arXiv:2301.00941v2 [math.QA] 5 Feb 2023

量子群的 $\imath$Serre 与 Serre-Lusztig 关系的新方法

ZACHARY CARLINI

Abstract. 我们为 $\imath$量子群的 $\imath$Serre 与 Serre-Lusztig 关系给出一种新的概念性证明。我们方法的关键是一个关于 $\imath$-除幂余乘法的新公式，它使我们能够用伴随作用来重述这些关系。随后，我们利用伴随表示的性质得到证明。这种方法具有灵活性，使我们能够建立一类更一般的关系，而这些关系似乎很难通过其他方法建立。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. $\imath$Serre 与 Serre-Lusztig 关系的重述 6 4. $\imath$ Serre 与 Serre-Lusztig 关系的新证明 9 参考文献 12

1. Introduction

给定一个有限型（或 Kac-Moody 型）Satake图 $(\mathbb{I} = \mathbb{I}_\circ \cup \mathbb{I}_\bullet, \tau)$，可以定义一个量子对称对 $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^\imath_\zeta)$ [Let99]（另见 [Ko14]），它可视为相应经典对称对的量子类比。虽然 $\mathbf{U}^\imath_\zeta$ 这一余理想子代数一般不是量子群，但每个量子群 U 都出现在一个对角量子对称对 $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}, \mathbf{U})$ 中；参见 [BW18b]。因此，形如 $\mathbf{U}^\imath_\zeta$ 的代数可视为量子群的一种推广，我们将其称为$\imath$量子群。若 $\mathbb{I}_\bullet = \emptyset$，则称一个 $\imath$量子群为拟分裂的；若此外 τ 是平凡自同构，则称其为分裂的。

$\imath$有限型量子群的一个表示由 Letzter[Let02、Let03], 给出，其中涉及带有神秘 q-幂及非齐次项的 Serre型关系；Kolb 将其推广到了某些 Kac-Moody型量子群 [Ko14]。 [CLW21]给出了任意 Kac-Moody 型拟分裂$\imath$量子群的概念性表示。该表述依赖于 [BW18a] 中引入的 $\imath$-除幂（另见[BeW18]）。 [CLW21]给出的 $\imath$Serre 关系的简洁表达式

Key words and phrases. $\imath$量子群、 $\imath$Serre 关系、量子伴随作用。

在形式上与通常的 q-Serre 关系相同，其中 $\imath$-除幂起到了 Lusztig 除幂的作用。Casper、Kolb 和 Yakimov 在准分裂情形下找到了另一种 Serre 表示，它使用一些特殊多项式，而非 $\imath$-除幂 [CKY21]。后来， [KY21]将这一方法推广到了一般的 Kac-Moody 型。

然而，通过 $\imath$除幂给出的 $\imath$Serre 关系对于若干应用而言是理想的。首先，对于适当的ς，它们是 $\mathbf{U}^\imath_\varsigma$ 整形式中的公式，预计将在范畴化中发挥基础作用。此外，这种 Serre 表示形式对于建立拟分裂 $\imath$量子群的 $\imath$Hall 代数实现至关重要 [LW20]。此外，它还允许利用 $\imath$除幂自然推广到高阶 Serre-Lusztig 关系 [CLW21b], ，并进一步导出了 Kac-Moody型$\imath$量子群的相对辫群公式；参见 [CLW21b, Z22]。最后，它们对于研究 $\imath$根 1 [BS22]处的量子群至关重要。

本文旨在以一种自成一体且概念清晰的方式，为最小次数的 $\imath$Serre 关系和 Serre-Lusztig 关系给出新的证明； [CLW21, CLW21b] 中的原始证明篇幅冗长且依赖计算。我们基于伴随算子发展了一种新方法。这种方法还导出了新的关系，而这些关系似乎难以通过其他方式证明。

众所周知，量子群的 q-Serre 关系可以利用伴随作用简洁地表示；参见 [Jan96]。在本文中，我们为最小次数的 $\imath$Serre 和 Serre-Lusztig 关系建立了类似的表述。为证明这一伴随算子表述与 [CLW21, CLW21b], 中的表述等价，我们在 [CW23] 的基础上，证明了一个关于 $\imath$-除幂的新余乘法公式。

随后，我们直接证明这一伴随算子重述，从而为最小次数的 $\imath$Serre 和 Serre-Lusztig 关系获得自洽的新证明。具体而言，我们使用 [BeW18, Theorems 2.10, 3.6], ，其中断言：对于参数为 $\varsigma = q^{-1}$ 的分裂秩 1 $\imath$ 量子群， $\imath$除幂 $B_{\pi}^{(n+1)}$ 湮灭最高权为 q^n 的简单 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-模。在略微加强这一结果之后（见引理 4.1 和引理 4.3），我们将其应用于伴随表示，从而迅速证明重述后的 $\imath$Serre 和 Serre-Lusztig 关系。

本文结构如下。第2节中，我们回顾 $\imath$量子群的一些基础知识，包括 $\imath$除幂和余乘法。第3节中，我们推导出一个新的 $\imath$除幂余乘法公式，并通过量子伴随作用，将其用于获得分裂 $\imath$量子群中 $\imath$Serre 关系和 Serre-Lusztig 关系的新表述。最后，第4节中，我们利用这些重述，为 $\imath$ Serre 关系和 Serre-Lusztig 关系给出新的证明，并用相同的方法建立一些新关系。

致谢。作者谨此感谢王维强给予极有帮助的建议并进行深入讨论；没有这些帮助，本文将

无法完成。作者的本科研究得到 Wang 的美国国家科学基金会（NSF）资助项目（DMS-2001351）的支持。

2. The preliminaries

量子群。设 $(\mathbb{I}, 2\frac{i\cdot j}{i\cdot i}$　　$\epsilon_i = \frac{i\cdot i}{2}$　　$\mathbb{I}\cdot$　　$a_{ij} =$) 是一个 Cartan 数据。对于 $i, j \in \mathbb{I}$，我们记 和 。一个类型为 (,) 的根数据由有限生成自由阿贝尔群 X 和 Y、一个完美配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon Y \times X \to \mathbb{Z}$，以及与每个 $i \in \mathbb{I}$ 相关联的元素 $\alpha_i \in X$ 和 $h_i \in Y$ 组成，使得对于每个 $i, j \in \mathbb{I}$ 都有 $\langle h_i, \alpha_j \rangle = a_{ij}$；参见 [Lus93]。我们将假设该根数据是 X-正则且 Y-正则，因此 $\{\alpha_i \colon i \in \mathbb{I}\}$ 在线性空间 X 中线性无关，而 $\{h_i \colon i \in \mathbb{I}\}$ 在线性空间 Y 中线性无关。

对于 $i \in \mathbb{I}$，我们由 $q_i = q^{\epsilon_i}$ 定义 $q_i \in \mathbb{C}(q)$。量子整数和量子阶乘定义如下：

$$[n]_i = \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}; \qquad [n]_i^! = [n]_i [n-1]_i \dots [1]_i. \tag{1}$$

回顾一下，Drinfeld-Jimbo 量子群 U 是一个 $\mathbb{C}(q)$-代数，其生成元为 E_i、F_i 和 K_h，对所有 $i \in \mathbb{I}$ 和 $h \in Y$，并满足以下关系

$$K_0 = 1, \qquad K_h K_{h'} = K_{h+h'}; \tag{R1}$$

$$K_h E_j K_{-h} = q^{\langle h, \alpha_j \rangle} E_j; \tag{R2}$$

$$K_h F_j K_{-h} = q^{-\langle h, \alpha_j \rangle} F_j; \tag{R3}$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{\widetilde{K}_i - \widetilde{K}_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}; \tag{R4}$$

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} E_i^{(r)} E_j E_i^{(s)} = 0; \tag{R5}$$

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s F_i^{(r)} F_j F_i^{(s)} = 0, \tag{R6}$$

对所有 i、$j \in \mathbb{I}$、h、$h' \in Y$，有 $\widetilde{\ }$，其中 $K_i = K_{h_i}^{\epsilon_i}$，而 Lusztig 的除幂定义为 $E_i^{(n)} = E_i^n / [n]_i^!$、$F_i^{(n)} = F_i^n / [n]_i^!$。

我们回顾 U 上的 Hopf 代数结构；参见 [Jan96, Lus93]。反极 $S : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是满足以下条件的唯一反自同构

$$S(K_h) = K_{-h}; \qquad S(E_i) = -\widetilde{K}_i^{-1} E_i; \qquad S(F_i) = -F_i \widetilde{K}_i,$$

对所有的 $i \in \mathbb{I}$ 和 $h \in Y$，余乘法 $\Delta : \mathrm{U} \to \mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$ 是满足以下条件的唯一代数同态

$$\Delta(K_h) = K_h \otimes K_h; \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + \widetilde{K}_i \otimes E_i; \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes \widetilde{K}_i^{-1} + 1 \otimes F_i.$$

量子群。设 τ 是 $(\mathbb{I},\cdot)$ 的一个对合。我们假设 τ 可扩展为 X 的一个对合以及 Y 的一个对合，使得配对$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 τ 下保持不变。设 $\mathbb{I}_\bullet \subset \mathbb{I}$ 是一个有限型子数据。记作$\mathbb{I}_\circ = \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_\bullet$。设 $w_\bullet$ 是 $\mathbb{I}_\bullet$ 的魏尔群中的最长元素。记作

$$\mathbb{I}_\circ^{\mathrm{split}} = \{i \in \mathbb{I}_\circ : \tau i = i = w_\bullet i\}.$$

按照 [Ko14 的定义 2.3]，要求 $(\mathbb{I} = \mathbb{I}_\bullet \cup \mathbb{I}_\circ, \tau)$ 是可容许的。

固定一组满足约束条件 $\varsigma_i = \varsigma_{\tau i}$ if$a_{i,\tau i} = 0$ 的参数 $\varsigma = (\varsigma_i)_{i\in\mathbb{I}_\circ}$。沿用 [Let99 和 Ko14], ，我们将量子群 $\mathbf{U}_\varsigma^\imath$ 定义为由所有 E_j 和 F_j（其中 $j \in \mathbb{I}_\bullet$）、所有满足 $\tau h = -w_\bullet h$ 的 K_h（其中 $h \in Y$），以及所有

$$B_i := F_i + \varsigma_i T_{w_\bullet}(E_{\tau i})\widetilde{K}_i^{-1}$$

其中 $i \in \mathbb{I}_{\circ\circ}$ 这里，$T_{w_\bullet}$ 对应于 $T''_{w_\bullet,+1}$，见 [Lus93，第 37] 章。

对于 $i \in \mathbb{I}_\circ^{\mathrm{split}}$，由 E_i、F_i、$\widetilde{K}_i$ 和 $\widetilde{K}_i^{-1}$ 生成的 $\mathbf{U}$ 的子代数记为 $\mathbf{U}_i$。算子 $T_{w_\bullet}$ 在此子代数上平凡作用，因此特别有 $B_i = F_i + \varsigma_i E_i K_i^{-1}$。我们将引入以下附加记号：

$$\check{E}_i = \varsigma_i E_i \widetilde{K}_i^{-1}; \qquad \begin{bmatrix} h;a \\ n \end{bmatrix}_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{q_i^{4a+4i-4}\widetilde{K}_i^{-2} - 1}{q_i^{4i} - 1}. \tag{2}$$

我们还将定义 $\check{}\, E_i$ 的除幂：$\check{}\, E_i^{(n)} = \check{}\, E_i^n / [n]_i^!$。

当 $i \in \mathbb{I}_\circ^{\mathrm{split}}$ 时，我们可以将由 B_i 生成的 $\mathbf{U}$ 的多项式子代数与分裂秩 1 $\imath$ 量子群等同起来。遵循 [CLW21]（对 [BW18a, BeW18] 中的定义略作推广，以允许任意的 ς_i），我们定义依赖于奇偶性选择 $\overline{p} \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$ 的 $\imath$-除幂：

$$B_{i,\overline{0}}^{(n)} = \frac{1}{[n]!}\begin{cases} B_i \prod_{j=1}^{k}(B_i^2 - q_i\varsigma_i[2j]_i^2) & \text{if } n = 2k+1; \\ \prod_{j=1}^{k}(B_i^2 - q_i\varsigma_i[2j-2]_i^2) & \text{if } n = 2k; \end{cases} \tag{3}$$

$$B_{i,\overline{1}}^{(n)} = \frac{1}{[n]!}\begin{cases} B_i \prod_{j=1}^{k}(B_i^2 - q_i\varsigma_i[2j-1]_i^2) & \text{if } n = 2k+1; \\ \prod_{j=1}^{k}(B_i^2 - q_i\varsigma_i[2j-1]_i^2) & \text{if } n = 2k. \end{cases} \tag{4}$$

这些 $\imath$-除幂通过某个缩放自同构与 $\varsigma_i = q_i^{-1}$ 时的特殊情形相关联。

定义 2.1. 对于 $\lambda \in \mathbb{C}(q)^*$，定义 ξ_λ 为 $\mathbf{U}$ 的唯一端同态，使其满足

$$\xi_\lambda(E_i) = \lambda E_i; \quad \xi_\lambda(F_i) = \lambda^{-1}F_i; \quad \xi_\lambda(K_h) = K_h,$$

对所有 $i \in \mathbb{I}$、$h \in Y$ 均成立。

我们列出若干关键性质，读者可以直接验证。

(1) 对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}(q)^*$，$\xi_\lambda$ 是一个 Hopf 代数自同构。

(2) 将 λ 映射到 ξ_λ 的映射 $C(q)^* \to$Aut(U) 是群同态。(3) 对于 $i \in \mathbb{I}_\circ^{\text{split}}$和 $\lambda \in \mathbb{C}(q)^*$, $\xi_\lambda\left(\check{E}_i^{(n)}\right) = \lambda^n \check{E}_i^{(n)}$，且 $\xi_\lambda\left(F_i^{(n)}\right) = \lambda^{-n} F_i^{(n)}$ 。(4) 对于 $i \in \mathbb{I}_\circ^{\text{split}}$和 $u \in \mathrm{U}_i$, $S^2(u) = \xi_{q_i}^{-2}(u)$。(5) 对于 $h \in Y$、 $i \in \mathbb{I}_\circ^{\text{split}}$和 $u \in \mathrm{U}_i$, $K_h u K_{-h} = \xi_{q^{\langle h,\ \alpha_i\rangle}}(u)$。 (6) 对于 $i \in \mathbb{I}_\circ^{\text{split}}$、 $n \geq 0$和 $\overline{p} \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$，令 $B_{i\,\overline{-}}^{(n)}$ 、p 为参数为 q_i^{-1}的 $\imath$-除幂。通过在 $\mathbb{C}(q)$的扩张中运算，我们可以令 $z = \sqrt{q_i \varsigma_i}$。于是 $\xi_z\left(B_{i\,\overline{-}}^{(n)}\text{、}p\right) = z^{-n} B_{i\,\overline{p}}^{(n)}$ ，。

关于 $\imath$-除幂 $B_{i\,\overline{-}}^{(n)}$, p 已找到了用 Chevalley 生成元表示的显式公式。我们只需要偶宇称的情形，该情形（除施加适当的缩放自同构外；参见 [CW23]）见于 [BeW18，命题 2.7]:

$$B_{i,\overline{0}}^{(n)} = \sum_{\substack{a+2c\leq n\\ a,c\geq 0}} k_{i,n,c,a} F_i^{(n-2c-a)} \begin{bmatrix} h; 1-c+\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \\ c \end{bmatrix}_i \check{E}_i^{(a)}, \tag{5}$$

其中$k_{i,\ n,\ a,\ c}$ 由下式给出

$$k_{i,n,a,c} = \begin{cases} (-1)^c q_i^{3c+a(n-2c-a)} (q_i \varsigma_i)^c & \text{if } n \text{ is even;} \\ (-1)^c q_i^{c+a(n-2c-a)} (q_i \varsigma_i)^c & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

我们的目标是研究 $B_i^{(n)}$, $\overline{1-n}$ 在 U 上的伴随作用。我们将首先研究 $\Delta\left(B_{i,\overline{1-n}}^{(n)}\right)$。对于任意 $i \in \mathbb{I}_\circ^{\text{split}}$，定义 $T_{i,\ n,\ r}$ 为 U_i 中满足下式的唯一元素

$$\Delta\left(B_{i,\overline{1-n}}^{(n)}\right) = \sum_{r+s=n} B_{i,\overline{1-n}}^{(s)} \otimes T_{i,n,r}. \tag{6}$$

由 [CW23 中的定理 4.2] 和 [CW23 中的定理 5.1], ，我们有

$$T_{i,n,r} = \sum_{\substack{a+2c\leq r\\ a,c\geq 0}} t_{i,n,r,c,a} \check{E}_i^{(a)} \begin{bmatrix} h; -\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor \\ c \end{bmatrix}_i \widetilde{K}_i^{r-n} F_i^{(r-2c-a)}, \tag{7}$$

其中$t_{i,\ n,\ r,\ c,\ a}$ 由下式给出

$$t_{i,n,r,c,a} = q_i^{\binom{2c+1}{2}+(r-2c)(r-n)-a(r-2c-a)} (q_i \varsigma_i)^c.$$

本文将为$T_{i,\ n,\ r}$ （因而也为 $\Delta\left(B_{i,\overline{1-n}}^{(n)}\right)$）建立一个更紧凑的公式，并据此求出$B_i^{(n)}$, $\overline{1-n}$ 对 U 的伴随作用公式。

3. Reformulation of $\imath$Serre and Serre-Lusztig relations

3.1. $\imath$-除幂的新余乘法公式。我们首先尝试寻找一个不同于（7）的$T_{i,\ n,\ r}$ 新表达式。

引理 3.1. 对任意 $i \in \mathbb{I}_\circ^{split}$，以下恒等式成立：

$$S\Big(F_i^{(n)}\Big) = (-1)^n q_i^{2\binom{n+1}{2}} \widetilde{K}_i^n F_i^{(n)}; \tag{8}$$

$$S\Big(\check{E}_i^{(n)}\Big) = (-1)^n q_i^{2\binom{n}{2}} \check{E}_i^{(n)} \widetilde{K}_i^n; \tag{9}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} h; a \\ n \end{bmatrix}_i\right) = (-1)^n q_i^{2n(n+2a-1)} \widetilde{K}_i^{2n} \begin{bmatrix} h; 1-n-a \\ n \end{bmatrix}_i. \tag{10}$$

证明。首先，我们可以计算

$$S\Big(F_i^{(n)}\Big) = \frac{1}{[n]_i^!}\Big(-F_i\widetilde{K}_i\Big)^n = \frac{(-1)^n q_i^{2\binom{n+1}{2}}}{[n]_i^!}\widetilde{K}_i^n F_i^n = (-1)^n q_i^{2\binom{n+1}{2}}\widetilde{K}_i^n F_i^{(n)}.$$

接下来，我们可以观察到

$$S\big(\check{E}_i\big) = S\Big(\varsigma_i E_i \widetilde{K}_i^{-1}\Big) = -\varsigma_i E_i = -\check{E}_i\widetilde{K}_i,$$

由此，通过与（8）的证明类似的论证可得（9）。最后，

$$\begin{aligned} S\left(\begin{bmatrix} h; a \\ n \end{bmatrix}_i\right) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{q_i^{4a+4i-4}\widetilde{K}_i^2 - 1}{q_i^{4i}-1} \\ &= (-1)^n q_i^{4na-4n+4\binom{n+1}{2}} \widetilde{K}_i^{2n} \prod_{i=1}^{n} \frac{q_i^{-4a-4i+4}\widetilde{K}_i^{-2} - 1}{q_i^{4i}-1} \\ &= (-1)^n q_i^{2n(n+2a-1)} \widetilde{K}_i^{2n} \prod_{i=1}^{n} \frac{q_i^{-4a-4n+4i}\widetilde{K}_i^{-2} - 1}{q_i^{4i}-1} \\ &= (-1)^n q_i^{2n(n+2a-1)} \widetilde{K}_i^{2n} \begin{bmatrix} h; 1-n-a \\ n \end{bmatrix}_i. \end{aligned}$$

引理得证。 □

回顾定义 2.1 给出的自同构 ξ_{q_i}。我们将 [CW23, 定理 4.2] 和 [CW23, 定理 5.1]（另见（7））改进如下。

定理 3.2. 对于 $i \in \mathbb{I}_\circ^{split}$和 $n \geq 0$,

$$\Delta\Big(B_{i,\overline{1-n}}^{(n)}\Big) = \sum_{r+s=n} (-1)^r B_{i,\overline{1-n}}^{(s)} \otimes \widetilde{K}_i^{-n} \xi_{q_i}^{n+1}\Big(S\big(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\big)\Big).$$

证明。由方程 (5)，我们得到

$$B_{i,\overline{0}}^{(r)} = \sum_{\substack{a+2c\leq r \\ a,c\geq 0}} k_{i,r,c,a} F_i^{(r-2c-a)} \begin{bmatrix} h; 1-c+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor \\ c \end{bmatrix}_i \check{E}_i^{(a)}.$$

根据引理 3.1，我们可以计算

$$S\left(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\right)=\sum_{\substack{a+2c\leq r\\ a,c\geq 0}} k'_{i,r,c,a}\check{E}_i^{(a)}\widetilde{K}_i^{a}\widetilde{K}_i^{2c}\left(\begin{bmatrix} h;-\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor\\ c\end{bmatrix}_i\right)\widetilde{K}_i^{r-2c-a}F_i^{(r-2c-a)},$$

with

$$k'_{i,r,c,a}=(-1)^{r-3c}q_i^{2\binom{a}{2}+2\binom{r-2c-a+1}{2}+2c\left(c+2\left(1-c+\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor\right)-1\right)}k_{i,r,c,a}.$$

我们可以简化

$$k'_{i,r,c,a}=(-1)^{r}q_i^{\binom{2c+1}{2}+a^2-2a+(r-a+1)(r-2c)}(q_i\varsigma_i)^c.$$

接着，我们可以将左侧的 $\widetilde{K}_i^n$ 提出，得到

$$S\left(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\right)=\widetilde{K}_i^{n}\sum_{\substack{a+2c\leq r\\ a,c\geq 0}} k''_{i,n,r,c,a}\check{E}_i^{(a)}\left(\begin{bmatrix} h;-\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor\\ c\end{bmatrix}_i\right)\widetilde{K}_i^{r-n}F_i^{(r-2c-a)},$$

其中

$$k''_{i,n,r,c,a}=q_i^{-2na}k'_{i,r,c,a}.$$

但是我们可以计算

$$\begin{aligned}k''_{i,n,r,c,a}&=(-1)^{r}q_i^{\binom{2c+1}{2}+a^2-2a+(r-a+1)(r-2c)-2na}(q_i\varsigma_i)^c\\&=(-1)^{r}q_i^{\binom{2c+1}{2}-a(r-2c-a)+(r-2c)(r-n)+(n+1)(r-2c-2a)}(q_i\varsigma_i)^c\\&=(-1)^{r}q_i^{(n+1)(r-2c-2a)}t_{i,n,r,c,a},\end{aligned}$$

因此，通过应用 $\xi_{q_i}^{n+1}$，我们得到

$$\xi_{q_i}^{n+1}\left(S\left(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\right)\right)=(-1)^{r}\widetilde{K}_i^{n}T_{i,n,r},$$

由此得证。 □

3.2. 伴随算子。对于 $u,v\in\mathsf{U}$，若 $\Delta(u)=\sum_t u_t\otimes u^t$，则 u 在 v 上的伴随作用定义为

$$\mathrm{ad}(u)(v)=\sum_t u_t v S\left(u^t\right).$$

于是 $\mathsf{ad}:\mathsf{U}\to\mathsf{End}(\mathsf{U})$ 是一个代数同态。

命题3.3. 对于 $i\in\mathbb{I}_\circ^{split}$、$n\geq 0$ 和 $u\in\mathsf{U}$，有

$$\mathrm{ad}\left(B_{i,\overline{1-n}}^{(n)}\right)(u)=\sum_{r+s=n}(-1)^{r}B_{i,\overline{1-n}}^{(s)}u\xi_{q_i}^{n-1}\left(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\right)\widetilde{K}_i^{n}.$$

证明。根据定义，我们有

$$\mathrm{ad}\left(B_{i,\overline{1-n}}^{(n)}\right)(u)=\sum_{r+s=n}B_{i,\overline{1-n}}^{(s)}uS(T_{i,n,r}).$$

根据定理 3.2,

$$\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{1-n}}^{(n)}\right)(u)=\sum_{r+s=n}B_{i,\overline{1-n}}^{(s)}uS\left((-1)^r\widetilde{K}_i^{-n}\xi_{q_i}^{n+1}\left(S\left(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\right)\right)\right),$$

这可简化为

$$\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{1-n}}^{(n)}\right)(u)=\sum_{r+s=n}(-1)^rB_{i,\overline{1-n}}^{(s)}u\xi_{q_i}^{n-1}\left(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\right)\widetilde{K}_i^n.$$

证明至此完成。 □

3.3. $\imath$Serre 和 Serre-Lusztig 关系的新表述。根据量子群的一个标准结果（参见 [Jan96, 4.18]），对于任意 $i,j\in\mathbb{I}$,

$$\operatorname{ad}\left(F_i^{(1-a_{ij})}\right)\left(F_j\widetilde{K}_j\right)=\sum_{r+s=1-a_{ij}}(-1)^rF_i^{(s)}F_jF_i^{(r)}\widetilde{K}_j\widetilde{K}_i^{1-a_{ij}}. \tag{11}$$

利用命题3.3，我们可以证明一个 $\imath$量子类比。

命题 3.4。设 $i\in\mathbb{I}_\circ^{split}$和 $j\in\mathbb{I}_\circ$ 以及 $i\neq j$。则

$$\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)\left(B_j\widetilde{K}_j\right)=\sum_{r+s=1-a_{ij}}(-1)^rB_{i,\overline{a_{ij}}}^{(s)}B_jB_{i,\overline{0}}^{(r)}\widetilde{K}_j\widetilde{K}_i^{1-a_{ij}}.$$

证明。由命题3.3,

$$\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)\left(B_j\widetilde{K}_j\right)=\sum_{r+s=1-a_{ij}}(-1)^rB_{i,\overline{a_{ij}}}^{(s)}B_j\widetilde{K}_j\xi_{q_i}^{-a_{ij}}\left(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\right)\widetilde{K}_i^{1-a_{ij}}.$$

$\widetilde{}$将 K_j 项移到右边，得到

$$\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)\left(B_j\widetilde{K}_j\right)=\sum_{r+s=1-a_{ij}}(-1)^rB_{i,\overline{a_{ij}}}^{(s)}B_jB_{i,\overline{0}}^{(r)}\widetilde{K}_j\widetilde{K}_i^{1-a_{ij}}.$$

证明完毕。 □

命题 3.4 有如下直接推论，它证明了 Wang 的一个猜想（通过私人通信得知）。

定理 3.5. 对于满足 $i\neq j$的 $i\in\mathbb{I}_\circ^{split}$和 $j\in\mathbb{I}_\circ$，以下两个关系等价:

(1) $\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)\left(B_j\widetilde{K}_j\right)=0$ *in* $\mathbf{U}$*;*
(2) $\sum_{r+s=1-a_{ij}}(-1)^rB_{i,\overline{a_{ij}}}^{(s)}B_jB_{i,\overline{0}}^{(r)}=0$ *in* $\mathbf{U}^\imath$.

定理 3.5(2) 中的关系称为 $\mathbf{U}^\imath$ 中的 $\imath$Serre 关系，该关系最初由 [CLW21]提出并证明。

注 3.1. 对于分裂的 $\imath$量子群， $\imath$Serre 关系就是全部定义关系；参见 [CLW21]。若将 U 定义为由所有 $i\in\mathbb{I}$ 的 E_i、 F_i、 $\widetilde{K}_i$ 和 $\widetilde{K}_i^{-1}$ 生成的代数，并施加关系 (R1)-(R4)，但不施加 q-Serre 关系，则可将 $\mathbf{U}_\zeta^\imath$ 定义为对 $i\in\mathbb{I}$ 由 $F_i+\varsigma_iE_i\widetilde{K}_i^{-1}$ 生成的子代数。于是有一个典范投影 $\pi:\ \widehat{\ }\mathbf{U}\to\mathbf{U}$

该投影限制为投影 $\pi|_{\widehat{\mathbf{U}}_\varsigma^\imath} \to \mathbf{U}_\varsigma^\imath$。命题 3.4 的证明仍然适用于 U，而命题 3.4 与 [CLW21 定理 3.1] 合起来推出，$\pi|_{\widehat{\mathbf{U}}_\varsigma^\imath}$ 的核等于 $\mathbf{U}_\varsigma^\imath$ 与由 $\left\{\mathrm{ad}\left(B_i^{(1-a_{ij})_{,a_{ij}}}\right)\left(B_j\widetilde{K}_j\right): i\neq j\in\mathbb{I}\right\}$ 在 $\widehat{\mathbf{U}}$ 中生成的双边理想的交。

命题 3.4 可以加强如下。

命题 3.6. 对于 $n\geq 1$、$i\in\mathbb{I}_\circ^{split}$ 和 $j\in\mathbb{I}_\circ$,

$$\mathrm{ad}\left(B_{i,\overline{na_{ij}}}^{(1-na_{ij})}\right)\left(B_j^n\widetilde{K}_j^n\right)=\sum_{r+s=1-na_{ij}}(-1)^r B_{i,\overline{na_{ij}}}^{(s)}B_j^nB_{i,\overline{0}}^{(r)}\widetilde{K}_j^n\widetilde{K}_i^{1-na_{ij}}.$$

证明。根据命题3.3,

$$\mathrm{ad}\left(B_{i,\overline{na_{ij}}}^{(1-na_{ij})}\right)\left(B_j^n\widetilde{K}_j^n\right)=\sum_{r+s=1-na_{ij}}(-1)^r B_{i,\overline{na_{ij}}}^{(s)}B_j^n\widetilde{K}_j^n\xi_{q_i}^{-na_{ij}}\left(B_{i,\overline{0}}^{(r)}\right)\widetilde{K}_i^{1-na_{ij}}.$$

将 K_j^n 项移到右边，得到

$$\mathrm{ad}\left(B_{i,\overline{na_{ij}}}^{(1-na_{ij})}\right)\left(B_j^n\widetilde{K}_j^n\right)=\sum_{r+s=1-na_{ij}}(-1)^r B_{i,\overline{na_{ij}}}^{(s)}B_j^nB_{i,\overline{0}}^{(r)}\widetilde{K}_j^n\widetilde{K}_i^{1-na_{ij}}.$$

证明至此完成。 □

以下定理可直接由命题 3.6 得出。

定理3.7. 对于 $n\geq 1$、$i\in\mathbb{I}_\circ^{split}$和 $j\in\mathbb{I}_\circ$，若满足 $i\neq j$，则以下两个关系等价:

(1) $\mathrm{ad}\left(B_{i,\overline{na_{ij}}}^{1-na_{ij}}\right)\left(B_j^n\widetilde{K}_j^n\right)=0$ *in* $\mathbf{U}$;
(2) $\sum_{r+s=1-na_{ij}}(-1)^r B_{i,\overline{na_{ij}}}^{(s)}B_j^nB_{i,\overline{0}}^{(r)}=0$ *in* $\mathbf{U}_\varsigma^\imath$.

定理3.7(2)中的关系称为最小次数的 Serre-Lusztig（即高阶 ıSerre）关系，最早见于 [CLW21b，定理 A]。

4. New proof of ıSerre and Serre-Lusztig relations

通过利用伴随作用重新表述 ıSerre 关系，我们可以借助 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的表示论来证明这些关系。固定 $i\in\mathbb{I}_\circ^{\mathrm{split}}$，并令 $L(n)$ 为最高权为 q_i^n 的单 $\mathbf{U}_i$-模。该结果最初由 [BeW18 的定理 2.10、3.6] 在 $\varsigma_i=q_i^{-1}$ 的特殊情形下证明。我们将证明一般情形也可由此推出。

引理 4.1（[BeW18]）。元素 $B_{i\,\overline{n}}^{(n+1)}$，湮灭 $L(n)$。

证明。设 v_0 是 $L(n)$ 中的一个最高权向量。对于 $k\geq 0$，我们定义 $v_k=F^{(k)}.v_0$。元素 $v_0,v_1,\ldots,v_n$ 构成 $L(n)$ 的一组基。通过在 $C(q)$ 的一个扩张中进行运算，我们可以令 $z=\sqrt{q_i\varsigma_i}$。令 $B_{i\,\underline{-}}^{(n)}$，$p$ 为 ı-除幂

参数为 q_i^{-1}。我们有 $\xi_z\left(\widetilde{B_{i,\overline{p}}^{(n)}}\right) = z^{-n}B_{i,\overline{p}}^{(n)}$，。存在唯一确定的线性同构 $\xi_z : L(n) \to L(n)$，它将 $\xi_z : F_i^{(k)}v_0 \mapsto z^{-k}F_i^{(k)}v_0$ 映射为对应元素。通过检查生成元，可以验证，对于所有 $u \in \mathsf{U}_i$ 以及所有 $k \geq 0$, $\xi_z(u.v_k) = \xi_z(u).\xi_z(v_k)$。特别地，由 BeW18 定理 2.10、3.6],

$$B_{i,\overline{n}}^{(n+1)}.v_k = z^n\xi_z\left(\widetilde{B_{i,\overline{n}}^{(n+1)}}.\xi_z^{-1}(v_k)\right) = 0.$$

引理得证。 □

现在我们可以为 $\imath$量子群给出 $\imath$Serre 关系的一个简短新证明。（相比之下， [CLW21] 中 $\imath$Serre 关系的原始证明冗长且涉及大量计算。）

定理 4.2（$\imath$Serre 关系）。对于 $i \in \mathbb{I}_\circ^{split}$和 $j \in \mathbb{I}_\circ$，若 $j \neq i$，则有

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^r B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(s)} B_j B_{i,\overline{0}}^{(r)} = 0.$$

证明。根据定理 3.5，只需证明

$$\mathrm{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{1-a_{ij}}\right)\left(B_j\widetilde{K}_j\right) = 0.$$

通过伴随作用将 U 视为 U_i 模。我们可以验证

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}\,(F_i)(T_{w_\bullet}(E_{\tau j})) &= (F_iT_{w_\bullet}(E_{\tau j}) - T_{w_\bullet}(E_{\tau j})F_i)\widetilde{K}_i \\ &= T_{w_\bullet}(F_iE_{\tau j} - E_{\tau j}F_i)\widetilde{K}_i = 0,\end{aligned}$$

因此，$T_{w_\bullet}(E_{\tau j})$ 是一个最低权向量。对于任意 $u \in \mathsf{U}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}\,(E_i)(T_{w_\bullet}(u)) &= E_iT_{w_\bullet}(u) - \widetilde{K}_iT_{w_\bullet}(u)\widetilde{K}_i^{-1}E_i \\ &= T_{w_\bullet}\left(E_iu - \widetilde{K}_iu\widetilde{K}_i^{-1}E_i\right) = T_{w_\bullet}(\mathrm{ad}\,(E_i)(u)),\end{aligned}$$

因此，特别地，由 (R5) 可得

$$\mathrm{ad}\left(E_i^{1-a_{ij}}(T_{w_\bullet}(E_{\tau j}))\right) = T_{w_\bullet}\left(\mathrm{ad}\left(E_i^{1-a_{ij}}(E_{\tau j})\right)\right) = 0.$$

因此，由 $T_{w_\bullet}(E_{\tau j})$ 生成的子模必定是一个有限维简单模。由于 $T_{w_\bullet}(E_{\tau j})$ 是权为 $q_i^{a_{ij}}$ 的最低权向量，该模的最高权为 $q_i^{-a_{ij}}$。因此，

$$\mathrm{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)(T_{w_\bullet}(E_{\tau j})) = 0.$$

同样，我们可以验证

$$\mathrm{ad}\,(E_i)\left(F_j\widetilde{K}_j\right) = E_iF_j\widetilde{K}_j - \widetilde{K}_iF_j\widetilde{K}_j\widetilde{K}_i^{-1}E_i = (E_iF_j - F_jE_i)\widetilde{K}_j = 0,$$

~所以 F_jK_j 是一个最高权向量。根据 q-Serre 关系，它生成一个最高权为 $q_i^{-a_{ij}}$ 的有限维单模。因此，

$$\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)\left(F_j\widetilde{K}_j\right)=0.$$

最后，我们可以得出结论

$$\begin{aligned}&\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)\left(B_j\widetilde{K}_j\right)\\&=\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)\left(F_j\widetilde{K}_j\right)+\varsigma_j\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{a_{ij}}}^{(1-a_{ij})}\right)(T_{w_\bullet}(E_{\tau j}))=0.\end{aligned}$$

定理得证。 □

对于 Serre-Lusztig 关系，我们需要引理 4.1 的一个更强变体。

引理 4.3. 对任意 $n,k\geq 0$, $B_{i\,\overline{kn}}^{(kn+1)}$，均消灭 $L(n)^{\otimes k}$。

证明。我们不妨设 $n,k\geq 1$。众所周知， $L(n)^{\otimes k}$ 的所有简单直和项必定具有 $L(kn-2t)$ 的形式，其中 $t\geq 0$。由于 $B_{i\,\overline{kn}}^{(kn-2t+1)}$，整除 $B_{i\,\overline{kn}}^{(kn+1)}$，，由引理 4.1， $B_{i\,\overline{kn}}^{(kn+1)}$，消灭 $L(n)^{\otimes k}$ 的每个简单直和项。因此， $B_{i\,\overline{kn}}^{(kn+1)}$，消灭整个模 $L(n)^{\otimes k}$。□

此外，回想一下（例如，参见 [JL92]），对于任意带有余乘法 Δ 的 Hopf 代数 H，若 $x,y,z\in H$ 和 $\Delta(x)=\sum_{t=1}^{k}x_t\otimes x^t$，则

$$\operatorname{ad}(x)(yz)=\sum_{t=1}^{k}\operatorname{ad}(x_t)(y)\operatorname{ad}(x^t)(z).$$

等价地，乘法映射 $\nabla:\ H\otimes H\to H$ 是一个 H-模同态，其中 H 通过 ad 视为一个 H-模，而 $H\otimes H$ 通过 (ad $\otimes$ad)Δ视为一个 H-模。

现在我们给出 ı量子群的最小次数 Serre-Lusztig 关系的一种新的概念性证明。（ [CLW21b]中这些 Serre-Lusztig 关系的原始证明冗长且计算量很大。）

定理 4.4（ ı量子群的最小次数 Serre-Lusztig 关系）。对于所有 $i\in\mathbb{I}_\circ^{split}$、$n\geq 0$ 和 $j\in\mathbb{I}_\circ$，其中 $j\neq i$,

$$\sum_{r+s=1-na_{ij}}(-1)^r B_{i,\overline{na_{ij}}}^{(s)}B_j^nB_{i,\overline{0}}^{(r)}=0.$$

证明。根据命题 3.6，只需证明

$$\operatorname{ad}\left(B_{i,\overline{na_{ij}}}^{1-na_{ij}}\right)\left(B_j^n\widetilde{K}_j^n\right)=0.$$

通过 $\mathbf{U}_i$ 的伴随作用，将 U 视为 $\mathbf{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ 模。在 ıSerre 关系的证明中，我们证明了由 $T_{w_\bullet}(E_{\tau j})$ 和~F_jK_j生成的模都同构于 $L(-a_{ij})$。因此，存在一个 $\mathbf{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$-模

同态 ψ： $L(-a_{ij}) \oplus L(-a_{ij}) \to \mathbf{U}$，其像同时包含 $T_{w_\bullet}(E_{\tau j})$ 和 $F_j K_j$。特别地，对于每个 $t \in \mathbb{Z}$， $\xi_{q_j}^t(B_j)K_j$都包含在 ψ 的像中。令 $\nabla : \mathbf{U}^{\otimes k} \to \mathbf{U}$ 为乘法映射。令 Ψ 为以下复合

$$\bigoplus_{t=1}^{2^n} L(-a_{ij})^{\otimes n} \cong (L(-a_{ij}) \oplus L(-a_{ij}))^{\otimes n} \xrightarrow{\psi^{\otimes n}} \mathbf{U}^{\otimes n} \xrightarrow{\nabla} \mathbf{U}.$$

那么， Ψ 是 $\mathbf{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ 模的同态，且 Ψ 的像包含

$$B_j \widetilde{K}_j \xi_{q_j}^{-2}(B_j) \widetilde{K}_j \cdots \xi_{q_j}^{-2n+2}(B_j) \widetilde{K}_j = B_j^n \widetilde{K}_j^n.$$

但是根据引理 4.3， $B_{\overline{na_{ij}}}^{1-na_{ij}}$ 消去 $\bigoplus_{t=1}^{2^n} L(-a_{ij})^{\otimes n}$，因此

$$\operatorname{ad}\left(B_{\overline{na_{ij}}}^{1-na_{ij}}\right)\left(B_j^n \widetilde{K}_j^n\right) = 0.$$

定理得证。 □

在上述证明中，重复 n 次相同的 j 并无特别之处。同样的论证可以用来证明下面这个更强的版本，它似乎是新的。

定理 4.5。设 $i \in \mathbb{I}_\circ^{split}$，且 j_1、 j_2、……、 $j_k \in \mathbb{I}_\circ \setminus \{i\}$。令 $n = \sum_{t=1}^k a_{ij_k}$.，则有

$$\sum_{r+s=1-n} (-1)^r B_{i,\overline{n}}^{(s)} B_{j_1} \cdots B_{j_k} B_{i,\overline{0}}^{(r)} = 0.$$

证明。我们首先需要证明 $B_{i\,\overline{n}}^{(n+1)}$, 消去 $L(-a_{ij_1}) \otimes \cdots \otimes L(-a_{ij_k})$。显然，模 $L(-a_{ij_1}) \otimes \cdots \otimes L(-a_{ij_k})$ 的所有单直和项的最高权都具有 q_i^{n-2t} 的形式，其中 $t \in \mathbb{Z}$。因此，根据引理 4.1， $B_{i\,\overline{n}}^{(n+1)}$, 消去这些直和项中的每一个，故也消去整个模。证明其余部分从略，因为它与定理 4.4 的证明完全相同。 □

References

[BS22] H. Bao 和 J. Song, *Symmetric subgroup schemes Frobenius splittings and quantum symmetric pairs* 2212.13426 , , , arXiv: 。[18]

BW a H. Bao 和 W. Wang, *A new approach to Kazhdan-Lusztig theory of type B via quantum symmetric pairs* ´ **402**, 2018, +134 1310 , Asterisque vii pp, 0103 arXiv: 。[18]

Canonical bases arising from quantum symmetric pairs BW b H. Bao 和 W. Wang, , Invent. Math. 213 (2018), 1099–1177。[BeW18] C. Berman 和 W. Wang, *Formulae of ı-divided powers in* $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$, Journal of Pure and Applied Algebra 222 (2018), 2667–2702。[CKY21] W.R. Casper、S. Kolb 和 M. Yakimov, *Bivariate continuous q-Hermite polynomials and deformed quantum Serre relations* **20** 2021 , J. Algebra Appl. ( ), no. 1, Art. 2140016。[CLW21] X. Chen、M. Lu 和 W. Wang, *A Serre presentation for the ıquantum groups*, Transform. Groups 26 (2021), 827–857。

[CLW21b] X. Chen、M. Lu 和 W. Wang, *Serre-Lusztig relations for ıquantum groups*, Commun. Math. Phys. 382 (2021), 1015–1059。[CW23] X. Chen 和 W. Wang, *Formulae of ı-divided powers in* $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ *III*, J. Algebra 619 (2023), 221–248。[Jan96] J. Janzen, *Lectures on Quantum Groups*, 美国数学学会, 1996。[JL92] A. Joseph 和 G. Letzer, *Enveloping Algebras* **153** 1992 289 318 *Local Finiteness of the Adjoint Action for Quantized* , J. Algebra ( ), –。[Ko14] S. Kolb, *Quantum symmetric Kac-Moody pairs*, Adv. in Math. 267 (2014), 395–469。[K93] T. Koornwinder, *Askey-Wilson Polynomials and Zonal Spherical Functions on the* 2 *Quantum Group* **24** 1993 795 813 SU( ) , SIAM Journal on Math. Anal. ( ), –。[KY21] S. Kolb 和 M. Yakimov, *Defining relations of quantum symmetric pair coideal subalgebras* **9** 2021 67 , Forum of Math. Sigma ( ), E。[Let99] G. Letzter, *Symmetric pairs for quantized enveloping algebras*, J. Algebra 220 (1999), 729–767。[Let02] G. Letzter, *Coideal subalgebras and quantum symmetric pairs*, New directions in Hopf algebras, MSRI publications, 43, Cambridge Univ. Press, 2002, pp. 117–166。[Let03] G. Letzter, *Quantum symmetric pairs and their zonal spherical functions*, Transform. Groups 8 (2003), 261–292。[LW20] M. Lu 和 W. Wang, *Hall algebras and quantum symmetric pairs of Kac-Moody type* 2006 , arXiv: 。 06904

[93] Lus G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progress in Math. 110, Birkh¨auser, 1993。[Z22] W. Zhang, *Relative braid group symmetries on quantum groups of Kac-Moody type* 2209 12860 , arXiv: 。

Department of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA22904*Email address*: zic4zfr@virginia.edu