$$\left|\frac{f(z_0 + r_0 w)}{f(z_0)} - 1\right| \le \frac{1}{f(z_0)} r_0^\alpha K \le C_1^{\frac{1}{n}} K r_0^\alpha.$$

因此，要使定理 1.4 适用，我们只需保证：

$$\delta_0 \frac{C_1^{\frac{1}{n}}}{r_0^2} \le \delta_0',$$
$$C_1^{\frac{1}{n}} K r_0^\alpha \le \varepsilon_{p,n}.$$

这里，δ_0' 是由定理 1.4 给出的解与光滑背景之间所需的接近程度，而$\varepsilon_{p,n}$是在上述对 p的选择下所需的小量 ε。

因此，我们应先选择 r_0，使得$C_1^{\frac{1}{n}} K r_0^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{p,n}$。然后固定 r_0后，我们选择足够小的 δ_0，以确保 $\delta_0 \frac{C_1^{\frac{1}{n}}}{r_0^2} \le \delta_0'$。接着，我们可以应用定理 1.4 得出，$u$属于 $W^{2,p}$，在 $B_{\frac{1}{2}r_0}(z_0)$上。□

引理 7.3.（[12]）设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域，且 $u \in PSH(\Omega) \cap C(\Omega)$ 是 Ω 中复 Monge-Ampère 方程的一个弱解，其中 $0 < \lambda \le f \in C^\alpha(\Omega)$，对某个常数λ及某个 $\alpha \in (0,1)$成立。若 $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$，且 $\beta \in (\beta_0, 1)$，其中

$$\beta_0 = \beta_0(n,\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{n(2+\alpha)-1}.$$

那么 $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$。此外，任意相对紧子集上 u 的 $C^{2,\alpha}$ 范数可由 n、α、β、λ、$||u||_{C^{1,\beta}(\Omega)}$ $||f||_{C^\alpha(\Omega)}$ 以及该集合到 $\partial\Omega$ 的距离来估计。

References

[1] E. Bedford 和 B. A. Taylor：复 Monge-Ampère 方程的狄利克雷问题。《数学发明》第 37 卷（1976），1-44。[2] Z. Blocki：退化 Monge–安培方程的内部正则性。《澳大利亚数学会公报》第 68 卷（2003），81-92。[3] L. A. Caffarelli：复 Monge-Amp`ère 方程解的内部 $W^{2,\ p}$ 估计。《数学年刊》第 131 卷，第 1 期（ 1990 ），135-150。[4] L. A. Caffarelli 、 L. Nirenberg 和 J. Spruck：非线性二阶椭圆方程的狄利克雷问题。I. Monge-Ampère 方程。《纯粹与应用数学通讯》第 37 卷（1984），369-402。[5] L. A. Caffarelli、J. J. Kohn、L. Nirenbger 和 J. Spruck：非线性二阶椭圆方程的狄利克雷问题。II. 复 Monge-Ampère 方程和一致椭圆方程。《纯粹与应用数学通讯》第 38 卷（1985），209-252。[6] X.-X. Chen 和 J. Cheng：关于常标量曲率 K¨ahler 度量的存在性（I）：先验估计。《美国数学会杂志》第 34 卷，第 4 期（2021），909-936。（arXiv: 1712.06679）[7] Dinew S 和 Ko lodziej S：复 Hessian 方程的先验估计。《分析与偏微分方程》，（2014），7(1)，227-244。[8] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger：二阶椭圆偏微分方程。第 224 卷，第 2 号。柏林：施普林格，（1977）。[9] W. Y. He：关于复 Monge-Ampère 方程的正则性。《美国数学会会刊》第 140 卷，第 5 期（2012），1719-1727。[10] N. M. Ivochikina：通过积分方法构造 Monge-Ampère 方程凸解的先验界。《乌克兰数学杂志》第 30 卷（1978），32-38。[11] S. Kolodziej：紧致 K¨ahler 流形上的 Monge-Ampère 方程。《印第安纳大学数学杂志》第 52 卷，第 3 期（2003），667-686。[12] Chao、Li、Jiayu Li 和 Xi Zhang：复 Monge–Amp`ère 方程的 $C^{2,\ \alpha}$ 估计。《函数分析杂志》第 275 卷，第 1 期（2018），149-169。[13] Pogorelov. A. V：方程 det($\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j$) $=$ $\varphi\ x^1\ x^2\ \ldots\ x^n\ > 0$　　200　1971　534 537　　(, , ,) 的广义解的正则性。《苏联科学院通报》。第 . 卷。（ ），- 。[14] Pogorelov. A. V：Minkowski 多维问题。J. Wiley，纽约，1978。[15] O. Savin：椭圆方程的小扰动解。《偏微分方程通讯》，第 73 卷，第 4 期（2007），557-578。[16] F. Schulz：复 Monge-Ampere 方程解的 C^2 估计。《纯粹与应用数学杂志》第 348 卷（1984），88-93。[17] Yu Wang：复 Monge-Ampère 方程的刘维尔定理。预印本，arXiv:1303.2403（2013）。[18] S. -T. Yau：关于紧致 K¨ahler 流形的 Ricci 曲率及复 Monge-Amp`ère 方程，I。《纯粹与应用数学通讯》第 31 卷（1978），339-441。