arXiv:2301.00960v1 [math.AP] 3 Jan 2023

# 全非线性椭圆方程的维纳判据

KI-AHM LEE 和 SE-CHAN LEE

Abstract. 我们研究全非线性椭圆方程解的边界连续性。首先，我们为非散度形式的算子定义一种容量，并推导出若干容量估计。其次，我们表述维纳判据，该判据通过位势理论刻画正则边界点。我们的方法利用齐次解的渐近行为，并结合哈纳克不等式和比较原理。

## 1. Introduction

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$中的一个开有界子集， $f$ 是定义在 $\partial\Omega$上的边界数据，且 $\mathcal{M}$ 是一个椭圆算子。为了使狄利克雷问题存在一个（在适当意义下的）解 $u$

$$\begin{cases} \mathcal{M}[u] = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

可以采用佩龙方法。如果已知任意球上的狄利克雷问题可解，且 $\mathcal{M}$ 允许比较原理，那么相当直接就能证明上佩龙解 $\overline{H}_f$ 在 Ω 中满足 $\mathcal{M}[\overline{H}_f] = 0$ 。（详见第2节。）然而，一般而言，我们无法确保上佩龙解满足 Ω 边界上的边界条件 $u = f$ 。相反，我们必须为 Ω 的边界发现一个额外条件，以便刻画 $\overline{H}_f$的边界行为。

准确地说，若边界点 $x_0 \in \partial$相对于 Ω 是正则的，则称其为正则边界点，如果

$$\lim_{\Omega \ni y \to x_0} \overline{H}_f(y) = f(x_0).$$

每当 $f \in C(\partial\Omega)$ 时。正则边界点的一种简单刻画是找到一个屏障函数；精确定义见第2节。因此，通过构造适当的屏障函数，人们利用了 $\partial\Omega$ 上的几何判据，例如外部球条件或外部锥条件，以确保各种椭圆算子在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处的边界连续性。

另一方面，维纳 [40] 基于位势理论提出了另一种判定边界点正则性的方法。具体而言，对于拉普拉斯算子（$\mathcal{M} = \Delta$）， $x_0 \in \partial\Omega$ 正则当且仅当维纳积分发散，即

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{cap}_2(\overline{B_t(x_0)} \setminus \Omega, B_{2t}(x_0))}{\operatorname{cap}_2(\overline{B_t(x_0)}, B_{2t}(x_0))} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty,$$

其中 $\operatorname{cap}_2(K,\Omega)$ 由拉普拉斯算子的变分容量定义。令人惊讶的是，维纳判据成为边界点正则性的充分必要条件。这里，容量的概念用于根据给定的微分方程衡量集合的“大小”。粗略地说，$x_0 \in \partial\Omega$ 正则当且仅当从位势理论的角度看，$\Omega^c$ 在$x_0$ 处“足够厚”。

线性和非线性位势理论都已得到广泛研究；参见[5, 12, 13, 25, 31, 39] 及其中的参考文献。由于位势理论的主要基础是分部积分，该理论及相应的维纳判据主要针对散度形式的算子发展而来。Littman、Stampacchia 和 Weinburger [30] 证明了

2020 *Mathematics Subject Classification.* 31B25, 32U20, 35J25.*Key words and phrases.* 维纳判据；完全非线性算子；容量；齐次解。

一致椭圆算子的正则点 $\mathcal{M} = -D_j\,(a_{ij}D_i)$ 与拉普拉斯算子的正则点相同，其中$a_{ij}$ 有界且可测。对于 $p$-拉普拉斯算子（$\mathcal{M} = \Delta_p$、 $p > 1$），Maz'ya [32] 验证了 $p$-维纳判据的充分性，即若 $x_0 \in \partial\Omega$ 对 $\Delta_p$ 而言是正则的，

$$\int_0^1 \Big(\frac{\mathrm{cap}_p(\overline{B_t(x_0)} \setminus \Omega, B_{2t}(x_0))}{\mathrm{cap}_p(\overline{B_t(x_0)}, B_{2t}(x_0))}\Big)^{1/(p-1)} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty.$$

对于逆向，Lindqvist 和 Martio [29] 在假设 $p > n-1$ 的条件下证明了维纳判据的必要性。后来，Kilpel¨ainen 和 Mal´y [20] 通过沃尔夫势估计将这一结果推广到了任意$p > 1$。关于维纳判据的其他已有结果，可参见针对 $p(x)$-拉普拉斯算子的文献 [1]，以及针对具有奥利奇增长的算子的文献 [27]。请注意，这些结果全部研究散度形式的椭圆算子。

对于非散度形式的椭圆算子，关于维纳判据的已知结果相对较少。虽然在 [30], 中，Miller [35, 36] 对仅具有可测系数的 $\mathcal{M} = D_j(a_{ij}D_i)$ 得到了等价性，但他 $\mathcal{M} = a_{ij}D_{ij}u$发现，即使系数 $a_{ij}$ 连续，维纳判据也不等价。更具体地说，他给出了非散度形式的线性算子$\mathcal{M}$ 和区域 $\Omega$ 的例子，使得 $x_0 \in \partial\Omega$ 对于 $\mathcal{M}$ 是正则的，但对于 $\Delta$， $x_0$ 则是非正则的，反之亦然。另请参见 [22, 26]。另一方面，Bauman [4] 为具有连续系数 $a_{ij}$的 $\mathcal{M} = a_{ij}D_{ij}u$ 建立了维纳判别法。他证明，$\Omega$ 正则当且仅当

(i) $\mathrm{cap}_{\mathcal{M}}(\{x_0\}) > 0$, or
(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{g}(x_0, x_0 + 2^{-j}e) \cdot \mathrm{cap}_{\mathcal{M}}(\Omega^c \cap (\overline{B_{2^{-j}}(x_0)} \setminus B_{2^{-j-1}}(x_0))) = \infty.$

这里， $\widetilde{g}$ 是归一化格林函数， $e$ 是 $\mathbb{R}^n$中的单位向量。

本文旨在运用位势理论工具，建立全非线性椭圆算子的维纳判据。为说明相关问题，我们考虑一个 Isaacs算子，即满足以下两个性质的算子 $F$：

(F1) $F$ 是 一致椭圆：存在正的常数 $0 < \lambda \le \Lambda$，使得对任意 $M \in \mathcal{S}^n$ ，

$$\lambda\|N\| \le F(M+N) - F(M) \le \Lambda\|N\|, \quad \forall N \ge 0.$$

这里，当 $N$ 是半正定对称矩阵时，我们记作 $N \ge 0$。
(F2) $F$是关于 $t > 0$和 $M \in \mathcal{S}^n$正齐次的，次数为一： $F(tM) = tF(M)$。

在本文中，除非另有说明，我们假设 $F$ 满足 (F1) 和 (F2)。满足 (F1) 和 (F2) 的算子的典型例子是 Pucci 极值算子$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ 和$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}$，它们定义如下：

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) = \Lambda \sum_{e_i>0} e_i + \lambda \sum_{e_i<0} e_i, \quad \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) = \Lambda \sum_{e_i<0} e_i + \lambda \sum_{e_i>0} e_i,$$

其中 $e_i = e_i(M)$ 是 $M$ 的特征值。对于满足 (F1) 和 (F2) 的全非线性算子 $F$，我们定义其对偶算子

$$\widetilde{F}(M) := -F(-M), \quad \text{for } M \in \mathcal{S}^n.$$

那么显然， $F$ 也满足 (F1) 和 (F2)。满足 (F1) 和 (F2) 的 $F$ 的一个重要性质是存在一个齐次解 $V$：

引理 1.1（一个齐次解； [3, 7]）。存在一个 $F(D^2u) = 0$in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的非恒定解，它在 $B_1$ 中有下界，在 $\mathbb{R}^n \setminus B_1$中有上界。此外，所有此类解构成的集合具有 $\{aV + b \,|\, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ 的形式，其中 $V \in C^{1,\gamma}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 可以选取为满足以下某个齐次关系：对所有 $t > 0$

$$V(x) = V(tx) + \log t \quad \textit{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \textit{where } \alpha^* = 0,$$

*or*

$$V(x) = t^{\alpha^*}V(tx), \ \alpha^*V > 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

对于某个数 $\alpha^* \in (-1,\infty)\setminus\{0\}$，它仅取决于 $F$ 和 $n$。我们称数 $\alpha^* = \alpha^*(F)$ 为 $F$ 的缩放指数。

现在我们可以陈述第一个主定理，即维纳判据的充分性：

定理 1.2（维纳判据的充分性）。若

$$\int_0^1 \mathrm{cap}_F(\overline{B_t(x_0)} \setminus \Omega, B_{2t}(x_0))\frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty$$

*and*

$$\int_0^1 \mathrm{cap}_{\widetilde{F}}(\overline{B_t(x_0)} \setminus \Omega, B_{2t}(x_0))\frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty,$$

则边界点 $x_0 \in \partial\Omega$ 是（$F$-）正则的。

我们指出，维纳积分仍然是根据容量来定义的，但 $F$-容量的定义与拉普拉斯算子情形下的变分容量截然不同；详情见第 3 节。此外，作为定理 1.2 的推论，我们将推导正则边界点处连续模的定量估计（引理 4.7），并提出另一种称为外部开瓶器条件的几何条件（推论 4.9）。

我们的第二个主定理关注维纳判据的必要性。我们提出一个关于必要条件的部分结果：利用 $F$ 的额外结构，我们证明只要 $x_0$ 是正则边界点， $x_0 \in \partial\Omega$ 处的维纳积分就必定发散。

定理 1.3（维纳判据的必要性）。设 $F$ 是凹函数，且 $\alpha^*(F) < 1$。若边界点 $x_0 \in \partial\Omega$ 是正则的，则

$$\int_0^1 \mathrm{cap}_F(\overline{B_t(x_0)} \setminus \Omega, B_{2t}(x_0))\frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty.$$

注意，在完全非线性情形下的假设 $\alpha^*(F) < 1$，对应于 $p$-拉普拉斯算子情形下的假设 $p > n-1$， [29]。这两种情形的基本思想都是利用线段（或豪斯多夫维数为 1 的集合）的非零容量。关于这一假设的更多讨论见第 5 节。

本文的主要困难源于缺乏散度结构；我们无法通过能量极小化函数定义变分容量，也无法使用涉及索伯列夫不等式和庞加莱不等式的积分估计。相反，我们将通过利用齐次解构造恰当的屏障函数，并应用比较原理和哈纳克不等式，发展非散度结构下的位势理论。简言之，我们将借助既定工具，根据新定义的容量 $\mathrm{cap}_F(K,B)$ 和容量势（或扫掠）$\hat{}\ R_K^1(B)$，刻画上佩龙解 $\overline{H}_f$ 的局部边界行为。直观地说，非变分容量衡量的是在 $\partial B$ 上边界值为 0、在 $\partial K$ 上边界值为 1 的 $F$-解的“高度”，而变分容量衡量的是此类函数的“能量”。我们强调，尽管我们定义的容量一般不满足次可加性，但它仍能恢复变分容量的某些性质。

最后，我们想指出对偶算子 $\widetilde{F}$ 对 $F$ 而言是如此。因此，尽管 $u$ 是一个 $F$-上解，我们无法保证 $-u$ 是一个 $F$-下解。此外，对于 $F$的齐次解，其增长率也具有类似的特征：向上和向下的齐次解，其增长率可能不同。这一现象自然引导我们

(i) 描述上佩龙解 $\overline{H}_f$ 和下 Perron 解 $\underline{H}_f$ 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处正则性方面的局部行为；(ii) 在刻画正则边界点时构造两个（上/下）屏障函数；(iii) 在主定理中展示两个不同的维纳积分，

这与 [4, 20, 40] 中出现的先前结果不同。

提纲。本文组织如下。第2节总结主定理所需的术语和预备结果。简而言之，我们引入 $F$-超调和函数和 Poisson修正，然后运用佩龙方法。第 3 节首先为非散度形式的一致椭圆算子定义扫掠和容量。接着，我们通过构造辅助函数证明若干容量估计，并借助扫掠给出正则边界点的刻画。第 4 节包含关于容量势的位势论估计。随后，我们证明维纳判据的充分性及若干推论。最后，第 5 节致力于证明维纳判据（部分）的必要性。

## 2. Perron's method

2.1. $F$-上解和 $F$-超调和函数。本小节中，我们只要求算子 $F$ 满足条件 (F1)。为准确阐述佩龙方法，我们从一致椭圆算子 $F$ 的两种不同解的概念入手： $F$-解和 $F$-调和函数。事实上，我们将证明这两种概念是等价的。

定义 2.1（$F$-超解）。Ω 中的下半连续 [（分别为上半连续]）函数$u$，当满足以下条件时，称为（粘性） $F$-超解 [（分别为（粘性） $F$-次解]）：

若 $x_0 \in \Omega$， $\varphi \in C^2(\Omega)$ 在 $x_0$处取得局部极小值，则

$$F(D^2\varphi(x_0)) \le 0.$$

[分别地，若 $u-\varphi$ 在 $x_0$处取得局部最大值，则 $F(D^2\varphi(x_0)) \ge 0$。]

若 $u \in C(\Omega)$ 同时是 $F$-次解和 $F$-超解，则称其为（粘性） $F$-解。

引理 2 .2. 设下半连续函数 $u$ 是 Ω 中的 $F$-超解。则

$$u(x) = \liminf_{\Omega \ni y \to x} u(y) \quad \textit{for any } x \in \Omega.$$

证明。我们用反证法：假设

$$u(x_0) < \liminf_{\Omega \ni y \to x} u(y) \quad \text{for some } x_0 \in \Omega.$$

那么，对于任意 $\varphi \in C^2(\Omega)$，可知 $u-\varphi$ 在 $x_0$ 处有一个局部极小值，因此我们可以对该函数进行检验。因此，

$$F(D^2\varphi(x_0)) \le 0 \quad \text{for any } \varphi \in C^2(\Omega),$$

这是不可能的。 □

定理 2.3。(i)（稳定性）设 $\{u_k\}_{k\ge1} \subset C(\Omega)$ 是 Ω 中一列 $F$-解。假设 $u_k$ 在 Ω 的每个紧集上都一致收敛到 $u$。那么 $u$ 是 Ω 中的一个 $F$-解。(ii)（紧性）设 $\{u_k\}_{k\ge1} \subset C(\Omega)$ 是 Ω 中一列局部一致有界的$F$-解。那么它有一个子序列在 Ω 中局部一致收敛到一个$F$-解。

定理 2.4（Harnack收敛定理）。设 $\{u_k\}_{k\ge1} \subset C(\Omega)$ 是 Ω 中一列递增的 $F$-解。那么函数 $u = \lim_{k\to\infty} u_k$要么是一个 $F$-解，要么在 Ω 中恒等于 $+\infty$。

证明。若对某个 $x \in \Omega$ 有 $u(x) < \infty$，则由哈纳克不等式可知 $u$ 在 Ω 中局部有界。内部 $C^\alpha$ 估计表明，序列 $u_k$ 在 Ω 的每个紧子集上等度连续。因此，应用阿尔泽拉–阿斯科利定理和定理 2.3 (i)，证明得证。□

我们介绍 Perron 方法的两个基本工具，即比较原理以及球内狄利克雷问题的可解性。

定理 2.5（ $F$-上/下解的比较原理， [17, 18]）。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界开子集。设 $v \in$ USC(Ω) $\int$（分别为 $u \in$ LSC(Ω)$\int$ ）是 Ω 中的 $F$-下解 $\int$（分别为 $F$-上解$\int$），且 $v \le u$ 于 $\partial\Omega$ 上成立。则 $v \le u$ 于 Ω 中成立。

在前一定理中，USC(Ω) 表示从 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的所有上半连续函数组成的集合。此外，注意对于下半连续函数 $f$，存在一个连续函数递增序列 $\{f_n\}$，使得 $f_n \to f$ 逐点趋于 $n \to \infty$。

定理 2.6（狄利克雷问题的可解性）。设 Ω 满足一致外锥条件，且 $f \in C(\partial\Omega)$。那么，狄利克雷问题存在唯一的 $F$-解 $u \in C(\Omega)$

$$\begin{cases} F(D^2u) = 0 & in\ \Omega, \\ u = f & on\ \partial\Omega. \end{cases}$$

证明。解的存在性取决于构造全局屏障函数以实现给定的边界数据，以及标准的佩龙方法；参见 [9, 33] 和 [8, 15]。然后，由比较原理（定理 2.5）可得解的唯一性。□

定义 2.7（$F$-超调和函数）。若函数 $u\colon \Omega \to (-\infty, \infty]$，则称其为 $F$-超调和函数，当且仅当

(i) $u$ 是下半连续的；(ii) $u \not\equiv \infty$ 在 Ω 的每个连通分支中；(iii) $u$ 在 Ω 的每个开子集 $D \subset\subset$ 中满足比较原理：若 $h \in C(\overline{D})$ 是 $F$-解，且在 $D$ 中，并且 $h \le u$ 在 $\partial D$ 上，则 $h \le u$ 在 $D$ 中。

类似地，若函数 $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ 满足以下条件，则称其为 $F$-次调和函数：

(i) $u$是上半连续的；(ii) $u \not\equiv -\infty$ 在 Ω 的每个连通分支中；(iii) $u$ 在 Ω 的每个开子集 $D \subset\subset$ 中满足比较原理：若 $h \in C(\overline{D})$ 是 $F$-解，且在 $D$ 中，并且 $h \ge u$ 在 $\partial D$ 上，则 $h \ge u$ 在 $D$ 中。

若 $u \in C(\Omega)$ 同时是 $F$-次调和函数和 $F$-超调和函数，则称其为 $F$-调和函数。

引理 2.8. (i) 若 $u$ 是 $F$-超调和的，则当 $a$ 和 $b$ 为实数且 $a \ge 0$ 时， $au + b$ 是 $F$-超调和的。(ii) 若 $u$ 和 $v$ 是 $F$-超调和的，则函数 $\min\{u, v\}$ 是 $F$-超调和的。(iii) 假设 $u_i$、 $i = 1$、2、$\cdots$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的。若序列 $u_i$ 单调递增，或在 Ω 的紧子集上一致收敛，则在 Ω 的每个连通分支中，极限函数 $u = \lim_{i\to\infty} u_i$ 是 $F$-超调和的，除非 $u \equiv \infty$。

定理 2.9（ $F$-超调和/次调和函数的比较原理）。假设 $u$ 是 $F$-超调和的，且 $v$ 在 Ω 中是 $F$-次调和的。若

$$\limsup_{y\to x} v(y) \le \liminf_{y\to x} u(y)$$

对所有 $x \in \partial\Omega$，均有 $v \le u$ 在 Ω 中。

证明。固定 $\varepsilon > 0$，并令

$$K_\varepsilon := \{x \in \Omega : v(x) \ge u(x) + \varepsilon\}.$$

那么， $K_\varepsilon$ 是 Ω 的紧子集，因此存在一个开覆盖 $D_\varepsilon$，使得 $K_\varepsilon \subset D_\varepsilon \subset\subset \Omega$，其中 $D_\varepsilon$ 是有限个球 $B_i$ 的并，且 $\partial D_\varepsilon \subset \Omega \setminus K_\varepsilon$。由于 $u$ 是下半连续的，$v$ 是上半连续的，并且 $\partial D_\varepsilon$ 是紧集，我们可以在 $\partial D_\varepsilon$ 上选取一个连续函数 $\theta$，使得在 $\partial D_\varepsilon$ 上有 $v \le \theta \le u + \varepsilon$。此外，由于 $D_\varepsilon$ 满足一致外锥条件，应用定理 2.6 可知，存在 $h \in C(\overline{D})$，它是在 $D_\varepsilon$ 中唯一的 $F$-解，并且在 $\partial D_\varepsilon$ 上与 $\theta$ 一致。现在，根据 $F$- 超调和／次调和函数的定义，得到

$$v \le h \le u + \varepsilon \quad \text{in } D_\varepsilon.$$

因此， $v \le u + \varepsilon$ 属于 Ω，令 $\varepsilon \to 0$ 即可得到所需结果。 □

现在我们来说明 $F$-上解与 $F$-超调和函数的等价性；另见[14, 21, 24]。

定理 2.10. $u$ 在 Ω 中是一个 $F$-上解，当且仅当 $u$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的。

证明. 首先假设 $u$ 在 Ω 中是一个 $F$-上解。为了证明 $u$ 是 $F$-超调和的，我们只需验证 $F$-超调和函数定义中的性质 (iii)。设 $D \subset\subset \Omega$ 是一个开集，并取 $h \in C(\overline{D})$ 为 $F$中的一个 $D$-解，使得 $h \le u$ 在 $\partial D$上成立。因此，对 $u$ 和 $h$应用 $F$-超解/次解的比较原理（定理 2.5），可得$h \le u$ 在 $\overline{D}$中成立。

现在假设 $u$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的。对于任意 $x_0 \in \Omega$，取 $\varphi \in C^2(B_r(x_0))$，使得$u - \varphi$ 在 $x_0$处取得局部极小值 0。我们需要证明

$$F(D^2\varphi(x_0)) \le 0. \tag{2.1}$$

我们用反证法；假设 (2.1) 不成立。由算子 $F$ 的连续性，存在 $\tau > 0$ 和 $\rho \in (0, r)$，使得

$$F(D^2\varphi(x)) > \tau \quad \text{in } B_\rho(x_0).$$

考虑截断函数 $\eta \in C_0^2(B_\rho(x_0))$，其支集满足 $\operatorname{supp} \eta \subset B_{\rho/2}(x_0)$，且 $\eta(x_0) = 1$。由于一致椭圆性给出

$$F(D^2(\varphi + \varepsilon\eta)) \ge F(D^2\varphi) + \varepsilon\, \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\eta) \quad \text{for any } \varepsilon > 0,$$

我们可以选取充分小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$F(D^2(\varphi + \varepsilon_0\eta)) \ge 0 \quad \text{in } B_\rho(x_0).$$

换言之，由于 $\varphi + \varepsilon_0\eta \in C^2(B_\rho(x_0))$，$\varphi + \varepsilon_0\eta$ 是 $B_\rho(x_0)$ 中的 $F$-次解。此外，按照第一部分中的类似论证，我们有 $\varphi + \varepsilon_0\eta$ 在 $B_\rho(x_0)$ 中是 $F$-次调和的。另一方面，在 $\partial B_{\rho/2}(x_0)$ 上，我们有

$$\varphi(x) + \varepsilon_0\eta(x) = \varphi(x) \le u(x).$$

因此，由于 $u$ 和 $\varphi + \varepsilon_0\eta$，根据 $F$-超调和/次调和函数的比较原理（定理 2.9），我们得出 $\varphi + \varepsilon_0\eta \le u$ 在 $B_{\rho/2}(x_0)$ 中。特别地，令 $x = x_0$，可得 $\varphi(x_0) + \varepsilon_0 \le u(x_0)$，这与 $u(x_0) = \varphi(x_0)$ 的事实矛盾。□

$F$-次解和 $F$-次调和函数的结果可以用相同的方法推导。因此，函数 $u$ 是 $F$-解，当且仅当它是 $F$- 调和的。

2.2. 佩龙方法。

引理 2.11（粘贴引理）。设 $D \subset \Omega$ 为开集。另设 $u$ 和 $v$ 分别在 Ω 和 $D$ 中为 $F$-超调和函数。若函数

$$s := \begin{cases} \min\{u, v\} & \text{in } D, \\ u & \text{in } \Omega \setminus D, \end{cases}$$

是下半连续的，则 $s$ 在 Ω 中是 $F$-超调和函数。

证明。设 $G \subset\subset \Omega$ 为开集，且 $h \in C(\overline{G})$ 是 $F$-调和函数，并且 $h \le s$ 在 $\partial G$ 上成立。则 $h \le u$ 在 $\overline{G}$ 中。特别是，由于 $s$ 是下半连续的，

$$\lim_{D\cap G \ni y \to x} h(y) \le u(x) = s(x) \le \liminf_{D\cap G \ni y \to x} v(y)$$

对所有 $x \in \partial D \cap G$ 均成立。因此，

$$\lim_{D\cap G \ni y \to x} h(y) \le s(x) \le \liminf_{D\cap G \ni y \to x} v(y)$$

对所有 $x \in \partial(D \cap G)$，定理 2.9 蕴含 $h \le v$ 属于 $D \cap G$。因此，$h \le s$ 属于 $G$，引理得证。□

假设 $u$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的，且 $B \subset\subset \Omega$ 是一个开球。令

$$u_B(z) := \inf\{v(z):\ v \text{ 在 } B \text{ 中是 } F\text{-超调和的，对每个 } x \in \partial B\},\ \liminf_{y\to x} v(y) \geq u(x)$$

然后，将 $u$ 在 $B$ 中的 Poisson修正 $P(u,B)$ 定义为函数

$$P(u,B) := \begin{cases} u_B & \text{in } B, \\ u & \text{in } \Omega \setminus B. \end{cases}$$

引理 2.12（Poisson修正）。Poisson修正 $P(u,B)$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的，在 $B$ 中是 $F$-调和的，并且 $P(u,B) \leq u$ 在 Ω 中。

证明。根据定义，显然 $P(u,B)$ 在 Ω 中 $\leq u$。为证明 $P(u,B)$ 在 $B$ 中是 $F$-调和的，选取定义在 $\partial B$ 上的连续函数递增序列 $\{\theta_j\}_{j\geq 1}$，使得 $u = \lim_{j\to\infty} \theta_j$。（回想一下，这是可行的，因为 $u$ 是下半连续的。）然后令 $h_j \in C(\overline{B})$ 为狄利克雷问题 $F(D^2 h_j) = 0$ 在 $B$ 中且在 $\partial B$ 上为 $h_j = \theta_j$ 的 $F$-解，由定理 2.6 可得。比较原理表明 $h_j$ 也是一个递增序列。因此，应用 Harnack收敛定理（定理 2.4），我们得到极限函数 $h = \lim_{j\to\infty} h_j$ 是 $B$ 中的一个 $F$-解。由于

$$\liminf_{y\to x} h(y) \geq \lim_{j\to\infty} \liminf_{y\to x} h_j(y) = \lim_{j\to\infty} h_j(x) = \lim_{j\to\infty} \theta_j(x) = u(x), \tag{2.2}$$

对于任意 $x \in \partial B$，根据 $u_B$ 的定义，我们有 $h \geq P(u,B)$ 属于 $B$。另一方面，由于 $h_j(x) \leq \liminf_{y\to x} v(y)$，其中 $x \in \partial B$，且 $v$ 是 $u_B$ 的一个可容许函数，通过应用比较原理，令 $j \to \infty$ 并对 $v$ 取下确界，我们有 $h \leq P(u,B)$ 属于 $B$。因此，$P(u,B) = h$ 在 $B$ 中是 $F$-调和的。

最后，如果我们证明 $P(u,B)$ 是下半连续的，那么由粘贴引理可立即得出，$P(u,B)$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的。事实上，只需证明 $P(u,B)$ 在每一点 $x \in \partial B$ 处都是下半连续的；回顾（2.2）。□

注 2.13（佩龙方法）。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开有界子集，且 $f$ 是 Ω 上的一个有界函数。上类 $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_f(\Omega)$ 由 Ω 中满足以下条件的所有函数 $u$ 组成

(i) $u$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的；(ii) $u$ 有下界；

(iii) 对每个 $x \in \partial\Omega$，$\liminf_{\Omega\ni y\to x} u(y) \geq f(x)$。

于是，我们将 $f$ 的上 Perron 解定义为

$$\overline{H}_f = \overline{H}_f(\Omega) := \inf_{u\in\mathcal{U}_f} u.$$

类似地，令下类 $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_f(\Omega)$ 为 Ω 中所有有上界且满足下述条件的 $F$-次调和函数 $v$ 所构成的集合：

$$\limsup_{\Omega\ni y\to x} v(y) \leq f(x) \quad \text{for each } x \in \partial\Omega,$$

并将 $f$ 的下 Perron 解定义为

$$\underline{H}_f = \underline{H}_f(\Omega) := \sup_{v\in\mathcal{L}_f} v.$$

于是，由比较原理可得 $\underline{H}_f \leq \overline{H}_f$。

引理 2.14。Perron 解 $\overline{H}_f$ 和 $\underline{H}_f$ 是 Ω 中的 $F$-解。

证明。此证明基于 [19] 中使用的论证。固定一个开球 $B$，使其满足 $B \subset\subset \Omega$。接着，选取一个可数稠密子集 $X = \{x_1, x_2, ...\}$，使其属于 $B$；然后对每个 $j = 1$、2、.....，选取 $u_{i,j} \in \mathcal{U}_f$，使得

$$\lim_{i\to\infty} u_{i,j}(x_j) = \overline{H}_f(x_j).$$

此外，如有必要，用 $\min\{u_{i,j}, u_{i,j+1}\}$ 替换 $u_{i,j+1}$，我们有

$$\lim_{i\to\infty} u_{i,j}(x_k) = \overline{H}_f(x_k),$$

对每个 $k = 1, 2...$、$j$ 以及每个 $j$。现在，令 $U_{i,j} := P(u_{i,j}, B)$ 为 $u_{i,j}$ 在 $B$ 中的 Poisson修正。于是我们注意到，$\overline{H}_f \le U_{i,j} \le u_{i,j}$ 和 $U_{i,j}$ 在 $B$ 中是 $F$-调和的。由紧性（定理 2.3 (ii)），$U_{i,j}$ 在局部一致收敛到 $B$ 中的 $F$- 调和 $v_j$ （如有必要，取一个子序列）。再次由紧性，$v_j$ 在局部一致收敛到 $B$ 中的 $F$- 调和 $h$。

由 $h$ 的构造可立即得出

$$\overline{H}_f \le h$$

在 $B$ 中且 $\overline{H}_f = h$ 在 $X$ 上。对于任意 $u \in \mathcal{U}_f$ 及其 Poisson修正 $U = P(u, B)$，我们有 $u \ge U \ge \overline{H}_f$。由于 $U \ge h$ 在 $X$ 上（它在 $B$ 中稠密），且 $U$、$h$ 在 $B$ 中连续，因此可得 $U \ge h$ 在 $B$ 中。于是，$u \ge h$ 在 $B$ 中，这意味着

$$\overline{H}_f \ge h$$

在 $B$ 中。 因此，$\overline{H}_f = h$ 在 Ω 中是 $F$-调和的，对 $\underline{H}_f$ 作类似论证即可完成证明 f. □

我们强调，尽管已经证明 $F(D^2\overline{H}_f)$ 在 Ω 中 $= 0$，但无法保证 $\overline{H}_f$ 满足狄利克雷问题的边界条件，即 $\overline{H}_f = f$ 在 Ω 的 $\partial$ 上。为了研究 Perron 解的边界行为并确保狄利克雷问题的可解性，我们需要引入进一步的概念，即正则点和屏障函数。

定义 2.15（正则点）。若边界点 $x_0 \in \partial\Omega$ 满足以下条件，则称其关于 Ω 是 ($F$-)正则的:

$$\lim_{\Omega \ni y \to x_0} \overline{H}_f(y) = f(x_0) \quad \text{and} \quad \lim_{\Omega \ni y \to x_0} \underline{H}_f(y) = f(x_0)$$

只要 $f \in C(\partial\Omega)$ 即成立。若开有界集 Ω 的每个 $x_0 \in \partial\Omega$ 都是正则边界点，则称 Ω 为正则集。

注 2.16。假设算子 $\mathcal{M}$ 满足 $\mathcal{M}[-u] = -\mathcal{M}[u]$; 例如，任意线性算子 $L$ 以及 $p$-拉普拉斯算子 $\Delta_p$ 都具有这一性质。那么我们有

$$\overline{H}_f = -\underline{H}_{-f},$$

因此，在这种情况下，我们可以等价地称 $x_0 \in \partial\Omega$ 是正则的，当且仅当

$$\lim_{\Omega \ni y \to x_0} \overline{H}_f(y) = f(x_0)$$

只要 $f \in C(\partial\Omega)$ 即成立。然而，对于一般的全非线性算子 $F$，这一性质并不成立。因此，在为 $F$ 定义正则点时，似乎必须同时要求这两个条件。据我们所知，目前尚不清楚定义中的两个条件是否存在冗余。一种可能的证明思路是，证明只要 $f$ 在 $\partial\Omega$ 上连续，$f$ 就是可解的；可解性的定义见定义 2.17。

在定义刻画正则边界点的屏障函数之前，我们先简要讨论边界数据的可解性:

定义 2.17（可解性）。如果有界函数 $f$ 在 $\partial\Omega$ 上是（$F$-）可解的，则称其为（$F$-）可解的，即上 Perron 解 $\overline{H}_f$ 与下 Perron 解 $\underline{H}_f$ 在 Ω 中相同。当 $f$ 可解时，我们记作$H_f := \overline{H}_f = \underline{H}_f$。

引理 2.18。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$的有界开集，设 $f$ 和 $g$ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的有界函数，并设 $c$是任意实数。

(i) 若 $f = c$ 在 $\partial\Omega$ 上，则 $f$ 是可解的，且 $H_f = c$ 在 Ω 中。(ii) $\overline{H}_{f+c} = \overline{H}_f + c$ 和 $\underline{H}_{f+c} = \underline{H}_f + c$。若 $f$是可解的，则 $f + c$是可解的，且 $H_{f+c} =H_f + c$。(iii) 若 $c > 0$，则 $\overline{H}_{cf} = c\overline{H}_f$ 和 $\underline{H}_{cf} = c\underline{H}_f$。若 $f$ 是可解的，则 $cf$ 是可解的，且对于 $c \ge 0$，$H_{cf} = cH_f$。(iv) 若 $f \le g$，则 $\overline{H}_f \le \overline{H}_g$ 和 $\underline{H}_f \le \underline{H}_g$。

注意， $f$ 的可解性并不意味着

$$\lim_{y\to x} H_f(y) = f(x)$$

关于 $x \in \partial\Omega$。不过，某种意义上，逆命题成立：

引理 2.19. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开有界子集，且 $f$ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的有界函数。假设存在 $\Omega$ 上的 $F$-调和函数 $h$ ，使得

$$\lim_{\Omega\ni y\to x} h(y) = f(x)$$

对任意 $x \in \partial\Omega$ 都成立。那么 $\overline{H}_f = h = \underline{H}_f$。特别地， $f$ 是可解的。

证明. 由于 $h \in \mathcal{U}_f \cap \mathcal{L}_f$，我们有 $\overline{H}_f \le h \le \underline{H}_f$. □

引理 2.20. 若 $u$ 是有界开集 $\Omega$ 上的有界 $F$-超调和函数（或 $F$-次调和函数），且对所有 $x \in \partial\Omega$， $f(x) = \lim_{\Omega\ni y\to x} u(y)$ 存在，则 $f$ 是可解的边界函数。

证明。显然，我们有 $u \in \mathcal{U}_f$，因此 $\overline{H}_f \le u$ 在 $\Omega$ 中。又由于 $\overline{H}_f$ 在 $\Omega$ 中是 $F$-调和的，并且

$$\limsup_{\Omega\ni y\to x} \overline{H}_f(y) \le \lim_{\Omega\ni y\to x} u(y) = f(x),$$

我们有 $\overline{H}_f \in \mathcal{L}_f$，这意味着 $\overline{H}_f \le \underline{H}_f$。由于 $\underline{H}_f \le \overline{H}_f$ 总是成立，我们得出 $f$ 是可解的。对于 $F$-次调和情形，也可作类似论证。□

2.3. 正则点的刻画。

定义 2.21（屏障）。设 $x_0 \in \partial\Omega$。函数 $w^+ : \Omega \to \mathbb{R}$ [（分别地， $w^-$] ）在点 $x_0$ 处是 $\Omega$ 中的上障碍函数[（分别地，下障碍函数] ），如果

(i) $w^+$ [（分别地， $w^-$]）在 $\Omega$ 中是 $F$-超调和的 [（分别地， $F$-次调和的]）；

(ii) 对每个 $x \in \partial\Omega \setminus \{x_0\}$，$\liminf_{\Omega\ni y\to x} w^+(y) > 0$ [（分别地，$\limsup_{\Omega\ni y\to x} w^-(y) < 0$]）；(iii) $\lim_{\Omega\ni y\to x_0} w^+(y) = 0$。 [（分别地，$\lim_{\Omega\ni y\to x_0} w^-(y) = 0$。]

注意到，最大值原理表明，上障碍函数 $w^+$ 在 $\Omega$ 中为正，而下障碍函数 $w^-$ 在 $\Omega$ 中为负。此外，在条件 (F2) 下，对于任意常数 $c > 0$ 和上障碍函数 $w^+$， $cw^+$ 仍然是上障碍函数。另见 [38]。

现在我们可以得出，正则边界点可由上障碍函数和下障碍函数的存在性来刻画。

定理 2.22. 设 $x_0 \in \partial\Omega$。则以下命题等价：

(i) $x_0$ 是正则的；(ii) 在 $x_0$ 处存在上障碍函数和下障碍函数。

证明. (ii) $\Longrightarrow$ (i) 对于 $f \in C(\partial\Omega)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $|x - x_0| \le \delta$，且若 $x \in \partial\Omega$，则 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。此外，对于 $M := \sup_{\partial\Omega} |f|$，存在一个足够大的数 $K > 0$，使得

$$K \cdot \liminf_{\Omega\ni y\to x} w^+(y) \ge 2M \text{ for all } x \in \partial\Omega \text{ with } |x - x_0| \ge \delta.$$

这里我们利用了 $x \mapsto \liminf_{\Omega\ni y\to x} w^+(y)$ 在 $\partial\Omega$ 上是下半连续的。又由于 $Kw^+ + f(x_0) + \varepsilon \in \mathcal{U}_f$，因此有

$$\overline{H}_f(y) \le Kw^+(y) + f(x_0) + \varepsilon,$$

这意味着

$$\limsup_{\Omega\ni y\to x_0} \overline{H}_f(y) \le f(x_0).$$

类似的论证可得

$$\liminf_{\Omega\ni y\to x_0} \underline{H}_f(y) \ge f(x_0).$$

由于 $\underline{H}_f \le \overline{H}_f$，我们得出

$$\lim_{\Omega \ni y \to x_0} \overline{H}_f(y) = f(x_0) = \lim_{\Omega \ni y \to x_0} \underline{H}_f(y),$$

即， $x_0$ 是一个正则边界点。

(i) $\Longrightarrow$ (ii) 定义距离函数 $d$为

$$d(y) := |y - x_0|^2$$

使得 $d$ 连续、非负，并且 $d(y) = 0$ 当且仅当 $y = x_0$。此外，由于 $D^2 d = 2I$，我们有 $F(D^2 d) = 2F(I) > 0$，即 $d$是 $F$-次调和的。

于是令 $w^+ := \underline{H}_d$，我们有 $w^+$ 在 $\Omega$ 中是 $F$-调和的，由 $d \in \mathcal{L}_d$ 可得 $w^+ \ge d$ 在 $\Omega$ 中成立。因此，对于任意 $x \in \partial\Omega \setminus \{x_0\}$，

$$\liminf_{\Omega \ni y \to x} w^+(y) \ge d(x) = |x - x_0|^2 > 0.$$

此外，由于 $x_0$ 是正则的，我们有

$$\lim_{\Omega \ni y \to x_0} w^+(y) = d(x_0) = 0,$$

因此， $w^+$ 是所需的上障碍函数。考虑$\sim d(y) := -d(y) = -|y - x_0|^2$ 和 $w^- := \overline{H}_{\tilde{d}}$，即可保证下障碍函数的存在。

□

事实上，障碍刻画具有局部性质：

引理 2.23. 设 $x_0 \in \partial\Omega$ 和 $G \subset \Omega$ 是开集，且 $x_0 \in \partial G$。若 $x_0$ 关于 $\Omega$ 是正则的，则 $x_0$ 关于 $G$是正则的。

证明. 根据定理 2.22，存在关于 $\Omega$ 在 $x_0$处的上障碍函数 $w^+$ 和下障碍函数 $w^-$ 。于是， $w^+|_G$ 和 $w^-|_G$ 便成为关于 $G$ 在 $x_0$处所需的屏障函数。再次根据定理 2.22， $x_0$ 关于 $G$是正则的。□

引理 2.24. 设 $x_0 \in \partial\Omega$，且 $B$ 是一个包含 $x_0$的球。那么， $x_0$ 关于 $\Omega$ 是正则的，当且仅当 $x_0$ 关于 $B \cap \Omega$ 是正则的。

证明。由引理 2.23，一个方向显然成立。对于反方向，假设 $x_0$关于 $B \cap \Omega$ 是正则的。那么存在关于 $B \cap \Omega$ 的上障碍函数 $w^+$ 和下障碍函数 $w^-$。令 $m := \min_{\partial B \cap \Omega} w^+ > 0$ （由于 $w^+$ 是下半连续的，因此最小值存在），则粘贴引理（引理 2.11）表明

$$s^+ := \begin{cases} \min\{w^+, m\} & \text{in } B \cap \Omega, \\ m & \text{in } \Omega \setminus B, \end{cases}$$

在 $\Omega$ 中是 $F$-超调和的。容易验证， $s^+$ 是在$x_0$处关于 $\Omega$ 的上障碍函数。同样，也可以构造下障碍函数 $s^-$ 。□

障碍刻画导出了另一个有用的推论，使我们可以毫无歧义地用 $x_0$ 是正则的来代替 $F$-正则。

~推论 2.25。边界点 $x_0 \in \partial\Omega$ 是 $F$-正则的，当且仅当 $x_0$ 是 $F$-正则的 $r.$

证明。假设 $x_0$ 是 $F$-正则的。根据定理 2.22，存在一个上障碍函数 $w_F^+$ 和一个下障碍函数 $w_F^-$。若令 $w_{\tilde{F}}^+ := -w_F^-$ 和 $w_{\tilde{F}}^- := -w_F^+$，则 $w_{\tilde{F}}^+$ 和 $w_{\tilde{F}}^-$ 分别成为 $F$的上障碍函数~ ~和下障碍函数。因此，再根据定理 2.22， $x_0$是 $F$-正则的。□

现在我们给出一个保证边界点正则的充分条件，即外部锥条件。在第 4 节中，我们将提出另一个充分条件，即维纳判据；外部锥条件是该判据的一个特例。

定理 2.26（外部锥条件）。假设 $\Omega$ 在$x_0 \in \partial\Omega$ 处满足外部锥条件。那么 $x_0$ 是一个正则边界点。

证明。在 $x_0$ 处构造局部障碍函数是证明的关键。详情请参见 [9, 34, 37] 。 □

推论 2.27。所有多面体和所有球都是正则的。此外，每个开集都可以由正则开集穷竭。这里，如果有界开集 Ω 满足 $\partial\Omega = \partial\Omega$，且如果$\partial\Omega$ 包含于有限个 $(n-1)$-超平面的并集中，则称 Ω 为多面体。

证明。由于多面体和球满足一致外锥条件，第一个断言由定理 2.26 得出。对于第二个断言，用区域 $D_1 \subset\subset D_2 \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega$ 穷尽 Ω。于是，由于 $\overline{D_j}$ 是紧集，存在有限个开立方体的并 $Q_{j_i}(\subset D_{j+1})$ 覆盖$\overline{D_j}$。令 $P_j := \bigcup_i \operatorname{int}\overline{Q_{j_i}}$，根据构造它是一个多面体，由此得到所需的穷尽。□

## 3. Balayage and capacity

3.1. 扫掠与容量势。我们定义任意函数 $u : E \to [-\infty, \infty]$ 的下半连续正则化 $\hat{u}$，如下所示:

$$\hat{u}(x) := \lim_{r\to 0} \inf_{E\cap B_r(x)} u.$$

引理 3.1。设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 中一族 $F$-超调和函数，且在局部一致有下界。那么 $\inf \mathcal{F}$ 的下半连续正则化 $s$，

$$s(x) = \lim_{r\to 0} \inf_{B_r(x)} (\inf \mathcal{F}),$$

在 Ω 中是 $F$-超调和的。

证明。由于 $\mathcal{F}$ 在局部一致地有下界，$s$ 是下半连续的。取一个开集 $D \subset\subset \Omega$，并令 $h \in C(\overline{D})$ 为满足 $h \le s$ 于 $\partial D$上的 $F$-调和函数。那么，只要$u \in \mathcal{F}$，在 $D$ 中就有 $h \le u$。由 $h$ 的连续性可得，在 $D$中有 $h \le s$。□

定义 3.2（扫掠与容量势）。

(i) 对于 $\psi : \Omega \to (-\infty, \infty]$，其局部有下界，令

$$\Phi^\psi = \Phi^\psi(\Omega) := \{u : u \text{ is } F\text{-superharmonic in } \Omega \text{ and } u \ge \psi \text{ in } \Omega\}.$$

于是函数

$$R^\psi = R^\psi(\Omega) := \inf \Phi^\psi$$

称为约化函数，其下半连续正则化

$$\hat{R}^\psi = \hat{R}^\psi(\Omega)$$

称为 $\psi$ 在 Ω 中的扫掠。根据引理 3.1，$\hat{R}^\psi$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的。

(ii) 若 $u$ 是集合 $E \subset\Omega$ 上的非负函数，我们记为

$$\Phi^u_E = \Phi^\psi, \quad R^u_E = R^\psi, \quad \hat{R}^u_E = \hat{R}^\psi,$$

其中

$$\psi = \begin{cases} u & \text{in } E, \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus E. \end{cases}$$

函数 $R^u_E$ 称为相对于 $E$的 $u$ 扫掠。

(iii) 特别地，我们称函数 $\hat{R}^1_E$ 为 Ω 中 $E$ 的（$F$-）容量势。

注 3.3. 对于散度形式的算子，还可以用另一种方法定义容量势。为简单起见，假设该算子为 $p$-拉普拉斯算子。设 Ω 有界，且 $K \subset\Omega$ 是一个紧集。对于满足 $\psi \equiv 1$ 在 $K$上的 $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$，在 Ω 内满足 $\setminus K$ 及 $u - \psi \in W^{1,p}_0(\Omega \setminus K)$ 的 $p$-调和函数$u$ 称为 $K$ 在 Ω 内的容量势，记为$\mathcal{R}(K, \Omega)$。这里请注意，$\mathcal{R}(K, \Omega)$ 与 $\psi$ 的具体选取无关，而容量势的存在性由变分法保证。事实上，这两种容量势定义是一致的；详情参见第 9]章 [12, 。

引理3.4。扫掠 $\hat{R}^u_E$ 在 $\Omega\setminus\overline{E}$ 中是 $F$-调和的，并且在那里与 $R^u_E$ 一致。此外，若 $\hat{u}$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的，则 $R^u_E = u$ 位于 $E$ 的内部。

证明。首先注意，若 $v_1$ 和 $v_2$ 属于 $\Phi_E^u$，则 $\min\{v_1, v_2\}$ 也属于其中。因此，函数族 $\Phi_E^u$ 是向下有向的，我们可以应用 Choquet拓扑引理（见 [12] 中的引理8.3）：存在一个递减函数序列 $v_i \in \Phi_E^u$，其极限为 $v$，使得

$$\hat{v}(x) = \hat{R}_E^u(x)$$

对所有的 $x \in \Omega$。

接下来，我们选取一个球 $B \subset\subset \Omega \setminus \overline{E}$，并考虑一个 Poisson修正 $s_i = P(v_i, B)$。由此可得 $s_i \in \Phi_E^u$ 和 $s_{i+1} \le s_i \le v_i$。因此，我们有

$$R_E^u \le s := \lim_{i\to\infty} s_i \le v,$$

这意味着 $\hat{}\ R_E^u = \hat{}v = \hat{s}$。此外，由于 $s$ 在 $B$ 中是 $F$-调和的（Harnack 收敛定理，定理 2.4），我们知道 $\hat{s} = s$。因此，我们得出结论：扫掠 $R_E^u$ 在 $\Omega \setminus \overline{E}$ 中是$F$-调和的。引理的第二个断言相当直接，因为如果 $u$ 在 $\Omega$ 中是$F$-超调和的，则 $u \in \Phi_E^u$。□

引理 3.5. 设 $K$ 是 $\Omega$ 的一个紧子集，并考虑 $R_K^1 = R_K^1(\Omega)$ 和 $\hat{}\ R_K^1 = \hat{}R_K^1(\Omega)$。

(i) $0 \le \hat{}R_K^1 \le R_K^1 \le 1$ 在 $\Omega$ 中。(ii) $R_K^1 = 1$ 属于 $K$。
(iii) $R_K^1 = \hat{}R_K^1$ 属于 $(\partial K)^c$。(iv) $\hat{}R_K^1$ 在 $\Omega$ 中是 $F$-超调和的，并且在 $\Omega \setminus K$ 中是 $F$-调和的。

证明。(i) 根据 $R_K^1$ 的定义和比较原理，结论立即成立。(ii) 由于 $1 \in \Phi^\psi(\Omega)$，我们有 $R_K^1 \le 1$ 属于 $\Omega$。另一方面，对于任意 $u \in \Phi^\psi(\Omega)$，我们有$u \ge \psi = 1$ 属于 $K$，因此 $R_K^1 \ge 1$ 属于 $K$。(iii)、(iv) 根据引理3.4和(ii)，结论立即成立。

□

下面的定理表明，容量势可以理解为上佩龙解：

定理 3.6。设 $K$ 是有界开集 $\Omega$ 的一个紧子集，且 $u = \hat{}R_K^1(\Omega)$ 是 $K$ 在 $\Omega$ 中的容量势。此外，设 $f$ 是一个满足以下条件的函数

$$f = \begin{cases} 1 & on\ \partial K, \\ 0 & in\ \partial\Omega. \end{cases}$$

*Then*

$$\hat{R}_K^1(\Omega) = \overline{H}_f(\Omega \setminus K)$$

在 $\Omega \setminus K$ 中。

证明。引理3.4表明，$\hat{}\ R_K^1 = R_K^1$ 在 $\Omega \setminus K$ 中。然后回忆

$$R_K^1(\Omega) = \inf \Phi_K^1 = \inf\{v : v \text{ is } F\text{-superharmonic in } \Omega \text{ and } v \ge \psi \text{ in } \Omega\},$$

其中

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{in } K, \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus K, \end{cases}$$

and

$$\overline{H}_f(\Omega \setminus K) = \inf \mathcal{U}_f$$
$$= \inf\{v : v \text{ is } F\text{-superharmonic in } \Omega \setminus K,\ \liminf_{\Omega\setminus K \ni y \to x} v(y) \ge f(x) \text{ for each } x \in \partial(\Omega \setminus K)\},$$

其中

$$f = \begin{cases} 1 & \text{on } \partial K, \\ 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

(i) 假设 $v \in \Phi_K^1$。由于 $v \geq 0$ 属于 Ω，对于 $x \in \partial\Omega$，我们有 $\liminf_{\Omega\setminus K \ni y \to x} v(y) \geq 0 = f(x)$。此外，由于 $v$ 是下半连续的，我们有

$$\liminf_{\Omega\setminus K \ni y \to x} v(y) \geq \liminf_{\Omega \ni y \to x} v(y) \geq v(x) \geq 1 = f(x),$$

对 $x \in \partial K$。因此，我们得出 $v \in \mathcal{U}_f$，这意味着在 $\Omega\setminus K$ 中，$\overline{H}_f(\Omega\setminus K) \leq R_K^1(\Omega)$。(ii) 假设 $v \in \mathcal{U}_f$。我们考虑 $\overline{v} := \min\{1, v\} \in \mathcal{U}_f$，使得 $0 \leq \overline{v} \leq 1$ 在 $\Omega \setminus K$ 中。于是，由于 $u \equiv 1$ 在 Ω 中是 $F$-超调和的，函数

$$s = \begin{cases} \min\{1, \overline{v}\} = \overline{v} & \text{in } \Omega \setminus K, \\ 1 & \text{in } K \end{cases}$$

根据粘贴引理（引理 2.11），它在 Ω 中是 $F$-超调和的。显然，$s \in \Phi_K^1$，因此在 $\Omega \setminus K$ 中，$R_K^1(\Omega) \leq \overline{v} \leq v$。

□

3.2. 容量。一般而言，对于散度形式的算子，我们考虑变分容量，它通过在容许函数中最小化能量得到。另一方面，对于非散度形式的算子，我们无法考虑相应的能量，因此需要采用替代方法来获得恰当的容量概念。我们的容量定义与 Bauman [4]（针对非散度形式的线性算子）和 Labutin [24]（针对 Pucci 极值算子）的研究处于相同的背景下。

定义 3.7（非变分容量）。对于球 $B = B_{2r}(x_0)$，我们固定球 $B' = B_{7/5r}(x_0) \subset B$ 和一点 $y_0 = x_0 + \frac{3}{2}re_1$。接着，我们为全非线性算子 $F$ 定义容量 $\mathrm{cap}(K, B) = \mathrm{cap}_F(K, B) := \inf\{u(y_0) : u \text{ 在 } B \text{ 中是 } F\text{- 超调和的，且 } u \geq 0 \text{ 在 } B \text{ 中，并且只要 } K \text{ 是 } B' \text{ 的紧子集，就有 } u \geq 1 \text{ 在 } K\}$ 中。

比较容量和容量势的定义，我们立即注意到

$$\mathrm{cap}(K, B) = \hat{R}_K^1(B)(y_0).$$

此外，利用定理 3.6，我们进一步得到

$$\mathrm{cap}(K, B) = \overline{H}_f(B \setminus K)(y_0),$$

其中，$\partial(B \setminus K)$上的边界数据 $f$ 由下式给出

$$f = \begin{cases} 1 & \text{on } \partial K, \\ 0 & \text{in } \partial B. \end{cases}$$

最后，考虑球面 $\partial B_{3r/2}(x_0)$上 $\hat{} R_K^1(B)$的哈纳克不等式，我们注意到，对 $y_0 \in \partial B_{3r/2}(x_0)$作不同选择时所定义的容量是可比较的。

引理 3.8（容量的性质）。固定一个球 $B = B_{2r}(x_0)$。则集合函数 $K \mapsto \mathrm{cap}(K, B)$（其中 $K$ 是 $B' = B_{7/5r}(x_0)$ 的紧子集）具有以下性质：

(i) $0 \leq \mathrm{cap}(K, B) \leq 1$。

(ii) 若 $K_1 \subset K_2 \subset B'$，则

$$\mathrm{cap}(K_1, B) \leq \mathrm{cap}(K_2, B).$$

(iii) 若紧集的单调序列 $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $B' \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$，则

$$\mathrm{cap}(K, B) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{cap}(K_j, B), \quad \textit{for } K := \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j.$$

(iv)（次可加性）进一步假设 $F$ 是凸的。若 $K_1$ 和 $K_2$ 是 $B'$ 的紧子集，则

$$\mathrm{cap}(K_1 \cup K_2, B) \leq \mathrm{cap}(K_1, B) + \mathrm{cap}(K_2, B).$$

证明。(i) 回顾引理 3.5，可得 $0 \leq \mathrm{cap}(K, B) \leq 1$。

(ii) 若 $K_1 \subset K_2$，则 $\Phi_{K_2}^1 \subset \Phi_{K_1}^1$，因此 $\mathrm{cap}(K_1, B) \leq \mathrm{cap}(K_2, B)$。

(iii) 由 (ii) 可知 $\mathrm{cap}(K_j, B) \geq \mathrm{cap}(K, B)$，因此显然有

$$\mathrm{cap}(K, B) \leq \lim_{j\to\infty} \mathrm{cap}(K_j, B).$$

对于反向不等式，固定较小的 $\varepsilon > 0$ 和 $u \in \Phi^1_K(B)$。若 $j$ 足够大，则$K_j \subset \{u \geq 1-\varepsilon\}$，因此

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{cap}(K_j, B) \leq \mathrm{cap}(\{u \geq 1-\varepsilon\}, B) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} u(y_0).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，并对 $u \in \Phi^1_K(B)$ 取下确界，我们得到

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{cap}(K_j, B) \leq \mathrm{cap}(K, B).$$

(iv) 设 $v_1 \in \Phi^1_{K_1}(B)$ 且 $v_2 \in \Phi^1_{K_2}(B)$。由于 $F$ 是凸的，我们可以应用 [6, 定理 5.8]，从而 $1\,2(v_1 + v_2)$ 在 $\mathcal{B}$ 中是 $F$-次调和的。此外，由假设 (F2) 可得 $v_1 + v_2 \in \Phi^1_{K_1\cup K_2}(B)$，因此 $R^1_{K_1\cup K_2}(B) \leq v_1 + v_2$。对该不等式取下确界并在 $y_0$处求值，我们得到

$$\mathrm{cap}(K_1 \cup K_2, B) \leq \mathrm{cap}(K_1, B) + \mathrm{cap}(K_2, B).$$

□

我们希望在定义容量时去掉对紧集的限制。为此，当 $U \subset B'$ 是开集时，我们定义内容量

$$\mathrm{cap}_*(U, B) := \sup_{K\subset U,\, K \text{ compact}} \mathrm{cap}(K, B).$$

然后，对于任意集合 $E \subset B'$，我们定义外容量

$$\mathrm{cap}^*(E, B) := \inf_{E\subset U\subset B',\, U \text{ open}} \mathrm{cap}_*(U, B).$$

**Lem**引理 3.9。固定一个球 $B = B_{2r}(x_0)$。对于 $B' = B_{7r/5}(x_0)$中的紧子集 $K$，有

$$\mathrm{cap}(K, B) = \mathrm{cap}^*(K, B).$$

换言之，对于紧集的容量，采用两种不同的定义并不会产生歧义。

证明。(i) 对于满足 $K \subset U \subset B'$的任意开集 $U$，由内容量的定义可得

$$\mathrm{cap}(K, B) \leq \mathrm{cap}_*(U, B).$$

对所有这样的 $U$取下确界，可得

$$\mathrm{cap}(K, B) \leq \mathrm{cap}^*(K, B).$$

(ii) 定义一列紧集 $\{K_j\}_{j=1}^\infty$，使得

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, K) \leq 1/j\},$$

并定义一列开集 $\{U_j\}_{j=1}^\infty$，使得

$$U_j := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, K) < 1/j\}.$$

我们可以假设 $K_1 \subset B'$。于是有

$$B' \supset K_1 \supset U_1 \supset K_2 \supset U_2 \supset \cdots \supset K, \quad \text{and} \quad K = \bigcap_j K_j.$$

应用引理 3.8 (ii)，可得

$$\mathrm{cap}_*(U_j, B) \leq \mathrm{cap}(K_j, B).$$

根据外容量的定义，

$$\mathrm{cap}^*(K, B) \leq \mathrm{cap}_*(U_j, B) \leq \mathrm{cap}(K_j, B), \quad \text{for any } j \in \mathbb{N}.$$

现在令 $j \to \infty$，由引理 3.8 (iii) 可得

$$\mathrm{cap}^*(K,B) \le \mathrm{cap}(K,B).$$

□

粗略地说，我们有如下对应关系：

变分容量 $\longleftrightarrow$ 散度算子，高度容量 $\longleftrightarrow$ 非散度算子。

在下面的引理中，我们解释了为什么从某种意义上说，高度容量的定义是合理的。换句话说，对于拉普拉斯算子 $\Delta$，两种容量的定义是可比的。

引理 3.10（变分容量与高度容量）。设 $n \ge 3$ 并固定两个球$B = B_{2r}(x_0)$、 $B' = B_{7r/5}(x_0)$以及一点$y_0 = \frac{3}{2}re_1 + x_0 \in \partial B_{3r/2}(x_0)$。那么对于任意紧集 $K \subset B'$，我们有

$$\mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{var}}(K,B) \sim \mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{height}}(K,B)\, r^{n-2},$$

其中比较常数仅依赖于 $n$。

证明。我们 可以假设 $x_0 = 0$。我们将 $u$ 记为关于 $K$ 在 $B$中的容量势 .
注意 $u$ 在 $B \setminus K$中是调和的。

我们从变分容量开始:

$$\mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{var}}(K,B) = \int_{B\setminus K} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \,\mathrm{d}s = -\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \,\mathrm{d}s.$$

这里我们应用了散度定理，并利用了 $u$ 在边界上的性质。

另一方面，回顾高度容量的定义，我们有

$$\mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{height}}(K,B) = u(y_0).$$

根据哈纳克不等式，存在常数 $c_1$、 $c_2 > 0$ ，它们仅依赖于 $n$ ，使得

$$c_1 u(y_0) \le u(x) \le c_2 u(y_0) \quad \text{for any } x \in \partial B_{3r/2}.$$

因此，若令 $m_- := \min^{\partial B_{3r/2}} u$ 且 $m_+ := \max^{\partial B_{3r/2}} u$，则有

$$c_1 \mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{height}}(K,B) \le m_- \le m_+ \le c_2 \mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{height}}(K,B).$$

M此外，我们考虑两个屏障函数 $h^\pm$ ，它们在 $B_{2r} \setminus B_{3r/2}$ 中满足狄利克雷问题:

$$\begin{cases} \Delta h^\pm = 0 & \text{in } B_{2r} \setminus B_{3r/2}, \\ h^\pm = m_\pm & \text{on } \partial B_{3r/2}, \\ h^\pm = 0 & \text{on } \partial B_{2r}. \end{cases}$$

事实上，利用齐次解 $V(x) = |x|^{2-n}$，可以显式地计算出 $h^\pm$ :

$$h^\pm(x) = m_\pm \cdot \frac{|x|^{2-n} - (2r)^{2-n}}{(3r/2)^{2-n} - (2r)^{2-n}}.$$

那么， $u$ 与 $h^\pm$ 之间的比较原理给出

$$h^- \le u \le h^+ \quad \text{in } B_{2r} \setminus B_{3r/2},$$

因此

$$\frac{c(n)\, m_-}{r} = -\frac{\partial h^-}{\partial \mathbf{n}} \le -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \le -\frac{\partial h^+}{\partial \mathbf{n}} = \frac{c(n)\, m_+}{r} \quad \text{on } \partial B.$$

因此，我们得出

$$c_1(n) r^{n-2} \mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{height}}(K,B) \le \mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{var}}(K,B) \le c_2(n) r^{n-2} \mathrm{cap}_{\Delta,\mathrm{height}}(K,B).$$

□

接下来，我们估计球 $B_\rho$ 相对于较大的球 $B_{2r}$ 的容量。事实上，球的容量能够反映齐次解 $V$ 的增长率， $F$。

引理 3.11（球的容量估计）。设 $B = B_{2r}(x_0)$、$B' = B_{\frac{7}{5}r}(x_0)$ 且 $y_0 = x_0 + \frac{3}{2}re_1$。那么，对于任意 $0 < \rho < \frac{7}{5}r$，存在一个常数 $c = c(n, \lambda, \Lambda) > 0$，它与 $r$ 和 $\rho$ 无关，使得

(i) ($\alpha^* > 0$)

$$\frac{1}{c}\,\frac{r^{-\alpha^*}}{\rho^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}} \le \operatorname{cap}_F(\overline{B_\rho(x_0)}, B_{2r}(x_0)) \le \frac{cr^{-\alpha^*}}{\rho^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}}.$$

(ii) ($\alpha^* < 0$)

$$\frac{1}{c}\,\frac{r^{-\alpha^*}}{(2r)^{-\alpha^*} - \rho^{-\alpha^*}} \le \operatorname{cap}_F(\overline{B_\rho(x_0)}, B_{2r}(x_0)) \le \frac{cr^{-\alpha^*}}{(2r)^{-\alpha^*} - \rho^{-\alpha^*}}.$$

(iii) ($\alpha^* = 0$)

$$\frac{1}{c}\,\frac{1}{\log(2r) - \log\rho} \le \operatorname{cap}_F(\overline{B_\rho(x_0)}, B_{2r}(x_0)) \le \frac{c}{\log(2r) - \log\rho}.$$

证明。我们不妨假设 $x_0 = 0$。应用容量定义后的论证，我们得到

$$\operatorname{cap}_F(\overline{B_\rho}, B_{2r}) = \hat{R}_{\overline{B_\rho}}(B_{2r})(y_0) = \overline{H}_f(B_{2r} \setminus \overline{B_\rho})(y_0),$$

其中边界数据 $f$ 由下式给出

$$f = \begin{cases} 1 & \text{on } \partial B_\rho, \\ 0 & \text{in } \partial B_{2r}. \end{cases}$$

此外，由于球是正则域，我们可以写作 $\overline{H}_f(B_{2r} \setminus \overline{B_\rho}) = v$ 其中 $v$ 是狄利克雷问题的唯一解

$$\begin{cases} F(D^2 v) = 0 & \text{in } B_{2r} \setminus \overline{B_\rho}, \\ v = 1 & \text{on } \partial B_\rho, \\ v = 0 & \text{in } \partial B_{2r}. \end{cases}$$

注意，$\overline{H}_f(B_{2r} \setminus \overline{B_\rho})$ 在边界上连续。现在根据 $\alpha^*(F)$ 的符号，分三种情况讨论。

(i) ($\alpha^* > 0$) 在这种情况下，对于齐次解 $V(x) = |x|^{-\alpha^*} V\Big(\frac{x}{|x|}\Big)$，记

e

$$V_+ := \max_{|x|=1} V(x) \quad \text{and} \quad V_- := \min_{|x|=1} V(x)$$

并选取两点 $x_+, x_-$，使得 $|x_+| = 1 = |x_-|$，从而

$$V(x_+) = V_+ \quad \text{and} \quad V(x_-) = V_-.$$

我们定义两个函数

$$v^+(x) := \frac{V(x) - (2r)^{-\alpha^*} V_-}{[\rho^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}]V_-} \quad \text{and} \quad v^-(x) := \frac{V(x) - (2r)^{-\alpha^*} V_+}{[\rho^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}]V_+}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} F(D^2 v^+) = 0 = F(D^2 v^-) \text{ in } B_{2r} \setminus \overline{B_\rho}, \\ v^+ \ge 1 \text{ on } \partial B_\rho \text{ and } v^+ \ge 0 \text{ on } \partial B_{2r}, \\ v^- \le 1 \text{ on } \partial B_\rho \text{ and } v^- \le 0 \text{ on } \partial B_{2r}. \end{aligned}$$

因此，由比较原理可得

$$v^- \le v = \overline{H}_f(B_{2r} \setminus \overline{B_\rho}) = \hat{R}_{\overline{B_\rho}}(B_{2r}) \le v^+ \quad \text{in } B_{2r} \setminus \overline{B_\rho}.$$

最后，在 $\partial B_{3r/2}$ 上对 $v$ 应用哈纳克不等式，存在一个与 $r > 0$ 无关的常数 $c_1 > 0$，使得

$$\frac{1}{c_1} v\Big(\frac{3rx_+}{2}\Big) \le v(y_0) \le c_1 v\Big(\frac{3rx_-}{2}\Big).$$

因此，我们得到了所需的上界：

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}_F(\overline{B_\rho}, B_{2r}) = v(y_0) \le c_1 v\Big(\frac{3rx_-}{2}\Big) \le c_1 v^+\Big(\frac{3rx_-}{2}\Big) =& c_1 \frac{(3r/2)^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}}{\rho^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}} \\ =& \frac{cr^{-\alpha^*}}{\rho^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}}.\end{aligned}$$

同样，我们得出下界：

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}_F(\overline{B_\rho}, B_{2r}) = v(y_0) \ge \frac{1}{c_1} v\Big(\frac{3rx_+}{2}\Big) \ge \frac{1}{c_1} v^-\Big(\frac{3rx_+}{2}\Big) =& \frac{1}{c_1} \frac{(3r/2)^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}}{\rho^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}} \\ =& \frac{1}{c} \frac{r^{-\alpha^*}}{\rho^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*}}.\end{aligned}$$

**(ii)** ($\alpha^* < 0$) 为简单起见，我们假设向上指的齐次解为

$$V(x) = -|x|^{-\alpha^*}.$$

于是，我们可以明确写出容量势：

$$v(x) = \frac{(2r)^{-\alpha^*} - |x|^{-\alpha^*}}{(2r)^{-\alpha^*} - \rho^{-\alpha^*}}.$$

因此，

$$\mathrm{cap}_F(\overline{B_\rho}, B_{2r}) = v(y_0) \sim \frac{r^{-\alpha^*}}{(2r)^{-\alpha^*} - \rho^{-\alpha^*}}.$$

对于一般的 $V$，我们可以用与第 **(i)** 部分类似的论证进行计算。例如，若 $V(x) = -|x|^{-\alpha^*} V\Big(\frac{x}{|x|}\Big)$，则定义

$$v^+(x) := \frac{(2r)^{-\alpha^*} V_+ + V(x)}{[(2r)^{-\alpha^*} - \rho^{-\alpha^*}]V_+} \quad \text{and} \quad v^-(x) := \frac{(2r)^{-\alpha^*} V_- + V(x)}{[(2r)^{-\alpha^*} - \rho^{-\alpha^*}]V_-}.$$

**(iii)** ($\alpha^* = 0$) 同样，为简便起见，我们可以假设向上指的齐次解为

$$V(x) = -\log|x|.$$

类似地，我们可以明确写出容量势：

$$v(x) = \frac{\log(2r) - \log|x|}{\log(2r) - \log\rho}.$$

因此，

$$\mathrm{cap}_F(\overline{B_\rho}, B_{2r}) = v(y_0) \sim \frac{1}{\log(2r) - \log\rho}.$$

对于一般的 $V$，我们可以用与第 **(i)** 部分类似的论证进行计算。例如，若 $V(x) = V\Big(\frac{x}{|x|}\Big) - \log|x|$，则定义

$$v^+(x) := \frac{\log(2r) - V_- + V(x)}{\log(2r) - \log\rho} \quad \text{and} \quad v^-(x) := \frac{\log(2r) - V_+ + V(x)}{\log(2r) - \log\rho}.$$

□

我们可以看到，单点的容量取决于缩放指数 $\alpha^*(F)$ 的符号。事实上，可以预期，在容量估计引理 3.11 中取 $\rho \to 0^+$ 时，会得到以下结果。

引理 3.12. 对于 $z_0 \in \mathbb{R}^n$，选取一个球 $B = B_{2r}(x_0)$，使得 $z_0 \in B' = B_{7r/5}(x_0)$。

**(i)** 若 $\alpha^*(F) \ge 0$，则

$$\mathrm{cap}_F(\{z_0\}, B) = 0.$$

(ii) 若 $\alpha^*(F) < 0$，则

$$\mathrm{cap}_F(\{z_0\}, B) > 0.$$

证明。（i）设

$$V(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha^*} V\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{if } \alpha^* > 0, \\ -\log|x| + V\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{if } \alpha^* = 0. \end{cases}$$

为 $F$的齐次解。那么对于 $m := \min_{x\in\partial B} V(x - z_0)$以及任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\varepsilon \cdot [V(x - z_0) - m] \in \Phi^1_{\{z_0\}}$$

根据最小值原理及 $\lim_{x\to z_0} V(x - z_0) = \infty$。因此，

$$\mathrm{cap}(\{z_0\}, B) = \hat{R}^1_{\{z_0\}}(y_0) = R^1_{\{z_0\}}(y_0) \le \varepsilon \cdot [V(y_0 - z_0) - m].$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们完成了证明的第一部分。

(ii) 令 $V(x) = -|x|^{-\alpha} V\left(\frac{x}{|x|}\right)$为 $F$的齐次解。那么对于 $\max_{x\in\partial B} V(x - z_0) =: -M < 0$，我们考虑

$$u(x) := 1 + \frac{V(x - z_0)}{M}.$$

由于 $\sup_{\partial B} u = 0$ 和 $V$是齐次函数，因此有 $\sup_{\partial B_{7/5r}} u > 0$。另一方面，回顾定理 3.6，

$$\hat{R}^1_{\{z_0\}} = \overline{H}_f(\Omega \setminus \{z_0\}) \ge \underline{H}_f(\Omega \setminus \{z_0\}),$$

其中边界数据 $f$ 由下式给出

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = z_0, \\ 0 & \text{if } x \in \partial B. \end{cases}$$

于是 $u \in \mathcal{L}_f$，从而 $\underline{H}_f(\Omega \setminus \{z_0\}) \ge u$。因此，我们得到

$$\sup_{\partial B_{7/5r}} \hat{R}^1_{\{z_0\}} > 0$$

根据哈纳克不等式，$\mathrm{cap}(\{z_0\}, B) > 0$，如所要求。

□

3.3. 容量零集。

定义 3.13. 若集合 $E$ 属于 $\mathbb{R}^n$，则称其具有（$F$-）容量为零，或称其（$F$-）容量为零，如果

$$\mathrm{cap}_F(E, B) = 0$$

每当 $E \subset B' \subset B$成立时。在这种情况下，我们记作 $\mathrm{cap}_F E = 0$。

根据引理 3.12 (i)，我们立即注意到，若 $\alpha^*(F) \ge 0$，则每个单点的 $F$-容量为零。事实上，我们将证明：要检验一个紧集 $K$ 的容量是否为零，只需针对一个球 $B$ 进行检验（推论 3.15）。为此，我们需要以下一种容量估计，称为“可比引理”。

引理 3.14（可比引理）。若 $K \subset B' = B_{7r/5}$ 且 $0 < r \le s \le 2r$，则存在一个普适常数 $c > 0$，使得

$$\frac{1}{c}\,\mathrm{cap}_F(K, B_{2r}) \le \mathrm{cap}_F(K, B_{2s}) \le c\,\mathrm{cap}_F(K, B_{2r}).$$

证明。我们不妨假设 $x_0 = 0$。我们声称，对于 $0 < r \le s \le \frac{21}{20}r$，有

$$\frac{1}{c}\,\mathrm{cap}_F(K, B_{2r}) \le \mathrm{cap}_F(K, B_{2s}) \le c\,\mathrm{cap}_F(K, B_{2r}).$$

事实上，我们可以将该不等式有限次迭代，从而得到所需的关于$0 < r \le s \le 2r$的不等式。此外，令 $y_r = \frac{3}{2}re_1$, $y_s = \frac{3}{2}se_1$，并记 $u_r := \hat{R}^1_K(B_{2r})$, $u_s := \hat{R}^1_K(B_{2s})$。

根据容量势的定义，显然有 $u_r \le u_s$ 属于 $B_{2r}$。特别地，我们有

$$\mathrm{cap}_F(K, B_{2r}) = u_r(y_r) \le u_s(y_r).$$

另一方面，对 $u_s$ （在 $B_{3s/2} \setminus B_{10s/7}$ 的一个小邻域内）应用哈纳克不等式可得，存在一个常数 $c > 0$，它与 $r$ 和 $s$ 的选择无关，使得

$$u_s(y_r) \le c u_s(y_s) = c\,\mathrm{cap}_F(K, B_{2s}).$$

这里注意到，$|y_r| = \frac{3}{2}r \ge \frac{10}{7}s > \frac{7}{5}s$ 和 $R^1_K$（$B_{2s}$）在 $B_{2s}\setminus B_{7s/5}$ 中是 $F$-调和的，并且 $B_{3s/2}\setminus B_{10s/7} \subset B_{2s} \setminus B_{7s/5}$。因此，第一个不等式的证明到此完成。

接下来，对于第二个不等式，我们首先假设 $\alpha^*(F) > 0$，且齐次解由 $V(x) = |x|^{-\alpha^*}$ 给出（为便于计算），并令

$$M := \max_{\partial B_{2r}} u_s \in [0, 1).$$

那么，回顾定理 3.6，比较原理可得

$$(1 - M)u_r + M \ge u_s \quad \text{in } B_{2r} \setminus K. \tag{3.1}$$

现在选择 $z \in \partial B_{3r/2}$ 使得

$$u_s(z) = \max_{\partial B_{3r/2}} u_s =: M_1.$$

那么很容易验证，函数

$$w(x) := M_1 \cdot \frac{|x|^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}}{(3r/2)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}}$$

在 $B_{2s} \setminus B_{3r/2}$ 中是 $F$-调和的，并且根据比较原理，$w \ge u_s$ 在 $B_{2s} \setminus B_{3r/2}$ 中。（这里再次注意，$\frac{7}{5}s < \frac{3}{2}r$。）特别地，

$$M_1 \cdot \frac{(2r)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}}{(3r/2)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}} \ge M,$$

$$M_1 \cdot \frac{(3s/2)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}}{(3r/2)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}} \ge u_s\Big(\frac{3}{2}se_1\Big) = \mathrm{cap}_F(K, B_{2s}).$$

由于 $(3r/2)^{-\alpha^*} - (2r)^{-\alpha^*} \ge (3s/2)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}$，或者等价地，

$$(3r/2)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*} \ge [(3s/2)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}] + [(2r)^{-\alpha^*} - (2s)^{-\alpha^*}],$$

我们得到

$$u_s(z) = M_1 \ge M + \mathrm{cap}_F(K, B_{2s}). \tag{3.2}$$

此外，由 (3.1) 和 (3.2)，我们有 $u_r(z) \ge (1 - M)u_r(z) \ge$ 容量$_F(K, B_{2s})$，于是由哈纳克不等式可得

$$\mathrm{cap}_F(K, B_{2s}) \le c\,\mathrm{cap}_F(K, B_{2r}),$$

其中常数 $c > 0$ 与 $r$ 和 $s$ 无关。最后，对于一般的齐次解，或在 $\alpha^*(F) \le 0$ 的情形下，可以沿用引理 3.11 的思路。□

推论 3.15. 假设对于 $K \subset B' \subset B$，有容量$(K, B) = 0$。那么

(i) 对于任意满足 $K \subset B'_1$ 且 $B_1 \subset B'$ 的球 $B_1$，我们有

$$\mathrm{cap}(K, B_1) = 0;$$

(ii) 对于任意满足 $B'_2 \supset B$ 的球 $B_2$，我们有

$$\mathrm{cap}(K, B_2) = 0;$$

(iii) $K$ 的 $F$-容量为零。

证明。（i）有限次应用引理 3.14 的第一个不等式。

(ii) 有限次应用引理 3.14 的第二个不等式。

(iii) 这是 (i) 和 (ii) 的直接推论。

□

现在我们简要说明容量零集的势论意义，至少对于凸算子 $F$ 是如此。归根结底，从全非线性算子 $F$ 的角度看， $F$-容量零集是“可忽略的”；也就是说， $F$-容量确实以一种恰当的方式衡量给定集合的大小，从而诠释相应的 PDE。

定义 3.16（极集）。若存在一个开球 $B_{2r}$，满足 $K \subset B_{7r/5}$，以及一个定义在 $B_{2r}$ 中的 $F$-超调和函数 $u$，使得 $u|_K = \infty$，则称紧集 $K$ 为 $F$-极集，或简称为极集。
引理 3.17。设 $K$ 是 $B_{7r/5}$ 中的紧集，且 $F$ 是凸的。那么以下条件等价：

(i) $K$ 是极集。
(ii) $\mathrm{cap}_F K = 0$。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：由于 $K$ 是极集，设 $u$ 是 $B_{2r}$ 中的一个 $F$-超调和函数，满足$u|_K = \infty$。回忆 $F$-超调和函数的定义，存在一点 $x_0 \in B_{2r} \setminus K$，使得 $u(x_0) < \infty$。由于 $u$ 下半连续，且 $u$ 无法取到值 $-\infty$，我们可以用一个稍小的球 $B_{2r'}$ 代替 $B_{2r}$，从而假设 $\inf_{B_{2r}} u > -\infty$。然后，必要时加上一个正的常数，进一步假设 $\inf_{B_{2r}} u \geq 0$，即 $u$ 在 $B_{2r}$ 中非负。注意，此时仍有 $u$ 在 $B_{2r}$ 中是 $F$-超调和的，且 $u|_K = \infty$。因此，对任意 $\varepsilon > 0$，有 $\varepsilon u \in \Phi^1_K(B_{2r})$，于是

$$\hat{R}^1_K(B_{2r}) \leq \varepsilon u.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 并取 $x = x_0$，注意到 $\hat{} R^1_K(B_{2r})(x_0) = 0$。最后，由强极小值原理可得 $\mathrm{cap}_F K = 0$。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：令 $y_0 = x_0 + \frac{3}{2} r e_1$。根据容量和容量势的定义，有 $\hat{} R^1_K(B_{2r}(x_0))(y_0) = 0$。因此，存在一列 $F$-超调和函数 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$，定义在 $B_{2r}$ 中，使得

$$u_j \geq 0 \text{ in } B_{2r},\ u_j \geq 1 \text{ on } K \text{ and } u_j(y_0) < 1/2^j.$$

定义 $v_k := \sum_{j=1}^{k} u_j$，它是下半连续的，并且在 $\Omega$ 的一个稠密子集上取有限值。此外，由于 $F$ 是凸的，我们有 $F(D^2 v_k) \leq 0$，因此 $v_k$ 是 $F$-超调和的。由于 $\{v_k\}_k$是 $F$-超调和函数的递增序列，根据引理 2.8 (iii)，极限函数 $v = v_k$ 要么是 $F$-超调和的，要么是 $v \equiv \infty$。第二种可能性可排除，因为$0 \leq v(y_0) \leq 1$。因此， $v$ 在 $B_{2r}$ 中是 $F$-超调和的，且 $v|_K = \infty$，这意味着 $K$ 是极性的。

□

定义 3.18（可去集）。若紧集 $K(\subset B_{7r/5})$ 满足：对于每个在 $B_{2r} \setminus K$ 上 $F$-超调和且在 $K$ 的某个邻域内有下界的函数 $u$，都存在其延拓 $U$，使得该延拓在 $B_{2r}$ 上是 $F$-超调和的，并且在 $B_{2r} \setminus K$ 中 $U = u$，则称 $K(\subset B_{7r/5})$ 为 $F$- 可去的，或简称可去。

引理 3.19。设 $K$ 是一个容量为零的紧集，且 $F$ 是凸的。则 $K$ 是可去的。

证明。设 $u$ 是 $B_{2r} \setminus K$ 中一个 $F$-超调和函数，且在 $K$ 的某个邻域内有下界。由于 $K$ 的容量为零，我们有 $\hat{} R^1_K(B_{2r})(y_0) = 0$，因此由强极小值原理，$\hat{} R^1_K(B_{2r}) \equiv 0$。特别地， $R^1_K(B_{2r})$ 在 $B_{2r} \setminus K$ 中 $\equiv 0$。现在，对任意 $z_0 \in B_{2r} \setminus K$，沿用引理 3.17 中 [(ii) $\Longrightarrow$ (i)] 部分的证明，可得一个定义在 $B_{2r}$ 上的非负 $F$-超调和函数 $v_{z_0}$，使得 $v_{z_0}|_K = \infty$ 且 $v_{z_0}(z_0) < \infty$。

现在我们考虑 $u$ 在 $K$ 上的典范下半连续延拓 $U$，其定义为

$$U(x) = \begin{cases} \liminf_{y \to x, y \notin K} u(y) & \text{if } x \notin \mathrm{int} K, \\ \infty & \text{if } x \in \mathrm{int} K. \end{cases}$$

那么， $U$ 是函数 $v$ 的下半连续正则化，其中

$$v=\begin{cases} u & \text{in } B_{2r}\setminus K,\\ \infty & \text{on } K.\end{cases}$$

详情请见 [11] 。此外，由引理 2.2 和引理 2.10 可知， $U=u$ 属于 $B_{2r}\setminus K$，因此 $U$ 在 $B_{2r}\setminus K$中是 $F$-超调和的。

接下来我们断言，对于任意 $\varepsilon>0$和 $z_0\in B_{2r}\setminus K$， $U+\varepsilon v_{z_0}$在 $B_{2r}$中是 $F$-超调和的。事实上， $F$ 的凸性立即保证了 $U+\varepsilon v_{z_0}$ 在 $B_{2r}\setminus K$中是 $F$-超调和的。另一方面，由于 $U+\varepsilon v_{z_0}|_K=\infty$，我们无法在$K$中的点为 $U+\varepsilon v_{z_0}$ 选取任何测试函数。换言之，对于任意 $\varphi\in C^2(\Omega)$， $U+\varepsilon v_{z_0}-\varphi$ 在 $x_0\in K$处都不可能取得局部极小值。因此，回顾 $F$-上解与 $F$-超调和函数的等价性（定理 2.10），我们得出结论： $U+\varepsilon v_{z_0}$ 在 $B_{2r}$中是 $F$-超调和的。

现在令$\mathcal{F}=\{U+\varepsilon v_{z_0}\}_{\varepsilon>0,z_0\in B_{2r}\setminus K}$ 为 $B_{2r}$中的一族 $F$-超调和函数。由于$u$ 在 $K$ 的某个邻域内有下界，且 $v_{z_0}$ 非负， $\mathcal{F}$ 中的任意元素都在局部一致有下界。因此，应用引理 3.1，可得

$$s(x)=\lim_{r\to 0}\inf_{B_r(x)}(\inf\mathcal{F})$$

在 $B_{2r}$中是 $F$-超调和的。另一方面，容易验证

$$\inf\mathcal{F}=\begin{cases} u & \text{in } B_{2r}\setminus K,\\ \infty & \text{on } K.\end{cases}$$

因此，我们得出结论： $s=U$ 和 $U$ 是 $u$的一个所需延拓。 □

~注 3.20. 考虑对偶算子 $F$，当算子为凹时，可以得到类似的定义和相应结果。

关于极集和可去集的类似结果，对于 $p$-拉普拉斯算子，参见 [12] ；对于 Pucci 极值算子，参见[24] ；对于 $k$-Hessian 算子，参见 [23] 。另请参见 [2, 10, 11] ，其中从黎斯容量或豪斯多夫测度的角度分析了极集和可去集。

3.4. 正则点的另一种刻画。约化函数和扫掠的定义取决于所选算子 $F$。在本小节中，我们需要区分一个算子及其对偶算子，因此将通过记作 $\hat{R}^{1,\ F}_{K}(\Omega)$ 或 $\hat{R}^{1,\ F}_{K}(\Omega)$ 来注明它们所依赖的算子。现在给出我们第一个主定理（维纳判据的充分性）所需的一个关键引理:

引理 3.21. 边界点 $x_0\in\partial\Omega$ 是正则的，如果

$$\hat{R}^{1,\widetilde{F}}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B)(x_0)=1=\hat{R}^{1,F}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B)(x_0)$$

每当 $B$ 是以 $x_0$ 为中心的球时。

证明. 对于 $f\in C(\partial\Omega)$，考虑上佩龙解 $\overline{H}_f=\overline{H}_f(\Omega)$。不妨设 $f(x_0)=0$，且 $\max_{\partial\Omega}|f|\le 1$。对于 $\varepsilon>0$，我们可以选取一个以 $x_0$ 为中心的球 $B$，使得 $\partial(2B)\cap\Omega\neq\varnothing$，且 $|f|<\varepsilon$ 位于 $2B\cap\partial\Omega$ 中。然后定义

$$u=\begin{cases} 1+\varepsilon-\hat{R}^{1,\widetilde{F}}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B) & \text{in } \Omega\cap 2B,\\ 1+\varepsilon & \text{in } \Omega\setminus 2B.\end{cases}$$

~ ~由于 $\hat{R}^{1,\ F}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B)$ 是 $\Omega\cap 2B$ 中的 $\widetilde{F}$-解 $1+\varepsilon-\hat{R}^{1,\ F}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B)$ 在 $\Omega\cap 2B$ 中是 $F$-调和的。另一方面，根据定理 3.6， $\hat{R}^{1,\ F}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B)$ 可视为关于~算子 $F$ 的上佩龙解。由于球是正则的，因此有

$$\lim_{y\to x}\hat{R}^{1,\widetilde{F}}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B)(y)=0\quad\text{for all } x\in\partial(2B).$$

因此， $u$ 在 $\Omega$ 中连续，且根据粘贴引理， $u$ 在 $\Omega$ 中是 $F$-超调和的。此外，很容易验证

$$\liminf_{y\to x}u(y)\ge f(x)\quad\text{for any } x\in\partial\Omega.$$

因此， $u \in \mathcal{U}_f$ ，从而 $\overline{H}_f \le u$。特别地，

$$\limsup_{\Omega \ni y \to x_0} \overline{H}_f(y) \le \limsup_{\Omega \ni y \to x_0} u(y) = 1 + \varepsilon - \liminf_{\Omega \ni y \to x_0} \hat{R}^{1,\widetilde{F}}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B)(y) \le 1 + \varepsilon - \hat{R}^{1,\widetilde{F}}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B)(x_0) = \varepsilon.$$

对于逆向不等式，我们定义

$$v = \begin{cases} -1 - \varepsilon + \hat{R}^{1,F}_{\overline{B}\setminus\Omega}(2B) & \text{in } \Omega \cap 2B, \\ -1 - \varepsilon & \text{in } \Omega \setminus 2B. \end{cases}$$

于是，通过类似的论证， $v \in \mathcal{L}_f$ 因此，

$$\liminf_{\Omega \ni y \to x_0} \underline{H}_f(y) \ge -\varepsilon.$$

因此，由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得出

$$\lim_{\Omega \ni y \to x_0} \overline{H}_f(y) = \lim_{\Omega \ni y \to x_0} \underline{H}_f(y) = 0 = f(x_0),$$

即， $x_0$ 是正则的。 □

接下来，我们给出上述引理的逆向：即对非正则边界点的刻画。我们预计，该引理可用于证明一般情形下维纳判据的必要性。

引理 3.22（非正则边界点的刻画）。若存在常数 $\rho > 0$，使得相对于 $B_{2\rho}(x_0)$，$B_\rho(x_0) \setminus \Omega$ 的容量势 $u = u_\rho$ 满足不等式

$$u(x_0) = \hat{R}^1_{\overline{B_\rho(x_0)}\setminus\Omega}(B_{2\rho}(x_0)) < 1,$$

则边界点 $x_0 \in \partial\Omega$ 是非正则的。

证明。由于容量势 $u$ 是下半连续正则化，我们有

$$u(x_0) = \liminf_{\Omega \ni x \to x_0} u(x) < 1. \tag{3.3}$$

此外，根据定义，当 $0 < \rho' < \rho$ 时，我们有 $u_{\rho'} \le u_\rho$ 。因此，可以选取充分小的 $\rho > 0$ ，使得 (3.3) 成立，并且 $\Omega \cap \partial B_{2\rho}(x_0) \neq \varnothing$。

现在，我们在 $\partial(\Omega \cap B_{2\rho}(x_0))$ 上定义光滑边界数据 $f$ ，使得若 $x \in \partial\Omega \cap B_{\rho/2}(x_0)$，则 $f(x) = 3/2$ ；若 $\Omega \cap (B_\rho(x_0) \setminus B_{\rho/2}(x_0))$，则 $0 \le f(x) \le 3/2$；并且在 $\partial(\Omega \cap B_{2\rho}(x_0))$ 的其余部分， $f(x) = 0$。接着考虑下 Perron 解 $\underline{H}_f(\Omega \cap B_{2\rho}(x_0))$。我们断言以下不等式成立：

$$\underline{H}_f(x) \le \frac{1}{2} + u(x), \quad x \in \Omega \cap B_{2\rho}(x_0). \tag{3.4}$$

回顾比较原理，只需在区域 $\Omega \cap B_{2\rho}(x_0)$ 的边界上验证上述不等式。为此，令 $v \in \mathcal{L}_f(\Omega \cap \underline{B_{2\rho}(x_0)})$ 且 $w \in \mathcal{U}_g(B_{2\rho}(x_0) \setminus (B_\rho(x_0) \setminus \Omega))$，其中 $g$ 由下式给出（回顾定理 3.6 ）

$$g = \begin{cases} 1 & \text{on } \partial(\overline{B_\rho(x_0)} \setminus \Omega), \\ 0 & \text{in } \partial B_{2\rho}(x_0). \end{cases}$$

(i)（在 $\partial\Omega \cap B_{2\rho}(x_0)$ 上）首先，对于 $x \in \partial\Omega \cap B_\rho(x_0)$，有

$$\limsup_{y \to x} v(y) \le f(x) \le \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + g(x) \le \frac{1}{2} + \liminf_{y \to x} w(y).$$

接下来，对于 $x \in \partial\Omega \cap (B_{2\rho}(x_0) \setminus B_\rho(x_0))$，有

$$\limsup_{y \to x} v(y) \le f(x) = 0 \le \frac{1}{2} + g(x) \le \frac{1}{2} + \liminf_{y \to x} w(y).$$

(ii)（在 $\Omega \cap \partial B_{2\rho}(x_0)$ 上）类似地，我们得到

$$\limsup_{y \to x} v(y) \le f(x) = 0 \le \frac{1}{2} + g(x) \le \frac{1}{2} + \liminf_{y \to x} w(y).$$

现在，由于 $v$ 和 $w$ 分别是 $F$-次调和的和 $F$-超调和的，我们推得

$$v \le \frac{1}{2} + w, \quad \text{in } \Omega \cap B_{2\rho}(x_0).$$

对 $v$ 取上确界，对 $w$ 取下确界，我们得到式 (3.4)，由此可推出

$$\liminf_{\Omega\cap B_{2\rho}(x_0)\ni x\to x_0} \underline{H}_f(x) \le \frac{1}{2} + \liminf_{\Omega\cap B_{2\rho}(x_0)\ni x\to x_0} u(x) < \frac{3}{2} = f(x_0).$$

因此，相对于 $\Omega \cap B_{2\rho}(x_0)$， $x_0$ 是非正则的。回顾引理 2.24，我们推得 $x_0$ 相对于 $\Omega$ 是非正则的。□

## 4. A sufficient condition for the regularity of a boundary point

本节通过势估计证明维纳判据的充分性及其序列推论。更具体地说，我们首先利用第 3 节中得到的容量估计，对容量势 $\hat{} R^1_K(B)$ 建立定量估计。然后，我们采用以容量势表述的正则边界点的刻画，推导出所需结论。

**D义 4.1.** 若集合 $E$ 在 $z$ 处是 $F$-厚的，即维纳积分发散，则称之为

$$\int_0^1 \mathrm{cap}_F(E \cap \overline{B_t(z)}, B_{2t}(z)) \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty. \tag{4.1}$$

为简便起见，记

$$\varphi_F(z, E, t) = \mathrm{cap}_F(E \cap \overline{B_t(z)}, B_{2t}(z)),$$

为式（4.1）中的容量密度函数。

注 4.2. 回顾引理 3.11，存在一个与 $t > 0$ 无关的常数 $c > 0$，使得

$$1/c \le \mathrm{cap}_F(\overline{B_t}, B_{2t}) \le c.$$

因此，可以将（4.1）写成如下等价形式：

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{cap}_F(E \cap \overline{B_t(z)}, B_{2t}(z))}{\mathrm{cap}_F(\overline{B_t(z)}, B_{2t}(z))} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty,$$

其形式与 [20, 40] 中出现的维纳积分相似。

现在我们可以陈述主定理（定理 1.2）的一种等价形式：

~若 $\Omega^c$ 在边界点 $x_0 \in \partial\Omega$ 处既是 $F$-厚的又是 $F$-厚的，则 $x_0$ 是正则的。

To p为了证明这一结论，我们需要一些关于容量势的辅助引理 .

**引理 4.3.** 固定一个球 $B$。设 $K \subset B'$ 是紧集，且 $v = \hat{} R^1_K(B)$。若 $0 < \gamma < 1$ 和$K_\gamma := \{x \in B : v(x) \ge \gamma\} \subset B'$，则

$$\mathrm{cap}(K_\gamma, B) = \frac{1}{\gamma}\mathrm{cap}(K, B).$$

证明。记 $v_\gamma := \hat{} R^1_{K_\gamma}(B)$。由引理3.4及约化函数的定义，

$$v_\gamma = R^1_{K_\gamma}(B) = \inf \Phi^1_{K_\gamma} = \inf\{w\text{: } w\text{在 } B \text{ 中是 } F\text{-超调和的}, \ w \ge \psi_\gamma \text{在 } B\} \text{中属于 } B \setminus K_\gamma,$$

其中

$$\psi_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{in } K_\gamma, \\ 0 & \text{in } B \setminus K_\gamma. \end{cases}$$

(i) 显然， $v = \hat{} R^1_K(B)$ 在 $B$ 中是 $F$-超调和的，因此根据 (F2)， $v/\gamma$ 也是如此。由于 $v \ge \gamma$ 在 $K_\gamma$ 中，我们有 $v/\gamma \ge 1$ 在 $K_\gamma$ 中。因此，$v/\gamma \in \Phi^1_{K_\gamma}$，于是

$$\frac{v}{\gamma} \ge v_\gamma \quad \text{in } B \setminus K_\gamma.$$

(ii) 回顾定理 3.6, $v_\gamma = \overline{H}_{f_\gamma}(B \setminus K_\gamma)$ 在 $B \setminus K_\gamma$ 中，其中

$$f_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{on } \partial K_\gamma, \\ 0 & \text{on } \partial B. \end{cases}$$

那么，对于 $u \in \mathcal{U}_{f_\gamma}(B \setminus K_\gamma)$，我们有

$$\liminf_{B\setminus K_\gamma \ni y \to x} u(y) \geq f_\gamma(x) = 1 = \frac{v(x)}{\gamma},$$

对于任意 $x \in \partial K_\gamma$。由于 $u$ 在 $B \setminus K_\gamma$ 中是 $F$-超调和的，而 $v/\gamma$ 在 $B \setminus K_\gamma$ 中是 $F$-调和的，比较原理推出 $u \geq v/\gamma$ 在 $B \setminus K_\gamma$ 中成立，因此

$$v_\gamma \geq \frac{v}{\gamma} \quad \text{in } B \setminus K_\gamma.$$

因此，我们得出

$$\operatorname{cap}(K_\gamma, B) = v_\gamma(y_0) = \frac{1}{\gamma} v(y_0) = \frac{1}{\gamma} \operatorname{cap}(K, B).$$

□

引理 4.4。取一个球 $B = B_{2r}(x_0)$。设 $K \subset B_r = B_r(x_0)$ 是一个紧集，且 $v = \hat{R}^1_K(B)$。那么存在一个常数 $c > 0$，它与 $K$ 和 $r$ 无关，使得

$$v(x) \geq c \operatorname{cap}(K, B),$$

对于任意 $x \in B_r$。

证明。记

$$M := \sup_{\partial B_{6r/5}} v, \quad m := \inf_{\partial B_{6r/5}} v.$$

由于 $v$是 $B\setminus K$中的非负 $F$-解，哈纳克不等式表明存在一个与 $r > 0$ 无关的常数$c_1 > 0$，使得

$$c_1 M \leq m. \tag{4.2}$$

此外， $B \setminus B_{6r/5}$ 中的强最大值原理意味着

$$K_M := \{v \in B : v(x) \geq M\} \subset \overline{B_{6r/5}},$$

因此

$$\operatorname{cap}(K_M, B) \leq \operatorname{cap}(\overline{B_{6r/5}}, B) \sim 1. \tag{4.3}$$

这里我们应用了引理 3.11，且相应的常数与 $K$ 和 $r$无关。

现在，由于 $K_M \subset B'$，我们可以应用引理 4.3:

$$\operatorname{cap}(K_M, B) = \frac{1}{M} \operatorname{cap}(K, B). \tag{4.4}$$

最后，结合 (4.2)、(4.3) 和 (4.4)，我们得出

$$m \geq c_1 M = c_1 \cdot \frac{\operatorname{cap}(K, B)}{\operatorname{cap}(K_M, B)} \geq c_2 \operatorname{cap}(K, B),$$

而最小值原理给出了所需结果。 □

我们可以将前一个引理改写为

$$\hat{R}^1_K(B_{2r})(x) \geq c\, \varphi_F(x_0, K, r), \quad \text{for any } x \in B_r. \tag{4.5}$$

引理 4.5. 设 $x_0 \in \partial\Omega$、 $\rho > 0$ 和

$$w = 1 - \hat{R}^1_{\overline{B_\rho(x_0)}\setminus\Omega}(B_{2\rho}(x_0)).$$

那么，对于所有 $0 < r \leq \rho$，都存在一个常数 $c > 0$，使得

$$w(x) \leq \exp\Big( - c \int_r^\rho \varphi_F(x_0, \Omega^c, t) \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big),$$

对于任意 $x \in B_r(x_0)$。

证明。记 $B_i = B_{2^{1-i}\rho}(x_0)$。固定 $0 < r \le \rho$，并令 $k$ 为满足 $2^{-k}\rho < r \le 2^{1-k}\rho$ 的整数。于是，对 $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots$，写作

$$v_i := \hat{R}^1_{\overline{B_{i+1}}\setminus\Omega}(B_i)$$

and

$$a_i := \varphi_F(x_0, \Omega^c, 2^{-i}\rho).$$

由于 $e^t \ge 1 + t$，估计 (4.5) 得出

$$v_i \ge ca_i \ge 1 - \exp(-ca_i) \quad \text{in } B_{i+1}.$$

因此，记 $m_0 := \inf_{B_1} v_0$，我们有

$$1 - m_0 \le \exp(-ca_0).$$

接下来，令 $D_1 := B_1 \setminus (\overline{B_2} \cap \Omega^c)$，并且

$$\psi_1 := \begin{cases} 1 & \text{in } \overline{B_2} \cap \Omega^c, \\ m_0 & \text{in } D_1. \end{cases}$$

然后我们写作 $u_1 := \hat{R}^{\psi_1}(B_1)$，它是相对于 $B_1$ 中的 $\psi_1$ 的扫掠。由扫掠的定义立即可得

$$\frac{u_1 - m_0}{1 - m_0} = \hat{R}^1_{\overline{B_2}\cap\Omega^c}(B_1) = v_1.$$

再次，记 $m_1 := \inf_{B_2} u_1$，我们得到

$$1 - m_1 \le (1 - m_0)\exp(-ca_1) \le \exp(-c(a_1 + a_0)).$$

现在重复这一步：令 $D_i := B_i \setminus (\overline{B_{i+1}} \cap \Omega^c)$，并且

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{in } \overline{B_{i+1}} \cap \Omega^c, \\ m_{i-1} & \text{in } D_i. \end{cases}$$

记 $u_i := \hat{R}^{\psi_i}(B_i)$ 和 $m_i := \inf_{B_{i+1}} u_i$，则有

$$\frac{u_i - m_{i-1}}{1 - m_{i-1}} = v_i$$

因此

$$1 - m_i \le (1 - m_{i-1})\exp(-ca_i) \le \exp\Big(-c\sum_{j=0}^{i} a_j\Big).$$

此外，我们声称 $u_i \ge u_{i+1}$ in $B_{i+1}$。事实上，由定理 3.6，$u_i = \overline{H}_{f_i}(D_i)$ in $D_i$，其中$f_i \in C(\partial D_i)$由下式给出

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{in } \partial(\overline{B_{i+1}} \cap \Omega^c), \\ m_{i-1} & \text{in } \partial B_i. \end{cases}$$

因此，对于 $u \in \mathcal{U}_{f_i}(D_i)$，我们有

$$\liminf_{D_{i+1}\ni y\to x} u(y) \ge 1 \ge \limsup_{D_{i+1}\ni y\to x} u_{i+1}(y) \quad \text{for any } x \in \partial(\overline{B_{i+2}} \cap \Omega^c),$$
$$\liminf_{D_{i+1}\ni y\to x} u(y) \ge m_i = \limsup_{D_{i+1}\ni y\to x} u_{i+1}(y) \quad \text{for any } x \in \partial B_{i+1}.$$

因此，根据比较原理，$u \ge u_{i+1}$ 在 $D_{i+1}$ 中，从而 $u_i = \overline{H}_{f_i}(D_i) \ge u_{i+1}$ 在 $B_{i+1}$中。重复上述论证，我们得出 $v_0 \ge u_1 \ge \cdots \ge u_k$ 在 $B_k$中，这意味着

$$w = 1 - v_0 \le 1 - u_k \le 1 - m_k \le \exp\Big(-c\sum_{j=0}^{k} a_j\Big) \quad \text{in } B_{k+1}.$$

最后，结论由下式得到

$$\int_r^\rho \varphi_F(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \le c\sum_{i=1}^k a_i,$$

这可由二进分解轻易验证。事实上，由引理 3.11 和引理 3.14 可推出，若 $t \le s \le 2t$，则

$$\mathrm{cap}_F(\overline{B_t}\setminus K, B_{2t}) \sim \mathrm{cap}_F(\overline{B_t}\setminus K, B_{2s}),$$

其中，可比较的常数仅依赖于 $n$、$\lambda$、$\Lambda$，且这些结果对 $\mathrm{cap}_{\widetilde{F}}(\cdot)$ 也成立。 □

现在我们准备证明维纳判据的充分性，即定理 1.2。

定理 1.2 的证明。设 $x_0 \in \partial\Omega$、$\rho > 0$，并定义

$$w_{F,\rho} := 1 - \hat{R}^{1,F}_{\overline{B_\rho(x_0)}\setminus\Omega}(B_{2\rho}(x_0)) \quad \text{and} \quad w_{\widetilde{F},\rho} := 1 - \hat{R}^{1,\widetilde{F}}_{\overline{B_\rho(x_0)}\setminus\Omega}(B_{2\rho}(x_0)).$$

然后对两个函数应用引理 4.5，可知对所有 $0 < r \le \rho$，存在常数$c_1$、$c_2 > 0$，使得

$$w_{F,\rho}(x) \le \exp\Big(-c_1\int_r^\rho \varphi_F(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big),$$
$$w_{\widetilde{F},\rho}(x) \le \exp\Big(-c_2\int_r^\rho \varphi_{\widetilde{F}}(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big),$$

对任意 $x \in B_r(x_0)$。令 $r \to 0^+$，我们得出

$$\hat{R}^{1,F}_{\overline{B_\rho(x_0)}\setminus\Omega}(B_{2\rho}(x_0))(x_0) = 1 = \hat{R}^{1,\widetilde{F}}_{\overline{B_\rho(x_0)}\setminus\Omega}(B_{2\rho}(x_0))(x_0).$$

由于可以任意选取 $\rho > 0$，由引理 3.21 可得，$x_0 \in \partial\Omega$ 是一个正则边界点。（注意，边界点 $x_0$ 是 $F$-正则的，当且仅当它是 $F$-正则的；推论2.25。）□

另一方面，如果对边界数据 $f$施加额外的信息，即边界数据 $f$ 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处取得最大值（或最小值），那么在一个较弱的条件下，我们可以推出 Perron 解在 $x_0$ 处连续：

推论 4.6。设 $f \in C(\partial\Omega)$ 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处取得最大值 $/$（分别地，最小值$/$）。若 $\Omega^{c\sim}$在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处是 $F$-厚的 $/$（分别地，$F$-厚的$/$），则

$$\lim_{\Omega\ni y\to x_0} \overline{H}_f(y) = f(x_0) = \lim_{\Omega\ni y\to x_0} \underline{H}_f(y).$$

证明。与前一个定理的证明类似，这个推论是引理 3.21 和引理 4.5 的推论。□

此外，如果给定的边界数据 $f \in C(\partial\Omega)$ 可解，那么我们便能得到连续模的定量估计。

引理 4.7（连续模）。设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开有界子集。令 $f \in C(\partial\Omega)$。

如果 $x_0 \in \partial\Omega$ 满足 $f(x_0) = 0$，那么对于 $0 < r \le \rho$，有

$$\sup_{\Omega_r} \underline{H}^F_f \le \max_{\partial\Omega_{2\rho}} f + \max_{\partial\Omega} f \cdot \exp\Big(-c\int_r^\rho \varphi_{\widetilde{F}}(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)$$

*and*

$$\inf_{\Omega_r} \overline{H}^F_f \ge \min_{\partial\Omega_{2\rho}} f + \min_{\partial\Omega} f \cdot \exp\Big(-c\int_r^\rho \varphi_F(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)$$

其中 $\Omega_r := \Omega \cap B_r(x_0)$ 且 $\partial\Omega^{2\rho} := \partial\Omega \cap B_{2\rho}(x_0)$。

此外，若 $f$ 是可解的，则我们有如下定量估计：

$$\min_{\partial\Omega_{2\rho}} f + \min_{\partial\Omega} f \cdot \exp\Big(-c\int_r^\rho \varphi_F(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) \le \inf_{\Omega_r} H_f^F$$
$$\le \sup_{\Omega_r} H_f^F \le \max_{\partial\Omega_{2\rho}} f + \max_{\partial\Omega} f \cdot \exp\Big(-c\int_r^\rho \varphi_{\widetilde{F}}(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big),$$

其中 $H_f^F := \overline{H}_f^F = \underline{H}_f^F$。

证明。令 $v = \hat{R}^1_{B_\rho(x_0)\setminus\Omega}(B_{2\rho}(x_0))$ 为 $\overline{B_\rho}\setminus\Omega$ 关于 $B_{2\rho}$ 的容量势。接着令 $w := 1 - v$ 并写作

$$s := w \cdot \max_{\partial\Omega} f + \max_{\partial\Omega_{2\rho}} f.$$

注意，由于我们假设 $f(x_0) = 0$，因此有 $\max_{\partial\Omega} f \ge 0$ 和 $\max_{\partial\Omega_{2\rho}} f \ge 0$。对于 $u \in \mathcal{L}_f^F$，$u$ 在 $\Omega_{2\rho}$ 中是 $F$-次调和的，而 $s$ 是 $F$-调和的。此外，

$$\liminf_{y\to x} s(y) \ge \max_{\partial\Omega_{2\rho}} f \ge \limsup_{y\to x} u(y) \quad \text{for any } x \in \partial\Omega \cap B_{2\rho}$$

and

$$\liminf_{y\to x} s(y) \ge \max_{\partial\Omega} f \ge \limsup_{y\to x} u(y) \quad \text{for any } x \in \Omega \cap \partial B_{2\rho}.$$

因此，由比较原理可得 $s \ge u$ 在 $\Omega_{2\rho}$ 中成立，从而 $s \ge \underline{H}_f^F$ 在 $\Omega_{2\rho}$ 中成立。另一方面，令

$$\widetilde{s} := \Big(1 - \hat{R}^{1,F}_{\overline{B_\rho(x_0)}\setminus\Omega}(B_{2\rho}(x_0))\Big) \cdot \max_{\partial\Omega}(-f) + \max_{\partial\Omega_{2\rho}}(-f).$$

通过同样的论证，我们得到 $\widetilde{s} \ge \underline{H}^{\widetilde{F}}_{-f} = -\overline{H}_f^F$ 在 $\partial\Omega_{2\rho}$ 中成立。

应用引理 4.5（针对 $w$ 和 $\widetilde{w}$）即可完成证明。 □

现在我们为正则边界点提出一个新的几何条件，即外部开瓶器条件；另见 [16, 28]。

定义 4.8. 若存在 $0 < \delta < 1/4$ 和 $R > 0$，使得对任意 $0 < r < R$，都存在 $y \in B_r(x_0)$，满足 $B_{\delta r}(y) \subset \Omega^c \cap B_r(x_0)$，则称 $\Omega$ 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处满足外部开瓶器条件。

注意，若 $\Omega$ 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处满足外部锥条件，则 $\Omega$ 在 $x_0$ 处满足外部开瓶器条件。因此，下面这个由（势论的）维纳判据得到的推论，是定理 2.26 的推广。

推论 4.9（外部开瓶器条件）。假设 $\Omega$ 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处满足外部开瓶器条件，则 $x_0$ 是一个正则边界点。此外，若 $f$ 在 $x_0$ 处是 H¨older 连续的且可解，则 $H_f$ 在 $x_0$ 处是 H¨older 连续的。

证明。稍微修改引理 3.11 及其证明，可得

$$\mathrm{cap}(\overline{B_{\delta r}(y)}, B_{2r}(x_0)) \sim 1, \quad \text{for } \delta \in (0,1/4) \text{ and } \overline{B_{\delta r}(y)} \subset B_{2r}(x_0),$$

其中，可比常数仅依赖于 $n$、$\lambda$、$\Lambda$ 和 $\delta$。因此，若 $x_0$ 满足外部开瓶器条件，则有

$$\int_0^1 \mathrm{cap}_F(\overline{B_t(x_0)}\setminus\Omega, B_{2t}(x_0))\frac{\mathrm{d}t}{t} \ge \int_0^1 \mathrm{cap}_F(\overline{B_{\delta t}(y)}, B_{2t}(x_0))\frac{\mathrm{d}t}{t} \ge \frac{1}{c}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty,$$
$$\int_0^1 \mathrm{cap}_{\widetilde{F}}(\overline{B_t(x_0)}\setminus\Omega, B_{2t}(x_0))\frac{\mathrm{d}t}{t} \ge \int_0^1 \mathrm{cap}_{\widetilde{F}}(\overline{B_{\delta t}(y)}, B_{2t}(x_0))\frac{\mathrm{d}t}{t} \ge \frac{1}{c}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty,$$

因此，根据维纳判据，$x_0$ 是一个正则边界点。

接下来，对于第二个结论，如有必要，我们可以通过为 $f$ 添加一个常数，假设 $f(x_0) = 0$ 。由于 $f$ 是可解的，我们可以应用引理 4.7 中得到的定量估计：

$$\min_{\partial\Omega_{2\rho}} f + \min_{\partial\Omega} f \cdot \exp\Big(-c\int_r^\rho \varphi_F(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) \le \inf_{\Omega_r} H_f^F$$
$$\le \sup_{\Omega_r} H_f^F \le \max_{\partial\Omega_{2\rho}} f + \max_{\partial\Omega} f \cdot \exp\Big(-c\int_r^\rho \varphi_{\widetilde{F}}(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big),$$

Here

(i) $f$ 在 $x_0$ 处是 H¨ölder 连续的：存在一个常数 $C > 0$ ，使得 $|f(x)| = |f(x) - f(x_0)| \le C|x - x_0|^\gamma \le C\rho^\gamma$ 对于 $x \in \partial\Omega_{2\rho}$.

(ii) Ω 在 $x_0$ 处满足外部开瓶器条件：

$$\exp\Big(-c\int_r^\rho \varphi_{\widetilde{F}}(x_0,\Omega^c,t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) \le \exp\Big(-c_1\int_r^\rho \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) = \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^{c_1}.$$

因此，选择 $\rho = r^{1/2}$ 后，我们得出 Perron 解 $H_f$ 在 $x_0$ 处是 H¨ölder 连续的。 □

注 4.10（示例）。在本例中，我们假设 $n = 2$, $F = \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ ，其椭圆性常数为$0 < \lambda < \Lambda$。那么立即可得

$$\widetilde{F} = \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}, \quad \alpha^*(F) = (n-1)\frac{\lambda}{\Lambda} - 1 < 0, \quad \alpha^*(\widetilde{F}) = (n-1)\frac{\Lambda}{\lambda} - 1 > 0.$$

我们考虑一个区域 $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ 及其边界点 $0 \in \partial\Omega$。

(i) 由于 $\alpha^*(F) < 0$，我们知道单点具有非零容量。更准确地说，回忆一下， $F$ 的齐次解为

$$V(x) = -|x|^{1-\frac{\lambda}{\Lambda}},$$

存在一个常数 $c = c(\lambda,\Lambda) > 0$ ，使得

$$\mathrm{cap}_F(\{0\}, B_{2t}(0)) = c.$$

因此，我们有

$$\int_0^\rho \mathrm{cap}_F(\{0\}, B_{2t}(0))\frac{\mathrm{d}t}{t} = c\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty.$$

换言之，$\Omega^c$ 在 0 处是 $F$-厚的。

(ii) 另一方面，由于 $\widetilde{F} > 0$，我们知道单点的容量为零。因此，我们有

$$\int_0^\rho \frac{\mathrm{cap}_{\widetilde{F}}(\{0\}, B_{2t}(0))}{\mathrm{cap}_{\widetilde{F}}(\overline{B_t(0)}, B_{2t}(0))}\frac{\mathrm{d}t}{t} = 0.$$

换句话说，$\Omega^c$ 在 0 处不是 $F$-厚的，因此我们无法应用 Wiener判据。(iii) 设 $f_1 \in C(\partial\Omega)$ 是由下式给出的边界数据：

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{if } |x| = 1. \end{cases}$$

显然，函数 $u(x) = 1 - |x|^{1-\frac{\lambda}{\Lambda}} = 1 - V(x)$ 是这个狄利克雷问题的解。特别地，在这种情况下，我们有 $\overline{H}_{f_1} = \underline{H}_{f_1}$ （即 $f_1$ 是可解的），并且

$$\lim_{\Omega \ni x \to 0} H_{f_1}(x) = 1 = f_1(0).$$

或者，也可以应用推论 4.6 得到相同的结论，因为 $f_1$ 在 0 处取得最大值，且 $\Omega^c$ 在 0 处是 $F$-厚的。

(iv) 令 $f_2 \in C(\partial\Omega)$ 为给定的边界数据

$$f_2(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{if } |x| = 1. \end{cases}$$

因此，由于零函数属于 $\mathcal{U}_{f_2}$，我们有 $\overline{H}_{f_2} \le 0$。此外，由于 $\varepsilon(1 - |x|^{-(\frac{\Lambda}{\lambda}-1)}) \in \mathcal{L}_{f_2}$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们有 $\underline{H}_{f_2} \ge \varepsilon(1 - |x|^{-(\frac{\Lambda}{\lambda}-1)})$。令 $\varepsilon \to 0$，可得 $\underline{H}_{f_2} \ge 0$。

因此，我们推得 $\overline{H}_{f_2} = \underline{H}_{f_2} = 0$。此外，还可得

$$\lim_{\Omega \ni x \to 0} H_{f_2}(x) = 0 \neq -1 = f_2(0),$$

这意味着 0 是 Ω 的一个非正则边界点。

## 5. A necessary condition for the regularity of a boundary point

本节在对算子 $F$施加额外结构条件的前提下，证明维纳判据的必要性。具体而言，我们的策略是采用 [29] 中的论证；该论证证明了具有 $p > n-1$的 $p$-拉普拉斯算子的 $p$-维纳判据的必要性。由于施加假设$p > n-1$ 本质上是为了确保线段在 [29], 中的容量非零，我们首先寻找全非线性情形下相应的假设。

引理 5.1. 假设 $F$ 是凸的，且 $\alpha^*(F) > s$，其中某个 $s > 0$成立。设 $K$ 是 $B_r(\subset \mathbb{R}^n)$中的一个紧子集，并且 $\mathcal{H}^s(K) < \infty$，其中 $\mathcal{H}^s$ 是 $s$维豪斯多夫测度。那么

$$\mathrm{cap}_F(K) = 0.$$

证明。对于任意 $\delta > 0$，定义

$$\mathcal{H}^s_\delta(K) := \inf \sum_i r_i^s,$$

其中，下确界取遍 $K$ 的所有可数覆盖，这些覆盖由直径 $r_i$ 不超过 $\delta$. 的球 $B_i$ 组成。于是，由于 $\sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(K) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(K) = \mathcal{H}^s(K) < \infty$ 且 $K$ 是紧集，对于每个 $\delta \in (0, r)$，存在有限个开球 $\{B_i = B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^N$，使得 $r_i < \delta, \bigcup_{i=1}^N B_i \supset K$，并且

$$\sum_{i=1}^N r_i^s \le \mathcal{H}^s(K) + 1 < \infty. \tag{5.1}$$

现在考虑 $F$ 的齐次解 $V(x) = |x|^{-\alpha^*} V\left(\frac{x}{|x|}\right)$。这里，通过归一化 $V$，不妨设 $\min_{|x|=1} V(x) = 1$。若令 $W_i(x) := r_i^{\alpha^*} V(x - x_i)$，则立即可知 $W_i$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中非负且为 $F$-超调和函数，并且 $W_i(x) \ge 1$ 在 $B_i$ 上。

最后，令 $W := \sum_{i=1}^N W_i (\ge 0)$。由于 $F$是凸的， $W$在 $\mathbb{R}^n$中是 $F$-次调和的。此外，$W \ge 1$ 在 $\bigcup_{i=1}^N B_i$ 上成立，特别地， $W \ge 1$ 在 $K$上成立。因此， $W \in \Phi^1_K(B_{4r})$，于是

$$\mathrm{cap}_F(K, B_{4r}) \le W(y_0) \le r^{-\alpha^*} \max_{|x|=1} V(x) \cdot \sum_{i=1}^N r_i^{\alpha^*} \le r^{-\alpha^*} \max_{|x|=1} V(x) \cdot (\mathcal{H}^s(K) + 1)\, \delta^{\alpha^* - s},$$

这里我们用到了 (5.1) 和 $\alpha^* > s$。令 $\delta \to 0$，证明即告完成。 □

现在我们证明引理 5.1 的部分逆命题。事实上，这里我们只考虑紧集 $K$，它由线段 $L$ 给出，其豪斯多夫维数恰为 1。

引理 5.2. 假设 $F$是凹的，且 $\alpha^*(F) < 1$。令 $L = \{x_0 + se : ar \le s \le br\}$ 为 $B_r(x_0)$ 中的一条线段，其中 $e$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单位向量，且 $0 < a < b < 1$ 是满足$b - a < \frac{1}{2}$的常数。那么

$$\mathrm{cap}_F(L, B_{2r}) > 0.$$

证明。注意到，由于 $L$ 是一条线段，对于任意 $\delta > 0$，都可以用开球 $B_i = B_{3\delta}(x_i)$、 $1 \le i \le N(\delta)$ 覆盖 $L$，其中当 $i \neq j$ 时， $x_i \in L$、 $|x_i - x_j| \ge 2\delta$，且 $N(\delta) \sim_{(b-a)_\delta} {}^{r}$。我们将这样的覆盖~~记为~~ $K_\delta := \bigcup_{i=1}^{N(\delta)} \overline{B_i}$。回顾引理 3.9 及其证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在充分小的 $\delta > 0$ 及相应的覆盖 $K_\delta$，使得

$$\mathrm{cap}_F(K_\delta, B_{2r}) \le \mathrm{cap}_F(L, B_{2r}) + \varepsilon.$$

If 我们记 $\widetilde{B}_i := B_\delta(x_i)$ 和 $\widetilde{K}_\delta = \bigcup_{i=1}^{N(\delta)} \overline{\widetilde{B}}_i$，则有 $\widetilde{B}_i$ 两两不相交，且

$$\operatorname{cap}_F(\widetilde{K}_\delta, B_{2r}) \le \operatorname{cap}_F(L, B_{2r}) + \varepsilon.$$

另一方面，为简便起见，我们假设齐次解 $V$ 由下式给出

$$V(x) = |x|^{-\alpha^*}$$

且 $\alpha^*(F) \in (0, 1)$。注意，若 $\alpha^* < 0$，则单点具有正容量（引理 3.12），结论立即成立。其他情况可用与引理 5.1 类似的论证证明。对于每个 $i = 1, 2, \cdots, N(\delta)$，记

$$W_i(x) := \Big(\frac{|x - x_i|}{\delta}\Big)^{-\alpha^*} \quad \text{and} \quad W(x) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} W_i(x).$$

由于 $F$ 是凹的，$W$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{N(\delta)} \{x_i\}$ 中是 $F$-次调和的。

~ ~(i)（关于 $\partial K_\delta$）对于 $y \in \partial K_\delta$，令 $y \in \partial B_i$，其中某个 $i_\circ$ 那么对于 $j \ne i$，我们有

$$|y - x_j| \ge |x_i - x_j| - |y - x_i| = |x_i - x_j| - \delta,$$

因此

$$W(y) \le 2(1 + 2^{-\alpha^*} + \cdots + N(\delta)^{-\alpha^*}) \le 2\Big(1 + \int_2^{N(\delta)} \frac{1}{s^{\alpha^*}}\,\mathrm{d}s\Big) \le c\,N(\delta)^{1-\alpha^*}.$$

这里我们用到了条件 $\alpha^* < 1$。

(ii)（在 $\partial B_{2r}$ 上）对于 $z \in \partial B_{2r}$,

$$|z - x_i| \ge 2r - br = (2 - b)r,$$

因此

$$W(z) \le \Big(\frac{(2-b)r}{\delta}\Big)^{-\alpha^*} \cdot N(\delta).$$

因此，对于

$$\widetilde{W}(x) := \frac{W(x) - \Big(\frac{(2-b)r}{\delta}\Big)^{-\alpha^*} \cdot N(\delta)}{c\,N(\delta)^{1-\alpha^*}},$$

我们有

$$\widetilde{W} \text{ is } F\text{-subharmonic in } B \setminus \widetilde{K}_\delta, \quad \widetilde{W} \le 0 \text{ on } \partial B_{2r}, \quad \text{and} \quad \widetilde{W} \le 1 \text{ on } \partial\widetilde{K}_\delta.$$

Note 由于 $\widetilde{K}_\delta$ 和 $B_{2r}$ 是正则区域，容量势 $\hat{R}^1_{\widetilde{K}_\delta}(B_{2r})$ 满足 :

$$\hat{R}^1_{\widetilde{K}_\delta}(B_{2r}) = 0 \text{ on } \partial B_{2r}, \quad \text{and} \quad \hat{R}^1_{\widetilde{K}_\delta}(B_{2r}) = 1 \text{ on } \partial\widetilde{K}_\delta.$$

因此，由比较原理可得

$$\hat{R}^1_{\widetilde{K}_\delta}(B_{2r}) \ge \widetilde{W} \quad \text{in } B_{2r} \setminus \widetilde{K}_\delta.$$

特别地，令 $x = x_0 + \frac{3}{2}re$，我们得到

$$|x - x_i| \le 3r/2 - ar = \Big(\frac{3}{2} - a\Big)r,$$

因此

$$\begin{aligned}\hat{R}^1_{\widetilde{K}_\delta}(B_{2r})\Big(x_0 + \frac{3}{2}re\Big) \ge \widetilde{W}\Big(x_0 + \frac{3}{2}re\Big) &\ge \frac{\Big[\Big(\frac{(3/2-a)r}{\delta}\Big)^{-\alpha^*} - \Big(\frac{(2-b)r}{\delta}\Big)^{-\alpha^*}\Big] \cdot N(\delta)}{c\,N(\delta)^{1-\alpha^*}} \\ &\ge c_1(b-a)^{\alpha^*}\Big[\Big(\frac{3}{2} - a\Big)^{-\alpha^*} - \Big(2 - b\Big)^{-\alpha^{-*}}\Big].\end{aligned}$$

最后，通过对 $\partial B_{3r/2}$ 上的 $\hat{} R^1_{\widetilde{K}_\delta}(B_{2r})$ 应用哈纳克不等式，我们得到

$$\varepsilon + \mathrm{cap}_F(L, B_{2r}) \geq \mathrm{cap}_F(\widetilde{K}_\delta, B_{2r}) \geq c_2\,(b-a)^{\alpha^*}\left[\Big(\frac{3}{2}-a\Big)^{-\alpha^*} - \Big(2-b\Big)^{-\alpha^{-*}}\right] > 0.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，证明得证。 □

可以修改前一个引理的思路，推导出“球面对称化”结果：

引理 5.3（球面对称化）。设 $F$ 是凹的，且 $\alpha^*(F) < 1$。令 $K$ 是 $B_r(x_0)$ 中的一个紧子集，使得对于所有 $t \in (ar, br)$， $K$ 与 $S(t)$ 相交：$= \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - x_0| = t\}$，其中 $0 < a < b < 1$ 是满足 $b < \frac{1}{4}$ 的常数。则存在常数 $c = c(n, F, a, b)$，使得

$$\mathrm{cap}_F(K, B_{2r}) \geq c(n, F, a, b) > 0.$$

证明。证明与引理 5.2 的证明类似。根据假设，对于所有 $t \in (ar, br)$，我们可以选取 $x_{(t)} \in K \cap S(t)$。特别地，当 $\delta > 0$ 足够小时，我们定义 $x_i : = x_{(ar+2\delta i)}$，其中 $i = 1$、2、 $\cdots$、 $N(\delta)$，使得

$$ar + 2\delta \cdot N(\delta) < br \leq ar + 2\delta \cdot (N(\delta) + 1).$$

注意， $N(\delta) \sim {}_{(b-a)\frac{r}{\delta}}$。此外，对于 $\delta > 0$，我们定义集合 $K_\delta$ 如下：

$$K_\delta = \bigcup_{i=1}^{N(\delta)} \overline{B_i},$$

其中 $B_i = B_{x_i}(\delta)$。再次回顾引理 3.9 及其证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个充分小的 $\delta > 0$，使得

$$\mathrm{cap}_F(K_\delta, B_{2r}) \leq \mathrm{cap}_F(K, B_{2r}) + \varepsilon.$$

On t另一方面，为简单起见，我们假设齐次解 $V$ 由下式给出

$$V(x) = |x|^{-\alpha^*}$$

且 $\alpha^*(F) \in (0, 1)$。对于每个 $i = 1$， 2， $\cdots$， $N(\delta)$，记作

$$W_i(x) := \Big(\frac{|x - x_i|}{\delta}\Big)^{-\alpha^*} \quad \text{and} \quad W(x) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} W_i(x).$$

由于 $F$ 是凹函数， $W$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{N(\delta)}\{x_i\}$ 中是 $F$-次调和的。

(i) （关于 $\partial K_\delta$）对于 $y \in \partial K_\delta$，令 $y \in \partial B_i$，其中某个 $i$。那么对于 $j \neq i$，我们有

$$|y - x_j| \geq |x_i - x_j| - |y - x_i| = |x_i - x_j| - \delta \geq 2|i - j|\delta - \delta,$$

因此

$$W(y) \leq 2(1 + 2^{-\alpha^*} + \cdots + N(\delta)^{-\alpha^*}) \leq 2\Big(1 + \int_2^{N(\delta)} \frac{1}{s^{\alpha^*}}\,\mathrm{d}s\Big) \leq c\,N(\delta)^{1-\alpha^*}.$$

这里我们使用了条件 $\alpha^* < 1$。

(ii) （在 $\partial B_{2r}$ 上）对于 $z \in \partial B_{2r}$，

$$|z - x_i| \geq 2r - br = (2 - b)r,$$

因此

$$W(z) \leq \Big(\frac{(2-b)r}{\delta}\Big)^{-\alpha^*} \cdot N(\delta).$$

因此，对于

$$\widetilde{W}(x) := \frac{W(x) - \Big(\frac{(2-b)r}{\delta}\Big)^{-\alpha^*} \cdot N(\delta)}{c\,N(\delta)^{1-\alpha^*}},$$

我们有

$$\widetilde{W} \text{ is } F\text{-subharmonic in } B \setminus K_\delta, \quad \widetilde{W} \le 0 \text{ on } \partial B_{2r}, \quad \text{and} \quad \widetilde{W} \le 1 \text{ on } \partial K_\delta.$$

注意，由于 $K_\delta$ 和 $B_{2r}$ 是正则区域，容量势 $\hat{R}^1_{K_\delta}(B_{2r})$ 满足：

$$\hat{R}^1_{K_\delta}(B_{2r}) = 0 \text{ on } \partial B_{2r}, \quad \text{and} \quad \hat{R}^1_{K_\delta}(B_{2r}) = 1 \text{ on } \partial K_\delta.$$

因此，由比较原理可得

$$\hat{R}^1_{K_\delta}(B_{2r}) \ge \widetilde{W} \quad \text{in } B_{2r} \setminus K_\delta.$$

特别地，代入 $x = x_0 + \frac{3}{2} r e_1$，我们得出

$$|x - x_i| \le 3r/2 + br = \Big(\frac{3}{2} + b\Big) r,$$

因此

$$\begin{aligned}\hat{R}^1_{K_\delta}(B_{2r})\Big(x_0 + \frac{3}{2} r e_1\Big) \ge \widetilde{W}\Big(x_0 + \frac{3}{2} r e_1\Big) &\ge \frac{\Big[\Big(\frac{(3/2+b)r}{\delta}\Big)^{-\alpha^*} - \Big(\frac{(2-b)r}{\delta}\Big)^{-\alpha^*}\Big] \cdot N(\delta)}{c\, N(\delta)^{1-\alpha^*}} \\ &\ge c_1 (b-a)^{\alpha^*} \Big[\Big(\frac{3}{2} + b\Big)^{-\alpha^*} - \Big(2 - b\Big)^{-\alpha^{-*}}\Big].\end{aligned}$$

因此，

$$\varepsilon + \operatorname{cap}_F(K, B_{2r}) \ge \operatorname{cap}_F(K_\delta, B_{2r}) \ge c_2\, (b-a)^{\alpha^*} \Big[\Big(\frac{3}{2} + b\Big)^{-\alpha^*} - \Big(2 - b\Big)^{-\alpha^*}\Big] > 0.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，证明完毕。 □

设 $E$ 是球 $B_{2r}$ 中的一个正则集。设 $u = \hat{R}^1_E(B_{2r})$ 为容量势。对于 $\gamma \in (0, 1)$，令

$$A_\gamma = \{x \in B_{2r} : u(x) < \gamma\}.$$

引理 5.4. 假设 $F$ 是凹的，且 $\alpha^*(F) < 1$。那么，存在一个仅依赖于 $n$、$\lambda$、$\Lambda$ 的常数 $c_1 > 0$，使得：若

$$\gamma \ge c_1 \operatorname{cap}_F(E, B_{2r}),$$

$th$则集合 $A_\gamma$ 对某个 $t \in (r/10, r/5$ 包含一个球面 $S(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = t\}$ ).

证明. 对于 $0 < \gamma < 1$，令 $E_\gamma := \{x \in B_{2r} : u(x) \ge \gamma\}$. 。我们用反证法：假设$A_\gamma$ 不包含任何 $S(t)$，其中 $t \in (r/10, r/5)$。那么，对于所有 $t \in (r/10, r/5)$，集合 $E_\gamma$ 都与 $S(t)$ 相交，并且我们有

$$\operatorname{cap}_F(E_\gamma, B_{2r}) \ge c(n, F) > 0,$$

对 $a = 1/10$ 和 $b = 1/5$ 使用引理 5.3。

另一方面，由引理 4.3 可得

$$\operatorname{cap}_F(E_\gamma, B_{2r}) = \frac{1}{\gamma} \operatorname{cap}_F(E, B_{2r}).$$

结合上述两个估计，我们得到

$$\gamma \le \frac{1}{c(n, F)} \operatorname{cap}_F(E, B_{2r}).$$

因此，通过选择 $c_1 = {}_c\, n^{1}$ (, ~~$F) + 1$~~，我们得出矛盾。 □

现在我们准备好证明维纳判据（定理 1.3）的必要性。

定理 1.3 的证明。为简便起见，我们记作 $B_r = B_r(x_0)$。假设 $\Omega^c$ 在$x_0 \in \partial\Omega$ 处不是 $F$-厚的，即

$$\int_0^1 \operatorname{cap}_F(\overline{B_t} \setminus \Omega, B_{2t})\frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty.$$

对于待确定的 $\varepsilon > 0$，取 $r_1 > 0$ 足够小，使得

$$\int_0^{r_1} \operatorname{cap}_F(\overline{B_t} \setminus \Omega, B_{2t})\frac{\mathrm{d}t}{t} < \varepsilon.$$

令 $r_{i+1} = r_i/2$，并且

$$a_i = \operatorname{cap}_F(\overline{B_{r_i}} \setminus \Omega, B_{2r_i}).$$

应用引理 3.14,

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i \le c_0(n, \lambda, \Lambda)\,\varepsilon.$$

接下来，由引理 2.27 和引理 3.9，对于每个 $i$，选取一个正则域 $E_i$，使得 $\overline{B_{r_i}}\setminus\Omega \subset E_i$，并且

$$b_i := \operatorname{cap}_F(E_i, B_{2r_i}) < a_i + \varepsilon \cdot 2^{-i}.$$

于是我们有

$$\sum_{i=2}^{\infty} b_i \le (c_0 + 1)\,\varepsilon$$

因此，对于 $i = 2,\ b_i \le (c_0+1)\,\varepsilon$，3，$\cdots$.此外，令 $u_i := \hat{R}^1_{E_i}(B_{2r_i})$ 为容量势。由引理 5.4，对于 $\gamma_i = c_1 \cdot b_i$，集合

$$A_i = \{x \in B_{2r_i} : u_i(x) < \gamma_i\}$$

包含某个 $t_i \in (r_i/10, r_i/5)$ 对应的 $S(t_i)$。现在选取 $\varepsilon = 2^{-\frac{1}{(c_0+1)c_1}} > 0$，便有 $\gamma_i < 1$。特别地，由于 $u_2 = 1$ 在 $E_2$ 上且 $S(t_2) \subset A_2$，我们得出 $S(t_2) \subset\Omega$。

接下来，令 $f \in C(\partial\Omega)$ 为如下定义的边界函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B_{t_2} \cap \partial\Omega, \\ 0 & \text{if } x \in \partial\Omega \setminus B_{t_2}. \end{cases}$$

那么，下 Perron 解 $\underline{H}_f = \underline{H}_f(\Omega)$ 有以下结果:

(i) $\underline{H}_f \not\equiv 1$: 选取足够大的 $r > 0$，使得 $\Omega \subset B_r$。此外，设区域 $\Omega_0 := B_r \setminus (B_{t_2} \cap\Omega)$，并令边界函数 $f_0 \in C(\partial\Omega_0)$ 定义如下

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B_{t_2} \cap \partial\Omega, \\ 0 & \text{if } x \in \partial B_r. \end{cases}$$

那么，由于 $B_r$ 是正则的，我们有 $\overline{H}_{f_0}(\Omega_0) < 1$ 于 $B_r \setminus B_{t_2}$中。另一方面，对于任意$v \in \mathcal{L}_f(\Omega)$和 $w \in \mathcal{U}_{f_0}(\Omega_0)$，利用比较原理可验证 $v \le w$ 在 $\Omega$ 中成立。因此，我们得出 $\underline{H}_f(\Omega) \le \overline{H}_{f_0}(\Omega_0)$，从而 $\underline{H}_f(\Omega) \not\equiv 1$。

(ii) 最大值$_{S(t_2)}\underline{H}_f =: M < 1$: 这是强最大值原理的直接推论对于 $\underline{H}_f$ 以及 (i) 部分。

对于 $u := \frac{\underline{H}_f - M}{1-M}$，它在 $\Omega$ 中是 $F$-调和的，并且在 $S(t_2)$ 中 $u \le 0$，我们断言

$$\liminf_{\Omega \ni x \to x_0} u(x) < \frac{1}{2}. \tag{5.2}$$

事实上，由于 $S(t_2) \subset B_{r_3}$ 且 $E_3$ 是正则域，我们有

$$u(x) \le 0 \le \liminf_{y \to x} u_3(y) \quad \text{for any } x \in \partial B_{t_2} = S(t_2),$$

$$\limsup_{y \to x} u(y) \le 1 = \liminf_{y \to x} u_3(y) \quad \text{for any } x \in \partial E_3.$$

因此，由比较原理可得， $u \le u_3$ 在 $B_{t_2} \setminus E_3$中。特别地，由于 $S(t_3) \subset A_3$，我们观察到

$$u \le u_3 < \gamma_3 \quad \text{on } S(t_3).$$

重复这一论证（例如，考虑 $u - \gamma_3$ 而不是 $u$），我们得出

$$u \le \sum_{k=3}^{i} \gamma_k \le \sum_{k=3}^{\infty} \gamma_k = c_1 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} b_i \le c_1 \left(c_0 + 1\right) \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{on each } S(t_i),$$

由此得到 (5.2)。

最后，回顾 $u$ 的定义，估计式 (5.2) 等价于

$$\liminf_{\Omega \ni x \to x_0} \underline{H}_f(x) < 1 = f(x_0),$$

这意味着 $x_0 \in \partial\Omega$ 是一个非正则边界点。 □

致谢：Ki-Ahm Lee 获得了韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目资助，项目编号为 NRF-2021R1A4A1027378。Se-Chan Lee 获得了韩国国家研究基金会（NRF）通过教育部资助的基础科学研究计划支持（2022R1A6A3A01086546）。

## References

[1] *Y. A. Alkhutov* 和 *O. V. Krasheninnikova*，具有非标准增长条件的拟线性椭圆方程解在边界点处的连续性，《列宁格勒大学学报》68（2004），第6期，3–60。[2] *M. E. Amendola*、 *G. Galise*和 *A. Vitolo*，全非线性二阶椭圆算子的黎斯容量、最大值原理及可去集，Differential Integral Equations 26（2013），第7–8期，845–866。[3] *S. N. Armstrong*、 *B. Sirakov*和 *C. K. Smart*，齐次全非线性椭圆方程的基本解，Comm. Pure Appl. Math. 64（2011），第6期，737–777。[4] *P. Bauman*，非散度型结构二阶椭圆方程的维纳判别法，Indiana Univ. Math. J. 34（1985），第4期，825–844。[5] *M. Brelot*，位势理论讲义。K. N. Gowrisankaran 和 M. K. Venkatesha Murthy 笔记。Lectures on Mathematics，第19卷，塔塔基础研究所，孟买，1960年。[6] *L. A. Caffarelli* 和 *X. Cabré*，全非线性椭圆方程，美国数学会《Colloquium Publications》第43卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1995年。[7] *L. A. Caffarelli* 和 *K.-A. Lee*，高度振荡障碍问题均匀化的粘性方法，Indiana Univ. Math. J. 57（2008），第4期，1715–1741。[8] *M. G. Crandall*、 *H. Ishii*和 *P.-L. Lions*，二阶偏微分方程粘性解指南，Bull. Amer. Math. Soc.（新辑）27（1992），第1期，1–67。[9] *M. G. Crandall*、 *M. Kocan*、 *P.-L. Lions*和 *A. Swiech*，一致椭圆抛物型全非线性方程边值问题的存在性结果，Electron. J. Differential Equations（1999），第24号，22页。[10] *F. R. Harvey* 和 *H. B. Lawson*、 *Jr.*，几何中非线性偏微分方程解的存在性、唯一性与可去奇点，《微分几何综述：几何与拓扑》，103–156，Surv. Differ. Geom.，第18卷，Int. Press，萨默维尔，马萨诸塞州，2013年。[11] *F. R. Harvey* 和 *H. B. Lawson*、 *Jr.*，非线性次方程的可去奇点，Indiana Univ. Math. J. 63（2014），第5期，1525–1552。[12] *J. Heinonen*、 *T. Kilpeläinen*和 *O. Martio*，退化椭圆方程的非线性位势理论，Oxford Mathematical Monographs。Oxford Science Publications。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1993年。[13] *L. L. Helms*，位势理论，Universitext。施普林格出版社伦敦有限公司，伦敦，2009年。[14] *L. Hörmander*，凸性概念，Progress in Mathematics，第127卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1994年。[15] *H. Ishii* 和 *P.-L. Lions*，全非线性二阶椭圆偏微分方程的粘性解，J. Differential Equations 83（1990），第1期，26–78。[16] *D. S. Jerison* 和 *C. E. Kenig*，非切向可达域中调和函数的边界行为，Adv. in Math. 46（1982），第1期，80–147。[17] *B. Kawohl* 和 *N. Kutev*，若干类非线性偏微分方程粘性解的比较原理与 Lipschitz 正则性，Funkcial. Ekvac. 43（2000），第2期，241–253。[18] *B. Kawohl* 和 *N. Kutev*，全非线性退化椭圆方程粘性解的比较原理，Comm. Partial Differential Equations 32（2007），第7–9期，1209–1224。[19] *T. Kilpeläinen* 和 *P. Lindqvist*，退化抛物方程的狄利克雷边值问题，SIAM J. Math. Anal. 27（1996），第3期，661–683。[20] *T. Kilpeläinen* 和 *J. Malý*，拟线性椭圆方程的维纳判别法与势估计，Acta Math. 172（1994），第1期，137–161。

[21] *J. Korvenpää*、 *T. Kuusi*和 *E. Lindgren*，分数阶 $p$-拉普拉斯型方程解的等价性，《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）132（2019），1–26。[22] *N. V. Krylov* 和 *T. Yastrzhembskiy*，二阶椭圆算子正则边界点的不等价性，Comm. Partial Differential Equations 42（2017），第3期，366–387。[23] *D. A. Labutin*，一类全非线性椭圆方程的势估计，《杜克数学杂志》111（2002），第1期，1–49。[24] *D. A. Labutin*，全非线性椭圆方程粘性解的奇点，《微分方程及相关主题的粘性解》（日文）（京都，2001）。数理解析研究所讲究录第1287号（2002），45–57。[25] *N. S. Landkof*，现代势论基础。A. P. Doohovskoy 从俄文译出。数学科学基础丛书，第180卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，1972年。[26] *H. Lebesgue*，关于普通狄利克雷问题不可能求解的若干情形，法国数学会会议记录17（1913），第2期。[27] *K.-A. Lee* 和 *S.-C. Lee*，具有奥利奇增长的椭圆方程维纳判据，J. Differential Equations 292（2021），132–175。[28] *Y. Lian*、 *K. Zhang*、 *D. Li*和 *G. Hong*，椭圆方程边界 Hölder 正则性，《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）143（2020），311–333。[29] *P. Lindqvist* 和 *O. Martio*，拟线性椭圆方程解的维纳定理，Acta Math. 155（1985），第3–4期，153–171。[30] *W. Littman*、 *G. Stampacchia*和 *H. F. Weinberger*，不连续系数椭圆方程的正则点，《比萨高等师范学校年刊》数学与自然科学辑（第3辑）17（1963），43–77。[31] *J. Malý* 和 *W. P. Ziemer*，椭圆偏微分方程解的精细正则性，数学调查与专著第51卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。[32] *V. G. Maz'ya*，拟线性椭圆方程解在边界点处的连续性，《列宁格勒大学学报》数学、力学与天文学辑25（1970），42–55。[33] *J. H. Michael*，一致椭圆方程的屏障与外部锥条件，J. Math. Anal. Appl. 79（1981），第1期，203–217。[34] *K. Miller*，一致椭圆算子在锥上的屏障，《纯粹与应用数学年刊》（第4辑）76（1967），93–105。[35] *K. Miller*，非散度型方程的例外边界点：对拉普拉斯方程是正则点，反之亦然，《比萨高等师范学校年刊》数学与自然科学辑（第3辑）22（1968），315–330。[36] *K. Miller*，即使系数连续，拉普拉斯方程与非散度型方程的正则边界点也不等价，《比萨高等师范学校年刊》数学与自然科学辑（第3辑）24（1970），159–163。[37] *K. Miller*，具有 Phragm´en-Lindel¨of 定理及其他应用的锥上极值屏障，《纯粹与应用数学年刊》（第4辑）90（1971），297–329。[38] *M. Ramaswamy* 和 *S. Ramaswamy*，佩龙方法与屏障函数：若干非线性偏微分方程狄利克雷问题的粘性解，Z. Anal. Anwendungen 13 2, 199 1994 207 ( ), no. – .[39] *N. S. Trudinger* 和 *X.-J. Wang*，椭圆算子的弱连续性及其在位势理论中的应用，《美国数学杂志》124（2002），第2期，369–410。[40] *N. Wiener*，位势理论中的若干概念，《数学与物理学杂志》3（1924），第1期，24–51。

Department of Mathematical Sciences and Research Institute of Mathematics、 Seoul National University、 Seoul 08826、 Korea.*Email address*: kiahm@snu.ac.kr

Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul 08826, Korea.
*Email address*: dltpcks1@snu.ac.kr